欧几里得距离矩阵补全算法：利用其与平凡情形的接近性

Fedor V. Fomin
挪威卑尔根大学
Petr A. Golovach
挪威卑尔根大学
M. S. Ramanujan
英国华威大学
Saket Saurabh
数学研究所　　数学科学，印度金奈，以及　　挪威卑尔根

arXiv:2603.19447v1 [cs.DS] 19 Mar 2026

摘要

在 d 维欧几里得距离矩阵补全（d-EDMC）问题中，目标是确定给定的两两距离部分矩阵能否扩展为 d 维的完整欧几里得距离矩阵。该问题是计算几何的基石，具有众多应用。尽管关于该问题的经典研究通常侧重于利用其与半定规划的联系，并由此得到近似算法，但我们专注于精确算法，并提出一种新颖的距平凡性距离参数化框架，以获得 d-EDMC 的可处理性结果。

我们找出了输入中的关键结构模式，以刻画条目密度，包括弦子结构，以及已指定条目能否由完全指定的主子矩阵覆盖。我们取得了以下成果：

1. 首个针对 d-EDMC 的固定参数可解算法（FPT 算法），其参数为 d 以及每行/列的未指定项最大数量。我们通过一种新颖的压缩算法实现这一点，该算法将给定实例缩减为一个仅含$\mathcal{O}(1)$行的子矩阵（参数取固定值时）。**2.** 首个针对 d-EDMC 的固定参数可解算法，其参数为 d 以及这样一组完全指定主子矩阵的最小数量：其条目覆盖给定矩阵的所有已指定条目。该结果同样通过压缩算法实现。**3.** 当 d-EDMC 中 d 和表示已指定条目的自然图的最小填充数均为固定常数时，存在多项式时间算法。该结果结合了距离几何工具与实代数几何算法。

我们的工作揭示了欧几里得距离矩阵补全与图问题之间有趣的相似之处，我们的算法利用了这两个领域的技术。

2012年 ACM 学科分类 计算数学 → 组合算法；计算理论 → 固定参数可处理性

关键词和短语 参数化复杂性、欧几里得嵌入、多项式压缩

资助 *Fedor V. Fomin*：获挪威研究理事会 BWCA 项目（拨款编号 314528）和欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划资助的 NewPC 项目（资助协议编号 101199930）支持

Petr A. Golovach：获挪威研究理事会 BWCA 项目（拨款编号 314528）和 Extreme-Algorithms 项目（拨款编号 355137）支持。
M. S. Ramanujan：获工程与物理科学研究理事会（EPSRC）拨款 EP/V044621/1 支持。

Saket Saurabh：由欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划（拨款协议编号 819416）资助；并获 Swarnajayanti 奖学金，资助编号 DST/SJF/MSA-01/2017-18。

Funded by the European Union

1 引言

考虑以下问题：给定一个 $n \times n$ 对称空心矩阵 M和整数 d，判断 M 是否为可等距嵌入 $\mathbb{R}^d$ 的欧氏距离矩阵（EDM），亦称为可在 $\mathbb{R}^d$中实现。换言之，判断是否存在一个集合 $P = \{p_1, \ldots\ldots, p_n\}$，其中包含 n 个 $\mathbb{R}^d$ 中的点，使得 $M_{ij} = \|p_i - p_j\|_2^2$，其中 M_{ij} 表示 M的第（i，j）个元素，而 $\|p_i - p_j\|_2$ 是 p_i 与 p_j之间的欧几里得距离。判定是否存在这样的点配置 P（在全等意义下）是距离几何中的一个核心问题，其解法已广为人知，最早可追溯至 Cayley [14] 和 Menger [44]的研究。

本文关注这一问题的一种形式，其中矩阵 M 是部分的，即某些条目可能“未指定”。在这种形式中，称为 d-欧几里得距离矩阵补全（d-EDMC），目标是判断矩阵中缺失的条目能否补全，使结果成为一个可在 $\mathbb{R}^d$ 中实现的欧氏距离矩阵。一般而言，从部分的 距离测量重建点配置的问题，自然出现在众多学科中。尤其是 d-EDMC的研究，可追溯至十九世纪的数学家和机械工程师——例如 Cauchy 于 1813 [13] 的研究——并且是刚性理论的核心。这个问题在许多领域都有应用，例如生物信息学中的分子构象 [38, 17, 16], 、机器学习和统计学中的降维，以及无线传感器网络中的定位 [3, 24, 10]。

Saxe [47] 和 Yemini [55] 证明， d-EDMC 问题在维数为 $d = 1$ 和 $d = 2$时，已经是强 NP-困难问题。尽管文献中针对特定结构假设下的 d-EDMC 提出了许多启发式算法 [26, 54, 9, 12],，但可证明性能保证的理论 结果仍然寥寥无几。对该问题缺乏严谨的算法理解，是我们探索其计算复杂性，尤其是参数化复杂性的主要动机。

在这项工作中，我们采用距平凡性距离 这一视角来研究 d-EDMC 的复杂性。距平凡性距离是参数化复杂性中一种成熟的范式，其思路是引入一个参数（或参数组合），衡量给定实例与可高效求解的某一类问题相距多远；随后，算法利用这一“距离”实现可处理性。

对于 $d\text{-}EDMC$，什么是“平凡性”的概念？两个自然的极端情形给出了启示。

1. 所有条目均未指定。如果矩阵中没有给出任何条目，那么适当大小的任意欧几里得距离矩阵都是有效的补全，因此该实例是平凡的。遗憾的是，即使与这种情况只有很小的偏离，也会导致困难：Saxe 的归约 [47] 表明，当每行和每列恰好有两个已指定条目时，该问题是 NP-困难的。因此，以矩阵与完全未指定矩阵之间的距离作为参数，似乎并无可取之处。

2. 所有条目均已指定。在相反的极端情况下，当每个条目都已给出时，只需检验该矩阵是否为一个能够等距嵌入 $\mathbb{R}^d$ 的欧几里得距离矩阵；这一任务可在多项式时间内完成。正如本文所示，与这种“平凡性”概念之间的距离是一个有趣得多的参数。

因此，我们可以将要探讨的核心问题表述如下。

> 对于 d-EDMC，哪些衡量与完全指定矩阵之间距离的概念能够在算法上加以利用？

从具有可证明保证的算法角度来看，这个问题基本上尚未得到探索。一个值得注意的例外是 Berger、Kleinberg 和 Leighton 的工作 [8]。他们

证明，如果一个 $n \times n$ 部分矩阵 M的每一行中至少指定了 $3n/4+1$ 个条目，那么就能在多项式时间内判定 M 是否可以补全为一个 3-欧几里得距离矩阵。不过，他们的定理有一个关键的限制：它假设目标点集处于一般位置，并且不存在十个点落在同一个二次曲面上。我们不作此类假设——待嵌入的点无需处于一般位置，甚至无需彼此不同——这使问题更贴近现实，但也更具挑战性。

1.1 我们的结果和方法

我们首先指出，已指定条目密度高（或者说，未指定项的数值稀疏性高）本身并不会让问题变得更容易。因此，要通过算法利用稀疏性，就必须找出并利用能够反映条目密度的额外结构性质。

▶ **定理 1.** $\forall \varepsilon \in (0,1)$，*d-EDMC* 即使对于$(M, d)$实例，其中 $d = 2$ 的 $n \times n$ 矩阵 M 最多包含 εn 个未指定项，仍然是强NP-困难的。

该定理的证明改编自 Saxe 的经典复杂性结果 [47]。它还强调，Berger、Kleinberg 和 Leighton [8] 所采用的一般位置假设对于他们的多项式时间算法至关重要。

1.1.1 与平凡性的距离 I

我们的首个主要算法结果表明，只要对未指定项施加哪怕是轻微的结构约束——而不仅仅是数值上的稀疏性——问题就变得易处理。我们通过禁用 t-块模式来表达矩阵密度的概念。

▶ **定义 2**（t-块模式）。对于一个 $n \times n$ 矩阵 M 以及互不相交的集合 I_1，$I_2 \subseteq [n]$，我们将由 $M[I_1, I_2]$ 表示矩阵 M中行指标属于 I_1 且列指标属于 I_2的子矩阵。如果 $M[I_1, I_2]$ 是 M 的一个 $t \times t$ 子矩阵，且其中每个条目都未指定，则称 $M[I_1, I_2]$ 为 t-块模式。如果不存在 I_1 和 I_2 使得$M[I_1, I_2]$ 是一个 t-块模式，则称 M 排除一个 t-块模式。见图 1 上部。

▶ **例 3**。考虑一个部分矩阵 M。当且仅当 M 完全指定时，它才排除一个 1-块模式；如果 M 的未指定项总数至多为 Δ，那么 M 排除一个$\lfloor \sqrt{\Delta + 1} \rfloor$- 块模式；如果 M 的每一行至多包含 Δ 个未指定项，那么 M排除一个（$\Delta + 1$）-块模式。

现在我们可以陈述第一个可处理性结果了。所谓求解一个 d-EDMC 实例，是指判断答案是肯定还是否定。若求解实例（M, d）和实例（M', d'）得到相同答案，我们也称这两个实例等价。

▶ **定理 4 (**关于$K_{t,t}$自由补图的压缩*)*。 存在一个多项式时间算法，对于一个 *d-EDMC* 的实例 (M, d)，其中 M 排除了某个 t-块模式（对于某个$t \geq 1$），该算法要么解决该问题，要么输出一个等价实例 (M', d)，使得 $M_{\prime}$是 M 的一个主子矩阵，并具有 $(d+1)^{\mathcal{O}(t^2)}$ 行和列。

[1] 与计算几何领域的惯例一致，我们的所有算法均采用实数 *RAM*计算模型，假定实数上的基本运算都能在单位时间内完成。

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * & 2 & * & * & * \\ * & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ * & 1 & 0 & * & * & * & * & 2 & * \\ * & * & * & 0 & 1 & * & * & * & 2 \\ * & * & * & 1 & 0 & 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * & 1 & 0 & 1 & * & * \\ * & * & * & * & * & 1 & 0 & * & * \\ * & * & 2 & * & * & * & * & 0 & * \\ * & * & * & 2 & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

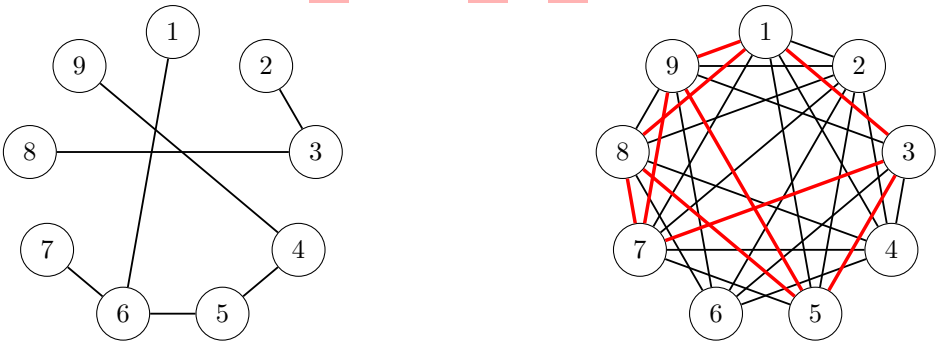


图 1 上图：一个 9×9 部分矩阵 M，它不包含 4-块模式。它包含一个由行{3、8、9}和列{1、5、7}构成的 3-块模式。左下图：底层图 G 对应的部分欧氏距离矩阵 M。图 G 中的邻接关系由矩阵中的未指定项构成。右下图：由 M中的未指定项诱导的补图 G 。G 的红色边构成$K_{3、3}$，但 G 不包含$K_{4、4}$。 —

定理 4 中的算法在多项式时间内将输入实例压缩为一个等价矩阵，其大小与 n无关。然而，这种压缩并不能保证缩减后矩阵的数值条目仅依赖于参数 t和 d；因此，严格按照参数化复杂性的定义，它不是一个核 [19, 28]。

此外，定理 4 本身并不能给出求解 d-EDMC 的完整算法，因此我们需要以下算法，该算法依赖于实代数几何中的工具。

▶ **定理 5**。存在一种算法，给定一个 $n \times n$ 部分矩阵 M 和 $d \in \mathbb{N}$，可在 $2^{\mathcal{O}(n^2 \log n)}$ 时间内运行，并能正确判定(M, d) 是否为 *d-EDMC* 的是实例。

现在，结合定理 4 和定理 5，我们得到如下针对 d-EDMC、参数为 d 和 t的 FPT 算法。

▶ **推论 6.** 对于每个 d、$t \in \mathbb{N}$ 和 $n \times n$ 部分矩阵 M，若其不包含 t-块模式，则*d-EDMC* 可在 $2^{(d+1)^{\mathcal{O}(t^2)}} + n^{\mathcal{O}(1)}$时间内求解。

▶ 注 7（定理 4 和推论 6 的一般性）。描述部分矩阵结构的一种常见方法（例如，见 [2, 8], ）是按如下方式用底层图 G 对其进行编码。设 G 是一个顶点集为 $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ 的图。若对称空对角部分矩阵 $M = (m_{ij})$ 的元素 m_{ij} 有定义，当且仅当 $ij \in E(G)$ 时，则称其为 G-部分 矩阵。我们将 G 称为 M的底层图，见图 1。通过研究部分

[2] 在本文中，M 的已指定条目始终属于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$。

矩阵，并以这一界定为出发点采用图论视角，我们可以找出它们的性质与其底层图性质之间的直接对应关系。定理 1 的条件也自然对应于这样的性质：G 的平均顶点度至多为 ε。例如，称部分矩阵 M 不包含 t-块模式，等价于称其底层图的补图 G G 不含完全二分图 $K_{t,\ t}$ 作为子图。

尽管定理 1 表明，即使对于底层图的补图平均度为常数的矩阵， d-EDMC 仍然难以处理，但定理 4 和推论 6 证明，对底层图的补图施加 $K_{t,\ t}$-自由这一条件（即在输入矩阵中排除一种 t-块模式），会彻底改变复杂性格局，并使大量实例变得易于处理。

许多应用广泛、受到深入研究的图类，都可以表示为适用于某个 t 的 $K_{t,\ t}$-自由图。特别地，根据库拉托夫斯基定理，平面图是 $K_{3,\ 3}$-自由图；排除某个固定子式 H 的图，对于某个取决于 H 的 t，是 $K_{t,\ t}$-自由图；对于适当的 t，有界扩张图和处处稀疏图是 $K_{t,\ t}$-自由图；最大度为 Δ 的任意图（或更一般地，有界退化度图），当 $t=\Delta+1$ 或 t 等于退化度加一时，都是 $K_{t,\ t}$-自由图。

在本文余下部分中，描述部分矩阵的结构性质时，我们会在图视角和矩阵视角之间自由切换。

注意，在限制更严格的情形下，当 M 的每一行至多包含 Δ 个未指定项时， G 的最大顶点度至多为 Δ。在这种情况下，我们证明，定理 4 所提供的压缩规模可以进一步细化如下。

▶ **定理 8**。 存在一个多项式时间算法，给定 d-*EDMC* 的一个实例 (M, d)，且 M 的每一行至多有 Δ 个未指定项，该算法要么求解该问题，要么输出一个等价实例 (M', d)，使得 M' 是 M 的一个主子矩阵，其中 $n' \leq (d+1(\Delta+1)^2$。

结合定理 5，可得以下算法。

▶ **推论 9**。 对于每个 d， $\Delta \in \mathbb{N}$，以及 $n \times n$ 部分矩阵 M，只要其每一行至多有 M 个 Δ 未指定项， d-欧氏距离矩阵 可在 $2^{\mathcal{O}(d^2 \cdot \Delta^4 \cdot (\log d + \log \Delta))} + n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解 .

1.1.2 与平凡情形的距离 II

考虑 M 的所有已指定条目都位于一个完全指定的主子矩阵 M' 中的情形。在这种情况下，d-EDMC 可在多项式时间内求解：首先确定使 M' 可等距嵌入 $\mathbb{R}^d$ 的最小维数 d，然后为 M 的其余条目赋值，使新点之间的距离恰当。因此，衡量相对于这一平凡情形的距离，一个自然的定义是：用其条目覆盖 M 所有已指定条目所需的完全指定主子矩阵的最少数量。从图论角度看，如果 M 的所有已指定条目都位于一个完全指定的主子矩阵中，那么底层图 G 由一个团和若干孤立顶点组成。因此， G 的所有边都由一个团覆盖。所以，当我们说 M 中的已指定条目可由 k 个完全指定的主子矩阵覆盖时，这等价于说底层图 G 存在一个大小为 k 的边团覆盖，也就是说， G 的边可由至多 k 个团覆盖。

▶ 注记10。较小的边团覆盖并不意味着对于任何固定的 t， G 都不含K_{tt}。事实上，两个 K_n 的副本的不交并仅用两个团就可以覆盖，但其补图包含K_{nn}。因此，边团覆盖参数与$K_{t\ t}$-无关这一假设不可比较，这也促使我们采用边团覆盖进行参数化。

▶ **定理 11**。存在一个多项式时间算法，给定一个d-*EDMC*实例(M, d) ，其中 M 是一个 $n \times n$ G-部分矩阵，且图 G 与大小为 k的边团覆盖C一并给出，该算法要么解决此问题，要么输出一个等价实例$(M\prime, d)$，使得 $M\prime$是 M的一个主子矩阵，其中 $n' \leq (d+1)k^2$。

▶ **推论 12** ($\star$)。对于任意 d、$k \in \mathbb{N}$和 $n \times n$ 部分矩阵 M，只要 M 中已指定的条目至多可以由 k 个完全指定的主子矩阵覆盖，d-欧几里得距离矩阵补全可在时间 $2^{\mathcal{O}(d^2 \cdot k^4 \cdot (\log d + \log k))} + 2^{2^{\mathcal{O}(k)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 内求解。

接下来，我们简要概述定理 4、定理 8 和定理 11 背后的证明技巧。若存在一对可在多项式时间内计算的对象，其中包括一个由 $X \subseteq [n]$ 索引的完全指定的 $\alpha \times \alpha$ 主子矩阵，以及一个元素 $w \in X$，使得 (M, d) 与 $(M - w, d)$ 等价，则称 d-欧几里得距离矩阵补全的实例 (M, d) 是可高效 α-约化的 。这里， $M - w$ 定义为从 M 中删除由 w索引的行和列后得到的矩阵。元素 w 称为无关 元素。显然，只要能找到这样的一对X 和 w ，我们就可以通过删除 w来迭代地约化该实例。为证明这三个定理，我们证明以下结论，其中 G 是 M 的底层图。

- 如果 G 是 $K_{t,\ t}$-自由的，那么要么该实例可在多项式时间内求解，要么它已压缩至所声称的规模，要么它可高效地进行 $d^{\mathcal{O}(t)}$-约简；如果 G 的最大度至多为 Δ，那么要么该
- 实例可在多项式时间内求解，要么它已压缩至所声称的规模，要么它可高效地进行 $\mathcal{O}(d \cdot \Delta)$-约简；给定 G的一个大小为 k 的边团覆盖，那么要么该实例可在多项式时间内求
- 解，要么它已压缩至所声称的规模，要么它可高效地进行 $\mathcal{O}(d \cdot k)$-约简。

证明上述每个结论的方法大致相同，但我们会利用各个情形中某些实例特定方面。事实上，对于前两个结论，我们证明存在一个仅取决于参数的 α ，使得任意完全指定的 $\alpha \times \alpha$ 主子矩阵的索引集必定包含一个无关元素。这样，我们就能利用 G 的稀疏性，推断出存在这样一个 M的完全指定主子矩阵。对于第三个结论，我们观察到，给定的 G 边团覆盖中必有一个团的大小至少为 α （其中 α 取决于参数），然后论证该团包含一个无关元素。

1.1.3 距平凡性的距离 III

我们的最后一个结果涉及另一类可通过多项式时间补全算法处理的矩阵。回顾一下，若图 G 不含长度大于 3 的诱导圈，则称其为弦图，见图 2。Bakonyi 和 Johnson [5]证明了以下结论：当 G 为弦图时， G-部分矩阵 M 可补全为一个在 $\mathbb{R}^d$ 中可实现的欧氏距离矩阵，当且仅当由 G 每个极大团的顶点集诱导的子矩阵本身是一个在 $\mathbb{R}^d$中可实现的欧氏距离矩阵。由于一个有 n个顶点的弦图至多有 n 个极大团，且可以在多项式时间内列出这些极大团 [31], ，Laurent [42] 指出，这一刻画给出了一个直接的多项式时间算法来求解 d-EDMC，具体如下。对于 G 的每个极大团，都可以在多项式时间内检查 M的相应主子矩阵（根据定义，其中所有元素均已指定）是否为一个在 $\mathbb{R}^d$中可实现的欧氏距离矩阵。因此，将底层图为弦图的部分矩阵视为平凡性的定义后，我们来讨论下一个距平凡性的距离概念。

衡量图 G 到弦图的距离的一种常用指标是图的填充数 ，即为了使图成为弦图而需要添加的最少边数。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & * & * \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & * & * \\ * & * & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & * \\ * & * & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & * & 1 \\ * & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ * & * & * & * & 1 & * & 1 & 0 & 1 \\ * & * & * & * & * & 1 & * & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

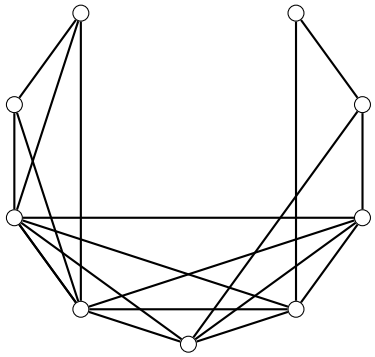


图 2 一个底层图为弦图的部分欧氏距离矩阵。

我们的下一个定理将 Bakonyi 和 Johnson [5] 针对弦图的多项式时间算法推广到具有常数填充数的图。

▶ **定理 13**。 设 M 是一个 $n \times n$ G部分矩阵，且 $d \in \mathbb{N}$。存在一种算法，可在 $d^{\mathcal{O}(kd)}\, 2^{\mathcal{O}(k^2)}\, n^{\mathcal{O}(k)}$ 时间内运行，其中 k 是 G的最小填充数，并能正确判定$(M、\ d)$ 是否为 d-*EDMC* 的是实例。

Laurent [42] 提出了一种 XP 算法，即对于每个固定的 k 都是多项式算法，用于判定一个 G部分矩阵是否可以补全为能够嵌入某个 欧几里得空间的欧氏距离矩阵，其中 k 是 G 的最小填充大小。然而，该算法无法确定足够的最小 维数 d，因此不能解决 d-EDMC。因此，定理 13 可被视为 Laurent 结果的一种非平凡扩展，专门针对嵌入预先指定维数 d 的情形。

下面简要概述该算法背后的技术。根据 Bakonyi 和 Johnson 的结果 [5], ，要判定给定的 G部分矩阵 M 是否能够扩展为满足以下条件的 G'部分矩阵 M'，这是必要且充分的：(i) G' 是弦图；(ii) G' 是 G的超图；(iii) 对于 G'的每个极大团，由该团的顶点集诱导出的 M' 子矩阵是在 $\mathbb{R}^d$中可实现的欧氏距离矩阵。对我们而言， G' 由一个填充集 X 定义，即 $G' = G + X$，其中 X 是 G 的一组非边，将其添加到 G 后可使其成为弦图。因此，任务归结为通过为对应于 X中各条边的条目赋值来计算 M'，并确保条件 (iii) 得到满足。为此，我们将该任务归约为检验一个在有界的一组多项式方程和不等式上进行的存在量化命题是否为真，最后调用 Basu、Pollack 和 Roy 的算法 [6]。我们注意到， [7], 中也采用了类似的方法；然而，我们的情况更为复杂，因为 G' 的极大团可能共享边，因此在该归约中需要同时处理多个欧氏距离矩阵。

1.2 相关工作

对欧几里得距离矩阵（EDM）的研究可追溯至 Cayley [14] 和 Menger [44]的开创性工作。Schoenberg [51]以及 Young 和 Householder [56]随后取得了奠基性成果。Gower、Critchley、Farebrother 等人通过一系列论文进一步发展了这一领域 [32, 33, 18, 27]。Schoenberg [51] 还确立了 EDM 与半正定（PSD）矩阵之间的深刻联系。A

关于 EDM 的浩瀚文献的全面论述超出了本文的范围；感兴趣的读者可参阅相关专著和综述 [11, 17, 22, 41, 20, 2]。

欧氏距离矩阵补全问题，即判断输入的G部分欧氏距离矩阵能否补全为欧氏距离矩阵的问题（不对所得矩阵的秩施加约束），可以表述为半定规划（SDP）问题，因此能够在多项式时间内近似求解，且可达到任意给定的精度。欧氏距离矩阵补全问题的复杂度尚不明确，其是否属于 NP 仍是一个开放问题。若干研究探讨了图 G 的结构性质如何影响欧氏距离矩阵补全的复杂度。

如前所述，Bakonyi 和 Johnson [5] 证明，当 G 是弦图时，G部分欧氏距离矩阵能够补全为完整的欧氏距离矩阵，当且仅当由 G 的每个极大团所索引的子矩阵本身都是欧氏距离矩阵。Laurent [42] 利用这一刻画，为 G 是弦图时的欧氏距离矩阵补全设计了一种多项式时间算法。此外，她将这一结果推广到只需添加常数条边即可变为弦图的图。换言之，她给出了一种以 G的填充数 为参数的 XP 算法。欧氏距离矩阵领域中针对弦图的这一结果，是半正定（PSD）矩阵补全问题中类似结果的自然推广 [36]。

欧氏距离矩阵补全和 d-欧氏距离矩阵补全在统计学 [21], 化学 [17], 传感器网络定位 [9], 以及许多其他领域都有广泛应用；更多参考文献请参见 Laurent 的综述 [43] 。由于秩函数不是凸函数，d-欧氏距离矩阵补全无法表示为半正定规划。对于 $d = 1$，它是 NP-完全的；对于每个固定的 $d \geq 2$，它仍然是 NP-困难的，即使将问题限制为已指定条目位于 {1,2} [47, 55] 中的部分矩阵也是如此。文献中提出了许多启发式算法（例如, [17, 30, 37, 39, 40, 45, 54]），但据我们所知，目前还没有针对 d-欧氏距离矩阵补全且具有可证明性能保证的算法。一个值得注意的例外是 Berger、Kleinberg 和 Leighton 的研究 [8], ，该研究针对 $d = 3$ 解决了 d-欧氏距离矩阵补全问题；然而，他们的一般位置假设与本文中的假设有很大不同。Schaefer 在 [49] 证明，d-欧氏距离矩阵补全（实际上包括 2-欧氏距离矩阵补全）是实数存在理论完备的。另请参阅 $\exists\mathbb{R}$ 汇编 [50], 中的问题 CG62（图实现性）。与欧氏距离矩阵补全密切相关的领域是刚性理论。刚性理论可追溯至十九世纪的数学家和机械工程师 [13], , 研究由固定长度杆件连接的一组点在何种情况下是刚性的。这里的基本问题是确定何时一个部分距离矩阵能够在全等意义下唯一确定欧几里得空间中的一组点。关于该领域的介绍，请参见 [4, 15, 35] 。

2 预备知识

对于每个 $x \in \mathbb{N}_{>0}$，我们用 $[x]$ 表示集合 $\{1, \ldots, x\}$。

距离空间与矩阵

设 X 是一个集合。函数 ρ: $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 称为 X 上的距离，如果满足：(i) ρ 是对称的，即对于任意 x、$y \in X$、ρ，有 $(x, y) = \rho(y, x)$；(ii) 对所有 $x \in X$，$\rho(x, x) = 0$。此时，(X, ρ)称为距离空间。有限 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$上的距离空间 (X, ρ)，也可以等价地通过距离矩阵来定义，其中第 i 行、第 j 列的值为ρ_{ij}^2，这里 $\rho_{ij} = \rho(x_i, x_j)$，对 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 成立。本文中，我们不区分度量空间及其对应的距离矩阵。

距离空间（X，ρ）可等距嵌入到 $\mathbb{R}^d$，如果存在一个称为等距嵌入的映射 φ: $X \to \mathbb{R}^d$，使得 $\rho(x, y) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2$ 对于所有 x，$y \in X$均成立，其中

$\|p-q\|_2 = \sqrt{p,p\ +q,q\ -2p,q}$对于 $p,q \in \mathbb{R}^d$。注意，我们不要求 φ 是单射的，也就是说，距离空间（X,ρ）中的多个点可能被映射到 $\mathbb{R}^d$ 中的同一个点。在全文中，每当我们提到嵌入时，均指等距嵌入。此外，当我们使用术语 d-嵌入时，指的是嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中。一个可 d-嵌入的距离空间，如果不是（$d-1$）-可嵌入的，则称为强 d-可嵌入。按照约定，我们假设空点集对于每个 d 都是 d-可嵌入的。一个对称的 $n \times n$矩阵 $D=(d_{ij})$ 定义在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上，并且对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 都满足 $d_{ii}=0$，则称其为 $\mathbb{R}^d$ 中的欧氏距离矩阵（EDM）；当 $D=D\ (\rho)$ 是某个可嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 的距离空间（X,ρ）的距离矩阵时，情况即是如此。设 $\mathbf{X}=(X,\rho)$ 可嵌入到 $\mathbb{R}^d$。若存在一个嵌入 $\varphi\colon\ X \to \mathbb{R}^d$，使得对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 都有 $\varphi(x_i)=p_i$，则称 $\mathbb{R}^d$ 中的点的有序集合 $P=(p_1,\ldots,p_n)$ 是 $\mathbf{X}$ 的一个实现。

对于一个可嵌入于 d 的距离空间（X,ρ），若给定将（Y,ρ）等距嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中的嵌入 φ，则集合 $Y \subseteq X$ 是度量基，当且仅当存在唯一的方式将 φ 扩展为（X,ρ）的等距嵌入。等价地，若固定（Y,ρ）的一个实现，则在（X,ρ）的 d 嵌入中，任何属于 $X \setminus Y$ 的点的嵌入都是唯一的。本文还采用基于凯莱-门格尔矩阵性质的可嵌入性刻画。为此，我们使用 [7] 中的术语和记号。对于距离空间（X,ρ）中的 $r+1$ 个点 $x_0,x_1,\ldots,x_r$，凯莱-门格尔行列式 $CM(x_0,x_1,\ldots,x_r)$ 是由这些点所诱导的距离矩阵添加一行一列得到的矩阵的行列式，其中新增行列的首个元素为零，其余元素均为一。

▶ **命题 14** ([11, 第四章])。 **</style}一个含有 (**X、ρ) 个点的距离空间 X，若且唯若存在 $d+1$ 个点，例如 $X_d=\{x_0,\ \ldots,\ x_d\}$，使得：

1. $(-1)^{j+1}C^{\prime}M(x_0$、、.....、$x_j) > 0$ 当 $1 \leq j \leq d$时，且
2. 对于任意 $x,\ y \in X \setminus X_d$,

$$CM(x_0,x_1,\ldots,x_d,x) = CM(x_0,x_1,\ldots,x_d,y) = CM(x_0,x_1,\ldots,x_d,x,y) = 0.$$

等价地（例如参见 *[52]*），X 若且唯若存在一个由 $d+1$ 个点组成的集合 $X_d=\{x_0,\ \ldots\ldots,\ x_d\}$，使得对于所有 $j \in \{1,\ \ldots\ldots,\ d\}$，$(\{x_0,\ \ldots\ldots,\ x_j\}\ \rho)$ 都是强 j-可嵌入的；并且对于每个 x、$y \in X \setminus X_d$，$(X_d \cup \{x\} \cup \{y\})$ 都是 d-可嵌入的。

▶ **命题 15** ([11, 第四章]). 设(X,ρ) 是一个可嵌入 d 的距离空间，且$B \subseteq X$ 是一个度量基。则 B 到 $\mathbb{R}^d$ 中的嵌入在刚性变换下唯一；给定将(B,ρ) 嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中的嵌入 φ，存在唯一的方式将 φ 扩展为(X,ρ)的一个嵌入。等价地，若(B,ρ) 的一个实现已固定，那么在(X,ρ) 的任一 d-嵌入中，$X \setminus\setminus B$ 中任一点的嵌入都是唯一的。

设 $(X,\ \rho)$ 是一个距离空间。对于非负整数 r，若大小为$r+1$ 的 $Y \subseteq X$ 是独立 的，则 $(Y,\ \rho)$ 是强 r-可嵌入的。

▶ **命题 16** ([11, 第四章]). 设(X,ρ) 是一个强 d-可嵌入的距离空间。则以下结论成立：(i)任何单元素集合都是独立的，(ii) 若 $Y \subseteq X$ 独立，则任意 $\emptyset \subset Z \subseteq Y$ 都独立；(iii) 若 Y、$Z \subseteq X$ 独立且 $|Y|>|Z|$，则存在一个 $y \in Y \setminus\setminus Z$，使得 $Z \cup \{y\}$ 独立，

（iv）独立集的最大规模为 $d+1$，且任何大小为 $d+1$ 的独立集 Y 都是度量基。

▶ **命题 17** （[11, 第四章] 和 [1, 53]）。给定一个距离空间 $X=(X,\rho)$，其中有 n个点，以及一个正整数 d，在 $O(n^3)$ 时间内，可以判定 X 是否能够嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中；如果这种嵌入存在，则可以在该运行时间内构造一个度量基和一个实现。

10 欧几里得距离矩阵补全算法

提醒一下，按照我们的约定，我们不区分度量空间及其对应的距离矩阵。因此，我们称 $\mathbb{R}^d$ 的一个 n点组是一个 $n \times n$ 距离矩阵的实现。此外，我们称指标子集 $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 是该距离矩阵的度量基，这意味着距离空间中对应的点构成该空间的度量基。同样地，如果 M 是一个（强）d可嵌入距离空间的距离矩阵，那么我们称 M 是一个（强） d可嵌入的欧氏距离矩阵。

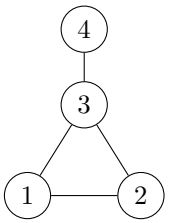
图与矩阵

我们研究简单有限无向图，并采用 [23] 所述的标准图论记法。给定一个图 G，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示其顶点集和边集。全文中，若上下文已明确所指的图，我们分别用 n 和 m 表示 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$。图 G 中两两相邻的顶点集 K 称为团，而两两不相邻的顶点集称为独立集。图 G 的团族 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ 是 G 的边团覆盖，当且仅当对每条边 $uv \in E(G)$，都存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得 uv 被 C_i 覆盖，即 $u, v \in C_i$。对于顶点 $v \in V(G)$，我们用 $N_G(v)$ 表示 v 的开邻域，即与 v 相邻的顶点集。顶点 $d_G(v)$ 的度为 $= |N_G(v)|$，图 G 的最大度为 $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$。对于图 G，其补图 $\overline{G}$ 是一个与 G 具有相同顶点集的图；两个不同的顶点 $u, v \in V(G)$ 在 G 中相邻，当且仅当它们在 G 中不相邻。

设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵。将 A 删除 $n-k$ 行和 $n-k'$ 列（其中 $1 \leq k$、$k' \leq n$）后得到的矩阵称为 A 的 $k \times k'$ 子矩阵。A 的主子矩阵是通过删除相同的行索引集和列索引集得到的方形子矩阵；也就是说，如果删除了 A 的第 i 行，那么也会删除第 i 列。设 G 是一个图，其具有 $V(G) = \{1, \ldots, n\}$。在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的一个 $A =$ 矩阵 $n \times n (a_{ij})$ 含有一些未指定元素，若满足：(i) 当且仅当 $ij \in E(G)$ 时，元素 a_{ij} 有定义（或已指定）；(ii) 对所有 $ij \in E(G)$，$a_{ij} = a_{ji}$；(iii) 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$a_{ii} = 0$，则称其为一个 G-部分矩阵。我们还称 G 为 A 的底层图。设 A 是一个 G-部分矩阵，且 d 是一个正整数。如果矩阵 D 是 A 的 d-欧氏距离矩阵补全，则称其满足：

1. D 是 d-可嵌入的，并且
2. $d_{ij} = a_{ij}$ 对于所有 $ij \in E(G)$。

示例见图3。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.25 & * \\ 1 & 0 & 1.25 & * \\ 1.25 & 1.25 & 0 & 1 \\ * & * & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.25 & 4.25 \\ 1 & 0 & 1.25 & 4.25 \\ 1.25 & 1.25 & 0 & 1 \\ 4.25 & 4.25 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

图3 图 G, G-部分矩阵 A，以及 A的欧氏距离矩阵补全 D。由 D 定义的距离空间$\mathcal{X}$可嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中。例如，$\mathcal{X}$ 的一个实现 φ 可将$\mathcal{X}$ 中的元素映射到点 $p_1 = (0, 0)$、$p_2 = (1, 0)$、$p_3 = (0.5, 1)$ 和 $p_4 = (0.5, 2)$。

将图论记法与矩阵记法结合起来对我们而言很方便。设 $A = (a_{ij})$ 为对称的 $n \times n$ 矩阵，并设 G 为具有 $V(G) = [n]$ 的图。对于集合 $X \subseteq [n]$，我们用 $G[X]$ 表示由 X 诱导的 G 的子图，并用 $A[X]$ 表示其主子矩阵

以 X 为索引，即由 a_{ij} 中满足 $i,j \in X$ 的元素组成的 A 的子矩阵。我们还分别用 $G-X$ 和 $A-X$ 表示删除 X 中顶点后得到的图，以及删除以 X 为索引的行和列后得到的子矩阵，即 $G-X=G[V(G)\setminus X]$ 和 $A-X=A[V(G)\setminus X]$。对于集合 $X=\{x\}$，我们分别将 $G-x$ 和 $A-x$ 写作 $G-\{x\}$ 和 $A-\{x\}$。

我们以定理 1 结束本节。该定理表明，要使 d-EDMC 具有可处理性，仅要求输入矩阵中指定元素的密度较高（或者等价地，底层图 G 的密度较高）是不够的。

▶ **定理 1.** $\forall \varepsilon \in (0,1)$， *$d$-EDMC 仍然是强 NP-困难的，即使对于其中 $n\times n$ 矩阵 M 至多包含 εn 个未指定项的实例 (M,d) $d=2$ 也是如此。*

证明。我们利用 Saxe [47] 的结果：对于 $d=1$， d-EDMC 是强 NP-完全的。更确切地说，Saxe [48, 定理 4.1] 证明了以下判定问题是 NP-完全的：给定一个带权连通图 G 及其权函数 w: $E(G)\to\{1,2,3,4\}$，判断是否存在一个映射 φ，将 G 的顶点映射到直线上的点，使得对于每条边 $uv\in E(G)$，$|\varphi(u)-\varphi(v)|=w(uv)$。

设 G 是一个具有 $V(G)=\{1,\dots,n\}$ 的 n 顶点连通图，并设 w: $E(G)\to\{1,2,3,4\}$ 是一个权函数。我们利用以下性质：半径为 r、圆心角为 α 的圆弧长度等于 $r\alpha$，该弧所对的弦长为 $2r\sin(\alpha/2)$。设 $\alpha<\frac{2\pi}{4n}=\frac{\pi}{2n}$，并设 $r\in\mathbb{R}_{>0}$。我们定义 $\rho_{u,v}=2r\sin(\frac{w(uv)\alpha}{2})$，其中 $uv\in E(G)$。注意，由于 G 不含长度大于 $4n$ 的环，且 $\alpha<\frac{\pi}{2n}$，存在一个将 $V(G)$ 映射到直线上并保持边长的映射 φ，当且仅当存在一个将 $V(G)$ 映射到半径为 r 的圆上的映射 ψ，使得对于每个 $uv\in E(G)$，$\|\psi(u)-\psi(v)\|_2^2=\rho_{u,v}^2$。接下来，我们将说明如何选取数值 α 和 r，以确保 r，且 $\rho_{u,v}^2$ 的取值为整数。

注意，若 $0<x<1$，则 $\arcsin(x)<\frac{\pi}{2}x$。我们选取 $\alpha=2\arcsin(\frac{1}{2n})$。于是 $\alpha<2\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{2n}$。接着 $\sin(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2n}$。回想一下，若 $0\le x\le\pi/2$，则 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$。于是 $\sin(2x)=2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$，$\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$，且 $\sin(4x)=4\sqrt{1-\sin^2 x}(\sin x-2\sin^3 x)$。我们定义 $r=2^4n^4$。由于对每个 $uv\in E(G)$，$w(uv)\in\{1,2,3,4\}$，因此我们得到，对于每个 $uv\in E(G)$，$\rho_{u,v}^2=4r^2\sin^2(\frac{w(uv)\alpha}{2})$ 是一个整数。此外，每个 $\rho_{u,v}^2=O(n^6)$。

我们为 $d=2$ 构造以下 d-EDMC 实例 (M,d)。令 $s=\lceil\frac{n^2}{2\varepsilon}\rceil$，并构造部分对称矩阵 $N\times N$ $M=(m_{ij})$，其对角线元素为零，其中 $N=n+s$：

- 对于互不相同的 i，$j\in\{1,\dots,n\}$，令 $m_{ij}=\rho_{i,j}^2=4r^2$ 正弦$^2(\frac{w(uv)\alpha}{2})$，若 $ij\in E(G)$；若 $ij\notin E(G)$，则令 m_{ij} 未指定。对于互不相同的 i，$j\in\{n+1,\dots,n+s\}$，
- 令 $m_{ij}=0$；对于所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 和 $j\in\{n+1,\dots,n+s\}$，令
- $m_{ij}=m_{ji}=r^2$。

我们证明，G 存在一个映射 φ，将 G 的顶点映射到直线上的点，使得对于每条边 $uv\in E(G)$，$|\varphi(u)-\varphi(v)|=w(uv)$，当且仅当 $(M,2)$ 是d-EDMC 的是实例。

对于正向，回想一下，如果存在保留边长的映射 φ，那么就存在一个从 $V(G)$ 到半径为 r、圆心为 C 的圆上的映射 ψ，使得对于每个 $uv\in E(G)$，都有 $\|\psi(u)-\psi(v)\|_2^2=\rho_{u,v}^2$。我们假设 C 的圆心位于 $(0,0)$，并令 $p_i=\psi(v_i)$，其中 $i\in\{1,\dots,n\}$。接着，我们通过对所有满足 $ij\notin E(G)$ 的不同 i、$j\in\{1,\dots,n\}$，令 $m_{ij}^*=\|p_i-p_j\|_2^2$，来构造 M 的补全 $M^*=(m_{ij}^*)$。根据构造，$(p_1,\dots,p_N)$ 是 M^*，因为其中 $p_j=(0,0)$，对于 $j\in\{n+1,\dots,n+s\}$ 均成立，它是 M^* 的一个实现。

12 欧几里得距离矩阵补全算法

对于反向，假设 M^* 是补全 M 的欧氏距离矩阵。令 $(p_1,\dots,p_N)$ 为实现 M^* 的 N 元组，其中各点属于 $\mathbb{R}^2$。由于对于不同的 i、$j\in\{n+1,\dots,n+s\}$，$m_{ij}=0$，因此对于 $i\in\{n+1,\dots,n+s\}$，点 $p_i=p$ 都相同。于是，点 $p_1,\dots,p_n$ 位于以 p 为圆心、半径为 r 的圆 C 上，因为对于所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 和 $j\in\{n+1,\dots,n+s\}$，$m_{ij}=m_{ji}=r^2$。这意味着存在一个从 $V(G)$ 到半径为 r 的圆上的映射 ψ，使得对于每个 $uv\in E(G)$，都有 $\|\psi(u)-\psi(v)\|_2^2=\rho_{u,v}^2$。由此可知，存在一个将 G 的顶点映射到直线上的点的映射 φ，使得对于每条边 $uv\in E(G)$，都有 $|\varphi(u)-\varphi(v)|=w(uv)$。至此，归约的正确性证明完成。

由于 G 至多有 $\binom{n}{2}$ 对非邻接顶点，因此 M 至多有 $\binom{n}{2}$ 个未指定元素。于是，未指定元素的数量至多为 $\binom{n}{2}\le\frac{n^2}{2}\le\varepsilon\lceil\frac{n^2}{2\varepsilon}\rceil=\varepsilon s\le\varepsilon(n+s)=\varepsilon N$。证明完毕。◀

3 当 G稠密时压缩 G-部分矩阵（距平凡性的距离 I 和 II）

本节旨在证明定理 4、定理 8 和定理 11。

▶ **定理 4**（压缩$K_{t,\,t}$-自由补图）。存在一个多项式时间算法，对于给定的 d-*EDMC* 实例（M、d），其中 M 排除了某个$t\ge 1$的 t-块模式，该算法要么解决该问题，要么输出一个等价实例（M'、d），使得 M'是 M 的主子矩阵，并且具有 $(d+1)^{\mathcal{O}(t^2)}$ 行和列。

证明。证明的关键步骤是用多项式时间找出 G 中的一个“无关”顶点，也就是说，删除该顶点不会使一个否实例变成是实例。通过穷尽地重复删除无关顶点这一过程，我们要么解决该问题，要么构造出一个具有 $(d+1)^{\mathcal{O}(t^2)}$ 行和列的等价实例。

设 M 是一个 G部分矩阵，其中 G 不包含 t块模式。如果 $t=1$，那么 M 是完全指定的（即 G 是完全的），因此我们使用命题 17 求解实例 $(M,\ d)$。于是，我们假设 $t>1$。令 $\eta(d,\ t)=(d+1)^{t}+(t-1)(d+1)^{t+1}+1$，并且 $\rho(d,\ t)=\binom{2t+\eta(d,t)-2}{2t-1}$.

如果 $n<\rho(d,\ t)$，那么所需的压缩已经完成，我们只需输出 $(M,\ d)$。从现在起，假设 $n\ge\rho(d,\ t)$。由于 G 是 $K_{t,\,t}$-自由的，它不包含大小为 $2t$ 的团。根据 Ramsey经典定理，[25] G 因此必须包含一个大小为 η 的独立集 X $(d,\ t)$。此外，可以在多项式时间内计算出这样的集合 X。根据定义，X 在 G 中诱导出一个团。注意，由于 M 未完全指定，$V(G)\neq X$。

我们使用命题 17 在多项式时间内检查 $M[X]$ 是否可嵌入 d。如果不是，则报告 $(M,\ d)$ 是一个否实例，并停止。对于每个 $v\in V(G)\setminus X$，注意 $C_v=\{v\}\cup(N_G(v)\cap X)$ 是 G 的一个团。因此，对于每个 $v\in V(G)\setminus X$，我们也检查 $M[C_v]$ 是否可嵌入 d；如果不是，则报告 $(M,\ d)$ 是一个否实例。

接下来，我们迭代地构造大小至多为 $d+1$ 的互不相交集合 $X_1,\dots,X_t\subseteq X$，具体如下。假设 $X_0=\emptyset$，我们选取 X_i，使其成为通过命题 17 得到的 $M[X\setminus\bigcup_{j=0}^{i-1}X_j]$ 关于$i\in\{1,\dots,t\}$ 的度量基。由于对于 $i\in\{1,\dots,t\}$，$|X_i|\le d+1$，我们有$|\bigcup_{i=1}^{t}X_i|\le(d+1)t$。此外，由于 X 足够大，集合 $X_1,\dots,X_t$ 存在。

考虑 $Y=\{y\in V(G)\setminus X:\ X_i\setminus N_G(y)\neq\emptyset$，对所有 $i\in\{1,\dots,t\}\}$ 均成立。也就是说，Y由 X 外部的所有顶点组成，这些顶点在 G 中的每个 X_i 内都有一个不相邻点。

▷ 断言 18。$|Y|\le(t-1)(d+1)^t$。

证明。为导出矛盾，假设 $|Y|>(t-1)(d+1)^t$。对于每个 $y\in Y$,$X_i\setminus N_G(y)\neq\emptyset$对于每个 $i\in\{1,\dots,t\}$。因此，对于每个 $y\in Y$以及每个 $i\in\{1,\dots,t\}$，y在 G 中有一个邻居 $x_i^y\in X_i$。注意，因为对于每个 $i\in\{1,\dots,t\}$，$|X_i|\le d+1$

至多有 $(d+1)^t$ 个不同的 t-元组 $(x_1^y$、.. .、 $x_t^y)$。因此，由于 $|Y|>(t-1)(d+1)^t$，根据鸽巢原理， Y 至少包含 t 个与同一元组 $(x_1^y$、. . . 、$x_t^y)$ 相关联的顶点 y。然而，这意味着 G 包含一个 $K_{t,\ t}$，这就产生了矛盾。由此得证。◀

对于每个 $y \in Y$，我们考虑团 $K_y = N_G(y) \cap X$。由于 $K_y \subseteq C_y$，并且我们已经得出 $M[C_y]$ 是 d- 可嵌入的，因此 $M[K_y]$ 是 d- 可嵌入的。我们使用命题 17 计算 Z_y 的度量基 $M[K_y]$。根据断言 18，由于 $|Y| \leq (t-1)(d+1)^t$，并且对于 $y \in Y$ 有 $|Z_y| \leq d+1$，因此 $|\bigcup_{y\in Y} Z_y| \leq (t-1)(d+1)^{t+1}$。由于 $|\bigcup_{i=1}^{t} X_i| \leq (d+1)t$，且 $|X| \geq (d+1)t+(t-1)(d+1)^{t+1}+1$，我们得出存在 $w \in X \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^{t} X_i\right) \cup \left(\bigcup_{y\in Y} Z_y\right)\right)$。

▷ 断言 19. d-EDMC 的实例（M, d）和（$M-w, d$）是等价的。

证明。 显然，若 （M， d）是一个是实例，那么 （$M-w$， d）也同样如此。

现在我们来证明反向结论。令 $M=(m_{ij})$，并且不失一般性地假设 $w=n$。假设 $(\hat{}M, d)$ 是 $\hat{}M = M-w$ 的一个是实例。注意，$\hat{}M$ 是 $\hat{}G = G-w$ 的一个 $\hat{}G$-部分矩阵。我们有，$\hat{}M$ 可以补全为一个 $(n-1) \times (n-1)$ 欧几里得距离矩阵 $\hat{}M^* = (m_{ij}^*)$，其中 $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$。因此，存在一个由 $\mathbb{R}^d$ 中的点构成的 $(n-1)$ 元组 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，可实现 $\hat{}M^*$，即对于 $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$，有 $\|p_i - p_j\|_2^2 = m_{ij}^*$。我们将通过添加一个实现 w 的点 p_w，扩展 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，并通过为 $\hat{}_{M^*}$ 添加一行和一列来构造 $M^* = (m_{ij}^*)$，使得 M^* 是 M 的一个补全。

回顾一下， X 是 G 的团，而 X_1 是欧氏距离矩阵 $M[X]$的度量基。令 $d' = |X_1|-1$。则，对于 $v \in X \setminus \{w\}$，点 p_v 嵌入在由点 p_v （ $v \in X_1$）定义的 d'维仿射子空间 L 中，该子空间属于$\mathbb{R}^d$。此外，由于 $M[X]$ 是欧氏距离矩阵，根据命题 15，存在唯一的点 $p_w \in \mathbb{R}^d$，使得对于 $v \in X_1$有 $\|p_w - p_v\|_2^2 = m_{vw}$。注意到 $p_w \in L$。对于每个 $v \in V$（G）$\setminus w\}$，我们定义 $m_{vw}^* = m_{wv}^* = \|p_v - p_w\|_2^2$。我们声称，对于每个 $v \in V$（G）$\setminus w\}$，只要 $vw \in E$（G），就有 $m_{vw}^* = m_{vw}$。

我们根据 v在 V（G）的划分 $X \uplus Y \uplus V$（G） $\setminus$ （$X \cup Y$）中的位置，分三种情况进行讨论。证明基于以下观察。假设 C 是 G的团，且 $M[C]$是 d-可嵌入的；令 $B \subseteq C$为 $M[C]$ 的度量基。那么，对于 $M[C]$的任意实现（q_v）$_{v\in C}$，由命题 15，点的 $|C|$元组（q_v）$_{v\in C}$ 与（p_v）$_{v\in C}$ 在刚性变换意义下相同。此外，它完全由 M确定。同样，如果L 是包含点（p_v）$_{v\in B}$ （ $d' = |B|-1$）的 $\mathbb{R}^d$ 的 d'维仿射子空间，那么对于 $u \in C$，所有点 p_u 均属于 L；并且根据命题 15，它们在 L' 中的坐标由 $v \in B$的取值唯一确定。

情形1： $v \in X$。则等式 $m_{vw}^* = m_{vw}$ 立即由.....的定义p_w 以及 X_1 是 $M[X]$的度量基这一事实。

情形2： $v \in Y$。注意，在这种情况下， $w \in K_v$。回想一下， $Z_v \subseteq X$ 是 $M[K_v]$的度量基。令 $d'' = |Z_v| - 1 \leq d'$。由于 $K_v \subseteq X$，点 p_u （ $u \in Z_v$）都位于 L中。因此，存在一个 d''维仿射子空间 $L' \subseteq L$，包含点 p_u （$u \in K_v$），其中包括 $u = w$。假设 $p_v \in L'$。那么，对于 G的团 C_v， Z_v 是 $M[C_v]$的度量基。由于度量基唯一确定实现中各点的位置，因此我们有 $m_{vw}^* = m_{vw}$。假设 $p_v \notin L'$。那么，根据命题 16 (iii)，$Z_v \cup \{v\}$是 $M[C_v]$ 的度量基。由实现的唯一性可知，这意味着 $m_{vw}^* = m_{vw}$。

情形 3： $v \notin (X \cup Y)$。那么根据 Y 的定义，存在 $i \in \{1, \ldots, t\}$ 使得 $X_i \subseteq N_G(v)$。由于 $vw \in E(G)$，我们有 $C_v' = X_i \cup \{v, w\}$ 是 G 的一个团。根据选择

的 X_i，X_i 是 $M[X \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j]$ 的一个度量基。那么对于 $d'' = |X_i| - 1$，存在一个 d'' 维仿射子空间 $L' \subseteq L$，其中包含点 p_u，对于 $u \in X_i \cup \{w\}$。如果 $p_v \in L'$，那么 X_i 是 $M[C'_v]$ 的一个度量基，且 $m^*_{vw} = m_{vw}$。如果 $p_v \notin L'$，那么根据命题 16 (iii)，$X_i \cup \{v\}$ 是 $M[C'_v]$ 的一个度量基。于是我们再次得到 $m^*_{vw} = m_{vw}$。至此，分类讨论完成。

因为对于所有 $v \in V$（G）都有 $m^*_{vw} = m^*_{wv} = m_{vw} \setminus \{w\}$，我们得到 M^* 是 M 的一个补全。根据（$p_1, \ldots, p_{n-1}$）和 p_w 的构造可知，（$p_1, \ldots, p_n$）是 M^* 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个实现。因此，M^* 是 M 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个补全。这意味着（M, d）是 d-EDMC 的一个是实例，从而完成证明。◀

我们设定 $M := M - w$ 并迭代。至多经过 n 轮，我们要么解决该问题，要么得到一个等价实例（$M\prime d$），其中 M' 是 M 的一个满足 $n' < \binom{2t+\eta(d,t)-2}{2t-1}$ 的 $n' \times n'$ 子矩阵。关于运行时间，注意到根据命题 17，构造独立集 X 以及构造 $X_1, \ldots, X_t$ 都能在多项式时间内完成。然后，根据命题 17，也可以在多项式时间内构造 Y 和 $y \in Y$ 对应的集合 Z_y。因此，可以在多项式时间内找到一个无关顶点。由于总轮数至多为 n，整体运行时间为多项式。◀

如前所述，结合定理 4 和定理 5，可得以下推论。

▶ **推论 6.** 对于每个 d、$t \in \mathbb{N}$ 和 $n \times n$ 部分矩阵 M，若其不含 t-块模式，则 d-*EDMC* 可在 $2^{(d+1)^{\mathcal{O}(t^2)}} + n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

在本节余下部分中，我们将证明，对于某些其他类别的稠密图 G，使用定理 4 作为黑箱所得到的压缩相比，我们可以为 d-EDMC 获得更好的压缩。这些结果的证明仍遵循定理 4 证明中的相同思路。首先，我们考虑 G 具有有界最大度的情形。由于最大度至多为 Δ 的图不包含 $K_{\Delta+1,\ \Delta+1}$，因此在下述定理中，我们考虑定理 4 中所考虑矩阵的一个子类。

▶ **定理 8.** *存在一个多项式时间算法，对于给定的 d-EDMC 实例 (M, d)，若 M 的每一行至多有 Δ 个未指定项，则该算法要么求解该问题，要么输出一个等价实例 (M', d)，使得 M' 是 M 的一个主子矩阵，其中 $n' \leq (d+1)(\Delta+1)^2$。*

证明。设 (M, d) 是 d-EDMC 的一个实例，其中 M 是一个 G 部分矩阵，且 G 的最大度至多为 Δ。若 G 是完全图，则我们利用命题 17 直接求解该问题；若 $n \leq (d+1)(\Delta+1)^2$，则立即输出该实例。因此，$n > (d+1)(\Delta+1)^2$。由于 G 的最大度至多为 Δ，G 有一个大小至少为 $(d+1)(\Delta+1) + 1$ 的独立集 X，且可以通过贪心算法求得。我们证明，要么 X 有一个无关顶点 w，要么 (M, d) 是一个否实例。

由于 X 是 G 的一个团，$M[X]$ 应当是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个欧氏距离矩阵。我们利用命题 17 验证这一点；若不成立，则返回 (M, d) 是一个否实例。此外，对于每个 $v \in V(G) \setminus X$，我们考虑团 $C_v = \{v\} \cup (N_G(v) \cap X)$。若存在 $v \in V(G) \setminus X$，使得 $M[C_v]$ 不是 $\mathbb{R}^d$ 中的欧氏距离矩阵，则我们报告 (M, d) 是一个否实例，并停止。从现在起，我们假设情况并非如此。

我们迭代构造互不相交的集合 $X_1, \ldots, X_{\Delta+1} \subseteq X$，每个集合的大小至多为 $d+1$，具体如下。假设 $X_0 = \emptyset$，我们利用命题 17 选取 X_i，使其成为 $M[X \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j]$ 关于 $i \in \{1, \ldots, \Delta+1\}$ 的度量基。由于对于 $i \in \{1, \ldots, \Delta+1\}$，$|X_i| \leq d+1$，因此 $|\bigcup_{i=1}^{\Delta+1} X_i| \leq (d+1)(\Delta+1)$。由于 $|X| \geq (d+1)(\Delta+1) + 1$，存在 $w \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\Delta+1} X_i\right)$。我们证明 w 无关。

▷ 断言 20. d-欧氏距离矩阵补全（EDMC）的实例 (M, d) 和 $(M - w, d)$ 等价。

这个断言的证明与断言 19 的证明思路相同，因此我们将其放在本定理证明之后。

由于 w 无关紧要，我们令 $M := M - w$ 并重复此过程。至多经过 n 轮，我们要么解决该问题，要么得到一个等价实例（M', d），其中 M' 是 M 的一个 $n' \leq (d+1)(\Delta+1)^2$子矩阵。这就完成了算法及其正确性证明的描述。

构造 X 可在多项式时间内完成。随后，根据命题 17，可在多项式时间内构造 X_1、...、$X_{\Delta+1}$。因此，我们可在多项式时间内找到 w。由于轮数至多为 n，总运行时间为多项式时间。证明完毕。◀

断言 20 的证明。如前所述，证明思路与断言 19 的证明相同。只需证明：如果 (M, d) 是一个是实例，那么 $(M - w, d)$ 也成立。令 $M = (m_{ij})$，并且不失一般性地假设 $w = n$。假设 $(\hat{M}, d)$ 是 $M = M - w$ 的一个是实例。注意，M 是 $G = G - w$ 的一个 G-部分矩阵。我们有，$\hat{M}$ 可以补全为一个 $(n-1) \times (n-1)$ 欧几里得距离矩阵 $\hat{M}^* = (m^*_{ij})$，其中$i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$。因此，存在一个由 $\mathbb{R}^d$ 中的点组成的 $(n-1)$-元组 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，可实现 $\hat{M}^*$，也就是说，对于 $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$，$\|p_i - p_j\|_2^2 = m^*_{ij}$。我们通过添加一个实现 w 的点 p_w，扩展 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，并通过添加一行和一列，从 $\hat{M}^*$ 构造 $M^* = (m^*_{ij})$，使得 M^* 是 M 的一个补全。

我们利用以下事实：X 是 G 的一个团，且 X_1 是欧氏距离矩阵 $M[X]$的度量基。设 $d' = |X_1| - 1$。那么，对于 $v \in X \setminus \{w\}$，点 p_v 嵌入在由点 p_v（$v \in X_1$）定义的 $\mathbb{R}^d$ 中的 d'维仿射子空间 L 内。此外，由于 $M[X]$是欧氏距离矩阵，根据命题 15，存在唯一的点 $p_w \in L$，使得对于 $v \in X_1$，$\|p_w - p_v\|_2^2 = m_{vw}$。对于每个 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，我们定义 $m^*_{vw} = m^*_{wv} = \|p_v - p_w\|_2^2$。我们证明，对于每个满足 $vw \in E(G)$ 的 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，都有 $m^*_{vw} = m_{vw}$。分以下两种情形讨论。

情形1： $v \in X$。那么，等式 $m^*_{vw} = m_{vw}$ 可由以下事实得出：X_1 是 $M[X]$ 的度量基，且根据 p_w的定义。

情形2：$v \in V(G) \setminus X$。由于 G 的最大度至多为 Δ，因此存在 $i \in \{1, \ldots, \Delta+1\}$，使得 $X_i \subseteq N_G(v)$。由于 $vw \in E(G)$，我们有 $C'_v = X_i \cup \{v, w\}$是 G的一个团。根据 X_i的选取，X_i 是 $M[X \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j]$的一个度量基。对于$d'' = |X_i| - 1$，存在一个 d''维仿射子空间 $L' \subseteq L$，其中包含当 $u \in X_i \cup \{w\}$时的点p_u。如果 $p_v \in L'$，那么 X_i 是 $M[C'_v]$ 和 $m^*_{vw} = m_{vw}$的一个度量基。如果$p_v \notin L'$，那么根据命题 16 (iii)，$X_i \cup \{v\}$是 $M[C'_v]$ 的一个度量基。于是再次得到 $m^*_{vw} = m_{vw}$。

由于对于所有 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，$M^*$ 是 M 的补全，而 $(p_1, \ldots, p_n)$ 是 M^* 在 $\mathbb{R}^d$ 中的实现。因此，M^* 是 M 在 $\mathbb{R}^d$ 中的补全。证明至此完成。◀

最后，在本节中，我们证明定理 11。

► **定理 11.** 存在一个多项式时间算法，对于给定的 d-*EDMC* 实例(M, d)，其中 M 是一个 $n \times n$ G-部分矩阵，且图 G 与大小为 k 的边团覆盖 C 一同给出，该算法要么解决该问题，要么输出一个等价实例(M', d)，使得 M'是 M 的一个 $n' \times n'$主子矩阵，其中 $n' \leq (d+1)k^2$。

16 欧几里得距离矩阵补全算法

证明。设 (M, d) 是一个 d-EDMC 实例，其中 M 是一个 G-部分矩阵，且 $\mathsf{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ 是 G 的边团覆盖。若 G 是完全图，则我们直接利用命题 17 解决该问题；若 $|V(G)| \leq (d+1)k^2$，则立即输出该实例。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，我们利用命题 17 检查 $M[C_i]$ 是否为 $\mathbb{R}^d$ 中的欧氏距离矩阵。若对于某个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，该条件不成立，则我们得出结论：(M, d) 是一个否实例，并停止。从现在起，我们假设 $n > (d+1)k^2$，且对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$M[C_i]$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的欧氏距离矩阵。我们证明存在一个无关顶点。

如果 G 有一个孤立顶点 w，那么 w 显然无关，因为对应的点可以任意映射到 $\mathbb{R}^d$ 中。假设 G 没有孤立顶点。那么每个顶点都属于 C 中的某个团。由于 $|V(G)| > (d+1)k^2$，存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得 $|C_i| > (d+1)k$。对于每个 $j \in \{1, \ldots, k\}$（包括 $j = i$），我们使用命题 17 选取 $M[C_i \cap C_j]$ 的一个度量基 X_j。由于对于 $j \in \{1, \ldots, k\}$，$|X_j| \leq d+1$，因此 $|\bigcup_{j=1}^{k} X_j| \leq (d+1)k$。又因为 $|C_i| > (d+1)k$，所以存在 $w \in C_i \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right)$。我们证明 w 无关。

▷ 命题21。 d-EDMC 的实例（M， d）和（$M - w$， d）等价。

同样，证明采用了与断言 19 的证明相同的论证，因此我们将其证明放在本定理证明之外。由于存在一个无关顶点 w，我们令 $M := M - w$ 并进行迭代。至多经过 n 轮，我们要么解决该问题，要么得到一个等价实例（M，d），其中 M' 是 M 的一个 $n' \times n'$ 子矩阵，且 $n' \leq (d+1)k^2$。至此，算法及其正确性证明的描述结束。由于给定了 $\mathcal{C}$，可根据命题 17 在多项式时间内构造 $X_1, \ldots, X_k$。因此，我们可以在多项式时间内找到 w。由于轮数至多为 n，总运行时间为多项式。证明至此结束。◀

命题21的证明。我们需要证明：如果（M， d）是一个是实例，那么（$M - w$， d）也如此。令 $M = (m_{ij})$，并且不失一般性地假设 $w = n$。假设（$\hat{}M$， d）是 $\hat{}M = M - w$ 的一个是实例。注意，$\hat{}M$ 是 $\hat{}G = G - w$ 的一个 $\hat{}G$-部分矩阵。我们有，$\hat{}M$ 可以补全为一个 $(n-1) \times (n-1)$ 欧几里得距离矩阵 $\hat{}M^* = (m^*_{ij})$，其中 i、$j \in \{1, \ldots, n-1\}$。因此，存在一个由 $\mathbb{R}^d$ 中的点组成的 $(n-1)$ 元组 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，使得它实现 $\hat{}M^*$，也就是说，对于 i、$j \in \{1, \ldots, n-1\}$，有 $\|p_i - p_j\|_2^2 = m^*_{ij}$。我们通过添加一个实现 w 的点 p_w 来扩展 $(p_1, \ldots, p_{n-1})$，并通过增加一行和一列，从 $\hat{}M^*$ 构造 $M^* = (m^*_{ij})$，使得 M^* 是 M 的一个补全。

由于 C_i 是 G 的团，且 X_i 是欧氏距离矩阵 $M[C_i]$ 的度量基，因此，对于 $v \in C_i$ 的 $p_v \setminus \{w\}$，这些点嵌入在由 p_v 至 $v \in C_i$ 这些点定义的 $\mathbb{R}^d$ 中的 $d' = (|X_i| - 1)$ 维仿射子空间 L 内。由于 $M[C_i]$ 是欧氏距离矩阵，根据命题 15，存在唯一的点 $p_w \in L$，使得对于 $v \in X_1$，$\|p_w - p_v\|_2^2 = m_{vw}$ 成立。对于每个 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，我们定义 $m^*_{vw} = m^*_{wv} = \|p_v - p_w\|_2^2$。我们证明，对于每个满足 $vw \in E(G)$ 的 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，都有 $m^*_{vw} = m_{vw}$。分两种情形讨论。

情形1： $v \in C_i$。那么，等式 $m^*_{vw} = m_{vw}$ 由以下事实可得：X_i 是 $M[C_i]$ 的度量基，且根据 p_w 的定义。

情形2： $v \in V(G) \setminus C_i$。于是，对于某个 $j \in \{1, \ldots, k\}$，$v \in C_j$，使得 $j \neq i$。回想一下，X_j 是 $M[C_i \cap C_j]$ 的度量基。由于 $v \in C_j \setminus C_i$，$C'_j = (C_i \cap C_j) \cup \{v, w\}$ 是 G 的一个团。根据 X_j 的选取，对于 $d'' = |X_i| - 1$，存在一个 d'' 维仿射子空间 $L' \subseteq L$，它包含满足 $u \in X_j \cup \{w\}$ 的点 p_u。如果 $p_v \in L'$，那么 X_j 是 $M[C'_j]$ 的度量基，并且 $m^*_{vw} = m_{vw}$。如果 $p_v \notin L'$，那么根据命题 16 (iii)，$X_j \cup \{v\}$ 是 $M[C'_j]$ 的度量基。于是，我们再次得到 $m^*_{vw} = m_{vw}$。

由于对于所有 $v \in V(G) \setminus \{w\}$，$m^*_{vw} = m^*_{wv} = m_{vw}$，因此 M^* 是 M 的一个补全，而 $(p_1, \ldots, p_n)$ 是 M^* 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个实现。因此，M^* 是 M 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个补全。证明至此完成。◀

注意，定理 11 假设已给定一个边团覆盖。然而，根据 Gramm 等人 [34] 的结果，可以在 k 时间内以固定参数可解的方式找到大小至多为 k 的边团覆盖（若其存在）。

▶ **命题 22** ([34])。**给定一个图** G 和一个正整数 k，可以在 $2^{2^{\mathcal{O}(k)}} n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内判定 G 是否存在大小至多为 k的边团覆盖。此外，若边团覆盖存在，也可以在相同时间内找到它。

由此可得以下推论。

▶ **推论 12** ($\star$)。**对于每个** d、$k \in \mathbb{N}$ 和 $n \times n$ 部分矩阵 M，若 M 中已指定条目可以由至多 k 个完全指定的主子矩阵覆盖，则 *d-EDMC* 可在 $2^{\mathcal{O}(d^2 \cdot k^4 \cdot (\log d + \log k))} + 2^{2^{\mathcal{O}(k)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内求解。

证明。 我们首先使用 Gramm 等人的算法 [34]，为底层图计算一个大小为 k 的边团覆盖（或者判定其不存在）。这需要 $2^{2^{\mathcal{O}(k)}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间。随后，我们执行定理 11 中的压缩，再运行定理 5 中的算法。◀

4 有界填充数的情形（距平凡情形的距离 III）

本节介绍当 G 几乎是弦图（即其填充数较小）时，针对 G-部分矩阵的 d-EDMC 算法。回顾一下，图 G 的最小填充是指添加到 G 中、使其成为弦图的最小非边集合的大小。

▶ **定理 13**。设 M 是一个 $n \times n$ G-部分矩阵，且 $d \in \mathbb{N}$。存在一个运行时间为 $d^{\mathcal{O}(kd)}\, 2^{\mathcal{O}(k^2)}\, n^{\mathcal{O}(k)}$ 的算法，其中 k 是 G 的最小填充数，并且该算法能够正确判定 (M, d) 是否为 *d-EDMC* 的是实例。

为证明该定理，我们先作如下准备。

▶**命题 23** ([5])。如果 G 是弦图，那么每个 G-部分矩阵 M 都可以补全为 $\mathbb{R}^d$ 中的欧氏距离矩阵，前提是 M 的每个完全指定的主子矩阵都可以嵌入 d。

▶ **定义 24** ([6])。设 R 是一个实闭域，$\mathcal{P} \subset R[X_1, \ldots, X_t]$ 是一个有限的多项式集合。$\mathcal{P}$-原子 是 $P = 0$、$P \neq 0$、$P \geq 0$、$P \leq 0$ 之一，其中 P 是 $\mathcal{P}$ 中的一个多项式；而一个无量词的 $\mathcal{P}$-公式 是由$\mathcal{P}$-原子以及逻辑联结词 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$ 构成的公式。带自由变量$x_1, \ldots, x_r$的公式 F 的 R-实现 是一个映射 $\nu\colon \{x_1, \ldots, x_r\} \to R$，使得将每个自由变量 x 替换为 $\nu(x)$ 后，由 F 得到的语句（记作 $F[\nu]$）为真。

▶ **命题 25** (定理 13。13, [6])。设 $s, \ell \in \mathbb{N}$。设 $(\exists X_1) \ldots\ldots (\exists X_t) F(X_1, \ldots, X_t)$是一个句子，其中 $F(X_1, \ldots, X_t)$ 是一个无量词的 P-公式，$P \subset R[X_1, \ldots, X_t]$ 是至多含有 s 个多项式的集合，且每个多项式的度至多为 ℓ。存在一种算法，可以判定该句子的真假，其复杂度为[3] $s^{t+1} \cdot \ell^{\mathcal{O}(t)}$，其中 D 中的 D 是由 P 中多项式的系数生成的环$_\ell$。

[3] 这里的复杂度度量是算术运算的数量。请记住，我们使用实数 RAM 模型。

18 欧几里得距离矩阵补全算法

▶ **定义 26**。设 M 是一个 G-部分矩阵，其中 $V(G) = [n]$，并令 Z 表示 $\binom{[n]}{2}$ 中的有序对集合，使得 Z 中的每个有序对都对应于 M中一对未指定项；也就是说，对于每个$\{i,j\} \in Z$， M_{ij}和 M_{ji}均为未指定项。如下定义矩阵 $\hat{}M$。若$\{i,j\} \notin Z$，则定义 $\hat{}\, M_{ij} = M_{ij}$；否则定义 $\hat{}\, M_{ij} = z_{ij}$，其中 z_{ij} 是一个不定元。

我们对 [7] 中 Z-增广凯莱-门格尔行列式的概念作如下调整。

▶ **定义27.** 设 M 和 Z 如定义26所述。设 $I = \{x_0、\ldots\ldots、x_r\} \subseteq [n]$。以 I 为索引的 Z-增广凯莱-门格尔行列式由凯莱-门格尔行列式通过将每个 $\rho^2_{x_i,x_j}$ 替换为 $\hat{}M_{x_i,x_j}$ 得到。

即:

$$CM_Z(x_0, x_1, \ldots, x_r) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \hat{M}_{x_0x_1} & \hat{M}_{x_0x_2} & \ldots & \hat{M}_{x_0x_r} \\ 1 & \hat{M}_{x_0x_1} & 0 & \hat{M}_{x_1x_2} & \ldots & \hat{M}_{x_1x_r} \\ 1 & \hat{M}_{x_0x_2} & \hat{M}_{x_1x_2} & 0 & \ldots & \hat{M}_{x_2x_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{M}_{x_0x_r} & \hat{M}_{x_1x_r} & \hat{M}_{x_2x_r} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

▶ **引理28.** 设 M、Z 和 $I = \{x_0、\ldots\ldots、x_r\}$ 如定义27所述。那么，$CM_Z(x_0、x_1、\ldots\ldots、x_r)$ 是一个关于不定元集合 $\{z_{ij} \mid i、j \in Z\}$ 的实系数多元多项式，其中每个单项式的度至多为 $\min(|I|、2|Z|)$。

证明。该引理由以下事实直接得出：所计算的行列式对应一个具有如下性质的矩阵。它是一个 $(|I|+1) \times (|I|+1)$ 矩阵，其首行和首列仅包含常数，总共恰有 $2|Z|$个互不相同的变量，且每个变量在矩阵中都只出现于一个位置。◀

▶ **引理 29**。存在一个算法，给定定义 27 中所述的 M, I, Z，可在 $|I|^{\mathcal{O}(|I|)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内运行，并生成以 I 为索引的 Z-增广凯莱-门格尔行列式所表示的多项式。

$\hat{}$**证明**。构造 M 给定 M, I, Z 十分直接，显然可在多项式时间内完成。由此，我们构造 $\hat{}\, M[I]$，之后算法只需计算一个 $|I|+1$ 维矩阵的行列式，这可以在指定的时间内通过穷举完成。◀

▶ **引理 30**。设 $n \times n$ 为欧氏距离矩阵 M 且 $Y \subseteq [n]$。令 $B \subseteq [n]$ 为$M - Y$的一个度量基。则， M 存在一个包含 B的度量基。

证明。若 B 是 M的一个度量基，则结论成立，因此假设并非如此。令 B_{opt} 为 M的一个度量基。根据假设， B 不是 M 的一个度量基，结合命题 16 (iv)，可得 $|B_{\text{opt}}| > |B|$。此外，根据命题 16 (iii)，存在一个子集 $B_{\text{ext}} \subseteq B_{\text{opt}}$，其大小为 $|B_{\text{opt}}| - |B|$，使得 $B' = B \cup B_{\text{ext}}$ 是一个独立集。由命题 16 (iv)可知， B' 是 M的一个度量基，引理得证。◀

▶ **定理 13**。设 M 是一个 $n \times n$ G-部分矩阵，且设 $d \in \mathbb{N}$。存在一种算法，其运行时间为 $d^{\mathcal{O}(kd)}\, 2^{\mathcal{O}(k^2)} n^{\mathcal{O}(k)}$，其中 k 是 G的最小填充数，并能正确判定(M, d) 是否为 d-*EDMC* 的是实例。

证明。给定实例 (M, d)，其中 M 是 G-部分矩阵；此外，设 X 是 G 的一个至多包含 k 条非边的集合，使得 $G' = G + X$ 是弦图。从 M 构造出 G 是直接的；得到 G后，我们使用 Fomin 和 Villanger 算法 [29]在 $2^{o(k)}n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内计算 X （如果存在）。在证明的其余部分中，我们只会提及图 G'，因此可以将 X 中的点对称为边。令 Z 表示一个包含 X中每条边对应两个不定元的集合。形式上，对于每条边 $uv \in X$，Z 都包含不定元 z_{uv} 和z_{vu}。设 C_1，……，C_t 是 G'中的极大团。众所周知，$t \leq n$，并且这些团可以在多项式时间内计算 [31]。

1. 对每个 $i \in [t]$执行以下操作：
   a. 定义 $Z_i = \{z_{uv} \mid u, v \in V(C_i)\}$。也就是说，$Z_i$ 由 X 中对应于两端点均属于 $V(C_i)$ 的边的不定元组成。b. 定义 $V_X(C_i) = \{u \mid \exists v\colon uv \in X \wedge \{u, v\} \subseteq V(C_i)\}$。也就是说，$V_X(C_i)$ 是 X 中包含在 C_i内的边的端点集合。c. 定义 B_i为 $M_i = M[V(C_i) \setminus V_X(C_i)]$ 的任意度量基。根据定义，M_i 是完全指定的，因此 B_i 定义良好。如果 $|B_i| > d + 1$，则停止并得出输入是一个否实例的结论。d. 对于每个大小至多为 $d + 1 - |B_i|$的 $Y \subseteq V_X(C_i)$，执行以下操作：i. 定义 $B_i^Y = B_i \cup Y = \{x_0, \ldots, x_r\}$。ii. 使用引理 29 构造以下原子集合 P_i^Y：A. $(-1)^{j+1}CM_{Z_i}(x_0, x_1, \ldots, x_j) > 0$，其中 $1 \leq j \leq r$。B. 对每个 $x \in V(C_i) \setminus B_i^Y$，$CM_{Z_i}(x_0, x_1, \ldots, x_r, x) = 0$。C. 对每个 $x, y \in V(C_i) \setminus B_i^Y$，$CM_{Z_i}(x_0, x_1, \ldots, x_r, x, y) = 0$。D. 对每个不定元 $z_{uv} \in Z_i$，$z_{uv} \geq 0$。E. 对于 Z_i中的每对不定元 z_{uv}, z_{vu}，$z_{uv} - z_{vu} = 0$。iii. 定义 ϕ_i^Y为由 P_i^Y中的原子合取而成的无量词公式。e. 定义 Ψ_i 为对所有大小至多为 $d + 1 - |B_i|$的 $Y \subseteq V_X(C_i)$ 所对应的公式ϕ_i^Y取析取得到的无量词公式。

2. 定义无量词公式 $\Gamma = \bigwedge_{i \in [t]} \Psi_i$.
3. 对将 $\mathcal{Z}$ 中的不定元作存在量化，并将其前置于 Γ 所得到的句子，运行命题 25 的算法。返回该次运行所得的相同答案。

▷ 断言 31. (M, d) 是 d-EDMC 的是实例，当且仅当该算法返回 Yes。

证明。我们证明这个等价关系的两个方向。

假设 M 可以补全为一个欧氏距离矩阵 M''。对每条边 $uv \in X$，定义 $z_{uv} = M''_{uv}$。回顾一下，$M''_{uv} = M''_{vu} \geq 0$，因此我们有 $z_{uv} = z_{vu} \geq 0$。令 $\nu\colon Z \to \mathbb{R}$ 为满足 $\nu(z_{uv}) = M''_{uv}$ 的映射，其中对所有 $z_{uv} \in Z$ 均成立。为证明 $\Gamma[\nu]$ 成立，只需验证每个 $i \in [t]$都满足 $\Psi_i[\nu]$，因此固定一个 $i \in [t]$。根据 Ψ_i的定义，我们需要论证存在一个子集 $Y \subseteq V_X(C_i)$，使得 $|Y| \leq d + 1 - |B_i|$ 成立，且 $\phi_i^Y[\nu]$ 成立。根据引理 30，存在一个度量基 B'_i，它是 $M''[V(C_i)]$ 的度量基，并且包含 B_i。由于 $M''[V(C_i)]$可嵌入 d，$|B'_i| \leq d + 1$，因此 $Y = B'_i \setminus B_i$ 满足 $|Y| \leq d + 1 - |B_i|$。我们已经注意到，P_i^Y中的 (D) 型和 (E) 型原子已满足，因此只需考虑 (A)–(C) 型。然而，根据命题 14，这些条件成立，因为 $M''[V(C_i)]$是一个以度量基 B'_i为度量基的欧氏距离矩阵。

反过来，设 $\nu\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，使得 $\Gamma[\nu]$ 成立。构造矩阵 $\widetilde{M}$ 通过设定 $\widetilde{M}_{ij} = M_{ij}$（若 $z_{ij} \notin \mathcal{Z}$，否则设为 $M_{ij} = \nu(z_{ij})$）。根据构造，$\widetilde{M}$ 是一个 G'-部分矩阵。根据命题 23，我们只需验证 $\widetilde{M}$的每个完全指定的主子矩阵

$\widetilde{\ }$可嵌入 d维空间。每个这样的子矩阵都包含在某个 $M[V(C_i)]$ 中，因此固定一个 $i \in [t]$。由于 $\Psi_i[\nu]$ 成立，存在 $Y \subseteq V_X(C_i)$，满足 $|Y| \leq d+1-|B_i|$ 且 $\phi_i^Y[\nu]$成立。固定一个最小的此类 Y。令 $B_i' = B_i \cup Y$。根据命题 14， B_i' 是$\sim$ $\sim M[V(C_i)]$,的度量基，这表明 $M[V(C_i)]$ d可嵌入相应维度的空间。

由此完成了该断言的证明。 ◀

▷ 断言32. 对每个 $i \in [t]$ 和 $Y \subseteq V_X(C_i)$， P_i^Y中的原子都是$\mathcal{P}_i^Y$-原子，其中$\mathcal{P}_i^Y$是一个由$\mathcal{O}(n^2)$个多项式构成的集合，且每个多项式的度至多为 $\min(d+3, 2k)$。

证明。固定 $i \in [t]$，并令 $Y \subseteq V_X(C_i)$ 如断言中所述。考虑 P_i^Y 中的原子，根据定义，它们属于类型 (A)–(E)。由引理28，类型 (A)–(C) 原子中出现的每个增广CM行列式都是一个度至多为 $\min(d+3, 2k)$ 的多项式。此外，类型 (A)–(C) 原子的数量由类型 (C) 主导；类型 (C) 的原子有 $O(n^2)$ 个，因为 x 和 y各有 $O(n^2)$ 种选择。此外，类型 (D) 和 (E) 合计至多包含 $3k$ 个由一次多项式构成的原子。最后，回顾一下， k 至多等于 n 顶点图 G' 中边的数量，因此 $k = O(n^2)$。由此完成了该断言的证明。◀

▷ 断言33。该算法的运行时间为 $d^{\mathcal{O}(kd)} \cdot 2^{\mathcal{O}(k^2)} \cdot n^{\mathcal{O}(k)}$。

证明。 步骤 1(a)、1(b) 显然都能在多项式时间内运行。步骤 1(c) 需要多项式时间（见命题 17）来计算 M_i的度量基。步骤 1(d) 至多处理 4^k 个子集Y，每个子集计算 $\mathcal{O}(n^2)$ 个原子，其中每个原子都能在 $d^{\mathcal{O}(d)} n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内由引理 29 计算得到）。

因此， Γ在步骤 2 中的总构造时间上界为：

$$\sum_{\substack{i \in [t] \\ Y \in \binom{V_X(C_i)}{\leq d+1-|B_i|}}} \mathcal{O}\left(|P_i^Y|\right) = \mathcal{O}(\rho(d,n,k)),$$

其中， $\rho(d,n,k)$ 表示 Γ中出现的原子总数的一个上界。利用断言32对每个 P_i^Y的大小进行界定，可得 $\rho(d,n,k) = d^{c_1 d} \cdot 2^k \cdot n^{c_2}$，其中 $c_1, c_2 \geq 1$为某些常数。

Γ 中构成原子的所有多项式，根据断言32，其度均为 $\leq \min(d+3, 2k)$。因此，当步骤 3 调用命题 25 中的算法，并且至多包含 $2k$ 个量化变量时，总运行时间上界为 $\rho(d,n,k)^{2k+2} \cdot (2k)^{\mathcal{O}(k)}$，而该上界不超过所声明的运行时间。◀

至此，定理的证明完成。 ◀

由于每个 n 顶点图的最小填充数至多为 $\binom{n}{2}$，且每个 $n \times n$ 欧氏距离矩阵都可以嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中，因此直接代入 $k \leq n^2$ 和 $d \leq n$，即可由定理 13 得出， d-EDMC 可以在 $2^{\mathcal{O}(n^4)}$ 时间内求解。然而，采用 [7] 中的方法进行更细致的论证后，可得到定理 5 中所述的更优运行时间。

▶ **定理 5**。 存在一种算法，给定一个 $n \times n$ 部分矩阵 M 和 $d \in \mathbb{N}$，可在 $2^{\mathcal{O}(n^2 \log n)}$ 时间内运行，并正确判定 (M, d) 是否为 d-*EDMC* 的是实例。

证明。 与定理 13 的证明相比，本证明的关键思路在于，我们只需“猜测”假设完成矩阵的度量基，根据猜测构造相应的多项式方程，然后应用命题 25。具体细节如下。

定义 $Z = \{z_{uv} \mid uv \notin E(G)\}$。也就是说， Z 由与 G 的非边相对应的不定元组成。对于每个大小为 $r \leq d+1$ 的 $Y = \{x_0, \ldots, x_r\} \subseteq V(G)$，使用引理 29 构造以下原子集合 P^Y：

1. $(-1)^{j+1}CM_Z(x_0, x_1, \ldots, x_j) > 0$，其中 $1 \leq j \leq r$。2. $CM_Z(x_0, x_1, \ldots, x_r, x) = 0$，对于每个 $x \in V(G) \setminus Y$。3. $CM_Z(x_0, x_1, \ldots, x_r, x, y) = 0$，对于每个 $x, y \in V(G) \setminus Y$。4. $z_{uv} \geq 0$，对于每个不定元 $z_{uv} \in Z$。5. $z_{uv} - z_{vu} = 0$，对于 Z 中的每对不定元 z_{uv}, z_{vu}。

将 ϕ^Y 定义为由 P^Y 中的原子合取而成的无量词公式。

对于每个大小至多为 $d+1$ 的 $Y \subseteq V(G)$，在这样得到的句子上运行命题 25 的算法：对 Z 中的不定元进行存在量化，并将它们置于 ϕ^Y 之前。当且仅当至少存在一种 Y 的选择，使得在 $\exists Z \cdot \phi^Y$ 上的这次调用返回 Yes 时，返回 Yes。正确性显而易见，因为我们穷举了假设的补全的欧氏距离矩阵的所有可能度量基。所声称的运行时间源于以下事实：命题 25 的每次调用都针对一个由 $n^{\mathcal{O}(1)}$ 个原子构成的系统进行，其中每个原子的度至多为 $|Z| \leq n^2$，且总共至多有 2^n 次此类调用。◀

5 结论与开放问题

根据定理 13，对于每个固定的 d 和 k 值，d-EDMC 问题都可以在多项式时间内求解。此外，对于固定的 k 值，我们的算法关于 d 是 FPT 的。因此，一个自然的问题是：关于 两者 d 和 k，该问题是否属于 FPT?

除此之外，我们的工作还提出了一系列问题，探究图 G 的哪些其他结构参数可以导出 XP 或 FPT 算法。

图算法中研究最充分的参数之一是图的树宽 。然而，Saxe 的经典结果 [47] 表明，即使 G 是一个环（其树宽至多为 2），d-EDMC 问题对于 $d = 1$ 仍然是 NP-困难的。因此，以树宽和维数为参数时，该问题是参数化NP完全的。当以反馈顶点集 的大小为参数时，同样的困难性结果也成立，因为环的反馈顶点集大小为 1。

当以 G 的最小顶点覆盖 大小作为参数时，会出现一种更有趣的情况。注意，如果 G 的顶点覆盖大小至多为 k，那么 G 的填充数至多为 $\binom{k}{2}$。事实上，只需在顶点覆盖中的顶点之间添加所有缺失的边，就可以使 G 成为弦图。另一个有用的观察是，如果 G 的顶点覆盖大小至多为 k，那么不失一般性地，我们可以假设嵌入维数 $d \leq k+1$。这是因为，一旦顶点覆盖中的顶点完成嵌入，其余顶点就构成一个独立集，并且可以利用至多一个额外维度将它们全部放置。因此，根据定理 13，当以 G 的最小顶点覆盖大小作为参数时，d-EDMC 问题属于 XP。因此，一个自然的开放问题是：在这一参数化下，该问题是否属于 FPT，或者是 W[1]-困难的。

另一个其对 d-EDMC 复杂性影响尚未明确的 G 参数是树深度 [46]。朝这一目标迈出的第一步，是了解以树深度和 d 为参数时 d-EDMC 的参数化复杂性。

参考文献

1 Jorge Alencar、Tibérius O. Bonates、Carlile Lavor 和 Leo Liberti。实现欧几里得距离矩阵的算法。离散数学电子笔记，50：397–402，2015年。网址：https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.07.066，doi:10.1016/J.ENDM.2015.07.066。2 Abdo Y. Alfakih。欧几里得距离矩阵及其在刚性理论中的应用。施普林格出版社，2018年。

22 欧几里得距离矩阵补全算法

3 A.Y. Alfakih、A. Khandani 和 H. Wolkowicz。通过半定规划求解欧几里得距离矩阵补全问题。Comput. Optim. Appl.，12：13–30，1999年。4 Louis Asimow 和 Bernd Roth。图的刚性。美国数学会会刊，245：279–289，1978年。网址： https://www.ams.org/tran/1978-245-00/S0002-9947-1978-0511410-9/， doi:10.2307/1998867。5 M. Bakonyi 和 C. Johnson。欧几里得距离矩阵补全问题。SIAM J. Matrix Anal. Appl.，16：646–654，1995年。6 Saugata Basu、Richard Pollack 和 Marie-Françoise Roy。实代数几何中的算法（数学中的算法与计算）。施普林格出版社，柏林、海德堡，2006年。7 Matthias Bentert、Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、M. S. Ramanujan 和 Saket Saurabh。当距离出现偏差时：存在离群点和距离违例情况下的欧几里得嵌入。载于 Oswin Aichholzer 和 Haitao Wang（编），第41届国际计算几何研讨会，SoCG 2025，2025年6月23日至27日，日本金泽，第332卷 LIPIcs，第15:1–15:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2025年。网址： https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG.2025.15， doi:10.4230/LIPICS.SOCG.2025.15。8 Bonnie Berger、Jon M. Kleinberg 和 Frank Thomson Leighton。带有任意误差的三维模型重建。J. ACM，46(2)：212–235，1999年。 doi:10.1145/301970.301972。9 P. Biswas、T.-C. Liang、K.-C. Toh、T.-C. Wang 和 Y. Ye。采用半定规划方法进行含噪距离测量下的传感器网络定位。IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.，3：360–371，2006年。10 P. Biswas 和 Y. Ye。采用半定规划进行自组织无线传感器网络定位。载于第3届国际传感器网络信息处理研讨会，第46–54页，伯克利，加利福尼亚州，2004年。ACM。11 L.M. Blumenthal。距离几何理论及应用。Chelsea，纽约，第2版，1970年。12 E.J. Candes 和 Y. Plan。含噪矩阵补全。Proc. IEEE，98：925–936，2010年。13 Augustin-Louis Cauchy。关于多边形和多面体。巴黎综合理工学院学报，19：87–90，1813年。14 Arthur Cayley。行列式理论。《哲学杂志》，19：1–16，1841年。15 Robert Connelly。关于一般全局刚性。载于《应用几何与离散数学》，DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书第4卷，第147–155页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991年。16 G.M. Crippen。化学距离几何：当前实现与未来展望。J. Math. Chem.，6：307–324，1991年。17 G.M. Crippen 和 T.F. Havel。距离几何与分子构象，化学计量学丛书第15卷。Research Studies Press，汤顿，1988年。18 F. Critchley。内积矩阵与平方距离矩阵之间的某些线性映射。Linear Algebra Appl.，105：91–107，1988年。19 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法。施普林格，2015年。网址： http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-21275-3。20 J. Dattorro。凸优化与欧几里得距离几何。Meboo Publishing USA，2008年。21 Jan de Leeuw 和 Willem Heiser。多维尺度分析理论。载于 P. R. Krishnaiah 和 L. N. Kanal（编），统计学手册，第 2 卷，第 285–316 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1982年。22 Michel Deza、Monique Laurent 和 Robert Weismantel。割与度量几何，第2卷。施普林格，1997年。23 Reinhard Diestel。图论，数学研究生教材第173卷。施普林格出版社，柏林，第3版，2005年。

24 L. Doherty、K.S.J. Pister 和 L. El Ghaoui。无线传感器网络中的凸位置估计。载于 IEEE INFOCOM，第 3 卷，第 1655–1663 页，安克雷奇，阿拉斯加州，2001 年。25 P. Erdös 和 G. Szekeres。几何学中的一个组合问题。Compositio Math.，2:463–470，1935 年。URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__463_0。26 Haw-ren Fang 和 Dianne P O' Leary。欧几里得距离矩阵补全问题。Optimization Methods and Software，27(4-5):695–717，2012年。27 R.W. Farebrother。具有欧几里得距离矩阵应用的三个定理。Linear Algebra Appl.，95:11–16，1987 年。28 Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。核化。参数化预处理理论。剑桥大学出版社，2019 年。29 Fedor V. Fomin 和 Yngve Villanger。最小填充的亚指数参数化算法。SIAM J. Computing，42(6):2197–2216，2013 年。30 W. Glunt、T. L. Hayden 和 M. Raydan。由距离矩阵确定分子构象。Journal of Computational Chemistry，14:175–190，1998 年。31 Martin Charles Golumbic。算法图论与完美图。学术出版社，纽约，1980 年。32 J.C. Gower。欧几里得距离几何。Math. Sci.，7:1–14，1982 年。33 J.C. Gower。欧几里得距离矩阵与非欧几里得距离矩阵的性质。Linear Algebra Appl.，67:81–97，1985 年。34 Jens Gramm、Jiong Guo、Falk Hüffner 和 Rolf Niedermeier。团覆盖的数据约简与精确算法。ACM Journal of Experimental Algorithmics，13，2008 年。35 Jack E. Graver、Brigitte Servatius 和 Herman Servatius。组合刚性，《Graduate Studies in Mathematics》第 2 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，1993 年。36 R. Grone、C.R. Johnson、E.M. Sá 和 H. Wolkowicz。部分厄米矩阵的正定补全。Linear Algebra Appl.，58:109–124，1984 年。37 T. F. Havel。评估用于根据核磁共振获得的距离约束确定蛋白质结构的计算策略。Progress in Biophysics and Molecular Biology，56:43–78，1991 年。38 T.F. Havel、I.D. Kuntz 和 G.M. Crippen。距离几何理论与实践。Bull. Math. Biol.，45:665–720，1983 年。39 B. Hendrickson。分子问题：利用全局优化中的结构。SIAM Journal on Optimization，5:835–857，1995 年。40 I. D. Kuntz、J. F. Thomason 和 C. M. Oshiro。距离几何。载于 Methods in Enzymology，第 177 卷，第 159–204 页。学术出版社，1993 年。41 M. Laurent。正半定与欧几里得距离矩阵补全问题概览。载于《组合优化问题的半定规划与内点方法》，Fields Institute Communications，第 51–76 页。美国数学会，普罗维登斯，1998 年。42 Monique Laurent。正半定与欧几里得距离矩阵补全问题的多项式实例。SIAM J. Matrix Anal. Appl.，22:874–894，2001 年。43 Monique Laurent。矩阵补全问题。载于 Christodoulos A. Floudas 和 Panos M. Pardalos 编，《优化百科全书》。施普林格，波士顿，MA，2008 年。 doi:10.1007/978-0-387-74759-0 355。_44 Karl Menger。关于一般度量的研究。Mathematische Annalen，100:75–163，1928 年。45 Jorge J. Moré 和 Zhijun Wu。距离几何问题的全局延拓。SIAM Journal on Optimization，7:814–836，1997 年。46 Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性——图、结构与算法，《算法与组合学》第 28 卷。施普林格，2012 年。47 James B Saxe。加权图嵌入 k 维空间是强 NP 困难的。载于第 17 届 Allerton通信、控制与计算会议，1979 年，第 480–489 页，1979 年。

24 欧几里得距离矩阵补全算法

48 J.B. Saxe。加权图嵌入 k 维空间是强 NP 困难的。载于第 17 届 Allerton通信、控制与计算会议，第 480–489 页，1979 年。49 Marcus Schaefer。图与连杆结构的可实现性。载于 János Pach 编，《几何图论三十篇论文》，第 461–482 页。施普林格，纽约，2013 年。doi:10.1007/978-1-4614-0110-0_24。50 Marcus Schaefer、Jean Cardinal 和 Tillmann Miltzow。实数存在理论作为复杂性类：一份汇编。arXiv 预印本，abs/2407.18006，2024 年。URL: https://arxiv.org/abs/2407.18006。51 Isaac J. Schoenberg。对 Maurice Fréchet 文章“关于一类可向量地应用于希尔伯特空间的距离空间的公理化定义”的评论。《数学年刊》，36:724–732，1935 年。52 Anastasios Sidiropoulos、Dingkang Wang 和 Yusu Wang。带离群点的度量嵌入。载于第二十八届 ACM-SIAM离散算法研讨会年会论文集（SODA），第 670–689 页。SIAM，2017 年。53 Manfred J. Sippl 和 Harold A. Scheraga。嵌入问题的求解与对称矩阵的分解。Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.，82(8):2197–2201，1985 年。doi:10.1073/pnas.82.8.2197。54 K.Q. Weinberger、F. Sha 和 L.K. Saul。学习用于非线性降维的核矩阵。载于第 21 届国际机器学习会议（ICML），第 106 页，班夫，AB，2004 年。ACM。55 Y. Yemini。位置定位问题的若干理论方面。载于第 20 届计算机科学基础年会（SFCS），第 1–8 页。IEEE，1979 年。56 G. Young 和 A. Householder。根据两两距离讨论一组点。《心理计量学》，3:19–22，1938 年。