确实存在能够通过局部多数规则解决全局多数问题的非平凡自动机网络

Pedro Paulo Balbi[a]、Kévin Perrot[b]、Marius Rolland[b]、* 和 EuricoRuivo[a]

[a]麦肯齐长老会大学，计算与信息学院，*Rua da Consolação 896*，*Consolação*，圣保罗，*SP 01302-907*，巴西

[b]艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，*LIS*，*UMR 7020*，*Av. de Luminy 163*，马赛，*13009*，法国

文章信息

关键词：密度分类任务
分布式共识决策问题

摘要

全局多数问题通常称为密度分类任务，是探究自动机网络计算能力的经典基准。它提出了一个看似简单却颇具挑战的问题：能否仅凭完全局部的方式，判断任意二元状态的初始配置是否能够演化为反映初始全局多数的最终同质全局配置？虽然已知，在具有周期边界的元胞自动机这一特定情况下，没有任何规则能够解决该问题，但在其他表述形式中已有解决方案，而另一些表述形式下的问题仍未解决。针对后一种情况，我们在此探究仅采用局部多数规则的自动机网络解决该问题的可能性，重点找出能够解决该问题的非平凡情形，并解释其原因。

arXiv:2603.19472v1 [cs.DM] 19 Mar 2026

1. 引言：密度分类任务——分布式共识计算中的一项挑战

全局多数问题通常称为密度分类任务，简称 DCT。它是研究中的一项开创性基准，传统上主要用于元胞自动机（CAs）的研究，但自然也适用于一般的自动机网络，乃至更广泛的复杂系统和分布式计算。它提出了一个看似简单却颇具挑战的问题：给定一个由二元状态（0 和 1）组成的初始配置，由局部交互的组件构成的系统能否演化为反映初始全局多数的最终同质全局配置？DCT 经久不衰的难度及其理论意义，使其成为理解去中心化信息处理局限与能力的关键内容。

从根本上说，DCT 要求自动机网络确定并传播全局多数状态。在其最初的表述中，奇数大小格点上的二元一维元胞自动机，在周期边界条件下，如果初始构型中 1 的数量多于 0，就必须收敛到所有单元格均处于 1 状态的最终配置（齐次不动点）；否则则收敛到所有单元格均为 0 的配置。这一挑战因其基本运行原理而更加艰巨：格点上的每个位置（或任意自动机网络中的节点）都依据固定的局部规则，仅根据自身当前状态及其直接邻居的状态同步更新。系统中没有中央控制器、没有全局存储器，也没有远距离单元格之间的直接通信，这意味着系统必须实现分布式共识。

作为自动机网络中通过分布式共识求解的判定问题，对 DCT 的研究不断揭示出与离散动力系统相关的深刻而丰富的概念网络，以至于它已成为该领域最富成果的基准问题（尽管也存在其他问题，正如 Montalva-Medel、de Oliveira 和 Goles （2018）中所讨论的）。

多年来，人们早已知道，没有任何单一的二值元胞自动机规则能够解决该任务（Land and Belew(1995），或者 Ruivo、Perrot、Balbi 和 Perrotin (2024) 给出了更简单的证明），而且证据表明，即使采用确定性分块顺序异步更新，问题也可能无解（Ruivo 等人 (2024）。这些不可行性结果有力地确立了该问题在标准元胞自动机假设下的理论难解性。

尽管如此，相关文献表明，DCT 的表述方式不同——例如边界条件的类型、附加状态的引入、规则随时间变化的可能性，以及不同节点采用不同规则——会影响问题是否存在解。

pedrob@mackenzie.br (P.P. Balbi)；kevin.perrot@lis-lab.fr (K. Perrot)；marius.rolland@lis-lab.fr (M. Rolland)；eurico.ruivo@mackenzie.br (E. Ruivo) ORCID(s):

网络中的节点；节点之间的其他连接模式；在状态转换中加入记忆；以及异步更新方式——这些因素都可能证明解存在或不存在，或至少为其中一种可能性提供证据。许多此类情况都在de Oliveira (2014年的研究中有所讨论；这仍是目前关于该问题最全面的综述。

与后续研究相呼应，我们在此探讨局部多数规则 能否在自动机网络节点之间采用不同连接模式时解决 DCT。该规则很简单：节点的下一状态由其邻域中当前出现频率最高的状态决定；也就是说，邻域由在有向连接模式中与该节点相连、并向其传递连接的节点构成（包括存在自环的情况）。如果出现平局，节点的下一状态则保持不变。更具体地说，我们在此表明，除通过简单的网络连接模式（例如完全连接模式，即每个节点都接收来自其他所有节点的连接）解决 DCT 外，还存在基于更复杂连接模式的解决方案；在这些模式中，节点之间仅允许部分可见。我们重点研究其中四种非平凡情形，不过也可能存在其他情形。

我们选择局部多数规则，部分原因是它与 DCT 恰好契合，因为 DCT 正是我们所研究的全局问题的局部版本。另一个重要原因是，该规则在分布式共识相关文献中十分常见，不仅见于自动机网络领域（例如 Goles 和 Martínez(1990）；Goles、Montealegre、Salo 和 Törmä (2016)；Gärtner 和 Zehmakan (2017)；Abilhoa 和 de Oliveira (2020)；Goles、Medina 和 Santiváñez (2023））， 也见于物理学、社会科学和生物学领域（Krapivsky 和 Redner (2003)；Galam (2008)；Marshall、Kurvers、Krause 和 Wolf (2019））。最后，众所周知，局部多数规则在元胞自动机中解决 DCT 的表现不佳；这一点使我们得以深入探究一般自动机网络可能带来的灵活性，而我们发现的各类解决方案确实印证了这一点。

下一节将给出本文其余部分所使用的所有基本定义，以及我们所依赖的相关记号。接下来的一节是本文的核心，其中将介绍我们发现的、确实存在 DCT 解的各类自动机网络，并对其为何有效给出形式化论证；该部分分为五个小节，第一小节讨论网络连接模式的平凡情形，另外四个小节讨论非平凡情形。在最后的总结性评论一节中，我们将总结研究成果，并思考可能的后续研究方向。

2. 定义

设 $[n] = \{0, \dots, n-1\}$ 和 $V = [n]$ 是图的一组 n 节点，在本文中将该图视为由 n 自动机构成的网络。一个配置为每个自动机从 $\{0,1\}$ 中赋予一个二进制状态，即，它是元素 $x \in \{0,1\}^{|V|}$，或等价地是满足 x_v 的 $x \in \{0,1\}^n$，其中 $v \in V$ 是自动机的状态。我们将这一记号扩展到任意子集 $W \subseteq V$，其中 $x_W \in \{0,1\}^{|W|}$ 表示 x 在域 W 上的限制。

定义 2.1. 大小为 n 的布尔自动机网络（*BAN*）是一个由 n 个局部函数 $f_v : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$组成的元组，每个自动机 $v \in V$ 对应一个函数，它们在状态空间 $\{0,1\}^n$ 上诱导出确定性动力学 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$，其定义很简单：对所有配置 $x \in \{0,1\}^n$，均有 $f(x) = (f_0(x), \dots, f_{n-1}(x))$。

我们假设每一步都完全同步地（或并行地）更新自动机。自动机网络理论中的一个核心对象是其交互图，它编码自动机之间的有效依赖关系。该有向图 $G_f = (V, E)$ 的顶点集为 $V = [n]$，并且当且仅当 u 是 f_v 的本质变量时，存在弧 $(u, v) \in E$；也就是说，存在 $x \in \{0,1\}$，使得 $f_v(x) \neq f_v(x + e_u)$（按位模二计算），其中 e_u 是第 u 个基向量。

在本研究中，我们关注这样一类布尔自动机网络：其局部函数对其部分自动机（即交互图中对应顶点的入邻居）计算多数值，并在平票时保持当前状态。

定义 2.2。 $W \subseteq V$ 上的局部多数函数在 $v \in V$ 处定义为 $maj_W^v : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，满足：

$$maj_W^v(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{u \in W} x_u < \frac{|W|}{2} \\ 1 & \text{if } \sum_{u \in W} x_u > \frac{|W|}{2} \\ x_v & \text{otherwise (tie case).} \end{cases}$$

多数布尔自动机网络可直接用其交互图表示，该图编码了依赖关系架构（即多数局部函数的定义域）。对于图 $G = (V, E)$，设 $N_G(v)$ 表示 G中 $v \in V$的入邻居集合。

定义 2.3. 图 $G = (V, E)$ 上的多数布尔自动机网络（*MBAN*） A_G，其 $V = [n]$ 是一个大小为 n 的布尔自动机网络，由局部函数 $f_v = maj^v_{N_G(v)}$ 定义，其中每个自动机 $v \in V$ 均对应一个局部函数。

下文中，我们的构造将尽量避免出现平局情况，即所有自动机入度均为奇数的布尔网络。如无歧义，我们可能会将 A_G 简称为 A。

自动机网络 A 的动力学会诱导出一个函数有向图（其中每个节点的出度恰好为一），其节点集合就是所有配置的集合；当且仅当 $A(x) = y$ 时，图中存在一条弧 (x, y)。函数有向图由若干连通分量组成，每个连通分量包含一个由周期构型构成的循环，称为极限环，以及以该循环为根的若干向上树（瞬态构型）。我们称一个配置的周期为 $m > 0$，当 $A^m(u) = u$ 且不存在满足这一条件的 $t < m$ 时（m 也是极限环的长度）。周期为 1 的配置称为不动点。

我们关注这样一类 MBAN：其中的自动机通过局部多数函数进行集体交互，并且无论从何种初始构型出发，其动力学都会全局收敛到由多数状态构成的不动点。这个问题在文献中广为人知，通常称为密度分类任务（DCT），这一名称源于初始构型中 1 和 0 的数量关系。

定义 2.4. 当满足以下条件时，布尔自动机网络 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ 解决密度分类任务 （*DCT*）：

nosep 对于 $\{0,1\}^n$ 的任意配置，若其中 0 的数量占多数，则该配置会收敛到不动点 0^n，并且

nosep 对于 $\{0,1\}^n$ 的任意配置，若其中 1 的数量占多数，则该配置会收敛到不动点 1^n。

由于该问题仅对节点数为奇数的网络有明确定义，即 n 为奇数时，因此我们将讨论范围限定在这种情况。

请注意，由于动力学是确定性的，且要求该性质适用于任意配置，因此要解决 DCT，多数状态在整个演化过程中都不应改变。

对于奇数 n，我们将 $\mathrm{maj}_V : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 简称为 maj。对于任意子集配置 $x \in \{0,1\}^n$ 和 $S \subseteq V$，我们记作 $T(S, x) = |\{v \in S \mid x_v = 1\}|$ 和 $F(S, x) = |\{v \in S \mid x_v = 0\}|$，并分别用快捷记法 $T(u, x) = T(N_G(u), x)$ 和 $F(u, x) = F(N_G(u), x)$ 表示处于状态 1 和状态 0 的 u 的入邻居数量。

例如，带有 n^2 条弧的完全有向图 K_n 可以解决多数分类任务：经过一步迭代后，它会收敛到正确的不动点。相反，带有 n 条弧的有向环 C_n 虽然具有正确的两个不动点，但无法解决多数分类任务，因为没有其他配置能够收敛（它会沿图循环，这是因为一元多数局部函数实际上就是恒等函数）。

3. 能够解决 DCT 的 MBAN

3.1. 入门案例

由于前一节的内容，很难判断一个 MBAN 是否能够解决 DCT。因此，我们提出了一些能够解决 DCT、并且可以在多项式时间内（相对于自动机的数量）进行检验的 MBAN 类别。

第一个显而易见的类别是在完全有向图上定义的 MBAN，即满足以下条件的图 $G = (V, E)$：对于所有 $u,\ v \in V$，都有 $(u, v) \in E$。事实上，由于所有节点的更新值都是图中所有节点的多数值，因此显然，对于所有配置 x，$A(x)$ 会变成 x 的多数值。

第二类是由有向图构建的 MBAN $G = (V, E)$，该有向图包含 n 个节点；通过添加 $n + 1$ 个新节点，使每个新节点都将所有 $2n + 1$ 个节点作为其入邻域和出邻域。示例见图 1。我们将此类称为 生成的 *MBAN*。请注意，我们可以从任意其他图 G 构造生成的 MBAN 的图 G'。换言之，存在一个单射 $f : G_n \to G_{2n+1}$ 使得 $f(x)$ 描述一个生成的 MBAN，其中 G_n 是由 n 个节点组成的有向图集合。事实上，给定 $G = (V, E)$ 一个图，我们定义 $S = \{s_0, \ldots, s_{|V|}\}$ 一组 $|V| + 1$ 个新节点，并创建 $G' = (V', E')$ 使得 $V' = V \cup S$，而 E' 则按如下方式构建：

nosep $(u, v) \in E$ 意味着 $(u, v) \in E'$，
nosep (u, s) 对于所有 $u \in V$ 和 $s \in S$，
nosep (s, v) 对于所有 $s \in S$ 和 $v \in V$。

MBAN 解决 DCT 的示例

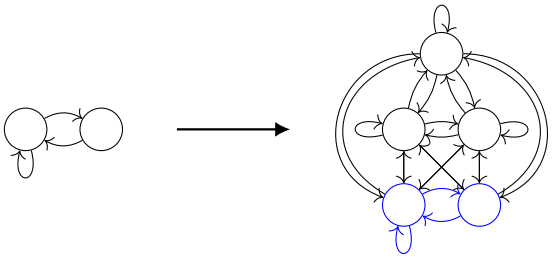

图 1： 将图（左）转换为能够解决 DCT 的 MBAN 图（右）的示例。蓝色的节点和弧强调了原始图。

任何生成的 MBAN A 都能解决 DCT。直观来说，在第一次迭代时，S 中的节点以原始配置的多数值作为其值。由于 V 中的所有节点，其入邻居都在 S 中，因此在第二次迭代结束时，V 中的每个节点都会取 S 中节点的值。更形式化地说，S 中所有节点的入度均为 $|V|$，由此可得，对于所有 $s \in S$，$A(x)_s = \mathrm{maj}(x)$。此外，由于对于所有 $v \in V$，$|N_{G'}(v) \cap S| = |V| + 1 > |N_G(v)|$，因此对于任意整数 $i \geq 2$，都有 $A^i(x)_v = \mathrm{maj}(x)$。总结如下：

命题 3.1。 如果 G 是一个包含 n 个节点的图，那么存在一个基于图 G' 的 *MBAN*，该 *MBAN* 包含 $2n+1$ 个节点，以 G 作为诱导子图，并且能够解决 *DCT*。

一个直接推论是，能够解决 DCT 的 MBAN 数量关于自动机数量呈指数增长。我们的目标是寻找某个能够解决 DCT 的“简单”MBAN 类。为此，我们首先介绍 4 个指标，用于衡量 MBAN 解决该问题的难度。

1. 图中的边数：我们认为，网络中的边数越多（即自动机之间的依赖关系越多），网络就越难。2. 不同入度的数量：该指标旨在近似 MBAN 中不同类型邻域的数量。3. 图的最大入度：该指标衡量 MBAN 的局部性程度。4. 收敛所需的迭代次数。

考虑到这些指标，我们引入一类 MBAN，其图 $G = (V, E)$ 是以 v_0 为根的路径，并且每个 $v \in V$ 都与 v_0 之间有一条弧。直观而言，这类网络可以解决 DCT。事实上，在第一次迭代结束时，v_0 包含原始配置中的多数（因为 V 的所有节点都位于它的入邻域中），我们再沿着路径传播这一数值。这种图也可以看作长度为 n 的循环，其中包含了所有长度介于 1 和 $n-1$ 之间的循环。也就是说，令 C_i 为 G 中长度为 i 的循环，则该图满足 $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = C_1$。因此，我们将这类网络称为完全循环 *MBAN*；图 2 给出了一个例子。

以下算法可根据任意大小的 n 生成这类网络：

nosep 创建 n 个节点，标记为从 0 到 $n-1$；nosep 对每个节点 i，添加一条从 i 到 $i+1 \mod n$ 的弧；nosep 对每个节点 i，添加一条从 i 到 0 的弧。

引理 3.2. 设 A 是一个完全循环 *MBAN*。则，A 可解决 *DCT*。

证明。 设 x 是一个配置，使得 $\mathrm{maj}(x) = 1$。设 $G = (V, E)$ 是 A 的图，使得 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 和 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，其中 $(\{v_1, \ldots v_i\}, E_i)$ 是长度为 i 的循环。由于 $\mathrm{maj}(x) = 1$，因此 $A(x)_{v_1} = 1$。存在两种可能的情况。

1. $x_{v_1} = 1$，因此 $A(x)_{v_2} = 1$。现在，由于对于介于 2 和 n 之间的所有 i，$A(x)_{v_i} = x_{v_{i-1}}$，我们推断出 $T(\{v_3, \ldots v_n\}, A(x)) = T(\{v_2, \ldots, v_{n-1}\}, x) \geq x(\{v_2, \ldots, v_n\}, x) - 1$。因此，由于 $T(\{v_2, \ldots v_n\}, A(x)) = T(\{v_3, \ldots v_n\}, A(x)) + 1$，可得 $T(\{v_2, \ldots v_n\}, A(x)) \geq x(\{v_2, \ldots, v_n\}, x)$。

MBAN 求解 DCT 的示例

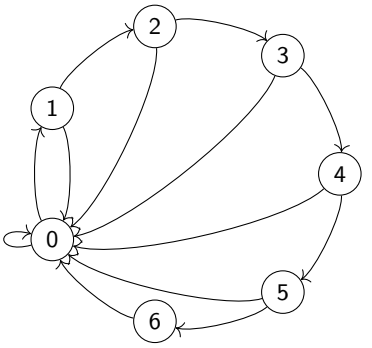

图 2： 由 7 个节点组成的完全循环 MBAN 的图。对于所有介于 0 和 5 之间的 i，循环 $(0,\cdots,i,0)$ 是长度为 $i+1$ 的循环。

此时，存在三种可能的子情况：$x_{v_2}=1$ 和 $x_{v_n}=0$；$x_{v_2}=1$ 和 $x_{v_n}=1$；或 $x_{v_2}=0$。对于第一种情况，我们有 $T(\{v_2,\dots v_n\},A(x))=x(\{v_2,\dots,v_n\},x)+1$，而对于第二种情况，

$T(\{v_2,\dots v_n\},A(x))=x(\{v_2,\dots,v_n\},x)$。由这两者可得 $\mathrm{maj}(A(x))=1=A(x)_{v_1}=A(x)_{v_2}$，并通过归纳回到先前的某个子情况。因此，再一次地，由于对于所有介于 2 和 n 之间的 i，$A(x)_{v_i}=x_{v_{i-1}}$，我们推得对于所有 $j\geq n-3$，$T(V,A^j(x))=n$。对于第三种子情况，我们有 $\mathrm{maj}(A(x))=1=A(x)_{v_1}=A(x)_{v_2}$，这会回到先前的子情况；通过归纳，对于所有 $j\geq n-2$，$T(V,A^j(x))=n$。2. 假设 $x_{v_1}=0$，因此，由于对于所有介于 2 和 n 之间的 i，$A(x)_{v_i}=x_{v_{i-1}}$，可知

$T(\{v_2,\dots,v_n\},A(x))=T(\{v_2,\dots,v_{n-1}\},x)\geq T(\{v_2,\dots,v_n\},x)-1$。此外，$T(\{v_2,\dots,v_n\},x)\geq\lceil n/2\rceil$。由此，$T(\{v_2,\dots,v_n\},A(x))\geq\lceil n/2\rceil-1$。于是可得 $T(V,A(x))\geq\lceil n/2\rceil$。根据第一种情况，我们得出对于所有 $j\geq n$，$T(V,A^j(x))=n$。

现在用 $\mathrm{maj}(x)=0$进行同样的推理，即可得出该引理。 □

设 $n\geq 5$ 为奇数，$\mathcal{A}_n$ 为能够解决 DCT 的 MBAN 集合，并且每个 $A\in\mathcal{A}_n$的图都有 n 个节点，且至少包含一个入度为 n的节点。注意，$\mathcal{A}_n$ 中图的边数最少的 MBAN 是含有 n个节点的完全循环 MBAN。

我们称一个 MBAN 为非全知，如果其图的入度 $G=(V,E)$ 小于 $|V|$；更正式地说，对于每个 $v\in V$，$|N_G(v)|<|V|$。因此，如果我们想进一步减少能够解决 DCT 的 MBAN 图中的边数，就必须研究非全知 MBAN（事实上，我们尚不清楚是否存在一个有界入度的 MBAN 族能够解决 DCT；若存在，则其局部性将更强）。因此，下面我们将介绍此类 MBAN 的三个类别，它们的边数均大于 $2n$。第一类（第3.3节）中，MBAN 的自动机取决于 $n-2$ 个自动机；第二类中，MBAN 的一半自动机取决于 $n-2$ 个自动机，而另一半仅取决于一个自动机。

一个有趣的后续研究方向是证明，n 个节点的完全循环 MBAN 是能够解决 DCT 的 n 个自动机网络，且其图的边数最少。

3.2. 互补左右 MBAN 类

本节讨论一种通过实验发现的网络。我们认为，该网络能够解决 DCT 的原因纯粹是技术性的。因此，我们无法对其工作原理提供有启发性的直观解释。

设 $n\geq 7$ 为一个奇整数，且 $V=\{0,\dots,n-1\}$。由 V，我们定义以下序列：$U=(0,2,\dots,\lfloor n/2\rfloor-1)$、$R=(1,\lfloor n/2\rfloor,\dots,n-1)$；$S=(0,1,\dots,\lfloor n/2\rfloor-2)$ 和 $T=(\lfloor n/2\rfloor-1,\dots,n-1)$，后两者分别用于定义 U 和 R 的邻域。我们用 S_i（分别为 T_i，U_i，R_i）表示 S（分别为 T_i，U_i，R_i）中的第 i 个元素。

设 $G=(V,E)$ 是满足以下条件的图：在 E 中：

nosep 每个节点 U_i 在 U 中都以前驱节点 $V\backslash\{S_{i+1 \bmod |S|},S_{i+2 \bmod |S|}\}$ 中的所有节点为前驱，

nosep 每个节点 R_i 在 R 中都以前驱节点的形式拥有 $V\backslash\{T_{i-1 \bmod |T|},T_{i-2 \bmod |T|}\}$ 中的所有节点

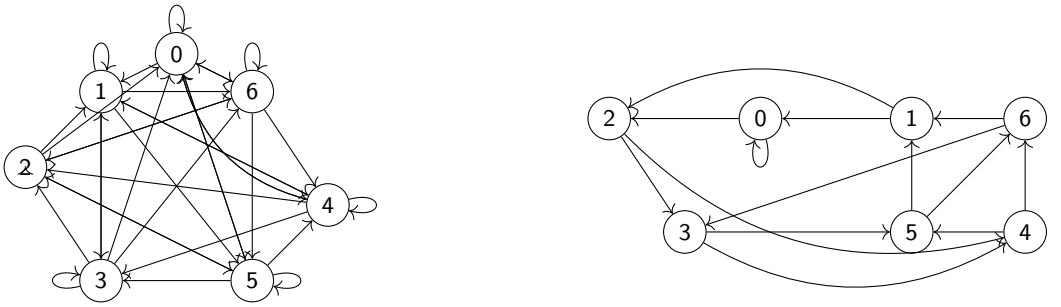

图3： 左侧有 7 个节点、右侧为其补图的互补左右 MBAN。根据定义， $U = (0, 2)$、 $R = (1, 3, 4, 5, 6)$、 $S = (0, 1)$ 和 $T = (2, 3, 4, 5, 6)$。例如，节点 0 的入邻居是除 $S_0 = 0$ 和 $S_1 = 1$之外的所有节点；而节点 1 的入邻居是除 $T_4 = 6$ 和 $T_3 = 5$之外的所有节点。

参见图 3作为示例。由于该图的补图比图本身更易读，我们也一并提供。此外，从补图的角度来看，证明更容易理解。

我们称其图为 G 的 MBAN 为具有 n 个节点的互补左右 MBAN，并称互补左右 MBAN 类为所有互补左右 MBAN 的集合。以下算法可以生成任意大小的此类网络 n:

nosep 创建标记为 0 到 $n-1$ 的 n 个节点；nosep 添加所有可能的弧；nosep 创建 4 个数组 $U = [0, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$， $R = [1, \lfloor n/2 \rfloor, \ldots, n-1]$， $S = [0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 2]$和 $T = [\lfloor n/2 \rfloor - 1, \ldots, n-1]$;

nosep 对从 0 到 $|S|-1$的每个 i，移除弧 $(S[i+1 \mod |S|], U[i])$ 和 $(S[i+2 \mod |S|], U[i])$；
nosep 对从 0 到 $|T|-1$的每个 i，移除弧 $(T[i-1 \mod |T|], R[i])$ 和 $(T[i-2 \mod |T|], R[i])$。

现在我们有两个主要目标。第一个目标是证明互补左右 MBAN 能够解决 DCT。第二个目标是给出这类 MBAN 收敛所需迭代次数的一个上界。

因此，设 A 为一个互补左右 MBAN， $G = (V, E)$ 为其图， n 为 A 中自动机的数量，且 x 为其一个满足 $\mathrm{maj}(x) = 1$ 的构型。为了证明 A 收敛到 1，我们首先证明，对于任意整数 $i \geq 0$，都有 $T(V, A^i(x)) \leq T(V, A^{i+1}(x))$。为此，我们注意到存在两种可能：要么 x 中 1 的数量至少为 $\lceil n/2 \rceil + 1$（即， $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$），要么 x 中 1 的数量为 $\lceil n/2 \rceil$（即， $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$）。首先，我们假设 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。

引理 3.3。 设 A 是一个由 n 个自动机构成的 *MBAN*，其图 $G = (V, E)$ 满足： V 的每个节点的入度至少为 $n-2$。如果 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，那么 $T(V, A(x)) = n$。

证明。 假设 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。由于 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，可得 $F(V, x) < \lfloor n/2 \rfloor$。注意，对于 V 的每个节点 v， v 的入度的上半部分至少为 $\lfloor n/2 \rfloor$。因此，对于 V 中的每个 v，都有 $A(x)_v = 1$。 □

现在，假设 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$，我们区分三种情况：

1. S中的所有节点在 x中均为 0（反之亦然， $T(T, x) = \lceil n/2 \rceil$）；
2. S中的所有节点在 x（$T(S, x) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$）中均为 1；或者
3. S中只有部分节点在 x（$0 < T(S, x) < \lfloor n/2 \rfloor - 1$）中为 1。

— 对于情形 1，若我们假设 $T(T, x) = \lceil n/2 \rceil$，那么由于每个节点 u的 U都承认 T中的所有节点都是前驱（$N_G(u) \cap T = T$），因此 $T(U, A(x)) = |U| = \lfloor n/2 \rfloor - 1$。此外，由于 $|T| = \lceil n/2 \rceil + 1$，可得 $F(T, x) = 1$。因此，$T(R, A(x)) = 2$。事实上，由于 T中的每个节点恰好是R中 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个节点的前驱， R中的两个节点承认 T中值为 1 的 $\lceil n/2 \rceil$ 个节点。因此， $T(V, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - 1 + 2 = \lceil n/2 \rceil$。另外， $A(x)$ 或者属于情形 2，或者属于情形 3。

— 对于情况 2，假设 $T(S,x) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$，则 $T(T,x) = 2$。令 t_1, t_2 为 T 中满足 $x_{t_1} = x_{t_2} = 1$ 的节点。根据图的定义，R 中至多有一个节点 a 的邻域不包含 t_1 和 t_2（$N_G(a) \cap \{t_1, t_2\} = \emptyset$）。此外，由于 R 中每个节点 r 的邻域都包含 S（$N_G(r) \cap S = S$），因此，对于 R 中邻域内承认 t_1 或 t_2 的每个节点 r，都有 $A(x)_r = 1$（$N_G(r) \cap \{t_1, t_2\} \neq \emptyset$）。因此，$T(R, A(x)) \geq |R| - 1 = \lceil n/2 \rceil$。另外，由于 u 中每个节点的邻域由 S 中的 $|S| - 2$ 个节点加上 T 中的 $|T|$ 个节点组成，因此 $T(N_G(u), x) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$。因此，$T(U, A(x)) = 0$。我们得出结论，$A(x)$ 或者属于情形 1，或者属于情形 3。

— 对于情形3，假设存在一个整数 $0 < i < \lfloor n/2 \rfloor - 1$，使得 $T(S,x) = i$，并通过引入一个技术引理来推导 $T(U, A(x))$ 和 $T(R, A(x))$ 的下界。为此，我们定义：给定一个序列 $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$，如果 p 至少包含两个元素，并且存在 $j \in \{0, \ldots, m\}$ 使得 $p = (\alpha_j, \alpha_{(j+1) \bmod |p|}, \cdots, \alpha_{(j+|p|-1) \bmod |p|})$，则称 p 是 α 的一个周期连续子序列。

引理3.4。设 α 是一个包含 m 个元素的序列。设 $|\alpha| - 1 > a > 1$ 是一个整数，β 是 a 个元素的 α 的一个子序列。设 m_1 是 α 中大小为 $m-2$ 且至少包含 $a-1$ 个 β 元素的周期连续子序列的数量，m 是 β 中 α 的周期连续对的数量。则 $m_1 = m - m_3$。

证明。令 P 为 α 中大小为 $m-2$ 且至多包含 β 的 $a-2$ 个元素的周期连续子序列集合，并令 p 为 P 的一个元素。由于 β 是 α 的子序列，p 恰好包含 β 的 $a-2$ 个元素。在另一种情况下，p 的长度小于 $m-2$。因此 $|P| = m - m_1$。

令 C 为 β 中 α 的周期连续对集合。因此，α 中 p 的两个缺失元素属于 β。因此，由于 $\alpha \backslash p$ 是一个周期连续对，对于 P 的每个元素，都存在 C 的一个元素。反过来，若考虑 C 的一个元素 c，可直接得到 $S \backslash c$ 是一个长度为 $m-2$ 且至多包含 β 的 $a-2$ 个元素的周期连续序列。因此，$m_3 = |P|$。综上，结论是 $m_1 = m - m_3$。 □

引理 3.5。设 i 是介于1和 $\lfloor n/2 \rfloor - 2$ 之间的一个整数。若 $T(S,x) = i$，则 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。

证明。根据 i 的取值，我们考虑两种情况：

— $i = 1$：因此，$T(T,x) = \lfloor n/2 \rfloor$，进而，由于对于每个 $u \in U$，$N_G(u) \cap T = T$，故有 $T(U, A(x)) = |U| = \lfloor n/2 \rfloor - 1 = \lfloor n/2 \rfloor - i$。

— $i > 1$：设 $u \in U$ 为一个节点，并注意到 $N_G(u) \cap T = T$。因此，$T(N_G(u) \cap T, x) = \lceil n/2 \rceil - i$。我们推得 $A(x)_u = 1$ 当且仅当 $u \in U_o$ 且 $U_o := \{u_o \in U \mid T(N_G(u_o) \cap S, x) \geq i - 1\}$。事实上，若 $T(N_G(u) \cap S, x) \leq i - 2$，则 $F(N_G(u) \cap S, x) \geq \lfloor n/2 \rfloor - 1 - i$，并且由于 $F(N_G(u) \cap T, x) = i + 1$，可得 $F(N_G(u), x) \geq \lfloor n/2 \rfloor$。因此，若将 U_o 视为 U 的一个子序列，且 U_o 中的周期连续对的最大数量为 $i - 1$，根据引理 3.4，可得 $|U_o| \geq \lfloor n/2 \rfloor - 1 - (i-1) = \lfloor n/2 \rfloor - i$。因此，结论是：$T(U, A(x)) \geq \lfloor n/2 \rfloor - i$。

现在，设 r 是 R 的一个节点。注意，$A(x)_r = 1$ 当且仅当 $r \in R_o$ 且 $R_o := \{r_o \in R \mid T(N_G(r_o) \cap T, x) \geq \lfloor n/2 \rfloor - i\}$。事实上，如果 $T(N_G(r) \cap T, x) \leq \lfloor n/2 \rfloor - i - 1$，那么 $F(N_G(r) \cap T, x) \geq i + 1$，由于 $F(N_G(r) \cap S, x) = \lfloor n/2 \rfloor - i - 1$，因此 $F(N_G(u), x) \geq \lfloor n/2 \rfloor$。于是，如果我们将 R_o 视为 R 的一个子序列，并且 R_o 中的周期连续对的最大数量为 $\lceil n/2 \rceil - i - 1 = \lfloor n/2 \rfloor - i$，根据引理 3.4，可得 $|R_o| \geq \lceil n/2 \rceil + 1 - (\lfloor n/2 \rfloor - i) = i + 2$。因此，我们得出 $T(V, A(x)) \geq \lfloor n/2 \rfloor - i + i + 2 = \lceil n/2 \rceil + 1$。

□

此时，我们已经证明，对于每个整数 $i \geq 0$，$T(V, A^i(x)) \leq T(V, A^{i+1}(x))$。因此，如果 A 收敛，那么 A 将收敛到正确的配置。接下来只需证明它会收敛。

定理 3.6. 每个互补左右 *MBAN* 都能够解决 *DCT*，并且最多经过 4 次迭代后收敛。

证明. 根据引理 3.3 若 $T(V,x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 则 A 收敛到全 1 配置。此外，根据引理 3.5，$T(x,x) = i$ 对于介于 i 和 1 之间的 $\lfloor n/2 \rfloor - 2$ 则 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 这意味着 A 经过两次迭代后收敛。还剩下两种情况。

— $T(V,x) = \lceil n/2 \rceil$ 和 $T(S,x) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$，我们有 $T(R, A(x)) = \lceil n/2 \rceil$。此时，根据 $R \cap S$ 在 $\mathbf{A(x)}$ 中的取值，又有两种情况即 $A(x)_1$ 的取值。因此，要么 $A(x)_1 = 1$（即 $0 < T(S,x) < \lfloor n/2 \rfloor - 1$），根据之前的推理，$A$ 经过 3 次迭代后收敛到全 1 配置；要么 $A(x)_1 = 0$，那么 $T(T \cap R, A(x)) = \lceil n/2 \rceil$，因此 $A(x)_{T_0} = 0$（$T_0 \in T$，但 $T_0 \notin R$）。此外，$T(V, A^2(x)) = \lceil n/2 \rceil$。根据图的定义，由于满足 $N_G(r_1) \cap T_0 = N_G(r_2) \cap T_0 = \emptyset$ 的 R 中仅有的两个节点 r_1，r_2 是 R 的最后两个元素，即 $R_{|R|-1}$ 和 $R_{|R|-2}$，因此我们有 $A^2(x)_{R_{|R|-1}} = A^2(x)_{R_{|R|-2}} = 1$。于是 $T(T, A^2(x)) = 2$

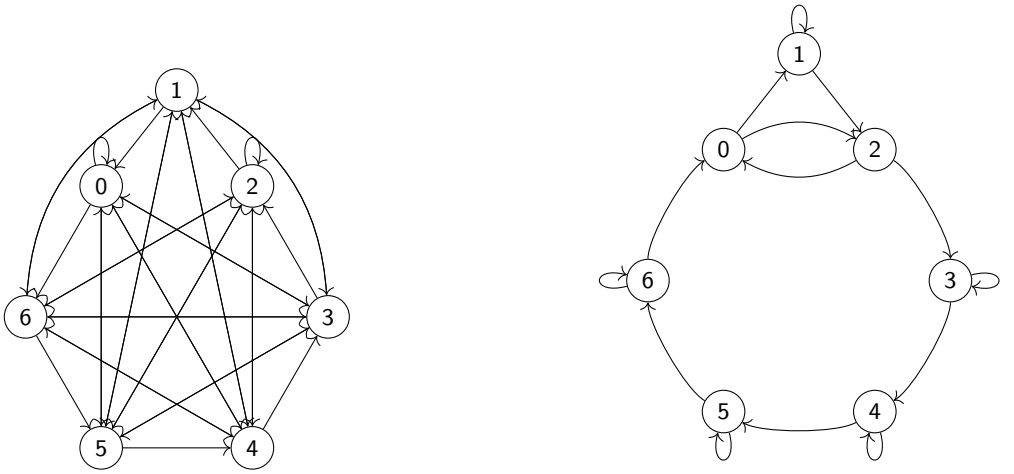

图4： 左侧是具有 7 个节点的互补圆三角形 MBAN 的图；右侧是其补图。根据定义， $U = (3, 4, 5, 6)$ 和 $R = (0, 1, 2)$。

且 $T(U, A^2(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$。因此， $A^2(x)_{R_1} = 0$，由此我们推得 $0 < T(S, A^2(x)) < \lfloor n/2 \rfloor - 1$。我们得出结论， A 经过 4 次迭代后收敛到全 1 配置。

— $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$ 和 $T(T, x) = \lceil n/2 \rceil$，因此 $T(U, A(x)) = |U|$。同样，根据$A(x)_1$的不同，可能有两种情况。如果 $A(x)_1 = 0$，那么 $T(S, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - 2$，因此 A 在 3 次迭代后收敛到全为 1 的配置；但如果 $A(x)_1 = 1$，则意味着 $T(S, A(x)) = |U|$。因此，$T(V, A^2(x)) = \lceil n/2 \rceil$ 和 $T(U, A^2(x)) = 0$。此外， $A^2(x)_1 = 1$；事实上， $T(N_G(1) \cap (\{1\} \cup S), A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$。由此可知，$T(S, A^2(x)) = 1$（ S 中唯一不在 U 中的元素为 1）。我们得出结论： A在 4 次迭代后收敛到全为 1 的配置。

因此， A 至多经过 4 次迭代后收敛。对 $\mathrm{maj}(x) = 0$应用相同的推理，即可得出该定理。

□

3.3. 互补圆三角形 MBAN 类

同样，本节讨论的是一个通过实验发现的网络，很难对其动力学给出全局性的直观解释。

设 $n \geq 7$ 为一个奇整数，且 $V = \{0, \ldots, n-1\}$。由 V，我们定义两个序列： $U = (3, \ldots, n-1)$ 和$R = \{0, 1, 2\}$。

设 $G = (V, E)$ 为满足以下条件的图：在 E 中：

nosep U 中的每个节点 i 都以 $V \backslash \{i, i-1\}$ 中的所有节点作为前驱节点，

nosep 节点 0 的前驱节点包括 $V \backslash \{2, n-1\}$ 中的所有节点，

nosep 节点 1 和 2 的前驱节点包括 $V \backslash \{0, 1\}$ 中的所有节点。

见图4 作为示例。我们将具有 G 的 MBAN 称为互补圆三角形MBAN（具有 n个节点），并将相应的类别称为所有互补圆三角形 MBAN 的集合。

以下算法可以为任意规模 n生成此类网络：

nosep 创建 n 个节点，标记为 0 到 $n-1$；nosep 添加所有可
能的弧；nosep 对每个节点 i移除弧 $(i, i+1 \mod n)$；
nosep 对除节点 0 和 2 之外的每个节点 i 移除弧 (i, i)；
nosep 移除弧 $(0, 2)$ 和 $(2, 0)$。

本节的目标是证明，任意圆三角 MBAN 都能解决 DCT。于是，假设 A 是一个

圆三角 MBAN，且 x 是 A 的一个配置，满足 $\mathtt{maj}(x) = 1$。我们将采用与前一节相同的方法。首先证明，对于任意 $T(V, A^i(x)) \leq T(V, A^{i+1}(x))$，都有 i。为此，不失一般性，我们假设 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$。事实上，如果 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，并且根据引理 3.3， A 收敛到 1s 的不动点。

令 $S = (2, \ldots, n-1)$，并令 α 为 S 的子序列，其中包含所有满足 $x_s = 1$ 的节点 $s \in S$。注意，$F(U, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor$ 我们需要移除两个 1，使 0 的数量成为多数，因此，对于所有 $u \in U$， $A(x)_u = 0$ 当且 是 α 中 S 的连续对数。事实上，由于 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$ 且由于

仅当 $x_{u-1} = x_u = 1$。

引理 3.7。 如果 $x_0 = x_1$，则 $T(V, x) = T(V, A(x))$。否则， $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。

证明。 根据 x_0，我们需要区分两种情形，以下两个断言分别对此进行论述。

断言 3.8。 情形 *1*： $x_0 = 0$。如果 $x_1 = x_0$，则 $T(V, A(x)) \geq T(V, x)$；否则， $T(V, A(x)) \geq T(V, x) + 1$。

断言证明。 我们分两步进行，首先假设 α 不是 S 的连续子序列。因此，$F(U, A(x)) < \lceil n/2 \rceil - T(R, x) - (1 - x_2)$。注意， $1 - x_2$ 用于区分 $x_2 = 1$ 还是 $x_2 = 0$，并且 $T(R, x) = x_1 + x_2$。于是， $\lceil n/2 \rceil - T(R, x) - (1 - x_2) = \lfloor n/2 \rfloor - x_1$。由于 $x_0 = 0$，可得 $A(x)_1 = A(x)_2 = 1$。因此， $F(V, A(x)) < (1 - A(x)_0) + \lfloor n/2 \rfloor - x_1$。如果 $A(x)_0 = 1$，那么直接有 $F(V, A(x)) < \lfloor n/2 \rfloor - x_1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$。而如果 $A(x)_0 = 0$，则 $F(V, A(x)) < \lceil n/2 \rceil - x_1 \leq \lceil n/2 \rceil$。因此， $F(V, A(x)) < \lceil n/2 \rceil$，或者等价地，$T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + x_1$。

作为第二步，现在考虑 α 是 S 的连续子序列，则 $F(U, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - x_1$。因此，由于节点 2 和 $n-1$ 之间的最短路径大于 $\lceil n/2 \rceil$，可知 2 和 $n-1$ 不能同时在 x 中取值 1。因此， $A(x)_0 = 1$，这意味着 $F(V, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - x_1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$。◇

断言 3.9。 情况 *2*： $x_0 = 1$。如果 $x_1 = x_0$，则 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil$；否则， $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。

证明该断言。再次分两步进行论证，首先假设 α 不是 S 的连续子序列。于是， $F(U, A(x)) < \lceil n/2 \rceil - T(R, x) - (1 - x_2)$。由于 $T(R, x) = x_0 + x_1 + x_2 = 1 + x_1 + x_2$，可得 $\lceil n/2 \rceil - T(R, x) - (1 - x_2) = \lfloor n/2 \rfloor - x_1 - 1$。因为 $x_0 = 1$，这意味着 $A(x)_1 = A(x)_2 = (1 - x_1)$。接着，$F(V, A(x)) < (1 - A(x)_0) + 2x_1 + \lfloor n/2 \rfloor - x_1 - 1 = \lfloor n/2 \rfloor - A(x)_0 + x_1$。因此，要么 $A(x)_0 = 1$ 且 $F(V, A(x)) < \lfloor n/2 \rfloor$，要么 $A(x)_0 = 0$，这意味着 $x_1 = 1$ 且 $F(V, A(x)) \leq \lfloor n/2 \rfloor$。

现在，考虑到 α 是 S 的一个连续子序列，那么 $F(U, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor - A(x)_0 + x_1$ 以及节点 $n-1$ 和 2 在 $A(x)$ 中不能取值 1。因此， $A(x)_0 = 1$，从而要么 $x_1 = 0$ 和 $F(V, A(x)) < \lfloor n/2 \rfloor$，要么 $x_1 = 1$ 和 $F(V, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor$。◇

□

还需证明 A 收敛。

定理 3.10。 每个互补圆三角形 *MBAN* 都能够解决 *DCT*，并在 5 次迭代内收敛。

证明。 如前所述，如果 $T(V, x) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 那么，根据引理 3.3， A 在 1 次迭代内收敛。因此，我们假设 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$。此外，根据引理 3.7，如果 $x_0 \neq x_1$ 那么 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 且 A 在2 次迭代内收敛。因此，我们还假设 $x_0 = x_1$。根据 x_0 的取值，我们再次区分两种情况。

首先，考虑 $x_0 = 0$。由于若 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，则 A 在 2 次迭代后收敛，并且我们还假设 $T(V, A(x)) = \lceil n/2 \rceil$。可能有三种子情况：

— $x_2 = 0$：因此 $A(x)_0 = 1$，从而 $T(R, A(x)) = 3$。于是， $F(V, A(x)) = F(U, A(x)) < \lceil n/2 \rceil - 1 = \lfloor n/2 \rfloor$，然后 $T(V, A(x)) > \lceil n/2 \rceil$，且 A 在 2 次迭代后收敛。

— $x_2 = 1 = x_{n-1} = 1$：那么， $A(x)_0 = 0$ 且 $A(x)_1 = 1$，由此可得 A 在 3 次迭代后收敛 s.

— $x_2 = 1$ 和 $x_{n-1} = 0$：因此， $A(x)_{n-1} = 1$ 和 $T(R, A(x)) = 3$。于是， $T(V, A^2(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 和 A 要么在 3 次迭代内收敛，要么 $T(R, A^2(x)) = 0$ 和 A 在至多 5 次迭代内收敛。

现在，假设 $x_0 = 1$。由于如果 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，则 A 会在 2 次迭代内收敛，因此我们还假设 $T(V, A(x)) = \lceil n/2 \rceil$，并会出现另外两种可能：

— $x_2 = 0$ 或 $x_{n-1} = 0$：那么， $A(x)_0 = 1$ 和 $A(x)_1 = 0$，因而 A 在至多 3 次迭代内收敛。

— $x_2 = 1 = x_{n-1}$：因此， $T(R, A(x)) = 0$ 和 A 最多经过 3 次迭代即可收敛。

通过对 $\mathtt{maj}(x) = 0$ 应用上述类似推理，我们得出证明。 □

求解 DCT 的 MBAN 示例

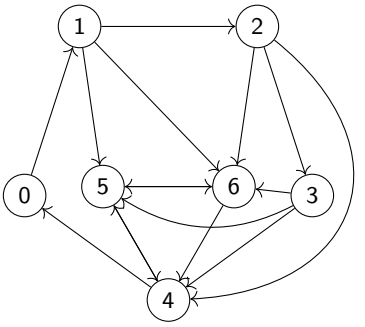

图5： 一个包含两个相交环的 MBAN 图，共有 7 个节点和节点 $c = 4$。根据定义，环 $S = (1, 2, 3, 4, 0)$ 和 $T = (4, 5, 6)$ 以节点 4 为交点。注意， S中的所有节点（节点 4 除外）都只有 1 个前驱节点，而 T中的所有节点都有 $n - 2$ 个前驱节点。例如，节点 1 的入邻居为 $1 - 1 = 0$；节点 5 的入邻居是除 0 和 $5 - 3 = 2$ 之外的所有节点；节点 6 的入邻居则是图中除 0 和 4 之外的所有节点。

3.4. 包含两个相交环的 MBAN 类

在前几小节中，我们展示了两类能够解决 DCT 且收敛速度快的非全知 MBAN。然而，它们的边数较多：$n^2 - 2n$。在这里，我们关注一类能够解决 DCT、边数较少但收敛速度较慢（关于 n 呈线性）的非全知 MBAN。这些网络的思路是对完全环形网络进行修改，将路径的根转换为一组入度等于 $n - 2$ 的节点。更准确地说，我们定义两组节点，分别为 U 和 R，使得 $U \cap R \neq \emptyset$。 R 中的节点充当完全环图中路径的根。换句话说，经过若干次迭代后， R 中所有节点的值都等于原始配置的多数值。随后，借助交点，该值沿着网络传播到 U 中的节点。

设 $n \geq 7$ 为一个奇整数，且 $V = \{0, \ldots, n-1\}$。设 $U = \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$、 $R = \{\lceil n/2 \rceil, \ldots, n-2\}$和 c为 R （交叉点）的一个元素。我们考虑满足 E 的图 $G = (V, E)$

nosep $(i-1, i) \in E$对于所有 $i \in U$,

nosep $(i - \lfloor n/2 \rfloor, j) \in E$对于所有 $i,\ j \in R$满足 $i \neq j$,

nosep $(n-1, i) \in E$对于所有 $i \in R$,

nosep $(i, n-1) \in E$对于所有 $i \in V \setminus \{0, c\}$, 且

nosep $(c, 0) \in E$。

直观地说，如果 $c \neq n - 2$，序列 $S = (1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor, c, 0)$和 $T = (\lceil n/2 \rceil, \ldots, n-1)$是两个循环，并且任意一个 $T_i \in T$，与 $n - 1$ 不同，都以 G 中的所有节点作为前驱节点，但 S_i 和 0 除外；节点 $n - 1$ 的前驱节点则是 G 中的所有节点，但 c 和 0 除外。参见图 5，其中给出了一个示例。以下算法可以构造任意大小 n和交叉点 c 对应的这类网络：

nosep 创建标记为 0 至 $n - 1$的 n 节点；nosep 对于从 0 到 $\lfloor n/2 \rfloor - 1$的每个 i，添加弧 $(i, i+1)$；nosep 对于介于 1 和 $n - 1$ 之间的所有节点 i 以及介于 $\lceil n/2 \rceil$ 和 $n - 1$之间的所有节点 j，添加弧 (i, j)；nosep 对于介于 $\lceil n/2 \rceil$ 和 $n - 2$之间的每个 i，移除弧 $(i - \lfloor n/2 \rfloor, i)$；nosep 移除弧 $(c, n-1)$；nosep 添加弧 $(c, 0)$。

设 A 是具有此类图的 MBAN。于是，我们称 A 为具有两个相交环的 MBAN，其节点数为 n，并定义所有具有两个相交环的 MBAN 所构成的相应类别。

现在，若 A 是具有两个相交环的 MBAN，且 x 是 A 的一种配置，使得 $\mathrm{maj}(x) = 1$，为了证明 A 能够解决 DCT，我们先展示 $T(V,x) \le T(V,A(x))$，而且同样有两种可能的情况：$T(V,x) \ge \lceil n/2 \rceil + 1$或 $T(V,x) = \lceil n/2 \rceil$。

引理 3.11. 若 $T(V,x) \ge \lceil n/2 \rceil + 1$，则对于所有 $i \ge \lceil n/2 \rceil$，$T(V,A(x)) \ge T(V,x)$ 且 $T(V,A^i(x)) = n$。

证明。 我们假设 $T(V,x) \ge \lceil n/2 \rceil + 1$。那么，$T(R \cup \{n-1\}, A(x)) = |R| + 1 = \lfloor n/2 \rfloor$。现在有两种可能的情况。

— $T(R \cup \{n-1\}, x) = \lfloor n/2 \rfloor$:
因此，$T(U,A(x)) = T(\{0\} \cup U, x) \ge T(\{0,\dots,\lfloor n/2 \rfloor\}, x) - 1$。然而，由于 $A(x)_0 = 1$，可得 $T(\{0\} \cup U, A(x)) = T(U,A(x)) + 1 \ge T(\{0\} \cup U, x)$；于是，$T(V,A(x)) \ge T(V,x)$。此外，由于$T(R \cup \{n-1\}, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor$，我们仍处于这种情况。因此，由于对于所有 $i \in U$，$x_i = x_{i-1}$，可知对于所有 $j \ge \lfloor n/2 \rfloor$，$T(\{0\} \cup U, A^j(x)) = \lceil n/2 \rceil$ 且 $T(V,A^j(x)) = n$。

— $T(R \cup \{n-1\}, x) < \lfloor n/2 \rfloor$:
于是，$T(R \cup \{n-1\}, A(x)) \ge T(R \cup \{n-1\}, x) + 1$。现在，由于 $T(\{0\} \cup U, A(x)) \ge T(\{0\} \cup U, x) - 1$，可得 $T(V,A(x)) \ge T(R \cup \{n-1\}, x) + 1 + T(\{0\} \cup U, x) - 1 \ge T(V,x)$。并且，根据第一种情况，对于所有 $j \ge \lfloor n/2 \rfloor + 1$，都有 $T(V,A^j(x)) = n$ □

对于后一种情况，我们假设 $T(x,x) = \lceil n/2 \rceil$，并指出节点 0 和 c 具有某些特殊性质。因此，在接下来的两个引理中，我们需要根据 x_0考虑两种可能性：其初始值为 0 和初始值为 1。

引理 3.12。 设 $S = \{\lfloor n/2 \rfloor, \dots, n-1\} \backslash \{c\}$。假设 $x_0 = 0$ 和 $T(V,x) = \lceil n/2 \rceil$。若 $T(S,x) = |S| = \lfloor n/2 \rfloor$，则 $T(V,A(x)) = \lceil n/2 \rceil$；否则，$T(V,A(x)) \ge \lceil n/2 \rceil + 1$。此外，在所有情况下，$A(x)_c = 1$。

证明。 由于 $x_0 = 0$，对于所有 $r \in Ru\{n-1\}$，我们有 $F(N_G(r), x) \le \lfloor n/2 \rfloor - 1$。因此，$T(R \cup \{n-1\}, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor \ge T(R \cup \{n-1\}, x)$。由此可得，$T(\{0\} \cup R \cup \{n-1\}, A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor + x_c$。事实上，当且仅当 $A(x)_0 = 1$时，$x_c = 1$。

此外，$T(U,A(x)) = T(U,x) - x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ $T(U,x) = F(S',x) + (1-x_c) + 1$ $S' = (R \cup \{n-$。
$1\}) \backslash \{c\}$ $T(V,A(x)) = \lfloor n/2 \rfloor + x_c + F(S',x) + (1-x_c) + 1 - x_{\lfloor n/2 \rfloor} = \lceil n/2 \rceil + F(S',x) + (1 - x_{\lfloor n/2 \rfloor})$
然而，由于，且，结果表明。因此，当且仅当 $x_{\lfloor n/2 \rfloor} = 1$和 $F(S',x) = 0$时，$T(V,A(x)) \ge \lceil n/2 \rceil$和 $T(V,A(x)) = \lceil n/2 \rceil$。引理得证。 □

现在，我们假设 $x_0 = 1$，为推导证明，我们分两步进行。首先，我们关注 R 中的节点，然后得出结论。

引理 3.13. 假设 $x_0 = 1$。那么，

$$T(R, A(x)) = T(R,x) + x_{n-1} + x_{\lfloor n/2 \rfloor} - 1.$$

证明。 令 $R' = R \cup \{n-1\}$。由于 $|R'| = |U| = \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $T(V \backslash \{0\}, x) = \lfloor n/2 \rfloor$，我们推知存在一个双射 $f : R' \to U$，使得 $x_i = 1$ 当且仅当 $x_{f(i)} = 0$。

令 I 为 R' 的子集，使得 $i \in I$ 当且仅当 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 0$ 和 $x_i = 1$。不失一般性，我们可以假设对所有 $i \in I$，都有 $f(i) = i - \lfloor n/2 \rfloor$。事实上，若存在 $i \in I$ 使得 $f(i)$ 不为 $i - \lfloor n/2 \rfloor$，我们只需考虑满足下列条件的 $g : R' \to U$：

$$j \mapsto \begin{cases} i - \lfloor n/2 \rfloor & \text{if } j = i, \\ f(i), & \text{if } j = f^{-1}(i - \lfloor n/2 \rfloor), \\ f(j), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 Z 为 R' 的子集，使得 $i \in Z$ 当且仅当 $x_i = 1$ 和 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 0$，并令 Z' 为集合 $\{z' \mid \exists z \in Z, z' = \lceil n/2 \rceil + z - 1\}$。与前一点一样，我们可以不失一般性地假设 $f(i) = i - \lfloor n/2 \rfloor$。

我们考虑由 I' 构成的 $R' \backslash I$ 的子集，使得 $i \in I'$ 当且仅当 $x_i = 1$ 且 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 1$；同时考虑由 Z' 构成的 $R' \backslash Z$ 的子集，使得 $i \in Z'$ 当且仅当 $x_i = 0$ 且 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 0$。由此可知，$i \in Z'$ 当且仅当 $j \in I'$ 且 $j = f^{-1}(i - \lfloor n/2 \rfloor)$；事实上，若 $i \in Z'$，则 $x_j = 1$（因为 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 0$）。又由于 $x_i = 0$，我们推得

$i \neq j$。因此，根据关于 f 的假设，$j \notin I$，从而推出 $j \in I'$。若 $j \in I'$，则 $x_{i-\lfloor n/2 \rfloor} = 0$ 且 $i \neq j$。因此，根据关于 f 的假设，$i \notin I$ 蕴含 $x_i \neq 1$。consequently，$x_i = 0$ 且 $i \in Z'$。

此时，$T(I \cap R, A(x)) = |I \cap R| = T(I \cap R, x)$ 和 $F(Z \cap R, A(x)) = |Z \cap R| = F(Z \cap R, x)$。因此，如果 $x_{n-1} \neq x_{\lfloor n/2 \rfloor}$，那么 $n-1 \in I$ 或 $n-1 \in Z$。这意味着 $I', Z' \subseteq R$。因此，对于所有 $i \in I' \cup Z'$，$i - \lfloor n/2 \rfloor \in U \backslash \{\lfloor n/2 \rfloor\}$。所以，对于每个 $i \in I'$，节点 $j = f^{-1}(i - \lfloor n/2 \rfloor)$ 位于 Z' 和 $F(N_G(j), x) \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ 中；此外，对于每个 $i \in Z'$，节点 $j = f^{-1}(i - \lfloor n/2 \rfloor)$ 位于 I' 和 $T(N_G(j), x) \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ 中。由此可得 $T(Z', A(x)) \nexists |I'| = |Z'| = F(I', A(x))$。最后，$T(R, A(x)) = T(I \cap R, A(x)) + T(Z', A(x)) = T(I \cap R, x) + T(I', x) = T(R, x)$。

现在，我们假设 $x_{n-1} = x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ $f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor) - \lfloor n/2 \rfloor =$。再 $f(n-1)$ $x_{n-1} = x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ $n-1 \in I'$ $n-1 \in Z'$ $x_j = (1 - x_{n-1})$ 次不失一般性，我们可以假设；事实上，由于，可知或。因此，，由此可推出 $x_{f(j)} = x_{n-1}$，其中 $j = f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)$。此外，$i \in I'$ 或 $i \in Z'$ 且 $x_i = (1 - x_{n-1})$ 与 $i = f(n-1) + \lfloor n/2 \rfloor$。因此，$x_{f(i)} = x_{n-1} = x_{f(j)}$，我们只需考虑满足以下条件的 $g : R' \to U$：

$$k \mapsto \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor & \text{if } k = i, \\ f(i) & \text{if } k = j, \\ f(k) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

与前面的情况类似，$T(Z' \backslash \{n-1, f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)\}, A(x)) = |Z'| - 1 = |I'| - 1 = F(I' \backslash \{n-1, f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)\}, A(x))$，由此得出 $T(R, A(x)) = T(I, x) + |I'| - 1 + A(x)_{f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)}$。因此，要么 $x_{n-1} = 1$，这意味着 $A(x)_{f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)} = 1$ $|I'| = T(I' \cap R, x) + 1$ $T(R, A(x)) = T(I, x) + T(I' \cap$ and and, $R, x) + 1 = T(R, x) + 1$ $x_{n-1} = 0$ $A(x)_{f^{-1}(\lfloor n/2 \rfloor)} = 0$ $|I'| = T(I' \cap R, x)$ 因此，，要么，从而意味着 and。因此，$T(R, A(x)) = T(I, x) + T(I' \cap R, x) - 1 = T(R, x) - 1$。 □

引理 3.14 .假设 $x_0 = 1$ 和 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$，则 $T(V, A(x)) = T(V, x) + x_c$成立 .

证明。由于 $x_0 = 1$，我们推得 $A(x)_{n-1} = (1 - x_c)$。此外，由于 $T(U, A(x)) = T(U, x) - x_{\lfloor n/2 \rfloor} + x_0$，我们有 $T(U, A(x)) = T(U, x) - x_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1 = T(\{0\} \cup U, x) - x_{\lfloor n/2 \rfloor}$，并且 $A(x)_0 = x_c$。另外，根据引理 3.13，我们有 $T(R, A(x)) = T(R, x) + x_{n-1} + x_{\lfloor n/2 \rfloor} - 1 = T(R \cup \{n-1\}, x) + x_{\lfloor n/2 \rfloor} - 1$，由此可以得出：

$$\begin{aligned} T(V, A(x)) &= T(R, A(x)) + A(x)_{n-1} + A(x)_0 + T(U, A(x)) \\ &= T(R \cup \{n-1\}, x) + x_{\lfloor n/2 \rfloor} - 1 + 1 - x_c + x_c + T(\{0\} \cup U, x) - x_{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &= T(R \cup \{n-1\}, x) + T(\{0\} \cup U, x) \\ &= T(V, x). \end{aligned}$$

□

剩下的只需证明 A收敛，这由以下引理得出。

定理 3.15. 每个具有两个相交环的 *MBAN* 都能够解决 *DCT*，并且经过 $n+5$ 次迭代后收敛。

证明。不失一般性，假设 $T(V, x) = \lceil n/2 \rceil$。事实上，在另一种情况下，$T(V, A^i(x)) = n$ 对所有 $i \geq \lceil n/2 \rceil$ 均成立，这由引理 3.11可知。根据 x_0的取值，接下来分两种情况讨论。

— $x_0 = 1$: 令 p 为 $\{0, c - \lfloor n/2 \rfloor\}$ 中满足 $x_p = 1$ 且 $d = c - \lfloor n/2 \rfloor - p$ 的最大整数；因此，对于所有整数 $0 \leq i \leq d$，$A^i(x)_c = 1 = A_0^{i(x)}$，并且根据引理 3.14，$T(V, A^i(x)) = \lceil n/2 \rceil$。于是，$A^{d+1}(x)_c = 0$ 且 $A^{d+1}(x)_0 = A^{d+1}(x)_1 = A^{d+1}(x)_{c+1-\lfloor n/2 \rfloor} = 1$。根据引理 3.14，我们还可得 $T(V, A^{d+1}(x)) = \lceil n/2 \rceil$，并注意到 $c + 1 - \lfloor n/2 \rfloor$ 可以等于 2 或 $\lfloor n/2 \rfloor$，因为 $n \geq 7$ 且 $\lfloor n/2 \rfloor = 3$。因此，至少有一个$j \in R \backslash \{c\}$ 满足 $A^{d+2}(x)_j = 0$，即 $j = 1$ 或 $j = c + 1$。此外，由于 $A^{d+1}(x)_c = 0$，我们有$A^{d+2}(x)_0 = 0$。根据引理 3.12，可推得 $T(V, A^{d+3}(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$。于是，根据引理 3.11，对于所有 $j \geq d + 3 + \lceil n/2 \rceil$，$T(V, A^j(x)) = n$。又由于 $c - \lfloor n/2 \rfloor < \lfloor n/2 \rfloor$，$d$ 可由 $\lfloor n/2 \rfloor$界定，因此可得$j \geq \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil + 3 = n + 3$。

— $x_0 = 0$: 设 $S = (\{\lfloor n/2 \rfloor\} \cup R \cup \{n-1\}) \backslash \{c\}$。注意，若 $T(S, x) < \lfloor n/2 \rfloor$，则 A 会在$\lceil n/2 \rceil + 1$ 次迭代中收敛到全 1 状态。事实上，由引理 3.12 可得 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil + 1$，因此，根据引理 3.11 $T(V, A^j(x)) = n$，对所有 $j \geq \lceil n/2 \rceil + 1$ 均成立。于是，我们假设 $T(S, x) = \lfloor n/2 \rfloor$。因此，由引理 3.12 可推出 $T(V, A(x)) \geq \lceil n/2 \rceil$ 且 $A(x)_c = 1$。所以，若 $A(x)_0 = 0$，则根据引理 3.12 有 $A^2(x)_0 = 1$ 和 $T(V, A^2(x)) \geq \lceil n/2 \rceil$；若 $A(x)_0 = 1$，则根据引理 3.14 也有 $A^2(x)_0 = 1$ 和 $T(V, A^2(x)) \geq \lceil n/2 \rceil$。由第一种情况可知，对所有 $j \geq n + 3 + 2 = n + 5$，$T(V, A^j(x)) = n$。 □

4. 总结

多年来，人们为解决密度分类问题所付出的所有努力，都让我们对全局性质如何从纯粹的局部规则中涌现这一机制有了宝贵的认识。因此，DCT 体现了涌现计算的力量与局限性，也为这个不断发展的复杂系统领域提供了广阔的探索空间。

尽管多年来人们一直知道，对于采用环形连接模式的自动机网络（即与标准元胞自动机相关的连接模式），该问题不存在解，但我们在此证明，除了一些由任意连接模式导出的简单情况外，还存在非平凡情况；在这些情况下，节点只能被其他节点部分观测。我们展示了四类此类情况，并证明了它们的有效性；有关它们的许多复杂性问题将另文阐述，因为在此讨论会使本文过于冗长，因而难以阅读。

除我们发现的这些类别外，可能还存在其他类别。事实上，通过穷举计算实验枚举所有可能的网络（按同构去重），我们发现，对于包含 3 个节点的网络有 10 个解，对于包含 5 个节点的网络有 7514 个解。因此，可能解的数量增长极快，不过需要注意的是，给定规模下的解并不一定都能推广到更大规模，这显著限制了可能的解。

我们借助局部多数规则识别出的解族具有某种优雅性，因为这体现了如何通过全局问题的局部变体来解决该问题。不过，这也让我们不禁思考：如果允许采用任意规则，可能解的空间会有多丰富？这也证明了自动机网络相较于元胞自动机所赋予我们的灵活性。

致谢

作者感谢 Gilberto de Melo Junior 对论文中给出的算法进行测试。本研究部分由 HORIZON-MSCA-2022-SE-01 项目 101131549：“自动机网络与复杂系统的应用驱动挑战（ACANCOS）”资助。P.P.B. 还感谢巴西机构 CNPq（巴西国家科学技术发展委员会）提供研究资助 PQ 303356/2022-7。K.P. 和 M.R. 感谢 ANR-24- CE48-7504 ALARICE 项目。

参考文献

Abilhoa, W.D., de Oliveira, P.P.B., 2020. 基于多数规则的智能体密度分类：连通性对性能的影响，载于：Herrera, F., Matsui, K., Rodríguez-González, S.（编），《分布式计算与人工智能》，第16届国际会议，施普林格国际出版，查姆。第163–170页。doi: 10.1007/978-3-030-23887-2_19。Galam, S., 2008. 社会物理学：Galam模型综述。《现代物理学国际期刊C》19，409–440。doi: 10.1142/ S0129183108012297。Goles, E., Martínez, S., 1990. 神经网络与自动机网络：动力学行为与应用。第58卷，数学及其应用。克卢维尔学术出版社 / 施普林格。doi: 10.1007/978-94-009-0529-0。Goles, E., Medina, P., Santiváñez, J., 2023. 多数规则网络与局部共识算法。《科学报告》13，1858。doi: 10.1038/ s41598-023-28835-2。Goles, E., Montealegre, P., Salo, V., Törmä, I., 2016 609, 118 128101016201509014。多数规则自动机网络的PSPACE完全性。《理论计算机科学》–。doi: 。/j.tcs. . .。Gärtner, B., Zehmakan, A.N., 2017.（偏置）多数规则元胞自动机。网址：https://arxiv.org/abs/1711.10920，arXiv:1711.10920。Krapivsky, P.L., Redner, S., 2003. 双态相互作用自旋系统中的多数规则动力学。《物理评论快报》90，238701。doi: 10.1103/PhysRevLett.90.238701。Land, M., Belew, R.K., 1995. 不存在可完美实现密度分类的双态元胞自动机。《物理评论快报》74，5148–5150。doi: 10.1103/PhysRevLett.74.5148。Marshall, J.A.R., Kurvers, R.H.J.M., Krause, J., Wolf, M., 2019. 法定人数有助于在生物系统中最优汇总独立判断。eLife 8，e40368。doi: 10.7554/eLife.40368。Montalva-Medel, M., de Oliveira, P.P., Goles, E., 2018. 基于一维元胞自动机、循环二进制构型与并行更新的分类问题组合。《自然计算》17，663–671。doi: 10.1007/s11047-017-9650-1。de Oliveira, P.P.B., 2014. 元胞自动机中的密度判定：结果、构造与研究方向。《元胞自动机期刊》9，357–385。网址：https://www.oldcitypublishing.com/journals/jca-home/jca-issue-contents/jca-volume-9-number-5-6-2014/jca-9-5-6-p-357-385/。Ruivo, E., Perrot, K., Balbi, P.P., Perrotin, P., 2024. 使用分块顺序异步更新的一维元胞自动机进行密度判定的否定性结果。《计算科学期刊》82，102430。doi: https://doi.org/10.1016/j.jocs.2024.102430。