arXiv:2603.19485v1 [math.CO] 19 Mar 2026

随机地图中模式计数的渐近正态性 II

EVA-MARIA HAINZL

Abstract. 在近期的一项工作中，研究者通过将问题化归为面计数问题，证明了随机平面地图中模式计数的中心极限定理 [2]。我们通过从含有一个催化变量的函数方程中计算双变量系数渐近，绕过这一化归，从而给出一个更简短的证明，并将结果推广到具有任意边界的模式计数以及新的地图类。

1. Introduction

自20世纪90年代初以来，随机平面地图中的模式计数一直受到关注 [1, 7, 6,5, 10]。在近期的一项工作中 [2]，作者证明了具有简单边界的模式在随机平面地图中的高斯中心极限定理。下文的主要结果将这一极限定理推广到具有任意边界的模式计数，并给出了二部地图和2-连通地图中的相应极限定理。特别是，后一类地图无法采用原有的证明策略，因为该策略将模式计数问题化归为面计数问题，而化归为面计数可能会在原始的2-连通地图中产生割点。

我们给出一种直接证明，通过从催化变量方程中进行双变量系数提取，避免将问题化归为面计数。下一节将沿着平面地图详细阐述这一简化证明，随后证明二分地图和 2-连通地图中中心极限定理的一项推广。

我们方法的基础在于对有根平面图进行递归枚举，这可以追溯到 Tutte 在 20 世纪 60 年代的奠基性工作。他对平面图的分解导出了相应生成函数的含催化变量的函数方程。例如，若 $M(z,u)$ 表示生成函数，其中 z 标记边， u 标记根面的价，则经典的 Tutte 方程（[9]）为:

$$M(z,u) = 1 + zu^2 M(z,u)^2 + zu \cdot \frac{M(z,u) - M(z,1)}{u-1}.$$

通过引入额外变量，可以对特定的子结构进行计数。例如，引入变量 x 以标记价为 2 的非根面，我们得到:

$$M(z,u,x) = 1 + zu^2 M(z,u,x)^2 + zu\frac{M(z,u,x) - M(z,1,x)}{u-1} + z(x-1)(M(z,u,x)-1).$$

这项工作部分得到了奥地利科学基金会 FWF 项目 P 35016、F 100203 以及法国项目 ANR LOUCCOUM 的资助。

在这一框架下，Drmota 和 Panagiotou [4] 建立了关于价为 k 的面的中心极限定理，而 Yu [10] 处理了简单 k 边形的情形；这些边形是价为 k 的面，其边界由 k 个互不相同的顶点和 k 条互不相同的边组成。然而，将这些方法应用于更一般的模式时存在一个关键局限：当允许模式自相交时，这些方法便会失效，因为一般而言，无法用包含单一计数参数的方程来描述重叠的模式出现。Drmota、Hainzl 和 Wormald [2]借助 Gao 和 Wormald [7]，的一个定理规避了这一问题，该定理利用了面计数的高阶矩的渐近性质。我们简化这一思路，并直接计算模式计数的高阶矩的渐近性质。

2. A simplified proof of asymptotic normality of pattern counts

我们首先介绍一些基本定义和记号。

定义 1（有根平面图）。 平面地图 是嵌入球面中的连通平面图（允许有环和重边）。若其中一条边带有方向，则称其为有根。这条有向边进一步称为根边 ，根边指向的起点称为根顶点。平面地图将曲面分割成若干个连通区域，称为面。根边左侧的面称为根面 或外面。一个面的价 是与其关联的边数，其中桥计数两次。价为 m 的面称为 m边形。我们将有根地图的边界 定义为与根面关联的所有边和顶点的集合。

我们按照边数对根保持同构的有根地图进行计数，并将平面地图的生成函数记为

$$M(z,u)=\sum_{n,j\geq 0} m_{j,n}u^j z^n,$$

其中， z 表示边的数量， u表示根面的度数。

现在我们关注固定地图$\mathbf{p}$的模式出现次数。尽管这个术语看似不言自明，但模式出现的正式定义如下。

定义 2（模式出现 [1] ）。设$\mathbf{p}$是一个有根地图。如果地图$\mathbf{m}$ 可以通过以下方式扩展$\mathbf{p}$ 得到，我们就称$\mathbf{p}$ 作为模式出现在地图$\mathbf{m}$ 中：

(a) 在$\mathbf{p}$的根面的内部添加顶点；(b) 添加边，其端点可以是$\mathbf{p}$边界上的顶点或边，也可以是新创建的顶点；(c) 对由此得到的地图重新定根，使其新的根面不包含在$\mathbf{p}$的任何内部面中。

随机地图中的模式计数主要结果是对 [2]中定理 1 的推广。

定理 1。 设$\boldsymbol{p}$ 为一个平面地图， X_n 为大小为 n的随机平面地图中$\boldsymbol{p}$的模式出现次数。那么，

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \to \mathcal{N}(0,1)$$

其中 $\mu_n = c_1 n$ 且 $\sigma_n = c_2\sqrt{n}$,¯对于某些可计算常数 c_1、 $c_2 \geq 0$ ， 当 $n \to \infty$ 时成立。

尽管该定理的证明几乎可以直接由下文的引理 1 得出，但我们仍给出一个简化证明，它自然可以推广到证明策略 [2] 未涵盖的其他地图类（例如 2-连通地图）。

证明包含两个主要要素。第一是关于带有一个催化变量的离散微分方程解的普适渐近行为理论（见定理 3），其证明见 [3]。第二是 Gao 和 Wormald 的一个有力定理 [7]，它给出了由阶乘矩的渐近行为推出渐近正态性的条件（见定理 2）。这两种方法此前均被独立用于证明不可自相交模式计数的中心极限定理。

然而，如果模式的边界上有一个夹点，或者模式出现可以以许多种方式重叠，就难以递归地刻画这种重叠行为。解决这一问题的关键，是考察大小为 n 的随机图中，固定地图 $\mathbf{p}$ 的模式出现数量的高阶矩 X_n。下述定理利用 $k = \Theta(\sqrt{n})$ 阶矩，并导出一个中心极限定理。

—

定理 2 （Gao 和 Wormald， [7]）。 设 X_n 为一列取非负整数值的随机变量，其序列 $\mu_n \to \infty$ 和 $\sigma_n > 0$ 满足

$$\sigma_n \log^2 \sigma_n = o(\mu_n), \quad \mu_n = o(\sigma_n^3).$$

假设

$$\mathbb{E}[(X_n)_k] \sim \mu_n^k \exp\left(\frac{k^2}{2} \cdot \frac{\sigma_n^2 - \mu_n}{\mu_n^2}\right)$$

对 $c\mu_n/\sigma_n \leq k \leq c'\mu_n/\sigma_n$ 一致成立，其中 $0 < c < c'$ 为常数。则，

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

现在指出， k 阶的 X_n 的阶乘矩等于

$$\mathbb{E}[(X_n)_k] = \sum_{\ell \geq k} \ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1) \cdot \frac{m_{n,\ell}}{m_n},$$

其中， m_n 表示具有 n条边的平面地图数量，而 $b_{n,\ell}$ 表示具有 ℓ 个该模式出现的地图数量。特别地，因子 $\ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1)$ $b_{n,\ell}$统计了具有 ℓ 个模式出现的平面地图，其中 k 个带有标记。对所有 ℓ求和，恰好得到具有 k 个带标记的模式出现（数量不限）的地图数量。以下引理是一个关键观察，对若干地图类均成立。

引理 1. 设 $\mathcal{C}$ 是平面地图的一个（子）集，$\boldsymbol{p}$ 是一个平面地图。进一步设 μ_n表示在 $\mathcal{C}$ 中大小为 n的随机地图中，$\boldsymbol{p}$的出现次数的期望数量， σ_n 表示其标准差；设 $m^{\circ}_{n,k}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中大小为 n 且有 k 个$\boldsymbol{p}$ 的带标记出现的所有地图数量，并设 $m^{\circ,\times}_{n,k}$,表示所有这类地图的数量，其中每个带标记的模式出现与至多一个其他$\boldsymbol{p}$的带标记出现相交。若$\boldsymbol{p}$ 具有简单边界， $\mu_n, \sigma_n^2 \in \Theta(n)$ 且 $k = \Theta(\sqrt{n})$ ，则当 $n \to \infty$时，

$$m^{\circ,\times}_{n,k} \le m^{\circ}_{n,k} \le m^{\circ,\times}_{n,k} + \left(\frac{\mu_n}{2}\right)^k m_n + o\left(m_{n,k}\right). \tag{2.1}$$

若$\boldsymbol{p}$ 不具有简单边界，但在具有 n 条边的随机地图中，最大顶点度 Δ_n 满足

$$\mathbb{P}\left(\Delta_n > \xi(n)\right) \le e^{-\delta \xi_n}$$

当 $\xi_n = \omega(\log n)$ 时，(2.1) 也成立。

该引理的证明见第 4 节。

已知随机平面地图中的最大顶点度的期望为 $\log(n)$ 量级，且其分布具有指数尾，其中 $\Delta_n = \omega(\log n)$，见 [8]。

因此，利用该引理，只需枚举带有带标签的模式出现的地图，其中每个带标签的模式与至多另一个带标签的模式出现相交。由于两个模式出现的相交方式只有有限种，我们可以引入一个额外的计数变量 x ，其中 x 标记彼此至多两两相交的带标记的特定模式出现。

为此，我们列出该模式的所有< 스타일 id='1'>交类型。这些交类型描述了包含两个特定模式出现的所有子地图。

定义 3（交类型、旋转和深面）。 如果两个模式出现满足以下任一条件，则称它们相交：包含一个公共面；或者在其边界上共享一个夹点，并且该夹点处关联分支的循环次序无法划分为两个连续区块，使得每个区块只包含其中一个模式出现的分支。

更确切地说，假设移除夹点后，第一个模式出现分解为连通分支 B_1， B_2， B_3，第二个模式出现分解为连通分支 B'_1， B'_2。令这些连通分支绕夹点的循环次序为由嵌入诱导的径向次序。如果该循环次序不具有以下形式，则这两个模式出现相交：

$$B_i, B_j, B_k, B'_\ell, B'_m$$

对于任意排列 i， j， $k \in \{1,2,3\}$ 和 ℓ， $m \in \{1,2\}$，因此两个模式出现的连通分支无法分成两个连续的序列。

设$\mathbf{p}$ 和$\mathbf{r}$ 为有根平面地图，并设$\mathbf{r}$ 包含$\mathbf{p}$ 的两个相交的、特殊标记的模式出现 p_1 和 p_2 。此外，假设$\mathbf{r}$ 的每条边和每个顶点都是 p_1 或 p_2的边或顶点。那么$\mathbf{r}$ 称为模式$\mathbf{p}$的有根交类型 。

如果通过重新定根$\mathbf{r}$ 可得到有根地图$\mathbf{n}$，且根面保持不变，那么$\mathbf{n}$ 称为$\mathbf{r}$的一个旋转。

交类型 i 是根交类型$\mathbf{r}$ 的$\mathbf{p}$ 的所有旋转所组成的集合。我们进一步用 r_i表示$\mathbf{r}$的两两不同构旋转的数量，其中同构必须保持 $\{p_1, p_2\}$。也就是说，交类型 i 包含 r_i 个具有一对无序标记出现的不同根地图$\mathbf{p}$。

给定任意地图$\mathbf{m}$中模式$\mathbf{p}$ 的两个相交出现 p_1 和 p_2 ，我们可以通过删除$\mathbf{m}$的所有边，仅保留$\mathbf{p}_1$或$\mathbf{p}_2$, 中的边，并在包含$\mathbf{m}$的根面的（新）面的边界上指定一个根，从而得到$\mathbf{p}$的有根交类型。该交类型与在边界上选择哪个根无关。如果它是类型 i，我们就称这对相交出现， p_1 和 p_2具有交类型 i。注意，有根交类型可能包含不属于这两个$\mathbf{p}$的标记出现内部的内部面。我们称这些面为深层面。

给定一个模式的交类型，我们可以建立一个函数方程，用于统计具有<style id='1'>一些两两相交的带标记且有标签的模式出现的地图。

特别地，如果根边与一个带标记且有标签的模式出现，或与一对相互相交的此类模式出现关联，我们可以沿着与其交类型边界相对应的简单边界，将该子地图分离出来。如果边界上存在夹点，我们只需将每个夹点拆分为两个独立的顶点，从而得到一个简单边界（示例见图 2）。然后，我们统计具有所谓部分简单边界的地图数量，随后沿边界附加交类型的一个旋转。最后，我们将具有简单边界的地图插入深面中，而深面不一定具有简单边界。不过，我们只需将具有简单边界的地图的顶点粘合起来，使其与深面的确切形状相匹配。

图 1 展示了递归分解，其中求和遍历所有交类型； j 表示一个长度为 i_j 的具有简单边界的地图，而 P_{k_j} 表示一个长度为 k_j 的具有部分简单边界的地图。

带有部分简单边界的地图已在 [10], 中引入，并在那里进行了详细讨论。我们将在下一节中重新定义它们，但只讨论它们针对二部地图的生成函数。

定义 4 （（部分）简单边界）。 设$\mathbf{m}$为一个根面价为 $k > i$的地图。如果沿着$\mathbf{m}$ 的边界，从其根顶点出发并沿根边方向确定的路径的前 i 步由 i 条不同的边和 i个不同的顶点组成，则称该地图具有长度为 i的部分简单边界。

若$\mathbf{m}$ 具有长度为 $i-1$ 的部分简单边界，且根面度数为 i，则它具有简单边界。

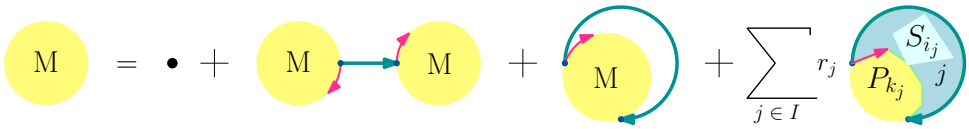

FIGURE 1. 带有相交至多两两的带标签模式的平面地图 M 的分解

命题 1. 设$\boldsymbol{p}$ 为一个具有 e 条边、长度为 v 的边界和 r 个旋转对称的平面地图。此外，我们将其交类型从1 枚举至 I，并令 e_i 表示边数， v_i 表示根面度数，$d_{i,j}$ 表示深层 j-面的数量， r_i 表示交类型为 $i \in [I]$的旋转数量。那么，对于具有某些标记的指定模式出现（模式为$\boldsymbol{p}$）且彼此最多成对相交的平面地图，其生成函数 $M(z,u,x)$满足以下方程

$$M(z,u,x) = 1 + zuM(z,u,x)^2 + zu\frac{M(z,1,x) - uM(z,u,x)}{1-u} + x\frac{rz^{e-v+1}}{u^{v-2}}P^{\mathcal{B}}_{v-1}(z,u,x)$$
$$+ x^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{r_i z^{e_i - v_i + 1}}{u^{v_i - 2}} P_{v_i - 1}(z,u,x) \prod_{j \geq 1} \left([u^j]P_{j-1}(z,u,x)\right)^{d_{i,j}}, \tag{2.2}$$

其中， z 表示边数， u 表示根面度数， x 表示 $\boldsymbol{p}$ 的特定带标记出现数， $P_i(z,u,x)$ 是边界长度为 i 的部分简单边界地图的生成函数。

证明。我们采用 Tutte 在 20 世纪 60 年代提出的经典分解方案 [9] ，该方案基于删除根边。定义所得地图的根边时，须保留根面和根顶点（见图 1）。若地图断开，则为两个连通分支各自指定根边：其中一个连通分支的根边保留根顶点和根面，另一个连通分支的根顶点则是被删除根边所指向的顶点。我们分析的分解方案见图 1。

第四项对应于根边与一个带标签的模式出现关联，且该模式出现不与任何其他带标签的模式出现相交的情形。在这种情况下，我们计算具有边界长度 $v-1$、含有 $n-e+v-1$ 条边的部分简单边界地图的数量，并将其乘以 r，即 $\mathbf{p}$ 的旋转对称性数目。将该部分简单边界地图与模式出现的 r 种旋转对称形式之一粘合，会使地图的根面度数减少 $v-2$，并使边数增加 $e-v+1$。注意，模式出现不一定具有简单边界，但粘合过程仍然是双射：因为可以将与 $\mathbf{p}$ 的根面 j 个角相邻的夹点拆分为 j 个保留根面的顶点（见图 3），随后删除 $\mathbf{p}$ 的内部边，最后删除根边，从而得到一张具有部分简单边界的地图。

对于对所有交类型求和中的项，同样的论证也成立；此外，我们还用具有简单边界且根面相应的地图填充深面

度数。这些由 $[u^j]P_{j-1}(z,\ u,\ x)$ $j \geq 0$ 枚举，因为一个长度为 $j-1$ 且根面度数为 j 的部分简单边界地图，确实是一个长度为 j的简单边界地图。同样，可以论证，对于没有简单边界的深面，这一过程也如上所述构成双射。□

一旦建立了关于 $M(z,\ u,\ x)$ 的函数方程，我们便希望应用以下定理，该定理给出了 z 中系数的普适渐近行为。

定理 3 (Drmota、Noy、Yu [3])。 设 $F(z,u,x)$ 是方程的解

$$F(z,u,x) = Q\left(z,u,x,F(z,u,x),\frac{F(z,u,x)-F(z,1,x)}{u}\right),$$

其中 $Q(z,u,x,y_0,y_1)$ 是在原点附近以及 $F(z,u,x)$ $F(z,1,x)$ 收敛边界处的解析函数，并且令 $Q(z,u,0,y_0,y_1)$ 具有非负泰勒系数。进一步设 $\rho(0)^{-1} > 0$ 是 $F(z,1,0)$ 在收敛半径处的唯一奇点。那么

$$[z^n]F(z,0,x) = c(x)n^{-\frac{5}{2}}\rho(x)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

当 x 取值于 $x=0$ 的某个紧邻域时，一致地成立，其中 $c(x)$ 和 $\rho(x)$ 是在 $x=0$ 处的解析函数。

显然，要应用定理 3，我们需要检查，描述根边上关联有已标记模式出现的地图的生成函数，是否确实在 z、u、x、$M(z$、u、$x)$ 和 $M(z$、1、$x)$ 中为解析函数，随后再作变量替换$v=u-1$。事实上，这一点已经针对地图中的面计数在 [4] 中得到证明，并在 [10] 和 [2]中进一步应用。

引理 2。 具有根面度数 i 的平面地图的生成函数 $m_i(z,x)\colon = [u^i]M(z,u,x)$ 在 z、x 和 $M(z$、1、$x)$ 中为解析函数，条件是$|z| \leq \frac{13}{25}$、 $|M(z$、1、$x)-1| \leqslant \frac{5}{4}$，且对于某个足够小的 $x_0 > 0$， $|x| \leq x_0$ 。

这一结论的证明基于对 $\ell^1(\mathbb{C})$序列空间进行的不动点论证；下一节证明其他地图类的类似结论时，我们将再次采用这一方法。

现在，我们可以用以下引理计算随机变量的高阶矩。

引理 3 （催化方程的双变量渐近分析）。设F（$z,0,x$）在 z中的系数满足如下渐近公式，且该公式对 x在 $x=0$附近的某个紧邻域内一致成立

$$[z^n]F(z,0,x) = c(x)n^{-\frac{5}{2}}\rho(x)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

其中 $c(x)$ 和 $\rho(x)$ 在 $x=0$ 处为解析函数。那么，对于 $k=\Theta(\sqrt{n})$，

$$k![z^n x^k]F(z,0,x) \sim c_0 n^{k-\frac{5}{2}}\rho(0)^n\left(\frac{\rho'(0)}{\rho(0)}\right)^k e^{\frac{k^2}{2n}\left(\frac{\rho''(0)\rho(0)}{\rho'(0)^2}-1\right)},$$

当 $n \to \infty$ 时。

该引理的证明基于 [3] 中的结果以及使用鞍点法进行的计算。证明见第 4 节。

定理 2 所需的随机地图中模式出现次数的矩，随后由引理 1 以及基于引理 3 的简单计算给出；为节省篇幅，我们省略这些计算，从而得到以下表达式。

引理 4。 设$\boldsymbol{p}$ 为一个平面地图， X_n 为$\boldsymbol{p}$ 在大小为 n 的随机地图中的模式出现次数。那么，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &\sim \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} n \\
\mathbb{V}ar(X_n) &\sim \frac{\rho''(0)\rho(0) + \rho'(0)\rho(0) - \rho'(0)^2}{\rho(0)^2} n \\
\mathbb{E}((X_n)_k) &\sim \left(\frac{\rho'(0)}{\rho(0)} n\right)^k e^{\frac{k^2}{2n}\left(\frac{\rho''(0)\rho(0)}{\rho'(0)^2} - 1\right)}, \qquad\qquad k = \Theta(\sqrt{n}),
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时。

最后，我们由定理 2 和引理 4 推导出所需的中心极限定理。

例 1（苍蝇）。 我们考虑图 2 中两个二边形在一个顶点处相交的例子，并将其称为一只苍蝇。该图还说明，一个根边与一个带标记且有标签的模式出现相邻的地图，可以分解为根边和一个具有长度为 3 的部分简单边界的地图；我们将这条边界路径上的两个顶点粘合起来。

其六种交类型列于图 3。请注意，模式出现是否带有标记，会影响交类型的旋转次数。例如，如果模式出现没有标记，类型 2 有两种不同的旋转。但在此情形下，两个模式出现共享的面可以与另外两个面区分开来，从而打破旋转对称性，因此该交类型有六种可能的旋转。

$$\begin{aligned}
B(z,u,x) = 1 &+ zuB(z,u,x)^2 + z\Delta B(z,u,x) + 2xP_3(z,u,x) + 3x^2P_5(z,u,x) \\
&+ x^2\left(2P_7(z,u,x) + 6P_5(z,u,x)(1 + z + [u]P_1(z,u,x))\right) \\
&+ x^2\left(P_3(z,u,x)(4(z + [u]P_1(z,u,x)) + 2(z + [u]P_1(z,u,x))^2\right)
\end{aligned}$$

现在，定理 1 立即告诉我们，随机平面地图中苍蝇的数量 X_n 满足高斯中心极限定理。

3. Extension to further map classes

在本节中，我们将上一节的证明改编用于二分平面地图和 2-连通平面地图。上一节中的简化证明对于后一类地图尤其值得关注，因为

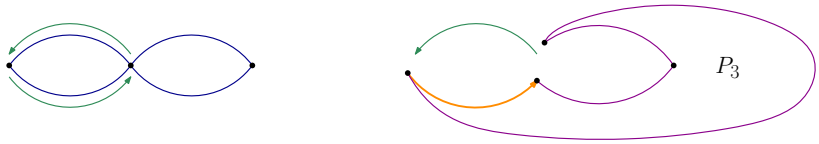

FIGURE 2. 左：一只苍蝇。绿色箭头表示模式出现的旋转。

右：将根边与一只特定苍蝇相邻的地图分解为根边和一个具有简单部分边界的地图。

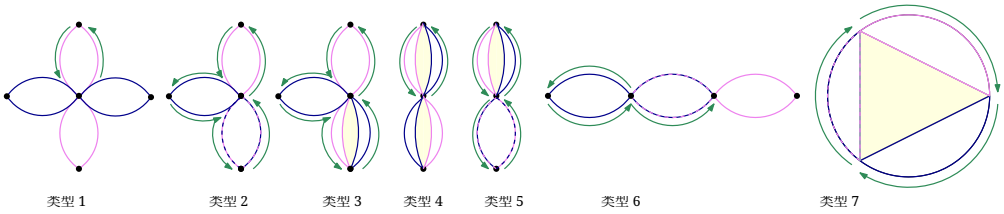

FIGURE 3. 两只苍蝇的七种交类型。绿色箭头表示交类型可能的旋转。黄色面是深面。在此列表中，允许将价为 2 的深面收缩为一条单边。

[2] 中的证明需要我们删除所有标记模式的内部边，而这可能会产生割点。因此，所得地图将不再是 2-连通的，我们也就无法直接应用关于随机 2-连通映射中面计数的现有理论。不过，简化后的证明很容易推广，因为 2-连通地图同样满足经典的根边分解。

此外，关键的技术引理和定理（例如定理 2、引理 4 和 1）已经证明。因此，我们对这两类地图的关注重点是

(1) 建立一个恰当的函数方程，并引入一个额外的计数变量，用于统计单个带标签的模式出现以及成对相交的带标签模式出现。(2) 证明我们可以将引理 1 应用于该函数方程及其解。特别是，系数满足如下形式的渐近公式

$$c(x)n^{-\frac{5}{2}}\rho(x)^n$$

其中 $c(x)$ 和 $\rho(x)$ 是在 $x = 0$ 附近适当的解析函数。

与一般情形类似，我们采用根边分解来描述带有额外计数变量的生成函数，并相应地为模式计数建立函数方程。最后，我们利用引理 4 计算模式计数的期望、方差和高阶阶乘矩的渐近行为，并导出一个中心极限定理。

3.1. 二部地图。我们首先正式定义二部地图。

定义 5 （二部（平面）地图）。 当且仅当存在一个适当的 2-（顶点）着色时，平面地图才是二部的 。这等价于将平面地图的面限制为偶数度。我们用以下生成函数表示它们:

$$B(z,u)=\sum_{n,j\geq 0} b_{j,n}u^j z^n,$$

其中 z 标记边数， u标记根面度数的一半，以避免出现周期性。

T随机二部地图中模式计数的主要结果如下定理所示 .

定理 4. 设$\boldsymbol{p}$ 为一个具有简单边界的平面二部地图， X_n 为大小为 n 的随机二部地图中 $\boldsymbol{p}$ 的模式出现次数。那么，

$$\frac{X_n-\mu_n}{\sigma_n}\to\mathcal{N}(0,1)$$

其中 $\mu_n=c_1 n$ 且 $\sigma_n=c_2\sqrt{n}$,¯对于某些可计算常数 c_1、 $c_2\geq 0$ ， 当 $n\to\infty$ 时成立。

我们预计，该定理同样适用于没有简单边界的模式。然而，由于文献中似乎尚未给出关于二部地图中最大度数的指数尾界，我们将表述限制在具有简单边界的模式上。

如前所述，我们的目标首先是为这样一类二部地图建立函数方程：其中加入了一个变量，用于计数至多两两相交的带标记的特定模式出现。随后，我们证明该方程满足引理 3 的解析性假设，从而可以推出定理 2 中高阶矩所需的渐近式。

同样地，我们需要具有部分简单边界的地图，以便对地图进行适当分解。下面的引理描述了它们在二部地图中的生成函数。

引理 5。 令 $P_i^{\mathcal{B}}(z,u,x)$ 表示具有长度为 i 的部分简单边界的平面二部地图的生成函数，其中 z 计数边的数量， u 计数根面的价除以 2， x 计数若干至多两两相交的带标记的模式出现。它们满足递推关系

$$P_{2i-1}^{\mathcal{B}}(z,u,x)=B(z,u,x)-\sum_{j=0}^{i-1}b_i(z,x)u^i-\sum_{j=1}^{i-1}P_{2j-1}^{\mathcal{B}}(z,u,x)u^{i-j}[u^{i-j}]B(z,u,x)^{2j}$$

$$P_{2i}^{\mathcal{B}}(z,u,x)=B(z,u,x)-\sum_{j=0}^{i-1}b_i(z,x)u^i-\sum_{j=0}^{i-1}P_{2j}^{\mathcal{B}}(z,u,x)u^{i-j}[u^{i-j}]B(z,u,x)^{2j+1}$$

对于 $i\geq 1$ 以及初始条件 $P_0^{\mathcal{B}}(z,u,x)=B(z,u,x)$。

特别地，边界长度为 i 的、具有部分简单边界的二部地图的生成函数，可以表示为关于 $B(z,u,x)$ 、 $b_0(z,x)$..... $b_i(z,x)$的多项式。

T该证明与一般平面地图情形类似，故推迟至第 4.

命题 2. 设$\boldsymbol{p}$ 为一个具有 e 条边、长度为v 的简单边界以及 r 个旋转对称性的平面二部地图。此外，我们将其交类型从1 到 I进行枚举，并令 e_i 为边数， v_i 为根面度数，$d_{i,j}$ 为深层 j-面的数量， r_i 为交类型为 $i \in [I]$的旋转数。对于具有若干标记的指定模式出现$\boldsymbol{p}$且这些出现两两相交的平面二部地图，其生成函数$B(z,u,x)$ 满足方程

$$B(z,u,x) = 1 + zuB(z,u,x)^2 + zu\frac{B(z,1,x) - B(z,u,x)}{1-u} + x\frac{rz^{e-v+1}}{u^{\frac{v-2}{2}}}P^{\mathcal{B}}_{v-1}(z,u,x)$$
$$+ x^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{r_i z^{e_i - v_i + 1}}{u^{\frac{v_i-2}{2}}} P^{\mathcal{B}}_{v_i-1}(z,u,x) \prod_{j\geq 1} \left([u^j]P^{\mathcal{B}}_{j-1}(z,u,x)\right)^{d_{i,j}}, \tag{3.1}$$

其中， z 表示边的数量， u表示根面度数除以2， x 表示$\boldsymbol{p}$的标记出现数量。

证明。同样，我们使用Tutte在20世纪60年代提出的经典分解方案 [9] ，该方案基于删除根边。前三项对应于根边不与模式出现相邻接的情形。

与一般地图类似，第四项对应于根边与一个不和任何其他带标记的模式出现相交的带标记模式出现相邻接的情形。注意，将这些 r 旋转对称性之一与具有部分简单边界的地图粘合后，地图的根面度数将减少 $v-2$，但 u 表示根面度数除以2。因此，我们得到因子 $u^{\frac{v-2}{2}}$ 。根边与某种交类型相邻接的情形可用类似方法处理。

—

□

既然已经建立了 $B(z,u,x)$ 的函数方程，我们需要检查它是否满足定理 3 的假设。特别地，我们需要以下引理。

引理 6. 根面度数为 i 的平面二部地图的生成函数 $b_i(z,x)$ 是关于 z、 x 和 $B(z,1,x)$ 的解析函数，只要 $|z| \leq \frac{2}{15}$, $|B(z,1,x) - 1| \leq \frac{5}{4}$且$|x| \leq x_0$ 对某个足够小的 $x_0 > 0$ 成立。

证明采用了不动点论证，与 [4] 中的论证类似，详见第 4 节。定理 4 随即成立。

定理 *4* 的证明。 由引理 6 可知，我们可以将定理 3 应用于命题 2 中的函数方程，并进一步推得 $[z^n]B(z,1,x)$ 满足引理 3 给出的普适渐近式。因此，模式 $\mathbf{p}$ 的出现次数的期望和方差关于 n 呈线性增长，因为它们可以通过带有一个或两个带标记的特定模式出现的地图数量除以所有二部地图的数量来计算。

对于高阶矩，我们现在可以应用引理 1。该引理指出，具有k 个指定的带标记模式出现的地图数量，渐近上等于具有 k 个指定的、两两至多相交的带标记模式出现的地图数量，当

$k = \Theta(\sqrt{n})$。命题 2 对这些地图进行了计数，它们满足引理 4 给出的渐近行为。因此，阶乘矩对于 $k = \Theta(\sqrt{n})$ 按如下方式增长

$$\mathbb{E}[(X_n)_k] \sim \mu_n^k \exp\left(\frac{k^2}{2}\frac{\sigma_n^2 - \mu_n}{\mu_n^2}\right).$$

由此，定理 2 得出高斯中心极限定律。 □

3.2. **2-连通地图**。

定义 6. *2-连通* 地图（也称为不可分地图）是不含割点的地图。也就是说，删除任意一个顶点后，它们仍然连通。我们用其生成函数表示为

$$N(z,u) = \sum_{n,j\geq 0} n_{j,n} u^j z^n,$$

其中， z 表示边数， u 表示根面度数。

定理 5. 设$\boldsymbol{p}$ $\in \mathcal{N}$ 为一个固定地图， X_n 为大小为 n 的随机平面 *2-*连通地图中模式$\boldsymbol{p}$出现的次数。那么，

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \to \mathcal{N}(0,1)$$

其中 $\mu_n = c_1 n$，且对于某些可计算常数 c_1、$c_2 \geq 0$，当 $n \to \infty$ 时， $\sigma_n = c_2\sqrt{n}$ 。

2-连通平面地图总是具有简单边界。因此，具有（部分）简单边界的地图这一概念是多余的。然而，与二部地图的情形相比，分解过程更为复杂。删除根边可能会得到一个非空序列的 2-连通平面地图，这些地图由新产生的割点连接起来；而我们希望控制与根边相邻的两个面的价。此外，我们将研究范围限制为其自身为 2-连通地图的模式。如果允许模式边界上存在夹点，删除根边后不仅会得到一个非空的 2-连通平面地图序列，我们还需将割点限制在边界上的特定位置，且这些位置不能对应于模式出现中的夹点。不过，实际上，这些情形都可以用完全类似的方法处理。只需格外留意这些限制，并且当然要论证为何可以使用引理 1；该引理要求地图的最大顶点度具有指数界。

命题 3. 设$\boldsymbol{p}$ 为一个平面 *2-*连通地图，它有 e 条边、长度为 v 的边界以及 r 个旋转对称性。此外，我们将其交类型从1 到 I 编号，并令 e_i 表示边数， v_i 表示根面的价，$d_{i,j}$ 表示价为 j 的深面数， r_i 表示交类型为 $i \in [I]$ 的旋转数。那么，对于带有若干特定带标记的

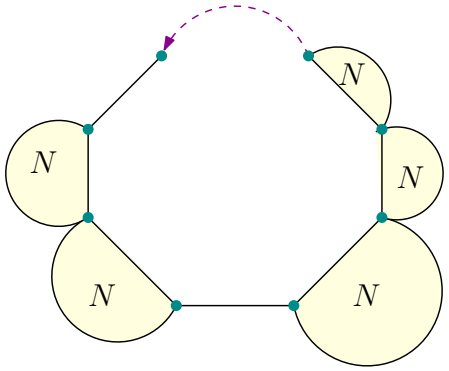

FIGURE 4. 2-连通地图的分解

模式 $\boldsymbol{p}$ 的出现且两两至多相交的平面 *2*-连通地图，其生成函数满足方程

$$\begin{aligned} N(z,u,x) = zu\frac{zu+\frac{uN(z,1,x)-N(z,u,x)}{1-u}}{1-\left(zu+\frac{uN(z,1,x)-N(z,u,x)}{1-u}\right)} \\ + x\frac{rz^{e-v+1}}{u^{v-2}}F_{v-2}(z,u,N(z,u,x),n_2(z,x),\dots,n_{v-2}(z,x)) \\ + x^2\sum_{i=0}^{I}\frac{r_i z^{e_i-v_i+1}}{u^{v_i-2}}F_{v_i-2}(z,u,N(z,u,x),n_2(z,x),\dots,n_{v_i-2}(z,x))\prod_{j\geq 2}n_j(z,x)^{d_{i,j}} \end{aligned}$$

其中，所有 $F_v(z,u,y_0,y_1,\dots,y_{v-1})$ $v>0$ 都是多项式。

证明。 与二元情形类似，方程中的第一项计数的是根边不与模式出现相邻的所有地图，其余部分则对应于根边与带标记的模式出现相邻，或与我们单独处理的某种交类型相邻的情形。接下来要指出的是，当根边与带标记的模式出现相邻时，去除模式出现（或相交模式对的出现）后的地图由一个非空序列组成，序列中的元素为2-连通地图或单边，如图4所示。

为了描述这些地图，我们引入变量 w ，用于标记与模式出现相邻的边数；此外， z 标记边数， u标记根面的度数。该序列中的每个2-连通地图至少有一条边属于模式出现的边界，且至多比其根面度数少一条边。因此，这些地图各自的生成函数为

$$\begin{aligned} \sum_{m\geq 2}n_m(z,x)u^m(w+w^2+\cdots+w^{m-1}) &= \sum_{m\geq 2}n_m(z,x)u^m\frac{w-w^m}{1-w} \\ &= \frac{wN(z,u,x)-N(z,uw,x)}{1-w} \end{aligned}$$

因此，由边或 2-连通地图构成的非空序列的生成函数（它们为模式出现或交类型的边界贡献 $b-2$ 条边）为

由下式给出

$$[w^{b-2}]\frac{zu^2w+\frac{wN(z,u,x)-N(z,uw,x)}{1-w}}{1-\left(zu^2w+\frac{wN(z,u,x)-N(z,uw,x)}{1-w}\right)}$$

显然，这是关于 $z,u,\ y_0\ =\ N(z,u,x)$ 和$y_1=n_2(z,x)\ldots,y_3=n_{b-2}(z,x)$ 的多项式 $F_{b-2}(z,u,y_0,y_1,\ldots,y_{b-3})$。

随后，我们加入模式出现的 $e-v+1$ 条边，这会使根面的价降低 $v-2$。此外，我们将该表达式乘以模式的旋转对称数，以涵盖将模式出现附加到 2-连通地图序列上的所有可能方式，并用 x标记该项。

在根边与某种交类型相 incident 的情况下，上述论证同样成立。此外，深面由具有适当根面度数的 2-连通地图填充（根据定义，这些地图具有简单边界）。□

引理 7。 具有根面度数 i 的 *2*-连通平面地图的生成函数 $n_i(z,x)$ 在 z、x 和 $N(z,1,x)$ 中是解析函数，条件是 $|z|\ \le\ \frac{1}{6}$，$|N(z,1,x)|\ \le\ \frac{1}{18}$且$|x|\le x_0$ 对于某个足够小的 $x_0>0$ 成立。

证明。 首先，我们将方程改写为多项式表达式

$$\begin{aligned}N(z,u,x)=\left(zu-zu^2+uN(z,1,x)-N(z,u,x)\right)\left(zu+N(z,u,x)\right)\\+xF(z,u,N(z,1,x),n_2(z,x),\ldots,n_{2v}(z,x)).\end{aligned}$$

现在，证明与二部地图的证明类似。由于 $N(z,\ 1,\ 0)$的奇点位于 $z=\frac{4}{27}$，且 $N(\frac{4}{27},\ 1,\ 0)\ =\ \frac{1}{27}$和$u(\frac{4}{27})\ =\frac{3}{2}$，$N(\frac{4}{27},\ \frac{3}{2},\ 0)=\frac{1}{9}$，我们可以证明$|z|\le\frac{1}{6}$，$|N(z,\ 1,\ x)|\le\frac{1}{18}$，$|u|\le\frac{7}{4}$和 $|x|<x_0$的收敛性，其中 x_0由函数方程中带有 x因子的项在该取值范围内允许的最大值决定。□

定理 *5* 的证明。 证明与一般地图和二部地图的证明完全类似。 □

4. 证明

4.1. 引理 1 的证明。首先，我们根据出现的模式数量区分地图。令 S_1 为 $\mathcal{C}$ 中模式出现次数少于 $\mu_n/2$ 的地图集合。那么，集合 S_1 中带有 k 个带标签的模式的地图对$m_{n,\ k}$ 的贡献至多为

$$(\mu_n/2)^k|S_1|\le(\mu_n/2)^k m_n$$

因为在集合 S_1中的一张地图上，标记 k 个模式的方式至多有（$\mu_n/2$）$_k$ 种。

接下来，我们仔细考察模式出现次数多于 $\mu_n/2$的地图集合 S_2 的贡献。设$\mathbf{m}$ 属于 S_2，其中模式$\mathbf{p}$ 出现 p 次，并令 $L(\mathbf{m})$表示由地图$\mathbf{m}$ 及其 k 个带标签的模式出现组成的地图集合。

此外，设 $c(n)$ 为一种模式出现与另一种模式出现相交的方式数。注意，

(a) 如果$\mathbf{p}$ 具有简单边界，那么 $c(n)$ 有一个由 vf^2 给出的上界，其中f 是$\mathbf{p}$的内部面数， v 是内部面的最大面价。这是因为，$\mathbf{m}$ 中的一个面 F 最多可以与$\mathbf{p}$ 的一次出现中的 f 个不同的面相交，而这种相交最多可以旋转v 种方式。

(b) 若$\mathbf{p}$ 具有一个含有 m 个捏点的边界，且 ℓ 是删除其中一个捏点后产生的连通分支的最大数量，那么 $c(n)$ 由 $\max\{cf^2, \binom{\Delta(\mathbf{m})}{2\ell}\}$ 所界，其中 $\Delta(\mathbf{m})$ 是$\mathbf{m}$中的最大顶点度。这是因为两个模式出现可以通过共享其边界上的同一个捏点而相交，并且有 $\binom{\Delta(\mathbf{m})}{2\ell}$ 种方式选择 2ℓ 个角，使两个出现的连通分支分别位于其中。

此外，由于为 k 个模式出现添加标签有 $(p)_k$ 种方式， $L(\mathbf{m})$ 的大小恰好为 $(p)_k$。若我们对以下情况进行上界估计：为 k 个模式添加标签，且至少有一个带标签的出现与另外两个出现相交，那么与另外两个出现相交的模式出现至多有 p 种选择，其标签至多有 k 种选择。此外，与该带标签出现相交的两个模式出现至多有 $c(n)^2$ 种选择，其标签分别有 $(k-1)$ 和 $(k-2)$ 种选择。其余带标签的模式出现可以自由选择，因此总数至多为

$$(pk)\cdot(c(k-1))\cdot(c(k-2))\cdot(p-3)_{(k-3)}$$

为 k 个模式出现进行标记的方式，使得至少存在一个带标记的出现与另外两个带标记的出现相交。将该数量与 $L(\mathbf{m})$ 的大小进行比较，得到

$$\frac{c^2k(k-1)(k-2)p(p-3)(p-4)\cdots(p-k+1)}{p(p-1)\cdots(p-k+1)} \le \frac{c^2k^3}{(p-2)^2}.$$

此时，我们再进行一次分类讨论。令 $S_{2a}\subseteq S_2$ 为 S_2 的子集，其中$\Delta(\mathbf{m}) < \log(n)^2$；令 $S_{2b}\subseteq S_2$ 为满足 $\Delta(\mathbf{m}) \ge \log(n)^2$的子集。

- 若 $\mathbf{m}\in S_{2a}$，则 $c(n) < \log(n)^{4\ell}$，并且对于某个常数 C，上式有界于 $C^{\log(n)^{8\ell}}$，因为 $p > \mu_n/2$ 且 $\mu_n = \Theta(n)$。
- 若 $\mathbf{m}\in S_{2b}$，由于必须满足 $c\le p$，我们可以用 k^3 对上式进行估计。然而， $\Delta(m) > \log(n)^2$ 的概率呈指数级有界。也就是说， $S_{2b} \le e^{-\delta\log(n)^2} m_n$。

通过使用粗略估计 $|S_1| < m_n$ 和 $\sum_{\ell\ge\mu_n/2}(\ell)_k\, m_{n,\ell} < m^\circ_{n,k}$，上述考虑可归结为

$$m^\circ_{n,k} \le m^{\circ,\times}_{n,k} + \left(\frac{\mu_n}{2}\right)^k m_n + O\left(\left(\frac{C\log(n)^{8\ell}}{\sqrt{n}} + \frac{k^3}{n^{\delta\log n}}\right) m^\circ_{n,k}\right).$$

4.2. **引理 2 的证明**。

证明。 我们注意到，生成函数 $b_i(z,x)$ 满足以下形式的递推关系

$$\begin{aligned} b_0(z,x) &= 1 \\ b_i(z,x) &= z\sum_{j=0}^{i-1} b_j(z,x)b_{i-j-1}(z,x) + z(B(z,1,x) - \sum_{j=0}^{i-1} b_j(z,x)) \\ &\quad + x[u^i]P(z,u,B(z,u,x),b_0(z,x),\dots,b_k(z,x)) \\ &\quad + x^2[u^i]Q(z,u,B(z,u,x),b_0(z,x),\dots,b_\ell(z,x)) \end{aligned}$$

根据命题 4，其中我们记

$$\begin{aligned} p_i(z,b_{i-k'}(z,x),b_{i-k'+1}(z,x),\dots,&b_i(z,x),b_0(z,x),\dots,b_k(z,x)) \\ &:= [u^i]P(z,u,B(z,u,x),b_0(z,x),\dots,b_k(z,x)) \\ q_i(z,b_{i-\ell'}(z,x),b_{i-\ell'+1}(z,x),\dots,&b_i(z,x),b_0(z,x),\dots,b_\ell(z,x)) \\ &:= [u^i]Q(z,u,B(z,u,x),b_0(z,x),\dots,b_\ell(z,x)). \end{aligned}$$

现在，我们知道方程（3.1）在 z 较小且 u接近 1 时成立，并给出解析解 $B(z,1,x)$和 $B(z,u,x)$。我们还知道，对于 $x=0$， $B(z,1,0)$的收敛半径为 $1/8$，且 $B(1/8,1,0)=5/4$。因此，我们可以假设 $Y=B(z,1,x)$已给定，并令 x_0 足够小，使得对所有 $|x|\le x_0$，均有 $|Y|\le 11/8$。此外，我们定义算子 $T\colon \ell^1(\mathbb{C})\to\ell^1(\mathbb{C})$，它将 $\mathbf{y}=(y_0,y_1,y_2,\dots)\in\ell^1(\mathbb{C})$ 映射为（固定$|x|\le x_0$ 和 $|z|\le \frac{2}{15}$）

$$\begin{aligned} T(\mathbf{y})_i &= z\sum_{j=0}^{i-1} y_j y_{i-j-1} + z\left(Y - \sum_{j=0}^{i-1} y_j\right) \\ &\quad + xp_i(z,y_{i-k'},\dots,y_i,y_0,\dots,y_k) + x^2 q_i(z,y_{i-\ell'},\dots,y_i,y_0,\dots,y_\ell) \end{aligned}$$

由于 P 和 Q是多项式，因此存在一个最大值

$$M_1 = \max_{|z|\le\frac{2}{15},|x|\le x_0,|\mathbf{y}|_1\le 2} \{|P(z,1,|\mathbf{y}|_1,y_0,\dots,y_k) + xQ(z,1,|\mathbf{y}|_1,y_0,\dots,y_\ell)|\},$$

and

$$M_2 = \max_{|z|\le\frac{2}{15},|x|\le x_0,|\mathbf{y}|_1\le 2} \left\{\left|\partial_{\mathbf{y},y_0,\dots,y_\ell}\Big(P(z,1,|\mathbf{y}|_1,y_0,\dots,y_k) + xQ(z,1,|\mathbf{y}|_1,y_0,\dots,y_\ell)\Big)\right|\right\},$$

使得我们可以进一步限制 $|x|<\min\left\{x_0,\ \frac{1}{60M1},\ \frac{1}{15M_2}\right\}:=M$。

现在，我们想要证明，如果考察一个序列 $(\mathbf{y_n})_{n\ge 0}$，其中 $\mathbf{y_0}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{y_n}=T(\mathbf{y_{n-1}})$，那么根据巴拿赫不动点定理，它将一致收敛到一个不动点 $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots)$，并满足 $y_i=b_i(z,x,Y)$。

因此，首先我们证明 T 将满足 $|\mathbf{y}| \leq 2$ 的元素映射到元素 $|T(\mathbf{y})| \leq 2$。注意，对于 $|z| \leq \frac{2}{15}$,$|x| \leq M$，我们可以直接估计其范数：

$$\begin{aligned} |\, T(\mathbf{y_n}) - 1 \,|_1 &\leq |z||\mathbf{y_{n-1}}|_1^2 + |z||Y| + |z||\mathbf{y_{n-1}}|_1 + xM_1 \\ &\leq \frac{8}{15} + \frac{2}{15}\frac{11}{8} + \frac{4}{15} + \frac{1}{60} \\ &\leq \frac{59}{60} + \frac{1}{60} \end{aligned}$$

从而 $|T(\mathbf{y_n})| \leq 2$。此外，我们证明该映射是一个压缩映射。也就是说，

$$\begin{aligned} |\, T(\mathbf{y_n}) - T(\mathbf{y_{n-1}}) \,|_1 &\leq |z|\,(|\mathbf{y_n}| + |\mathbf{y_{n-1}}|)\,|\mathbf{y_n} - \mathbf{y_{n-1}}|_1 + |z||\mathbf{y_n} - \mathbf{y_{n-1}}|_1 + xM_2|\mathbf{y_n} - \mathbf{y_{n-1}}|_1 \\ &\leq \left(\frac{8}{15} + \frac{11}{60} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)|\mathbf{y_n} - \mathbf{y_{n-1}}|_1 \\ &< |\mathbf{y_n} - \mathbf{y_{n-1}}|_1 \end{aligned}$$

因此，我们可以得出结论：对于 $|z| < \frac{2}{15}$，上述映射给出了一个收敛到不动点 $\mathbf{y}$ 的序列，其中 $y_i = b_i(z, x, Y)$，从而当 x 足够小时，我们可以将所有解表示为 $b_i(z, x, M(z, \mathbf{1}, x))$。□

4.3. **引理 3 的证明**。

证明。 根据 [3], 中的定理 2， $B(z,\mathbf{1},x)$ 的系数渐近增长为

$$[z^n]B(z,1,x) = c(x)n^{-5/2}\rho(x)^n\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中 $\rho(x)^{-1}$ 是 $B(z,\mathbf{1},x)$ 的主奇点位置，取决于 x 的值。由于 $x = 0$ 处的主奇点是唯一的，因此当 x 取较小值时，主奇点也唯一。此外，我们注意到，当 x 足够小时，渐近行为是一致的。

现在，我们改写为

$$[z^n]B(z,1,x) = F_n(x) = n^{\alpha}e^{nf(x)+g(x)+O(\frac{1}{n})}$$

其中 $\alpha = -\frac{5}{2}, f(x) = \log\ \rho(x)$，且 $g(x) = \log\ c(x)$，并使用柯西积分：

$$[x^k]\frac{F_n(x)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{nf(x)+g(x)+O(\frac{1}{n})}}{x^{k+1}}\,dx,$$

其中 γ 是一条包围 $x = 0$的轮廓线。特别地，我们选择 γ 为半径为 $\frac{k}{nf'(0)}$ 的圈（这里我们预期存在一个鞍点）。也就是说， $x = re^{i\varphi}$ 满足$r = \frac{k}{nf'(0)}$ 且$dx = ire^{i\varphi}d\varphi$,—因此,

$$[x^k]\frac{F_n(x)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi}r^k\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{nf(re^{i\varphi})+g(re^{i\varphi})+O(\frac{1}{n})}}{e^{ik\varphi}}d\varphi.$$

由于 $f(x) = \log \rho(x)$ 和 $g(x) = \log c(x)$ 都是解析的，我们可以在 $re^{i\varphi} = 0$ 处对它们作泰勒展开，得到

$$[x^k]\frac{F_n(x)}{n^\alpha} = \frac{1}{2\pi} r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sum_{\ell=0}^{3}\left(nf^{(\ell)}(0)+g^{(\ell)}(0)\right)\frac{(re^{i\varphi})^\ell}{\ell!}+O(nr^4+\frac{1}{n})} e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{f'(0)n}{k}\right)^k e^{nf(0)+g(0)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-i\varphi)+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{(f'(0))^2}e^{2i\varphi}+O\left(\frac{k}{n}\right)}\, d\varphi.$$

接下来，我们将把被积函数指数中的指数函数的常数项提取出来。即，

$$(f'(0)n)^k e^{nf(0)+g(0)} \frac{1}{2\pi k^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-i\varphi)+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{f'(0)^2}e^{2i\varphi}+O\left(\frac{k}{n}\right)}\, d\varphi$$
$$= (f'(0)n)^k e^{nf(0)+g(0)+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{f'(0)^2}} \frac{e^k}{2\pi k^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} e^{+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{f'(0)^2}+O\left(\frac{k}{n}\right)}\, d\varphi. \tag{4.1}$$

在最后一步中，我们已将被积函数分解为两个因子，其中第二个因子作为 $n \to \infty$ 是一个有界函数。因此，我们将后者在积分中展开为

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{(f'(0))^2}(e^{2i\varphi}-1)+O(\frac{k}{n})}\, d\varphi$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}\left(\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{(f'(0))^2}(e^{2i\varphi}-1)+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)^j d\varphi$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!}\left(\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{(f'(0))^2}(e^{2i\varphi}-1)+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)^j d\varphi.$$

现在，我们可以交换积分与指数函数的求和，并且如 $k^2/n = O(1)$ 所示，继续计算

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} d\varphi + O\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)}\left(\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{(f'(0))^2}(e^{2i\varphi}-1)+\frac{k}{n}\right) d\varphi\right). \tag{4.2}$$

第一个积分 (4.2) 可通过代回 $z = e^{i\varphi}$ 来计算，其中 $z = e^{i\varphi}$ 位于以 $z = 0$ 为中心、半径为 γ' 的圆上，且 $d\varphi = \frac{dz}{iz}$，并将柯西积分解释为对被积函数进行系数提取。特别地，我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} d\varphi = \frac{1}{ie^k}\int_{\gamma'} \frac{e^{kz}}{z^{k+1}} dz = \frac{2i\pi}{ie^k}[z^k]e^{kz} = \frac{2\pi k^k}{e^k k!}.$$

对于 (4.2) 中的第二个积分，我们采用一种拉普拉斯方法的变体。我们有

$$\Re\left(k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)\right) \leq -kc_1\varphi^2$$

对于足够大的某个常数 $c_1 > 0$、$|\varphi| \le \pi$ 和 n。因此，我们可以将该积分的值估计为

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} \left(\frac{k^2}{2n} \frac{f''(0)}{f'(0)^2} (e^{2i\varphi}-1) + \frac{k}{n} \right) d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} e^{-c_1 k\varphi^2} \left(c_2 |\varphi| \frac{k^2}{n} + \frac{k}{n} \right) d\varphi$$
$$= c_2 \frac{k}{n} (1 - e^{-c_1 k\pi^2}) + \frac{\sqrt{\pi k}}{n} + O\left(\frac{1}{n} \right),$$

其中 $c_2 > 0$ 是另一个常数因子。综上可得

$$(4.2) = \frac{2\pi k^k}{e^k k!} + O\left(\frac{k}{n} + \frac{\sqrt{k}}{n} \right) = \frac{2\pi k^k}{e^k k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \right) \right)$$

因为 $\frac{2\pi k^k}{e^k k!} \le \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$，因此，

$$[x^k] \frac{F_n(x)}{n^\alpha} = (f'(0)n)^k e^{nf(0)+g(0)} \frac{e^k}{2\pi k^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\varphi}-1-i\varphi) + \frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{f'(0)^2}(e^{2i\varphi}-1) + O\left(\frac{k}{n}\right)} d\varphi$$
$$= \frac{1}{k!} (f'(0)n)^k e^{nf(0)+g(0)+\frac{k^2}{2n}\frac{f''(0)}{f'(0)^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \right) \right).$$

Co用 $\rho(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数，即完成了定理的证明。 □

4.4. **引理 4 的证明**。

证明。 对于期望，我们只需计算

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{[z^n]\partial_x F(z,0,x)|_{x=0}}{[z^n]F(z,0,x)|_{x=0}} \sim \frac{c'(0)n^{-\frac{5}{2}}\rho(0)^n + c(0)n^{-\frac{3}{2}}\rho(0)^{n-1}\rho'(0)}{c(0)n^{-\frac{5}{2}}\rho(0)^n} \sim \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} n + \frac{c'(0)}{c(0)}$$

于是对于方差，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n(X_n-1)) + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
&= \frac{[z^n]\partial_x^2 F(z,0,x)|_{x=0}}{[z^n]F(z,0,x)|_{x=0}} + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
&\sim \frac{c''(0)n^{-\frac{5}{2}}\rho(0)^n + 2c'(0)n^{-\frac{3}{2}}\rho(0)^{n-1}\rho'(0) + c(0)n^{-\frac{3}{2}}(n-1)\rho(0)^{n-2}\rho'(0)^2}{c(0)n^{-\frac{5}{2}}\rho(0)^n} \\
&\quad + \frac{c(0)n^{-\frac{3}{2}}\rho(0)^{n-1}\rho''(0)}{c(0)n^{-\frac{5}{2}}\rho(0)^n} + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
&\sim \frac{\rho'(0)^2}{\rho(0)^2}(n^2-n) + \frac{2c'(0)\rho'(0) + c(0)\rho''(0)}{c(0)\rho(0)} n + \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} n - \left(\frac{\rho'(0)}{\rho(0)} n + \frac{c'(0)}{c(0)} \right)^2 \\
&\sim \frac{\rho''(0)\rho(0) + \rho'(0)\rho(0) - \rho'(0)^2}{\rho(0)^2} n
\end{aligned}$$

高阶矩的渐近行为可由引理 3 直接推出，再除以 $[z^n]F(z,\ 0,\ 0)$。□

4.5. **引理 5 的证明**。

证明。 为了枚举具有长度为ℓ的部分简单边界的地图数量，我们首先考虑根面度数至少为 $\ell+1$ 的所有地图。根面度数大于 ℓ 的地图的生成函数由下式给出

$$B(z,u,x)-\sum_{j=0}^{\ell} b_j(z,x)u^j.$$

如果一个根面度数大于 ℓ 的地图没有长度为 ℓ 的部分简单边界，我们可以将沿边界的前 ℓ 条边分解为根面度数小于 ℓ 的二部地图的边界；这些地图附着在一条包含根边、长度至少为 1 且至多为 $\ell-2$ 的部分简单边界路径的顶点上。由于二部地图中的每个圈都必须具有偶数长度，包含根边的部分简单边界路径的长度与 ℓ 具有相同的奇偶性，因此，不含奇数长度部分简单边界的二部地图的生成函数 $\ell=2i-1$ 为

$$\sum_{j=1}^{i-1} P^{\mathcal{B}}_{2j-1}(z,u,x)u^{i-j}[u^{i-j}]B(z,u,x)^{2j}$$

而不含偶数长度部分简单边界的地图的生成函数 $\ell=2i$ 为

$$\sum_{j=0}^{i-1} P^{\mathcal{B}}_{2j}(z,u,x)u^{i-j}[u^{i-j}]B(z,u,x)^{2j+1}.$$

关于 $p_{i,j}(z,x)$ 的陈述直接源于以下事实：

$$p_{i,j}(z,x)=[u^j]P_i(z,u,x)$$

以及上述递推关系。 □

5. Conclusion

我们基于对催化函数方程的直接渐近分析，给出了随机平面地图中模式计数渐近正态性的一个简化证明。不同于 [2]，中将问题化归为面计数的方法，本文的方法直接从含一个催化变量的双变量生成函数计算阶乘矩的渐近行为。该方法尤其适用于二部地图，并且几乎无需修改即可推广到 2-连通地图，而在后者中无法直接应用上述化归方法。只要能够获得关于最大顶点度的适当界限，这一证明表述方式也适用于具有非简单边界的模式。自然会问，同一策略能否用于更多地图类，例如三角剖分或具有指定面度的地图。在这些情形中，相应的函数方程通常是奇异摄动离散微分方程，因此此处采用的普适渐近结果不再能直接适用。作者近期与

Michael Drmota 合作取得了这类方程的部分结果，但目前尚无足以处理这些地图类中模式计数的一般理论。

References

[1] E.A. Bender、Z.C. Gao 和 L.B. Richmond。映射的子映射 I：一般 0-1 定律。 *J.Combin.Theory Ser.B*，55：104–117，1992。[2] M. Drmota、E.-M. Hainzl 和 N. Wormald。随机地图中模式出现的渐近正态性。 *J. London Math. Soc.*，2025。[3] M. Drmota、M. Noy 和 G.-R. Yu。催化变量方程中的普适奇异指数。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，185：105522，2022。[4] M. Drmota 和 K. Panagiotou。随机地图中度为 k 的顶点数量的中心极限定理。 *Algorithmica*，66(4)：741–761，2013。[5] M. Drmota 和 B. Stufler。随机平面地图中的模式出现。 *Statistics & Probability Letters*，158，2020。[6] Z. Gao 和 N. Wormald。随机平面三角剖分中子地图数量的尖锐集中。 *Combinatorica*，23：467–486，2003。[7] Z. Gao 和 N. Wormald。由高阶矩决定的渐近正态性，以及随机地图的子映射计数。 *Probab. Theory Relat. Fields*，130：368–376，2004。[8] Zhicheng Gao 和 Nicholas C. Wormald。随机平面地图中最大顶点度的分布。 *Journal of Combinatorial Theory, Series A*，89(2)：201–230，2000。[9] W.T. Tutte。平面地图普查。 *Canadian Journal of Mathematics*，15：249–271，1963。[10] G.-R. Yu。随机平面地图中的模式出现与催化函数方程。 *Dissertation, TU Wien*，2019。