arXiv:2603.19669v1 [math.CO] 20 Mar 2026

有限阿贝尔群的素数阶元素图的结构与谱性质

Tapa Manna*, Supriyo Dutta†, Baby Bhattacharya‡阿加尔塔拉国立技术学院数学系，Jirania，西特里普拉，印度

摘要

给定一个有限群 G，其 *Prime Order Element (POE) Graph* $\Gamma(G)$ 以群元素为顶点，当且仅当 $o(xy)$ 为素数时，两个顶点 x 和 y 相邻。本文对不同类型有限阿贝尔群所对应的 POE 图进行了全面的结构与谱分析。有限阿贝尔群的阶可以是素数，也可以是若干素数的乘积，这会影响 POE 图的结构。当阿贝尔群的阶为无平方因子整数时，POE 图是连通的。其他阿贝尔群的 POE 图则有多个连通分支。其中一些连通分支与低阶群的 POE 图同构。我们研究了这些连通分支的各种图论性质，包括正则度和二分性。将群元素按照若干特定顺序排列后，我们观察到 POE 图邻接矩阵中的分块结构，这有助于研究 POE 图的谱性质。我们明确推导出决定整数特征值和无理特征值的特征多项式，并根据图的结构计算特征值及其重数。**关键词：**群的素数阶元素图、邻接矩阵、分块矩阵、连通分支、均衡划分、图的谱性质。

美国数学学会学科分类：05C25, 05C50, 05C40, 05C75, 15A18, 20K01

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **3**

3 $\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})$**的性质** **4**

4 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$**的性质** **6**

5 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$**的性质** **9**

6 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$**的性质** **10**

7 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}})$**的性质** **12**

8 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$**的性质** **17**

*电子邮件： mannatapa24@gmail.com
†电子邮件： dosupriyo@gmail.com
‡电子邮件： babybhatt75@gmail.com

1 引言

群中元素之间的关系在群论中发挥着至关重要的作用。过去几十年来，这一直是一个经过深入研究的课题，相关研究不仅丰富了群论，也丰富了图论。在代数图论中，定义群上的图是一个引人入胜的研究领域，为有限群研究提供了许多重要发现 [1], ，例如幂零性、循环子群结构、群指数行为等。凯莱图的概念是这类研究的一项重要成果 [2, 3]。文献中还介绍了许多其他从群构造图的方法，例如幂图 [4,5], 互素图 [6], Gruenberg-Kegel 图 [7], 差图 [8], 互极大子群图 [9–12], 交换图 [13], 超图 [14,15], 联图 [16], 等等。这些图各自都有独特的重要意义。代数与图论的交叉在科学技术的其他分支中也有重要应用 [17–21]。不过，构造这些图的主要目的是从与群相对应的图中尽可能多地获取有关该群的信息 G 。关于由群导出的若干种图的全面综述可见 [22]。本文将介绍有限阿贝尔群的素数阶元素（POE）图的特征。

回顾一下，群（G，$\circ$）由一个非空集合 G 和一个复合 $\circ$： $G \times G \to G$构成，并满足： G 关于 $\circ$封闭；复合 $\circ$ 满足结合律；存在唯一的元素 $e \in G$，使得 $e \circ x = x \circ e = x$对所有 $x \in G$均成立；此外，对于所有 $x \in G$，存在 $y \in G$，使得 $x \circ y = e$。本文所考虑的所有群都含有有限多个元素。元素 $x \in G$ 的阶是满足$x^m = x \circ x \circ \cdots \circ x$（$m$ 次） $= e$ 的最小正整数 m。图是一种组合对象 $\Gamma =$ （V （Γ） E （Γ）），其中 V （Γ）是顶点集合，而 E （Γ） $\subset V$（Γ）$\times V$（Γ）是边集合。在全文中， p 表示一个奇素数。群的 POE 图定义如下 [23]:

定义 1.1. 群 G 的素数阶元素图（简称 *POE* 图） $\Gamma(G) = (V(\Gamma)\ E(\Gamma))$是一个图，满足 $V(\Gamma) = G$，并且当两个不同顶点 x 和 y 之间的边 (x, y) 所对应的 xy 的阶为素数时，这两个顶点之间存在一条边。

在我们早期的文章中， [23, 24], 我们定义了有限群的 POE 图。我们探讨了 POE 图的图论性质，包括度、正则度、完备性和连通性等。这些性质对于识别底层群的群性质十分重要。本文介绍有限阿贝尔群的 POE 图的结构与谱性质。本文中有若干 POE 图，如图 1、2 3 等。以下定理 [25] 给出了有限阿贝尔群的一个有用特征:

定理 1.1 (**有限生成阿贝尔群基本定理：**). 每个有限生成阿贝尔群 G 都同构于若干群的直和

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k},$$

其中， $r \geq 0$ 是非负整数， n_1、 n_2、……、 $n_k \in \mathbb{N}$ 满足 $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_k$。

将 $r = 0$ $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus$代入 $\mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ $n = n_1 \times n_2 \times \ldots n_k$ $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ 上述定理，可知所有有限阿贝尔群都同构于。群的阶将为。我们可以表示为，其中$2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ 是素数。基于有限阿贝尔群的阶的素因数分解，我们研究相应 POE 图的性质。下面列出本文的基本观察结果:

1. $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$是 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$与 $\frac{p^n-p}{2p}$ 个$(p-1)$-正则图的并，其中每个图都包含 $2p$ 个顶点。

2. 图 $\Gamma((\mathbb{Z}_p)^n)$ 的整数谱为 $\{[0]^{\frac{p^n-1}{2}}, [-2]^{\frac{p^n-3}{2}}\}$，其余非整数谱是多项式 $x^2 - (p^n - 3)x - (p^n - 1)$ 的根。

3. $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}})$ 是以下连通分支的并:

   (a) 一个与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2p_3\cdots p_k})$ 同构的连通分支；(b) 一个包含阶为 4， $4p_i$、 $4p_ip_j$ 阶元素的连通分支，其中 $i \neq j$、 $\ldots, 4\prod_{i=2}^{k} p_i$，其中 i， $j = 2$， 3， $\cdots$， k，共有 $2\prod_{i=2}^{k} p_i$ 个元素；(c) 若干个正则连通分支，每个分支均由 $4\prod_{i=2}^{k} p_i$ 个元素组成，且 $\deg(\sum_{i=2}^{k} p_i)-k+2$。此类分支总数为 $2^{n_1-2}p_2^{n_2-1}\ldots p_k^{n_k-1} - 1$。

4. 若 $G \cong \mathbb{Z}_p{}^n$，则邻接矩阵 $A(\Gamma(G))$ 的特征值 0 的重数为 $\frac{p^n-1}{2}$， -2 的重数为 $\frac{p^n-3}{2}$，其余特征值是方程 $x^2-(p^n-3)x-(p^n-1)=0$ 的根。5. 方程 $(x^2-(p_2-1)x-1)=0$ 和 $(x^2-(p_2-5)x-(2p_2-5))=0$ 的根是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$ 的无理特征值。6. 对于 k 个奇素数 p_1， p_2， $\ldots p_k$， $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}}) \cong \Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \ldots \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}})$，它是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2\ldots p_k})$ 与 $\frac{p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}\ldots p_k^{n_k-1}}{2}$ 个连通正则分支的并，每个分支有 $2p_1p_2\ldots p_k$ 个顶点，正则度为 $p_1+p_2+\ldots p_k-k$。

本文的组织结构如下：第 2 节介绍了本研究所需的群论和图论基本定义。在第 3 节、第 4 节、第 5 节、第 6 节、第 7 节和第 8 节中，我们讨论了 POE 图 $\Gamma((\mathbb{Z}_p)^n)$、 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$、 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$、 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$、 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}})$ 和 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$，分别讨论。最后，我们总结全文。

2 预备知识

群 [25, 26] $(G,\circ)$ 由集合 G 和复合 $\circ$：$G\times G\to G$ 组成，满足： G 在 $\circ$ 下封闭；复合 $\circ$ 满足结合律；存在唯一的元素 $e\in G$，使得对于所有 $a\in G$，都有 $e\circ a=a\circ e=a$；此外，对于所有 $a\in G$，存在 $b\in G$，使得 $ab=e$。当复合 $\circ$ 明确时，我们用 ab 代替 $a\circ b$。群 G 的阶记作 $o(G)$，即 G 中元素的个数。如果 $o(G)=p^n$，其中 p 是素数且 n 是自然数，则称群 G 为 p-群。如果对于所有 a 和 $b\in G$，都有 $ab=ba$，则称 G 为阿贝尔群。对于任意元素 $x\in G$，我们记 $x^m=x\circ x\circ\cdots\circ x$（重复 m 次）。元素 $x\in G$ 的阶是满足 $x^m=e$ 的最小正整数 m。我们记作 $o(x)=m$。初等阿贝尔群是每个非单位元的阶均为 p 的阿贝尔 p-群。此外，对于任意元素 $x\in G$， $o(x)|o(G)$。以下引理对后续计算非常有用。

引理 2.1. 对于阿贝尔群 G 中的任意两个元素 x 和 y，有 $o(xy)=l.c.m\{o(x)\ o(y)\}$。

循环群包含一个元素 a，称为该群的生成元，使得 $G=\{a^n:n\in\mathbb{Z}\}$。所有循环群都是阿贝尔群。循环群 $\mathbb{Z}_{p^n}$ 仅包含阶为 $p^k, k=0,1,2,\ldots n$ 的元素，其个数为 $\phi(p^k)$，其中 ϕ 是欧拉 φ 函数。

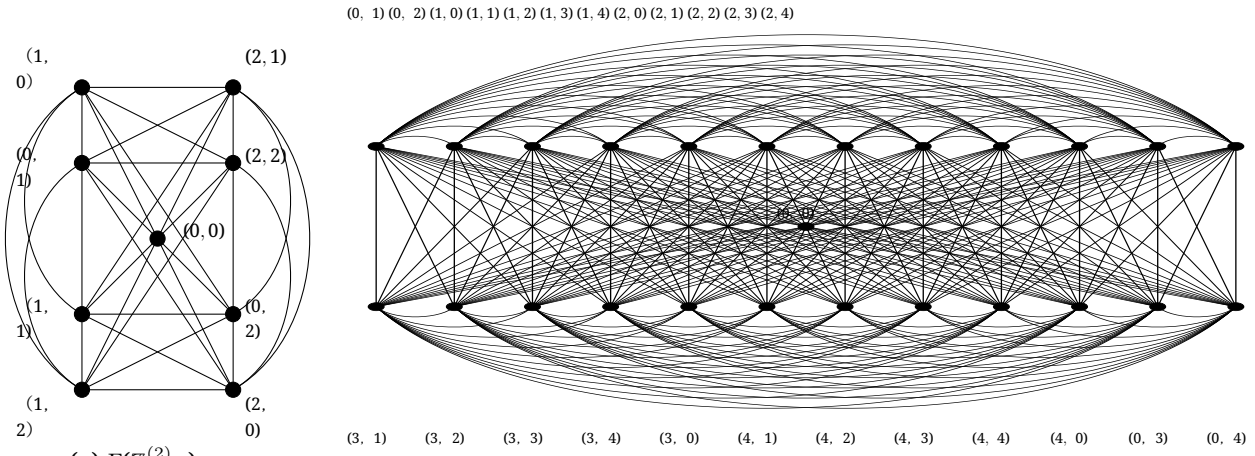
群同构是一个双射映射 f：$G_1\to G_2$，其中 G_1 和 G_2 是两个群，并满足 $f(xy)=f(x)f(y)$，对所有 x，$y\in G_1$ 均成立。若存在这样的函数 f，则称 G_1 和 G_2 同构，记作 $G_1\cong G_2$。任何与 $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\cdots\times\mathbb{Z}_p$（$n$ 重积）同构的群称为初等阿贝尔群，也记作 $\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$。注意， $o(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})=p^n$。

群的直积定义如下：

定义 *2.1.* 群 $(G_1,\circ_1)$、$(G_2,\circ_2)$ ..... $(G_n,\circ_n)$ 的外直积为 $(G,\circ)$，满足 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n=\{(g_1,g_2,...,g_n):g_i\in G_i\}$，对于两个元素 $g^{(1)}=(g_1^{(1)},g_2^{(1)},...,g_n^{(1)})$ 和 $g^{(2)}=(g_1^{(2)},g_2^{(2)},...,g_n^{(2)})$，$\in G$ 复合 $\circ$ 定义为 $g^{(1)}\circ g^{(2)}=(g_1^{(1)}\circ_1 g_1^{(2)},g_2^{(1)}\circ_2 g_2^{(2)},...,g_n^{(1)}\circ_n g_n^{(2)})$。

图 [27] 是一种组合对象 $\Gamma=(V(\Gamma)\ E(\Gamma))$，其中 $V(\Gamma)$ 是顶点集合， $E(\Gamma)$ 是边集合。在本演示中，所有图都是简单图，不含顶点上的自环，也不含顶点之间的多重边、加权边和有向边。如果存在一条边 $(x,y)\in E(G)$，则称顶点 x 和 y 相邻。我们记作 $x\sim y$。我们用 $x\nsim y$ 表示 $(x,y)\notin E(\Gamma)$。顶点 $v\in\Gamma(G)$ 的度记为 $\deg(v)$，定义为与 v 相邻的顶点数。如果 $\deg(v)=0$，则称顶点 $v\in\Gamma(G)$ 是孤立的。 r-正则图是指图 Γ 中任意顶点的度都是 r。我们称 r 为 r-正则图的正则度。连通的 2-正则图是圈图。3-圈包含三个顶点。

含有 n 个顶点的完全图记作 $K_n=(V(K_n)\ E(K_n))$，其中任意两个不同顶点之间都有边。含有 n 个顶点的图 Γ 的补图记作 $\bar{\Gamma}$，其顶点集为 $V(\Gamma)$，边集为 $E(\bar{\Gamma})=E(K_n)-E(\Gamma)$。图中的路径是由一系列边组成的序列，这些边连接一系列互不相同的顶点。如果任意两个顶点之间都存在路径，则图 Γ 是连通的。图 Γ 的连通分支 Γ_1 是由顶点和边构成的极大集合，其中任意两个顶点之间都存在路径。连通图 Γ 中两个顶点 x， y 之间的距离记作 $d(x,\ y)$，即 x 与 y 之间最短路径的长度。



(a) $\Gamma(\mathbb{Z}_3^{(2)})$ (b) $\Gamma(\mathbb{Z}_5^{(2)})$。为便于辨认，我们按照图中顶点的排列顺序，将标号绘制在远离顶点的位置。

图 1：$\mathbb{Z}_p^{(n)}$ 的 POE 图，适用于 $n=2$、$p=3$ 和 5。在这两个图中，顶点 (0，0) 表示图的单位元。它与所有其他顶点相连。

图的邻接矩阵，顶点数为 n 的图 Γ v_1，v_2，$\ldots v_n$ 为 $A(\Gamma)_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 e

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{if } v_i\sim v_j;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1}$$

矩阵 P 的谱记为 $\Lambda(P)$，它是 P 的谱的多重集。Γ 的谱为 $\Lambda(A(\Gamma))=\{[\lambda_1]^{m_1},[\lambda_2]^{m_2},\ldots[\lambda_k]^{m_k}\}$，其中 m_i 表示 $[\lambda_i]^{m_i}$ 中谱 λ_i 的重数。图 Γ 的度矩阵是对角矩阵 $D(\Gamma)=\mathrm{diag}\{\deg(v_i):\ i=1,\ 2,\ \ldots n\}$。

如果存在双射 $f\colon V(\Gamma)\to V(\Upsilon)$，使得 $(x,y)\in E(\Gamma)$ 当且仅当 $(f(x)\ f(y))\in E(\Upsilon)$，则称两个图 $\Gamma=(V(\Gamma)\ E(\Gamma))$ 和 $\Upsilon=(V(\Upsilon)\ E(\Upsilon))$ 同构。Γ 与 Υ 的并是一个新图 $\Gamma\cup\Upsilon$，满足 $V(\Gamma\cup\Upsilon)=V(\Gamma)\cup V(\Upsilon)$ 且 $E(\Gamma\cup\Upsilon)=E(\Gamma)\cup E(\Upsilon)$。我们可以对 $\Gamma\cup\Upsilon$ 中的顶点进行排列，使得 $A(\Gamma\cup\Upsilon)=\mathrm{diag}\{A(\Gamma)\ A(\Upsilon)\}$。若图 Γ 的连通分支为 $C^{(1)},C^{(2)},\ldots C^{(l)}$，则记作$\Gamma=C^{(1)}\cup C^{(2)}\cup\ldots C^{(l)}$。因此，$A(\Gamma)=\mathrm{diag}\{A(C^{(1)})\ A(C^{(2)})\ldots,A(C^{(l)})\}$。由于分块对角矩阵的谱是各个块矩阵的谱，因此我们有

$$\Lambda(A(\Gamma))=\Lambda(A(C^{(1)}))\cup\Lambda(A(C^{(2)}))\cup\cdots\cup\Lambda(A(C^{(l)})). \tag{2}$$

设 $G=(V(G)\ E(G))$ 和 $H=(V(H)\ E(H))$ 是两个图。若 $V(H)\subset V(G)$ 且 $E(G)\subset E(H)$，则称 H 是 G 的子图。设 $C\subset V(G)$。由 C 生成的导出子图记为 $\langle C\rangle=(V(\langle C\rangle)\ E(\langle C\rangle))$，满足 $V(\langle C\rangle)=C$ 且 $E(\langle C\rangle)=\{(u,v)\colon$ 若 u、$v\in C$ 以及 $(u,v)\in E(G)\}$。

以下矩阵分析引理对本文很有用：

引理 *2.2*。设 A 和 B 是两个 n 阶的可对角化且可交换矩阵。A 和 B 的特征值分别为 λ_1、λ_1、$\ldots\lambda_n$ 以及 μ_1、μ_2、$\ldots\mu_n$。则 $A+B$ 的特征值为 $\lambda_1+\mu_{i_1}$、$\lambda_2+\mu_{i_2}$、$\ldots\lambda_n+\mu_{i_n}$，其中 i_1、i_2、$\ldots i_n$ 是 *1*、*2*、$\ldots n$ *[28,* 的某个排列章节 *1]*。

3 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}\right)$ 的性质

群 $\mathbb{Z}_p{}^{(n)}\equiv\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\ldots\mathbb{Z}_p$($n$ 阶)由单位元和 p^n-1 个阶为 p 的元素组成。根据 POE 图的定义，$\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$ 由 p^n 个顶点组成。由于 $\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$ 中任一非单位元的阶为 p，因此与单位元对应的顶点 e 与所有其他顶点相连。因此，e 在 $\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})$ 中的度为 (p^n-1)。若任意两个元素 x、$y\in\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$ 满足 $x\neq y^{-1}$，则有 $o(xy)=p$，即 $x\sim y$。因此，$\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})$ 中任一非单位元的度为 (p^n-2)。将 $n=1$ 代入 $\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})$，即可得出 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 的特征。对于 $p=3$ 和 5 以及 $n=2$，我们在图 1 中绘出了 POE 图。

定理 3.1。 图 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}\right)$ 的整数谱为 $\{[0]^{\frac{p^n-1}{2}}, [-2]^{\frac{p^n-3}{2}}\}$，其余非整数谱是多项式 $x^2-\left(p^n-3\right)x-\left(p^n-1\right)$ 的根。

证明。 我们将 $\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$ 中的元素排列如下： $e,\ x_1,\ x_2,\ \underline{\ldots\ldots},\ \underline{x_{\frac{p^n-1}{2}}},\ x_{p^n-1}^{-1},\ \ldots\ldots,\ x_2^{-1},\ x_1^{-1}$。根据定义 1.1中提到的 POE 图的定义，单位元 e与 $\mathbb{Z}_p{}^{(n)}$中的所有其他元素均相邻。此外，任何非单位元都与除自身及其逆元之外的所有元素相邻。因此， A的特征方程（$\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}) = (a_{i,\ j})_{p^n\times p^n}$ 可表示为 $\det[A(\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}) - \lambda I_{p^n}] = 0$,

$$\text{or}\ \det\left[\begin{array}{c|ccccccc} -\lambda & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -\lambda & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & -\lambda \end{array}\right]_{p^n\times p^n} = 0.$$

矩阵 $A(\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})-\lambda I_{p^n}$ 是一个由 4 个分块组成的分块矩阵，这些分块分别为 $A=[\lambda], B=[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1$ $C=B^T$ 和

$$D=\begin{cases} -\lambda & \text{for } a_{ii}; \\ 0 & \text{for } a_{ij}, i+j=p^n; \\ 1 & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{3}$$

由于 $\det(A)\neq 0$ 且 $\det(D)\neq 0$，因此 $\det[A(\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}) - \lambda I_{p^n}]$ 可表示为

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A).\det[D-CA^{-1}B] = (-\lambda).\det\left[D-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)B^TB\right] = (-\lambda).det(P), \tag{4}$$

其中 $P=(p_{i,\ j})_{(p^n-1)\ \times\ (p^n-1)}$，并且

$$p_{i,j}=\begin{cases} -\lambda+\frac{1}{\lambda} & \text{when } i=j \text{ which are corresponding to } a_{i+1,i+1}; \\ \frac{1}{\lambda} & \text{for } i\neq j, \text{ and } i+j=p^n; \\ 1+\frac{1}{\lambda} & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{5}$$

矩阵 P 可进一步划分为分块矩阵 $P=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & A_1 \end{bmatrix}$，其中 $A_1=(a'_{i,\ j})$ 和 $B_1=(b'_{i,\ j})$ 均为阶为 $\frac{p^n-1}{2}$ 的矩阵，以及

$$a'_{i,j}=\begin{cases} -\lambda+\frac{1}{\lambda} & \text{for } i=j, \\ 1+\frac{1}{\lambda} & \text{otherwise;} \end{cases} \text{ and } b'_{i,j}=\begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{for } a_{ij}, i+j=\frac{p^n}{2}, \\ 1+\frac{1}{\lambda} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

将 A_1 和 B_1 写成矩阵形式，我们观察到它们是可交换矩阵。因此,

$$\det(P)=\det\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline B_1 & A_1 \end{array}\right) = \det(A_1+B_1)\det(A_1-B_1)$$

$$= \begin{vmatrix} (1-\lambda+\frac{2}{\lambda}) & (2+\frac{2}{\lambda}) & \ldots & (2+\frac{2}{\lambda}) & (1+\frac{2}{\lambda}) \\ (2+\frac{2}{\lambda}) & (1-\lambda+\frac{2}{\lambda}) & \ldots & (1+\frac{2}{\lambda}) & (2+\frac{2}{\lambda}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (1+\frac{2}{\lambda}) & (2+\frac{2}{\lambda}) & \ldots & (2+\frac{2}{\lambda}) & (1-\lambda+\frac{2}{\lambda}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & (-1-\lambda) & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda^2-2) & -2(\lambda+1) & -2(\lambda+1) & \ldots & \ldots & -2(\lambda+1) \\ -2(\lambda+1) & (\lambda^2-2) & -2(\lambda+1) & \ldots & \ldots & -2(\lambda+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2(\lambda+1) & -2(\lambda+1) & \ldots & \ldots & \ldots & (\lambda^2-2) \end{vmatrix} [\because \det(MN)=\det(M)\det(N).]$$

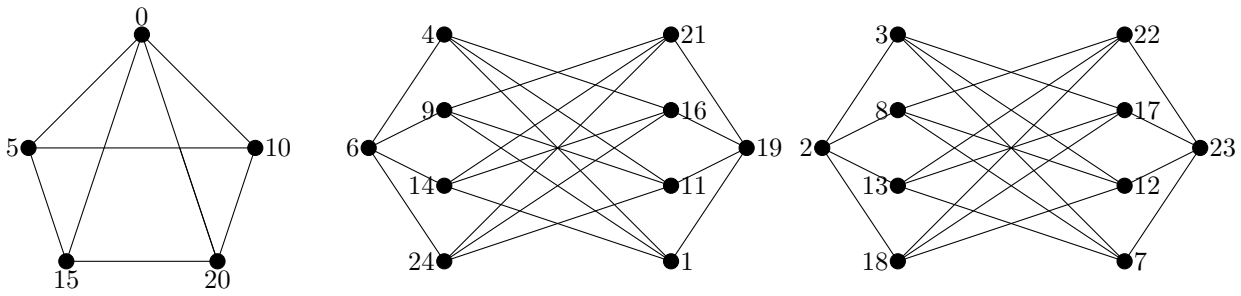


图 2：具有三个连通分支的 POE 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{52})$。最左侧的连通分支与 $\Gamma(\mathbb{Z})$ 同构。其余两个连通分支彼此同构。

现在，方程（4）表明

$$\begin{aligned}
&\det[A(\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)}) - \lambda I_{p^n}] = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)\begin{vmatrix} (\lambda^2-2) & -2(\lambda+1) & -2(\lambda+1) & \dots & -2(\lambda+1) \\ -2(\lambda+1) & (\lambda^2-2) & -2(\lambda+1) & \dots & -2(\lambda+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2(\lambda+1) & -2(\lambda+1) & -2(\lambda+1) & \dots & (\lambda^2-2) \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)\det[(\lambda^2-2).I - 2.(\lambda+1)(J-I)] \\
&= (-\lambda)\det[(\lambda^2-2).I - 2.(\lambda+1).I - 2.(\lambda+1).J] \\
&= (-\lambda)\det[(\lambda^2+2\lambda)I - 2(\lambda+1)J].
\end{aligned} \tag{7}$$

这里，I 是单位矩阵，J 是所有元素均为 1 的 $p^n{}_2^{-1}$ 阶矩阵。$(\lambda^2+2\lambda)I$ 的谱为 $(\lambda^2+2\lambda)$，其重数为 $p^n{}_2^{-1}$。$2(\lambda+1)J$ 的谱为 $2(p^n-1)(\lambda+1)$，其重数为 1；0 的重数为 $p^n{}_2^{-1}-1 = p^n{}_2^{-3}$。它们是可交换厄米矩阵。根据 引理 2.2，我们得出 $(\lambda^2+2\lambda)I - 2(\lambda+1)J$ 的谱是对应谱之和。化简后得到

$$\det[(\lambda^2+2.\lambda).I - 2.(\lambda+1).J] = \lambda^{\frac{p^n-1}{2}}.(\lambda+2)^{\frac{p^n-3}{2}}.(\lambda^2-(p^n-3)\lambda-(p^n-1)).$$

综合所有情形，我们观察到 $A(\Gamma(\mathbb{Z}_p{}^{(n)})$ 的谱为 $\{[0]^{\frac{p^n-1}{2}}, [-2]^{\frac{p^n-3}{2}}\}$，且方程 $x^2-(p^n-3)x-(p^n-1)=0$ 的根为。 □

推论 3.1。 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 的谱为 $\{[0]^{\frac{p-1}{2}}, [-2]^{\frac{p-3}{2}}\}$，方程 $x^2-(p-3)x-(p-1)=0$ 的根为。

4 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的性质

当 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 不连通时，$n \geq 2$。对于 $n=1$，可得 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$，这是一个连通图。此外，我们可以证明 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 始终是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的一个连通分支。这些图的 POE 图示例见 图 2。下面将给出它们的其他一些重要性质。

引理 4.1。 设 G 是一个阿贝尔 p-群，满足 $p>2$，且至少有两个不同的素数阶元素 y_1 和 y_2，其中 $y_1y_2 \neq e$。给定任意元素 $x \in G$，x 与 x^{-1} 在 *POE* 图 $\Gamma(G)$ 中的距离为

$$d(x,x^{-1}) = \begin{cases} 2, & if\ \ o(x) = p; \\ 3, & otherwise. \end{cases} \tag{8}$$

证明。 由于 G 是一个满足 $p>2$ 的阿贝尔 p-群，G 中不存在 2 阶元素。对于 G 中任意元素 $x \neq e$，$xx^{-1}=e$。因此，$o(xx^{-1})=1$。所以，x 与 x^{-1} 之间没有边。

设 $o(x)=p$，则 $o(x\circ e)=o(x)=p$。因此，$x \sim e$。此外，$o(x^{-1})=p$ 意味着 $x^{-1} \sim e$。于是，存在一条路径 $x \sim e \sim x^{-1}$，它是 $d(x,\ x^{-1})=2$。

设 x 是 G中的一个元素，满足 $o(x) \neq p$。因此， $o(x) = p^k$，其中 $k \geq 2$。注意， $o(x \circ e) = o(x) = p^k$。因此， x 和 e之间没有边。已知 G至少有两个不同的元素 y_1 和 y_2 ，它们具有相同的素数阶，使得 $o(y_1) = o(y_2) = p$ 且 $y_1 y_2 \neq e$。那么， $o(y_1 y_2) = p$。此外， $x.x^{-1}y_1 = y_1$ 且 $x^{-1}.xy_2 = y_2$。这意味着 x 和 x^{-1} 之间总存在一条长度为 3 的路径，即 $x \sim x^{-1}y_1 \sim xy_2 \sim x^{-1}$，因为 G是一个阿贝尔群。

设 x 与 x^{-1} 之间存在一条长度为 2 的路径，记为 $x \sim y \sim x^{-1}$。注意， y 不是单位元。在此假设下， $\circ(xy) = \circ(x^{-1}y) = p$。这表明， $\circ(y^2) = 1$ 或 p ，因为 $y^2 = yxx^{-1}y$。如果 $\circ(y^2) = 1$，那么 $\circ(y) = 1$ 或 2，这与 $y \neq e$ 和 G 都没有 2 阶元素矛盾。如果 $\circ(y^2) = p$，那么 $\circ(y) = p$，这同样矛盾，因为根据引理 2.1，我们有 $\text{lcm}(o(x)\ o(y)) = p^k \neq p$。因此， x 与 x^{-1} 之间不存在长度为 2 的路径。于是， $d(x, x^{-1}) = 3$。 □

值得注意的是，引理 4.1 表明 x 和 x^{-1} 总是属于 POE 图 $\Gamma(G)$ 的同一个连通分支，其中 x属于阿贝尔群 G。

在群 $\mathbb{Z}_{p^n}$中，阶为 p的元素为 p^{n-1}， $2p^{n-1}$， ……$(p-1)p^{n-1}$。因此，根据引理 4.1，我们断言任意元素 x 和 x^{-1} 总是属于同一个连通分支，且 $d(x,\ x^{-1}) \leq 3$。但是，$(\mathbb{Z}_{p^n})$ 不是连通图。

引理 4.2。 在 *POE* 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$中，

$$\deg(v) = \begin{cases} p-1, & if\ \ v = 0; \\ p-2, & otherwise. \end{cases}$$

证明。 加法群 $\mathbb{Z}_p$ 包含 $p-1$ 个素数阶元素，我们将它们收集到集合 $S = \{x_1, x_2, \ldots x_{p-1}\}$中。显然， $\mathbb{Z}_p = S \cup \{e\}$。注意，单位元 e 与 S 中的所有元素都相邻，即 $\deg(e) = p-1$。对于任意两个非单位元 x_i、 $x_j \in S$， $o(x_i x_j) = p$，其中 $x_i x_j \neq e$。对于 $i = j$、 $o(x_i^2) = p$。由于我们将 POE 图定义为简单图，因此不考虑其中的自环。因此，来自 S 的阶为 p 的元素 x_i 与除 x_i^{-1} 和其自身之外的所有元素相邻。因此，$\deg(x_i) = p-2$。 □

引理 4.3. 在阿贝尔 p-群 G 中，若两个非单位元 x 和 y 在 *POE* 图 $\Gamma(G)$中相邻，则 $o(x) = o(y)$。

证明。由于 G 是阿贝尔 p-群， $o(G) = p^n$。由于 x、 $y \in G$、 $o(x)$ 和 $o(y)$ 整除 p^n。因此， $o(x) = p^a$ 且$o(y) = p^b$，为简便起见，我们假设 $a < b$。已知 $x \sim y$ 在 $\Gamma(G)$ 中。因此， $o(xy) = p$ 或 $(xy)^p = e$或 $x^p = (y^{-1})^p$ 或 $(x^p)^{p^{a-1}} = ((y^{-1})^p)^{p^{a-1}}$ 或 $x^{p^a} = (y^{-1})^{p^a}$。于是，$(y^{-1})^{p^a} = e$ 或 $o(y^{-1}) = p^a = o(y)$；这与假设矛盾。因此， $\circ(x) = \circ(y)$。 □

上述引理表明，在 $\Gamma(G)$ 的一个连通分支中，所有元素的阶都相同。但它并未表明，所有阶相同的元素都属于同一个连通分支。例如，在图 2 中，所有阶为 25 的元素分布在两个连通分支中。

根据上述引理，在 POE 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 中，如果 $x \sim y$，那么 $o(x) = o(y)$。

引理 4.4. 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 不是连通图。

证明。群 $\mathbb{Z}_{p^n}$ 包含阶为 1、 p、 p^2、 p^3、 $\ldots p^n$ 的元素。在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 中，单位元总是只与阶为 p的元素相邻。此外，阶为 p 的元素不与任何阶为p^k的元素相邻，$(k \geq 2)$，因为根据引理 2.1，对于阿贝尔群中的任意两个元素 x、 y， $o(xy) = \text{lcm}(o(x)\ o(y))$。显然，在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 中，单位元与阶为 p 的元素构成一个独立的连通分支，与阶为 p^k 且带有$k \geq 2$ 的元素分开。因此，该图是不连通的。 □

证明引理 4.4 表明， $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$。此外，引理 4.3 表明，一个连通分支可以包含阶相同的元素。我们将阶不同的元素所对应的连通分支记为 $C^{(1)}$， $C^{(2)}$，……，它们不同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$。因此$\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}) = \Gamma(\mathbb{Z}_p) \cup_{i=1}^{p^{n-1}-1} C^{(i)}$。

引理 4.5。 对于任意元素 $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$，若 $o(x) = p^k$ 且 $k \geq 2$，则顶点 x 在 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 中的度为 $p-1$。

证明。 设 $x \in C^{(l)}$ 其中 $C^{(l)}$ 是一个由阶为 p^k 的元素构成的任意连通分支，且 $k \geq 2$。此外， $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\}$ 是群 $\mathbb{Z}_{p^n}$ 中所有阶为 p的元素组成的集合。因此， $o(x) = p^k$ 且 $o(x^2) = p^k$。若 $x \sim y$，则 $o(xy) = p$。由此可得，对于 $i = 1$、2、……、$(p-1)$ 中的任意一个，均有 $xy = x_i$。由于对于每个元素 x_i，都存在唯一的 y 使得 $xy = x_i$，因此，阶为 $p^k (k \geq 2)$ 的每个元素 x 的度为 $p-1$。 □

引理 4.6。 设 $C^{(l)}$ 是一个由阶为 p^k 的元素构成的连通分支，且 $k \geq 2$，则 $C^{(l)}$中不存在3-圈。

证明。 设 $C^{(l)}$ 中存在一个 3-圈，即 $x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_1$。那么， $\circ(x_1x_2) = \circ(x_2x_3) = \circ(x_3x_1) = p$ ，也就是说 $\circ(x_1x_2x_2^{-1}x_3^{-1}x_3x_1) = o(x_1^2) = 1$ 或 p。这表明 $\circ(x_1) = 1$ 或 2 或 p ，这与假设矛盾。因此， $C^{(l)}$中不存在 3-圈。 □

引理 4.7。 对于 x、y_1、$y_2 \in C^{(l)}$，若 $x \sim y_1$、 $x \sim y_2$、 $x^{-1} \sim y_1^{-1}$ 和 $x^{-1} \sim y_2^{-1}$ 成立，则 $y_1 \sim y_2^{-1}$。

证明。由 $x \sim y_1$ 和 $x \sim y_2$ ，可得 $\circ(xy_1) = p$ 和 $\circ(xy_2) = p$。此外， $\circ(y_1x) = p$ 和 $\circ(x^{-1}y_2^{-1}) = p$ ，即 $\circ(y_1xx^{-1}y_2^{-1}) = \circ(y_1y_2^{-1}) = 1$ 或 p。若 $\circ(y_1y_2^{-1}) = 1$，则 $y_1 = y_2$，这与假设矛盾。因此， $\circ(y_1y_2^{-1}) = p$。由此可得， $y_1 \sim y_2^{-1}$。 □

引理 4.8. 每个连通分支 $C^{(l)}$ 都是二部图。

证明. 设 A_l包含一个长度为 m的奇圈，使得 $x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_m$。因此， $o(x_1x_2) = p$， $o(x_2x_3) = p$， $\ldots$， $o(x_mx_1) = p$。这意味着

$$o(x_1x_2x_2^{-1}x_3^{-1}x_3x_4x_4^{-1}x_5^{-1}\ldots x_{m-1}^{-1}x_m^{-1}x_mx_1) = 1 \text{ or } p. \tag{9}$$

这意味着， $o(x_1^2) = 1$ 或 p，也就是说 $o(x_1) = 1$，或 2，或 p，这导致矛盾。因此，连通分支 $C^{(l)}$ 不含奇圈。任何不含奇圈的图都是二部图。 □

定理 4.1. *POE* 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 是一个 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 的同构副本与 $\frac{p^n-p}{2p}$ 个$(p-1)$-正则二部图的并，其中~~每个~~图都含有 $2p$ 个顶点，其中 p 是奇素数，且 $n > 2$。

证明。 令 $S = \{x_1, x_2, \ldots x_{p-1}\}$ 为 $\mathbb{Z}_{p^n}$中所有阶为 p的元素组成的集合。

现在，根据引理 4.4 和引理 4.3，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 不连通，且它是 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 与 $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots$ 的并，其中 $C^{(l)}$ 是阶相同的元素所构成的连通分支，即对于某个 $k \geq 2$，它是 p^k。但是，引理 4.3 并未断言所有阶为 p^k 的元素都位于同一个连通分支中。现在，根据引理 4.5，我们知道每个阶为 p^k 且满足 $k \geq 2$ 的元素的度为 $p-1$。因此，连通分支 $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots$ 是 $(p-1)$-正则的。与 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 同构的连通分支包含 p 个元素。因此，其余分量总共包含 $p^n - p$ 个元素。引理 4.2 表明，元素 x 和 x^{-1} 属于同一个连通分支。令 $x \in C^{(l)}$ 为一个元素，并且对于某个 $k \geq 2$，有 $o(x) = p^k$。引理 4.5 表明，存在 $p-1$ 个与 x相邻的元素。令 $x \sim y_i$，其中 $i = 1$=2, $\ldots, p-1$，且 $xy_i = x_i$。此外，对于 $i = 1$=2, $\ldots p-1$，有 $x^{-1} \sim y_i^{-1}$，且 $x^{-1}y_i^{-1} = x_i$。引理 4.6 证明了 $C^{(l)}$ 中不存在 3-圈。因此，对于 $i \neq j$，有 $y_i \nsim y_j$ 和 $y_i^{-1} \nsim y_j^{-1}$。根据引理 4.7，对于 $i \neq j$，有 $y_i \sim y_j^{-1}$。综合以上结果，我们将 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 中的邻接关系写为:

$$\begin{cases} x \sim y_i, i = 1, 2, \ldots, p-1; \\ x^{-1} \sim y_i^{-1}, i = 1, 2, \ldots, p-1; \\ y_i \sim x \text{ and } y_i \sim y_j^{-1}, i \neq j; \\ y_i^{-1} \sim x^{-1} \text{ and } y_i^{-1} \sim y_j^{-1}, i \neq j. \end{cases}$$

根据上述元素之间的关系，显然连通分支 $C^{(l)}$ 包含 x， x^{-1}， y_i， y_i^{-1} 当 $i = 1$， 2， $\ldots p-1$。因此，每个连通分支 $C^{(l)}$ 包含 $2p$ 个元素。此外，引理 4.8证明了每个连通分支 $C^{(l)}$ 都是二部图。综合以上结果即可得到所需结论。 □

定理 4.2。 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的谱为 $\{[0]^{\frac{p-1}{2}}, [-2]^{\frac{p-3}{2}}, [p-1]^{\frac{p^n-p}{2p}}, [-p]^{\frac{p^n-p}{2p}}, [1]^{\frac{(p-1)}{(p^n-p)2p}}, [-1]^{\frac{(p-1)}{(p^n-p)2p}}\}$，其余两个无理谱是方程 $x^2 - (p-3)x - (p-1) = 0$的根。

证明。 引理 4.4表明，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 是 $\Gamma(\mathbb{Z})$ 与 $\frac{p^n-p}{2p}$ 正则连通分支$C^{(l)}$ 的并，其正则度为 $(p-1)$。每个 $C^{(l)}$ 由 $2p$ 个顶点组成。图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的谱是所有连通分支的谱的并。图 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 的谱可由 定理 3.1确定。

设 $C^{(l)}$ 是一个正则连通分支，其由 $2p$ 个顶点组成，正则度为 $p-1$。定理 4.1 证明，所有连通分支 $C^{(l)}$ 都是二分图，具有 $2p$ 个度为 $p-1$的顶点。 $C^{(l)}$ 的顶点可以

表示为 $V_1 \cup V_2$，其中 $V_1 = \{x_i : i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $V_2 = \{x_i^{-1} : i = 1, 2, \cdots, p\}$。连通分支 $C^{(l)}$ 的邻接矩阵为 $A(C^{(l)}) = (a_{i,j}^{(l)})_{2p \times 2p}$，其中

$$a_{i,j}^{(l)} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 1, 2, \cdots, p; j = p+1, \cdots, 2p; \text{ and } i \neq j; \\ 1, & \text{if } i = p+1, p+2, \cdots, 2p; \text{ and } j = 1, 2, \cdots, p; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}$$

$C^{(l)}$ 的特征多项式为

$$|A(C^{(l)}) - \lambda I| = \det \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{array}\right].$$

因此，$|A(C^{(l)}) - \lambda I|$ 可表示为 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$，其中 $A = -\lambda I$ 和 $B = J - I$ 是阶为 p的可交换矩阵。

因此，

$$|A_i - \lambda I| = |A + B| \cdot |A - B| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -\lambda \end{vmatrix}. \tag{11}$$

注意，A和 B的谱集合分别为 $\Lambda(A) = \{p, 0, 0, \cdots, 0(p-1\text{ 倍})\}$，以及 $\Lambda(B) = \{(-\lambda - 1), (-\lambda - 1) \cdots, (-\lambda - 1)(p\text{ 倍})\}$。应用引理 2.2 可得，$A + B = J - (\lambda + 1)I$的谱集合为。

即 $\Lambda(A + B) = \{(-\lambda + p - 1), (-\lambda - 1), (-\lambda - 1) \cdots, (-\lambda - 1)\}$。类似地，$A - B$的谱集合为 $\Lambda(A - B) = \{(-\lambda - p + 1), (-\lambda + 1), (-\lambda + 1) \cdots, (-\lambda + 1)\}$。因此，$A_i$的谱为 $(p-1)$，$(1-p)$，$1(p-1\text{ 倍}) - 1(p-1\text{ 倍})$。

由于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的一个连通分支与 $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$ 同构，根据 推论 3.1，可知图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的谱中，0 的重数为 $\frac{p-1}{2}$，-2 的重数为 $\frac{p-3}{2}$，而 $x^2 - (p-3)x - (p-1)$ 的根为上述谱。$\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的其余谱由 定理 4.1 确定，该定理来自 $A(C^{(l)})$ 的谱。结合可得，$\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ 的其他谱为 $\{\underline{[0]^{\frac{p-1}{2}}}, \underline{[-2]^{\frac{p-3}{2}}}, \underline{[p-1]^{\frac{p^n-p}{2p}}}, \underline{[1-p]^{\frac{p^n-p}{2p}}}, \underline{[1]^{(p-1)_{(p^n-p)_{2p}}}}、\ \underline{[-1]^{(p-1)_{(p^n-p)_{2p}}}}\}$，其余谱为方程 $x^2 - (p-3)x - (p-1) = 0$ 的根。综合以上结果，即得所需结论。

□

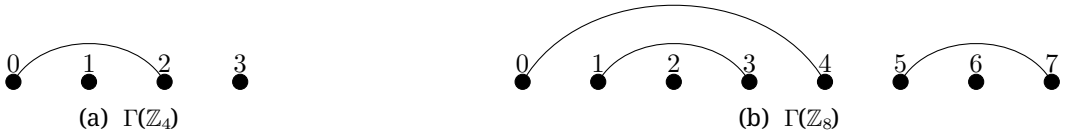
5 个 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$ 的性质

群 $\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, 2, \dots (2^n - 1)\}$ 只包含一个 2 阶元素，即 2^{n-1}。此外，$\mathbb{Z}_{2^n}$ 是一个阶为 2^n 的循环群。与该群对应的 POE 图是 K_2 个图和孤立顶点的并。图 3 中展示了其中两个例子。现在，我们有以下性质：

引理 5.1。图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$ 是 $\frac{2^n-2}{2}$ 个不同 K_2 图与两个孤立顶点的并，这两个孤立顶点对应于阶为 4 的元素。

证明。群 $\mathbb{Z}_{2^n}$ 只有一个 2 阶元素，即 2^{n-1}。$\mathbb{Z}_{2^n}$ 中没有其他素数阶元素。此外，$\mathbb{Z}_{2^n}$中有两个 4 阶元素，分别为 2^{n-2} 和 2^2。

若 x 是一个 4 阶元素，则不存在元素 $y \neq x$ 使得 $xy = 2^{n-1}$。因此，x 不与任何元素相邻。所以，两个 4 阶元素对应两个孤立顶点。



(a) $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ (b) $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$

图 3：与 $\mathbb{Z}_4$ 和 $\mathbb{Z}_8$ 相关的 POE 图。它们是 K_2 图和孤立顶点的并。

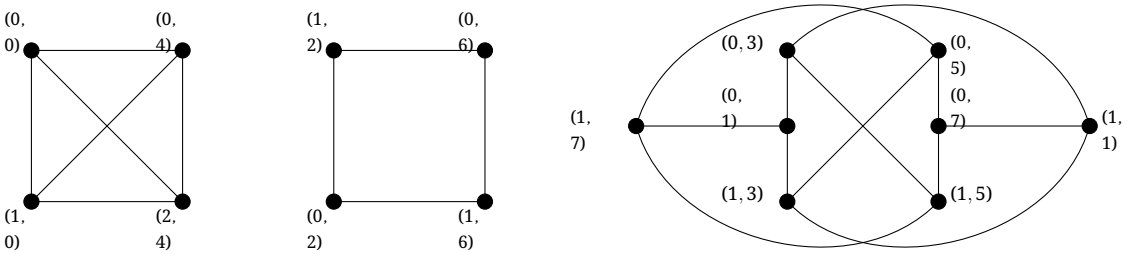


图4：POE 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$。该图不连通。请注意，所有连通分支均不同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_2$ 或 $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$，它们绘于 图 3。

由于 2^{n-1} 是自身的逆元，它与单位元 e 相邻。没有其他元素与 2^{n-1} 或 e 相邻。现在，任意两个元素 $x, y \in G$ 的复合是素数，当且仅当 $xy = 2^{n-1}$。对于每个 $x \in G$，都存在 $y \in G$ 使得 $xy = 2^{n-1}$ 或 $y = 2^{n-1}x^{-1}$。由于每个元素的逆元唯一，因此对于每个元素 $x \neq 2^{n-1} \in G$，都存在唯一的 y 使得 $xy = 2^{n-1}$。所以， x 与 y 之间有一条边。此外，它们不与任何其他元素相邻。最终，存在 $\frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1} - 1$ 对 x 和 y，由此形成 ($2^{n-1} - 1$) 个 K_2 图。因此，得证。 □

我们可以按如下方式重新排列孤立顶点以及与群中其他元素对应的顶点:

$$x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}, \ldots, x_{2^{n-1}-1}, x_{2^{n-1}-1}^{-1}, 2^{n-2}, 2^2.$$

它得到 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$ 的邻接矩阵，其形式为 $A(\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})) = (a_{i,\ j})_{2^n \times 2^n}$，其中

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{for } i = j+1, \text{or } j = i+1, \text{ and } i, j \notin \{2^n - 1, 2^n\}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{12}$$

现在我们得到关于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^n})$ 的谱的如下结果。

定理5.1。 若 $G \cong \mathbb{Z}_{2^n}$，则 $A(\Gamma(G))$ 的谱为 $\{[0]^2, [1]^{2^{n-1}-1}, [-1]^{2^{n-1}-1}\}$。

证明。 POE 图 $A(G)$ 是 $\frac{2^n-2}{2}$ 个不同的 K_2 图的并，以及两个孤立顶点。方程（2）表明， $A(\Gamma(G))$ 的谱是 K_2 个图的谱之并，重数为 $\frac{2^n-2}{2}$，且 0 的重数为 2。因此， $A(\Gamma(G))$ 的谱为$\{[0]^2, [1]^{2^{n-1}-1}, [-1]^{\underline{2^{n-1}-1}}\}$。

□

6 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$ 的性质

群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$ 是以下群的直积： $\mathbb{Z}_{2^n}$ 其中 n取不同的值。对于至少一个 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$ 不等于 1 时，POE 图不连通。此类 POE 图如 图4所示。我们考虑这些图的以下性质:

引理 6.1。 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$ 是不连通图，其中一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_2^k)$。

证明。 回顾可知，群 $\mathbb{Z}_{2^n}$ 只有一个 2 阶元素，即 2^{n-1}。因此，群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$ 包含 $(2^k - 1)$ 个阶为 2 的元素，其形式为 $(\varepsilon_1 2^{n_1-1}, \ldots, \varepsilon_k 2^{n_k-1})$，其中 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$。令

$C^{(0)}$ 为包含单位元的连通分支。由于单位元与素数阶元素相邻，因此这些元素都属于 $C^{(0)}$。利用 引理 2.1 可得，阶更高的元素均不属于 $C^{(0)}$。定义映射 $\varphi:\ C^{(0)} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$，使得 $\varphi\left((\varepsilon_1 2^{n_1-1},\ldots,\varepsilon_k 2^{n_k-1})\right)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$。容易证明 φ 是一个双射，因此 $C^{(0)} \cong \mathbb{Z}_2^k$。

□

引理 6.2. 群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$ 中，$t \geq 2$ 的阶为 2^t 的元素个数为 $2^c - 2^d$，其中 $c=\sum_{i=1}^k min\{n_i, 2^t\}$ 且 $d=\sum_{i=1}^k min\{n_i, 2^{t-1}\}$。

证明。设 $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_k)$ 是群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$中，$t \geq 2$ 的阶为 2^t 的元素。现在可以观察到，$o(x)=2^t(t \geq 2)$ 当且仅当 $o(x_i) \leq 2^t(i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k)$，且至少存在一个 x_i，$o(x_i)=2^t$。在群 $\mathbb{Z}_{2^{n_i}}$中，

1. 若 $n_i = t$，所有元素的阶均已为 $\leq 2^t(t \geq 2)$。

2. 若 $n_i \geq t$，阶为 $\leq 2^t$ 的元素是阶为 1，2，2_2，……或 2^t 的元素，也就是群 $\mathbb{Z}_{2^{n_i}}$ 中阶为 2^t 的子群所含元素的总数。

因此，$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_k)$ 的每个坐标的选择数为

$$\begin{cases} 2^{n_i}, & n_i \leq t, \\ 2^t, & n_i \geq t. \end{cases}$$

因此，$\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$ 中阶为 $2^t(t \geq 2)$ 的元素总数为

$$\left(\prod_{i=1}^k \left(\begin{cases} 2^{n_i}, & n_i \leq t, \\ 2^t, & n_i \geq t. \end{cases}\right)\right) - \left(\prod_{i=1}^k \left(\begin{cases} 2^{n_i}, & n_i \leq t-1, \\ 2^{t-1}, & n_i \geq t-1. \end{cases}\right)\right) = 2^{\sum_{i=1}^k min(n_i,t)} - 2^{\sum_{i=1}^k min(n_i,t-1)}.$$

□

推论 6.1. 阶为4 的元素个数为 $2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2\}} - 2^k$。

引理 6.3. 包含阶为4 的元素的连通分支数为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2\}}-2^k}{2^k}$，其中 $2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2\}} - 2^k$ 是群中阶为4 的元素总数。

证明。根据上述 推论 6.1，群中阶为 4 的元素个数为 $2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2\}} - 2^k$。此外，群中 2 阶元素的个数为 $2^k - 1$。设 x 是群中一个 4 阶元素。那么，

$$x^4 = e \implies (x^2)^2 = e.$$

这意味着，$x \circ x$ 给出一个 2 阶元素。显然，每个 4 阶元素的度为 $2^k - 2$。由于在阿贝尔 p 群中，$o(xy) = l.c.m\{o(x)\ o(y)\}$，4 阶元素只能与 4 阶元素相邻。现在，采用与 定理 4.1相同的方法，每个由 4 阶元素构成的连通分支包含 2^k 个元素。因此，图中由 4 阶元素构成的连通分支数$\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$ 为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2\}}-2^k}{2^k}$。

□

引理 6.4。 包含阶为 2^t（$t \geq 3$）的元素的连通分支数为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^t\}}-2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^{t-1}\}}}{2^{k+1}}$，其中 $2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^t\}} - 2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^{t-1}\}}$ 是群中阶为 2^t（$t \geq 3$）的元素总数。

证明。根据引理 6.2，阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素数为 $2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^t\}} - 2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^{t-1}\}}$。若 x 是群中满足 $o(x) = 2^t(t \geq 3)$ 的一个元素，则显然，$o(x^2) \neq 2$。因此，每个阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素的度为 $2^k - 1$。由于在阿贝尔 p 群中，$o(xy) = l.c.m.\{o(x)\ o(y)\}$，每个连通分支都包含阶相同的元素。现在，采用与定理 4.1 相同的方法，每个包含阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素的连通分支含有 2^{k+1} 个元素。因此，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$ 中阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素的连通分支数为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^t\}}-2^{\sum_{i=1}^k min\{n_i,2^{t-1}\}}}{2^{k+1}}$。

□

定理 6.1. 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_k}})$ 是不连通图，包含以下连通分支：

1. 一个与 $\Gamma(\mathbb{Z}_2^k)$ 同构的连通分支。

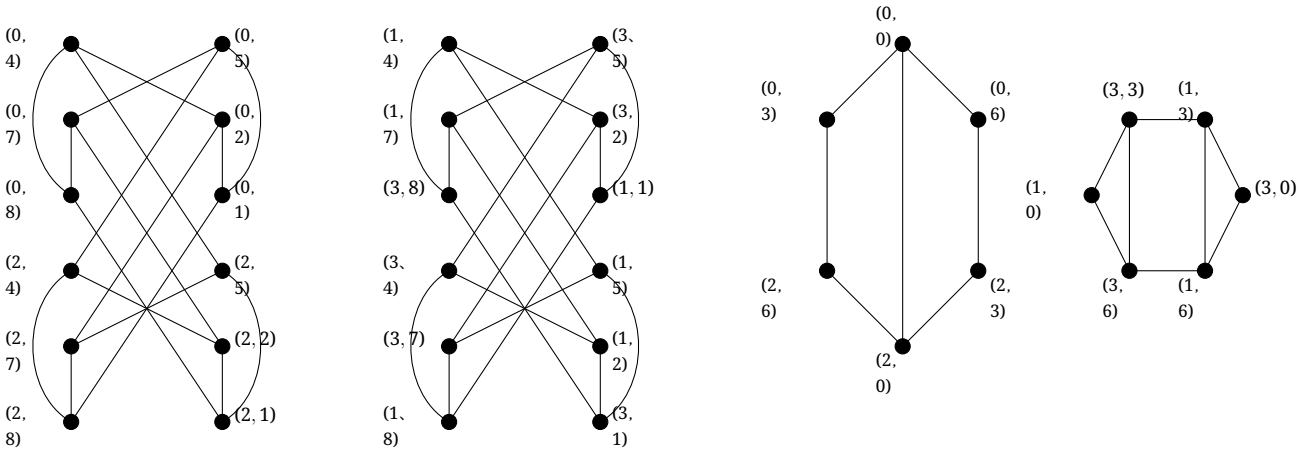


图 5：POE 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$ 是一个具有 4 个连通分支的图。

2. 包含阶为4 的元素的连通分支数量为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2\}}-2^k}{2^k}$，其中 $2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2\}}-2^k$是群中阶为4 的元素总数。

3. 包含阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素的连通分支数为 $\frac{2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2^t\}}-2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2^{t-1}\}}}{2^{k+1}}$，其中 $2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2^t\}}-2^{\sum_{i=1}^{k} min\{n_i,2^{t-1}\}}$ 是群中阶为 $2^t(t \geq 3)$ 的元素总数。

证明。 根据上述 引理 6.1、引理 6.2、引理 6.3和引理 6.4，定理得证。 □

$\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}})$的 7 个性质

群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}}$ 包含以下阶的非单位元:

- $2p_2$;
- 2^{k_1} 对于 $1 \leq k_1 \leq n_1$;
- $p_2^{k_2}$对于 $1 \leq k_2 \leq n_2$;
- $2^{k_1}p_2$ 对于 $2 \leq k_1 \leq n_1$;
- $2p_2^{k_2}$对于 $2 \leq k_2 \leq n_2$;
- $2^{k_1}p_2^{k_2}$对于 $2 \leq k_1 \leq n_1 - 1$以及 $2 \leq k_2 \leq n_2 - 1$。

相应的图 在以下任一情况下不连通： n_1 或 $n_2 \neq 1$。图示例见图 5.

引理 7.1。图 为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}})$ 不连通，且其中一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2}$).

证明。群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}}$ 同构于 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 的顶点可由 $\{(x, y)$ 中的元素标记： $x \in \mathbb{Z}_{2^{n_1}}$, $y \in \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\}$。群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$ 中有两类素数阶元素，分别如下:

1. 阶为 2 的元素。它们的形式为 (x_1, e_2)，其中 $o(x_1) = 2$ 属于 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}}$，即 $o(x_1, e_2) = 2$ 属于$\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。
2. 阶为 p_2 的元素。它们的形式为 (e_1, y_1)，其中 $o(y_1) = p_2$ 属于 $\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$，即 $o(e_1, y_2) = p_2$ 属于$\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。

令 $C^{(0)}$ 为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}})$ 中包含单位元 (e_1, e_2) 的连通分支。显然，(e_1, e_2) 与阶为 2 的元素及 p_2 相邻。此外，阶为 $2p_2$ 的元素具有形式 (x_1, y_1)，其中 $o(x_1) = 2$ 属于 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}}$，且 $o(y_1) = p_2$ 属于 $\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。注意，在图中存在一条路径 $(e_1, y_1) \sim (e_1, e_2) \sim (x_1, e_2) \sim (x_1, y_1)$

$\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$，其中 $o(e_1,\ y_1) = p_2,\ \ o(x_1,\ e_2) = 2,\ \ o(x_1,\ y_1) = 2p_2$。因此，阶为 2 的元素，$p_2$，$2p_2$ 总是属于 C^0。

设 C^0 包含一个 $(x_2,\ y_2)$ 高阶元素，使得 $o(x_2) = 2^{k_1}$ 当 $k_1 \geq 2$ 或 $o(y_2) = p_2^{k_2}$当 $k_2 \geq 2$。则，阶为 2 的元素中至少有一个，或 p_2 或 $2p_2$ 与元素 $(x_2,\ y_2)$ 相邻。现在利用 引理 2.1，可得以下情形：

- 设 $(2^{k_1}p_2^{k_2}$ $x_2\ y_2 \sim x_1\ e_2$ $k_1 \geq 2$ $k_2 \geq 2$ $o\ x_1$ $o\ x_2x_1$ $o\ x_2\ y_2\ x_1\ e_2 =$ ，）（，），其中（）$= 2$ 属于 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}}$。则（）$= 2^{k_1}$（$k_1 \geq 2$），这意味着（（，）（，））与 或 相邻。这是矛盾的。
- 设 $(x_2,\ y_2) \sim (e_1,\ y_1)$，其中 $o(y_1) = p_2$ 属于 $\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。则 $o(y_2y_1) = p_2^{k_2}$（$k_2 \geq 2$），这意味着 $o((x_2,\ y_2)\ (e_1,\ y_1)) = 2^{k_1}p_2^{k_2}$与 $k_1 \geq 2$ 或 $k_2 \geq 2$相邻。这是矛盾的。
- 设 $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$，其中 $o(x_1, y_1) = 2p_2$。那么 $o((x_2, y_2)(x_1, y_1)) = 2^{k_1}p_2^{k_2}$，且 $k_1 \geq 2$ 或 $k_2 \geq 2$。这再次导致矛盾。

因此，无论哪种情况，C^0 都不能包含一个阶更高的元素 (x_2, y_2)。所以，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}})$ 不连通。

定义一个映射 $f\colon V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})) \longrightarrow V(C^{(0)})$，如下：

$$f(a,b) = \left(a2^{n_1-1},\, bp_2^{n_2-1}\right), \quad a \in \mathbb{Z}_2,\ b \in \mathbb{Z}_{p_2}.$$

对于 $f(a,b) = f(a',b')$，我们有

$$(a-a')2^{n_1-1} \equiv 0 \pmod{2^{n_1}} \quad \text{and} \quad (b-b')p_2^{n_2-1} \equiv 0 \pmod{p_2^{n_2}}.$$

这意味着 $a, a' \in \mathbb{Z}_2$ 和 $b, b' \in \mathbb{Z}_{p_2}$，且 $a = a'$ 和 $b = b'$。因此，f 是单射。此外，对于某个 $k \in \{1, 2, \ldots, p_2 - 1\}$，$C^{(0)}$ 中的每个顶点都具有如下形式

$$(0,0),\ (2^{n_1-1},0),\ (0,kp_2^{n_2-1}),\ (2^{n_1-1},kp_2^{n_2-1}).$$

这些顶点分别表示 f 作用于 $(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(0,\ k)$ 和 $(1,\ k)$ 所得到的像。因此，f 是满射。于是，f 是双射。此外，对于任意 $(a,\ b)$，$(a',\ b') \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2}))$，

$$o\big((a+a', b+b')\big)\text{is prime} \iff o\big(f(a,b)f(a',b')\big)\text{is prime}.$$

因此，f 构成一个图同构，并且 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2}) \cong C^{(0)}$。 □

引理 7.2。 在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}})$中，一个 *4* 阶元素及其逆元属于同一个连通分支。

证明。 设 $(x,\ e_2)$ 是一个 4 阶元素，其中 $o(x) = 4$ 在 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}}$ 中。该元素的逆元为 $(x^{-1},\ e_2)$。由于 $(x,\ e_2) \sim (x^{-1},\ y) \sim (x,\ y) \sim (x^{-1},\ e_2)$ 是一条路径，其中 $\circ(y) = p_2$，因此这两个 4 阶元素及其逆元位于同一个连通分支中。 □

引理 7.3. 阶为4 的元素只与阶为 $4p_2$ 的元素相邻 .

证明. 该群只包含 $\phi(4) = 2$ 个 4 阶元素，且它们互为逆元，因此彼此不相邻。将包含 4 阶元素的连通分支记为 $C^{(1)}$。令

$\circ(x_1, y_1) = 4$，它与元素 (x_2, y_2) 相邻，当且仅当 $x_1x_2 = e_1$ 且 $\circ(y_1y_2) = p_2$。由于 $y_1 = e_2$，则 $(x_2, y_2) = (x_1^{-1}, y_2)$，其中 $\circ(y_2) = p_2$。因此，4 阶元素只与阶为 $4p_2$ 的元素相邻。

□

引理 7.4. 阶为 $4p_2$ 的元素的任一邻点，其阶要么为4 ，要么为 $4p_2$。

证明。设 $\circ(x_1, y_1) = 4p_2$。则，$\circ(x_1) = 4$ 且 $\circ(y_1) = p_2$。现在，$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 当且仅当 $\circ(x_1x_2) = 2$ 且 $y_1y_2 = e_2$ 或 $x_1x_2 = e_2$ 且 $\circ(y_1y_2) = p_2$。也就是说，要么 $(x_2, y_2) = (x_1, y_1^{-1})$；要么 $(x_2, y_2) = (x_1^{-1}, e_2)$。此外，对于任意阶为 $4p_2$ 的元素 (x_1, y_1)，它都与 (x_1^{-1}, e_2) 相邻。因此，所有阶为 $4p_2$ 和 4 的元素都属于同一个连通分支。□

引理 7.5. 所有 *4* 阶元素和 $4p_2$ 构成一个连通分支，且该连通分支不包含任何其他元素。

证明。设由 4 阶元素和 $4p_2$ 构成的连通分支为 $C^{(1)}$。显然，素数阶元素、单位元以及阶为 $2p_2$ 的元素均不属于 $C^{(1)}$。此外，根据引理 4.3 中 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}})$ 和 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_2^{k_2}})$ 的邻接刻画，阶为 $2^{k_1}(k_1 \geq 3)$、$p_2^{k_2}(k_2 \geq 2)$、$2^{k_1}p_2(k_1 \geq 3)$、$2p_2^{k_2}(k_2 \geq 2)$ 和 $2^{k_1}p_2^{k_2}(k_1, k_2 \geq 2)$ 的元素均不可能与 4 阶元素和 $4p_2$ 相邻。因此，结论得证。 □

引理 7.6. 阶为.....的元 素仅与阶为.....的元素 2^{k_1} 和 $2^{k_1}p_2$ 相邻，其中 $k_1 \geq$ 3.

证明。 阶为.....的元素 2^{k_1}，其中 $k_1 \geq 3$ 具有 $(x,\ e_2)$ 的形式，且 $\circ(x) = 2^{k_1}$。若 $(x,\ e_2) \sim (x_1,\ y_1)$，且复合生成一个 2 阶元素，则 $\circ(x_1) = 2^{k_1}$ 且 $y_1 = e_2$。若 $(x,\ e_2)$ 与 $(x_1,\ y_1)$ 的复合得到一个阶为.....的元素，则 $xx_1 = e_1$ 且 $\circ(y_1) = p_2$，也就是 $\circ(x_1) = 2^{k_1}$ 且 $\circ(y_1) = p_2$。因此，阶为 ..... 的元素可以与阶为 ..... 的元素 2^{k_1} 和 $2^{k_1}p_2$ 相邻。 □

定义 7.1。 我们定义 *POE* 图中两个元素 x 和 y 之间的一条边称为 p-边，当且仅当 $o\ (xy) = p$.

引理 7.7。 在 $\Gamma\ (\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2{}^{n_2}})$ 的一个连通分支中，阶为 2^{k_1} 的元素要么有 0 个，要么恰好有四个。此外，包含阶为 2^{k_1} 的元素的连通分支还包含 $4\ (p_2 - 1)$ 个阶为 $2^{k_1}p_2$的元素，其中 $k \geq 3$。

证明。设 $C^{(2)}$ 是一个包含阶为 2^{k_1}的元素的连通分支，其中 $k_1 \geq 3$。那么，它的形式为 (x, e_2)，其中 $\circ(x) = 2^{k_1}$。由于 $(x, e_2) \sim (x^{-1}, y_1) \sim (x, y_2) \sim (x^{-1}, e_2)$，且 $\circ(y_1) = \circ(y_2) = p_2$ 和 $y_1y_2 \neq e_2$，一个阶为 2^{k_1} 的元素及其逆元处于同一个连通分支中。根据引理 5.1 中提到的 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{m_1}})$ 的邻接条件，元素 (x, e_2) 和 (x^{-1}, e_2) 与另一个阶为 2^{k_1}的元素相邻。因此，$C^{(2)}$ 至少包含 4 个阶为 2^{k_1}的元素，即 (x_1, e_2)、(x_2, e_2)、(x_1^{-1}, e_2)、(x_2^{-1}, e_2)。这 4 个元素各自与如下的 $(p_2 - 1)$ 元素构成 p_2-边：

- $(x_1,\ e_2) \sim (x_1^{-1},\ y_i)$;
- $(x_2,\ e_2) \sim (x_2^{-1},\ y_i)$;
- $(x_1^{-1},\ e_2) \sim (x_1,\ y_i)$;
- $(x_2^{-1},\ e_2) \sim (x_2,\ y_i)$。

这里，$i = 1,\ 2,\ \cdots (p_2 - 1)$ 和 $\circ(y_i) = p_2$。现在，我们可以得出结论：在 $C^{(2)}$ 中，至少有 $4 + 4(p_2 - 1) = 4p_2$个元素。

现在，我们将证明 $C^{(2)}$ 中恰好有 $4p_2$ 个元素。考虑 $(x_1^{-1},\ y_i)$、$(x_2^{-1},\ y_i)$、$(x_1,\ y_i)$、$(x_2,\ y_i)$ 与其他元素的邻接关系，如下所示：

- $(x_1^{-1},\ y_i) \sim (x_1,\ y_j)$ 对于 $i \neq j$;
- $(x_2^{-1},\ y_i) \sim (x_2,\ y_j)$ 对于 $i \neq j$;
- $(x_1,\ y_i) \sim (x_1^{-1},\ y_j)$ 对于 $i \neq j$;
- $(x_2,\ y_i) \sim (x_2^{-1},\ y_j)$ 对于 $i \neq j$。

上述每个邻接关系都由元素之间的一条 p_2-边确定。显然，阶为 2^{k_1} and 的元素以及与它们相邻且阶为 $2^{k_1}p_2$ 的元素的数量为 $4p_2$，其度为 p_2。如果在 $C^{(2)}$ 中添加任意一个元素，至少一个元素的度就会增加，这是不可能的。因此，连通分支 $C^{(2)}$ 恰好包含 4 个阶为 $2^{k_1}(k_1 \geq 3)$ 的元素，元素总数为 $4p_2$。 □

引理 7.8. 一个连通分支含有一个阶为 $p_2^{k_2}$ 的元素，其中 $k_2 \geq 2$ 仅含阶为 $2p_2^{k_2}$ 的元素。该连通分支中的元素总数为 $4p_2$。

证明. 设 $C^{(3)}$ 是一个连通分支，其中包含一个阶为 $p_2^{k_2}$ 的元素 (e_1, y)。显然，$\circ(y) = p_2^{k_2}$。此外，$(e_1, y) \sim (x_1, y_1)$ 当且仅当 $\circ(x_1) = 2$ 且 $yy_1 = e_2$，或者 $x_1 = e_1$ 且 $\circ(yy_1) = p_2$。因此，根据 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 的邻接条件，$\circ(x_1, y_1) = p_2^{k_2}$ 或 $2p_2^{k_2}$。设 $(x_2, y_2) \in C^{(3)}$，使得 $\circ(x_2, y_2) = 2p_2^{k_2}$，则
$\circ(x_2) = 2$ 且 $\circ(y_2) = p_2^{k_2}$。因此，$(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ 当且仅当满足以下任一条件：

- $\circ(x_2x_3) = 2$ 和 $y_2y_3 = e_2$ 即 $x_3 = e_1$ 且 $\circ(y_3) = p_2^{k_2}$。
- $x_2x_3 = e_2$ 和 $\circ(y_2y_3) = p_2$，即 $\circ(x_3) = 2$，以及 $\circ(y_3) = p_2^{k_2}$。

在这种情况下，我们可以得出结论：阶为 $2p_2^{k_2}$ 的元素只与阶为 $p_2^{k_2}$和 $2p_2^{k_2}$的元素相邻。

现在来看证明的第二部分。根据 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$的邻接关系，阶为 $p_2^{k_2}$的元素只能与阶为 p_2的元素构成 $p_2^{k_2}$-边。因此，定理 4.2 表明， $C^{(3)}$ 含有 $2p_2$ 个阶为 $p_2^{k_2}$的元素。我们将阶为 $p_2^{k_2}$的元素分成两个集合，使得

- $K_1 = \{(e_1, y_i) : i = 1, 2, \cdots, p_2\}$;
- $K_2 = \{(e_1, y_i^{-1}) : i = 1, 2, \cdots, p_2\}$,

其中 $\circ(y_i) = p_2^{k_2}$和 $(e_1, y_i) \sim (e_1, y_j^{-1})$ 对于 $i \neq j$。导出子图 $\langle K_1 \cup K_2 \rangle$中有 $(p_2 - 1)$ 条 p_2-边。现在， K_1 和 K_2 的元素构成的 2-边可分类如下：

- $L_1 = \{(x, y_i^{-1}) : (e_1, y_i) \sim (x, y_i^{-1}) \text{ for } i = 1, 2, \cdots, p_2, \circ(x) = 2\}$.
- $L_2 = \{(x, y_i) : (e_1, y_i^{-1}) \sim (x, y_i) \text{ for } i = 1, 2, \cdots, p_2, \circ(x) = 2\}$.

回忆一下，连通分支中每个元素的度为 p_2。顶点的度至多等于底层群中素数阶元素的总数。现在，$(x, y_i) \sim (x, y_j^{-1})(i \neq j)$，它们之间构成 p_2-边。因此，这总共 $4p_2$ 个元素中每个元素的度为 p_2 ，这是该图的最大度。如果在该连通分支中添加任何元素，那么其中至少一个 $4p_2$ 元素的度就会增加，而这在此情况下是不可能的。

□

现在，我们还剩下阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}$ 的元素在 $k_1, k_2 \geq 2$ 中的分量。

引理 7.9。 阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}(k_1, k_2 \geq 2)$ 的元素只能与阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}$ 的元素相邻，当且仅当 $k_1, k_2 \geq 2$。

证明。 设 $C^{(4)}$ 是一个由阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}$ 的元素构成的连通分支，其中 $k_1, k_2 \geq 2$。如果 $(x_1, y_1) \in C^{(4)}$ ，则 $\circ(x_1) = 2^{k_1}$ 且 $\circ(y_1) = p_2^{k_2}$。因此，$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 当且仅当以下条件之一成立：

- $\circ(x_1x_2) = 2$ 且 $y_1y_2 = e_2$ ，即 $\circ(x_2) = 2^{k_1}$ 且 $\circ(y_2) = p_2^{k_2}$;
- $x_1x_2 = e_1$ 和 $\circ(y_1y_2) = p_2$ ，即 $\circ(x_2) = 2^{k_1}$ 和 $\circ(y_2) = p_2^{k_2}$。

因此，阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}$的元素只能与阶为 $2^{k_1}p_2^{k_2}$的元素相邻。 □

引理 7.10。 该连通分支 $C^{(4)}$ 包含 $4p_2$ 个元素。

证明。 设 $(x_1, y_1) \in C^{(4)}$，使得 $\circ(x_1, y_1) = 2^{k_1}p_2^{k_2}$。根据 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 的邻接关系，顶点 (x_1, y_1) 通过 p_2-边与 $(p_2 - 1)$ 个元素相邻，这些边的形式为

$$K_1 = \{(x_1^{-1}, y_i) : i = 2, 3, \cdots, p_2\}.$$

类似地，$(x_1^{-1}, y_1^{-1}) \in C^{(4)}$，与 $(p_2 - 1)$ 个元素相邻，从而形成 p_2-边，这些边为

$$K_2 = \{(x_1, y_i^{-1}) : i = 2, 3, \cdots, p_2\}.$$

现在，集合 $K_1 \cup K_2 \cup \{(x_1, y_1), (x_1^{-1}, y_1^{-1})\}$ 由 $2p_2$ 个元素组成。集合中的每个元素彼此之间有 $(p_2 - 1)$ 条 p_2-边。

该群包含一个 2 阶元素，且每个元素 x 都与群中的唯一一个元素 y 构成一条 p-边。因此，对于每个 x，都存在唯一的 y 使得 $o(xy) = 2$。由此， $C^{(4)}$ 中的每个元素都有一条 2-边。对于这条 2-边，$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_1^{-1})$，且 $(x_1^{-1}, y_1^{-1}) \sim (x_2^{-1}, y_1)$，其中 $\circ(x_1x_2) = e_1$。 K_1 中的元素与元素集合构成 2-边

$$L_1 = \{(x_2, y_i) : (x_1, y_i^{-1}) \sim (x_2, y_i), i = 2, 3, \cdots, p_2\}.$$

类似地， K_2 中的元素与元素集合构成 2-边

$$L_2 = \{(x_2^{-1}, y_i^{-1}) : (x_1^{-1}, y_i) \sim (x_2^{-1}, y_i^{-1}), i = 2, 3, \cdots, p_2\}.$$

现在，我们还有另一个集合，由 $2p_2$ 个元素 $L_1 \cup L_2 \cup \{(x_2, y_1^{-1}), (x_2^{-1}, y_1)\}$ 组成。 L_1 和 L_2 中的元素按以下方式彼此构成 p_2-边

- $(x_2, y_i) \sim (x_2^{-1}, y_j^{-1})$ for $i \neq j$;

- $(x_2^{-1}, y_i^{-1}) \sim (x_2, y_j)$，对于 $i \neq j$。

此外，对于 $i \neq j$，$(x_2, y_i) \sim (x_2^{-1}, y_j^{-1})$，且 $(x_2^{-1}, y_i^{-1}) \sim (x_2, y_j)$。

因此，所有 $4p_2$ 个不同元素的度均为 p_2。如果再添加任何元素，那么这些 $4p_2$ 个元素中至少有一个元素的度会增加，这是不可能的。 □

定理 **定理 7.1.** *POE* 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}})$ 是以下连通分支的并 :

1. 一个含有 $2p_2$ 个顶点且与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$同构的连通分支。*2.* 一个含有 $2p_2$ 个顶点的连通分支，其中包含阶为 4 的元素和阶为 $4p_2$的元素。

3. 该图由 $2^{n_1-2}p_2^{n_2-1}-1$ 个正则连通分支组成，每个分支含有 $4p_2$ 个顶点，正则度为 p_2。

证明。 引理 7.1 表明，图中存在一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$。此外，根据 引理 7.2、7.3、7.4和 7.5，我们可知 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{m_1}p_2^{m_2}})$ 有一个连通分支，含有 $2p_2$ 个顶点。该分支中的元素阶为 4，且 $4p_2$。由 引理 7.6、7.7、7.8、7.9和 7.10可知，所有其他连通分支都含有 $4p_2$ 个顶点。

设 (x, y) 是图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}})$ 中的一个顶点，满足 $o(x, y) \neq 2$ 或 p_2 或 4。则 $o((x, y)^2) \neq p_2$ 或 2，因此，对于每个 (x, y)，都存在唯一的 (x_1, y_1)，使得 $o((x, y)(x_1, y_1)) = 2$ 或 p_2。有一个 2 阶元素和 $(p_2 - 1)$ 个阶为 p_2 的元素。因此，除阶为 p_2、4 和 2 的元素外，每个元素的度均为p_2。所以，除与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$ 同构的连通分支以及包含 4 阶元素的连通分支外，所有其他连通分支均为 p_2-正则，且每个分支含有 $4p_2$ 个顶点。 □

我们运用图的均衡划分这一思想，讨论 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$ 的无理谱。其定义如下:

定义 7.2。 若图 Γ 的顶点划分 $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}\}$ 满足：对于任意一对（不一定不同的）指标 i、$j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$，都存在一个非负整数 a_{ij}，使得每个顶点 $v \in P_i$ 在 P_j 中恰有 a_{ij} 个邻点，且与 v 的选择无关，则称该划分为均衡的 。

矩阵 $A(\Gamma/\mathcal{P}) = (a_{ij})_{m\times m}$ 称为划分矩阵或商矩阵。

定理 7.2。 *[29][第 9 章，定理 9.3。3]* “如果 π 是图 X的一个均衡划分，那么图的商矩阵的特征多项式 $A(X/\pi)$ 整除图 X 的特征多项式 $A(X)$ 。”

定理 7.3. 方程 $(x^2 - (p_2 - 1)x - 1) = 0$ 和 $(x^2 - (p_2 - 5)x - (2p_2 - 5)) = 0$ 的根构成了 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$ 的无理谱。

证明。 我们将 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2})$ 的顶点划分为 4 个部分，分别为 $V_1 = \{e\}$， $V_2 = \{x^{p_2}\}$， $V_3 = \{x^{2k} : \ 1 \leq k \leq p_2 - 1\}$，以及 $V_4 = \{x^{2k+1} : \ 0 \leq k \leq p_2 - 1\}$。元素 $a_{i,\ j}$ 如 定义 7.2 所示如下:

划分	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	$p_2 - 1$	0
V_2	1	0	0	$p_2 - 1$
V_3	1	0	$p_2 - 3$	1
V_4	0	1	1	$p_2 - 3$

Now，带有该分块的商矩阵 $A(\Gamma/\mathcal{P})$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & p_2-1 & 0 \\ 1 & -x & 0 & p_2-1 \\ 1 & 0 & p_2-3-x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & p_2-3-x \end{vmatrix} = 0.$$

我们将其记为 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 0$，其中 $A = \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix} p_2-1 & 0 \\ 0 & p_2-1 \end{bmatrix}$、$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $D = \begin{bmatrix} p_2-3-x & 1 \\ 1 & p_2-3-x \end{bmatrix}$。由于 C 和 D 彼此可交换，因此 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$,

where $AD = \begin{bmatrix} x^2-(p_2-3)x+1 & p_2-3-2x \\ p_2-3-2x & x^2-(p_2-3)x+1 \end{bmatrix}$ and $BC = \begin{bmatrix} p_2-1 & 0 \\ 0 & p_2-1 \end{bmatrix}$. Therefore,

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & (p_2-1) & 0 \\ 1 & -x & 0 & (p_2-1) \\ 1 & 0 & p_2-3-x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & p_2-3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2-(p_2-3)x-p_2+2 & p_2-3-2x \\ p_2-3-2x & x^2-(p_2-3)x-p_2+2 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2-(p_2-3)x-p_2+2)^2-(p_2-3-2x)^2$$

$$=(x^2-(p_2-3)x-p_2+2+p_2-3-2x)(x^2-(p_2-3)x-p_2+2-p_2+3+2x)$$

$$=(x^2-(p_2-1)x-1)(x^2-(p_2-5)x-(2p_2-5)).$$

根据定理 7.2，方程 $(x^2-(p_2-1)x-1)=0$ 和 $(x^2-(p_2-5)x-(2p_2-5))=0$的根是该图的无理谱。

□

定理 7.4. *POE* 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}})$ 是以下连通分支的并：

1. 一个有 $2p_2p_3\dots p_k$ 个顶点的连通分支，它与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2p_3\dots p_k})$ 同构。*2.* 一个有 $2p_2p_3\dots p_k$ 个顶点的连通分支，包含阶为4 的元素以及阶为$4p_2$、$4p_3\dots 4p_k$的元素。*3.* 该图由 $2^{n_1-2}p_2^{n_2-1}\dots p_k^{n_k-1}-1$ 个正则连通分支组成，每个分支有 $4p_2p_3\dots p_k$ 个顶点，正则度为 $p_2+p_3+\dots p_k$。

证明。群 $\mathbb{Z}_{2^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}} \cong \mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2{}^{n_2}} \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k{}^{n_k}}$。在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2{}^{n_2}} \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k{}^{n_k}})$ 中，单位元、阶为 2 的元素以及其他素数阶的元素属于同一个连通分支。由于总是存在路径 $(e_1,e_2,\dots,e_k) \sim (x,e_2,e_3,\dots,e_k) \sim (x,y_2,e_3,\dots,e_k) \sim (x,y_2^{-1},y_3,e_4,\dots,e_k) \sim \cdots \sim (x,y_2,y_3^{-1},\dots,y_k)$（当 k 为奇数时），以及 $(e_1,e_2,\dots,e_k) \sim (x,e_2,e_3,\dots,e_k) \sim (x,y_2,e_3,\dots,e_k) \sim (x,y_2^{-1},y_3,e_4,\dots,e_k) \sim \cdots \sim (x,y_2^{-1},\dots,y_k)$，阶为 $2^{\eta_1}p_2^{\eta_2}\dots p_k^{\eta_k}$ 的元素（其中 $\eta_i=0$ 或为 1）属于同一个连通分支。现在，采用与引理 7.1 相同的方法，可以得到该图是不连通的，且其中一个连通分支与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p_2p_3\dots p_k})$ 同构。此外，运用相同的技巧并采用数学归纳法，根据引理 7.2、引理 7.3、引理 7.4、引理 7.5、引理 7.6、引理 7.7、引理 7.8、引理 7.9、引理 7.10 并将其推广，即可得到所需证明。

□

8 性质 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$

我们可以证明群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$的元素可以表示为 $\{(x,y):\ x \in \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}, y \in \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\}$。群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}}$ 包含具有以下各阶的元素：

- 形如（x, e_2）的元素，其中对于 $k_1 = 1,2,\dots,(n_1-1)$ 中的 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}$，$o(x) = p_1^{k_1}$。它们的阶为 $p_1^{k_1}$。
- 形如（e_1, y）的元素，其中对于 $k_2 = 1,2,\dots,(n_2-1)$ 中的 $\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$，$o(y) = p_2^{k_2}$。它们的阶为 $p_2^{k_2}$。
- 形如（$x\ y$ $o\ x$ $o\ y$ n_2- ,）的元素，其中 $(\ ) = p_1^{k_1}$ 对于 $k_1 = 0,1,2\dots,(n_1-1)$，或 $(\ ) = p_2^{k_2}$ 对于 $k_2 = 0,1,2\dots,(\ )$。它们的阶为 $p_1^{k_1}p_2^{k_2}$。

该群包含阶为 p_1 的 (p_1-1) 个元素和阶为 p_2 的 (p_2-1) 个元素。因此，单位元 $(e_1,\ e_2)$ 与所有 (p_1+p_2-2) 个元素均相邻。若下列条件之一成立，则 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 中的两个顶点 $(x_1,\ y_1) \sim (x_2,\ y_2)$ 相邻：

- $\circ(x_1x_2) = p_1$ 和 $y_1y_2 = e_2$；或者
- $\circ(y_1y_2) = p_2$ 和 $x_1x_2 = e_1$。

引理 8.1。图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$ 是不连通的，其中一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$。

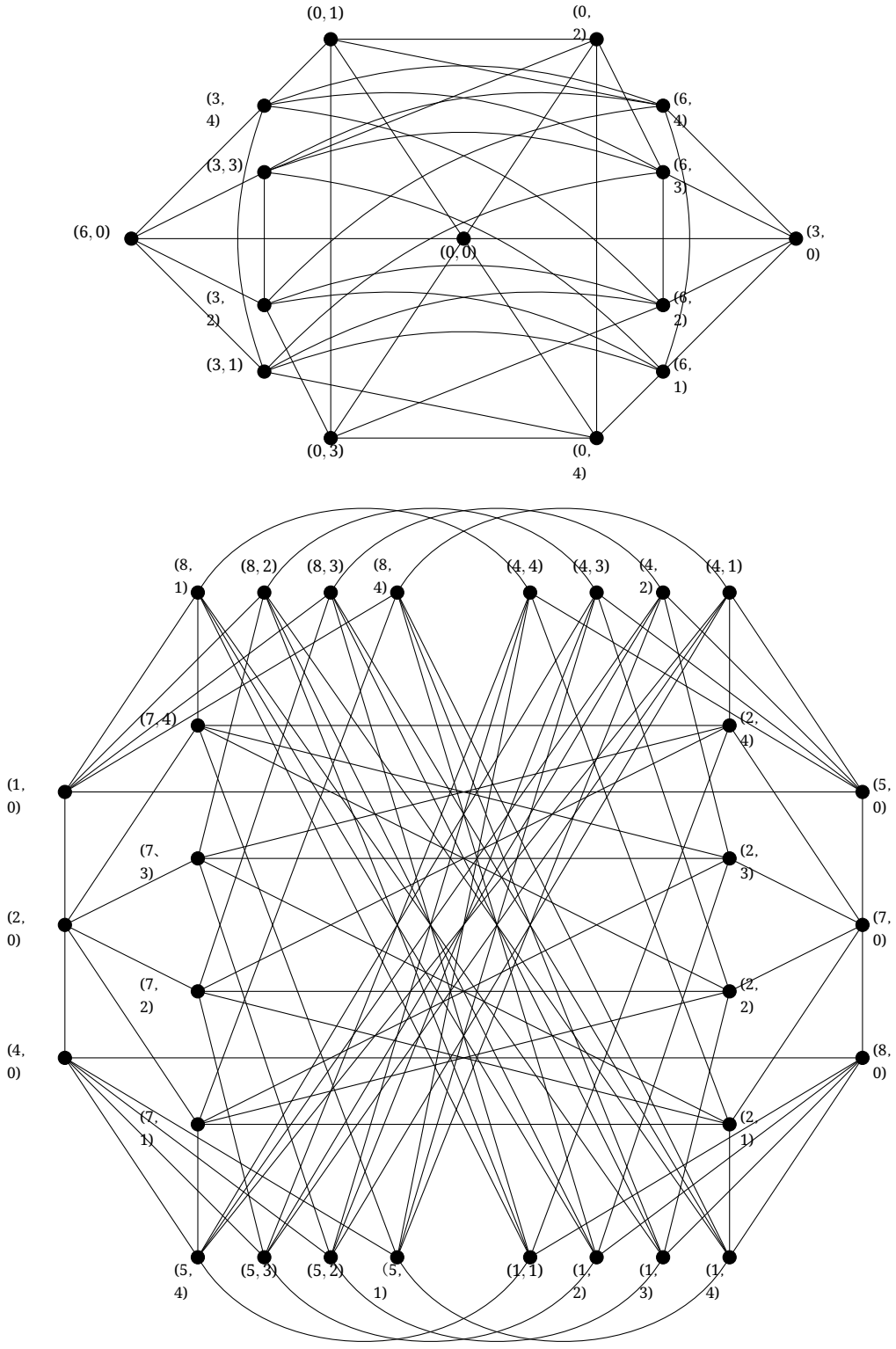


图 6：POE 图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2 5})$ 由上面两个连通分支组成。顶部的连通分支与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{15}$同构，如引理 8.1所述。

$o\ x_1\ e_2\ = p_1 \qquad o\ e_1\ y_1\ = p_2 \qquad o\ x_1\ y_1\ = p_1p_2 \qquad o \qquad y_1\ =$

证明。令 o x $o\ x$ o $(\ ,\ )$ 和 $(\ ,\ )$，则利用引理 2.1 可得 $(\ ,\ )$ 和 $(x_1^{-1},)\ (x_1, y_1^{-1})\ = p_1p_2$。所有阶为 p_1p_2 的元素均具有如下形式：$\{(\ ,y) : (\ )\ = p_1, (y)\ = p_2\}$。因此，保持 POE 图的邻接关系不变，可得 $(x_1, e_2)\ \sim (x_1^{-1}, y_1)$，且 $(e_1, y_1)\ \sim (x_1, y_1^{-1})$。由于 $(e_1, e_2)\ \sim (x_1, e_2)\ \sim (x_1^{-1}, y_1)$，且 $(e_1, e_2)\ \sim (e_1, y_1)\ \sim (x_1, y_1^{-1})$，所有阶为 p_1p_2 的元素都位于同一个连通分支中，该分支包含单位元 (e_1, e_2)，我们将其标记为 $C^{(0)}$。

设 $C^{(0)}$ 包含一个元素 (x_2, y_2)，使得 $o(x_2, y_2) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$且 $k_1 \geq 2$或 $k_2 \geq 2$，那么 (x_2, y_2) 与任意一个阶为 p_1, p_2 或 p_1p_2 的元素相邻。现在，应用 引理 2.1 可得以下几种情形：

- If $(x_2, y_2) \sim (x_1, e_2)$, where $o(x_1, e_2) = p_1$, then $o((x_2, y_2)(x_1, e_2)) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$, which is not a prime.
- 如果 $(x_2,\ y_2) \sim (e_1, y_1)$，其中 $o(e_1, y_1)\ = p_2$，则 $o((x_2, y_2)(e_1, y_1))\ = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，这不是一个素数 e.
- 若 $(x_2, y_2)\ \sim (x_1, y_1)$，其中 $o(x_1, y_1)\ = p_1p_2$，则 $o((x_2, y_2)(x_1, y_1))\ = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，这不是素数 .

上述每种情况都与 POE 图的定义矛盾。因此，$C^{(0)}$ 没有阶为 p_1、p_2 和 p_1p_2以外的元素。因此，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 有多个连通分支，故它是不连通的。

现在，我们证明连通分支 $C^{(0)}$ 与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ 同构。我们可以将群 $\mathbb{Z}_{p_1p_2}$表示为 $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2}$，其中各群的元素为 (e_1, e_2)，阶为 p_1、p_2和 p_1p_2的元素与 $C^{(0)}$中的元素形式相同。此外，在 $C^{(0)}$和 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2})$ 中，每种阶的元素个数都相同。根据 POE 图的定义，$C^{(0)}$ 中的两个元素以及图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2})$ 中的两个元素以相同的方式相邻。因此，连通分支 C 与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2})$ 同构，即 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$；证明方式与引理 7.1 相同。

□

引理 8.2. 在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$中，阶为 $p_1^{k_1}$的元素与阶为 $p_1^{k_1}$和 $p_1^{k_1}p_2$的元素相邻。此外，阶为 $p_2^{k_2}$的元素与阶为 $p_2^{k_2}$和 $p_1p_2^{k_2}$的元素相邻，其中 $k_1, k_2 = 2,3, \ldots, (n_2 - 1)$。

证明。群 $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} = \{(x, y) :\ x \in \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}, y \in \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}}\}$ 中阶为 $p_1^{k_1}$的元素可表示如下：

$$\{(x, e_2) : o(x) = p_1^{k_1} \text{ where } k_1 = 2, 3, \ldots, (n_1 - 1)\}.$$

若 $o(x_1, y_1)\ = p_1^{k_1}$，则 $(x_1, y_1)\ = (x_1, e_2)$，且 $o(x_1)\ = p_1^{k_1}$。若 $(x_1, y_1)\ \sim (x_2, y_2)$，则根据 POE 图的定义，我们有 $o((x_1, y_1)(x_2, y_2))\ = p_1$ 或 p_2。现在分以下几种情况：

情形 I： 令 $o((x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2))\ = p_1$。那么，

$$\begin{aligned} & o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_1 \\ \implies & o(x_1x_2, y_1y_2) = p_1 \\ \implies & o(x_1x_2) = p_1, y_1y_2 = e_2. \end{aligned} \tag{13}$$

回顾一下，我们考虑了阶为 $p_1^{k_1}$ 和 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}$ 的元素。此外，我们知道，在元素 (x_1, y_1) 中，第一个分量 x_1 来自群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}$，第二个分量来自群 $\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}$。显然，如果 $o(x_1, y_1)\ = p_1^{k_1}$，那么 $o(x_1)\ = p_1^{k_1}$ 且 $o(y_1)\ = 1$，也就是说 $y_1 = e_2$。此外，我们有 $y_2 = e_2$，因此，$(x_2, y_2)\ = (x_2, e_2)$。现在，$((x_1, y_1)(x_2, y_2))$ 的阶仅取决于 $o(x_1x_2)$。由于 (x_1, e_2) 和 (x_2, e_2) 可视为群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}$ 的元素，根据引理 4.3，$o(x_2, e_2)\ = p_1^{k_1}$。因此，对于 $k_1 = 2$、3、.....、$(n_1 - 1)$，$o(x_1, y_1)\ = o(x_2, y_2)\ = p_1^{k_1}$。

情形 II： 令 $o((x_1, y_1)(x_2, y_2))\ = p_2$.

$$\begin{aligned} & o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_2 \\ \implies & o(x_1x_2, y_1y_2) = p_2 \\ \implies & x_1x_2 = e_1, o(y_1y_2) = p_2. \end{aligned} \tag{14}$$

假设 $o(x_1)\ = p_1^{k_1}$，即 $x_1 \neq e_1$。显然，$x_2 = x_1^{-1}$且 $o(y_1y_2)\ = p_2$。由于 $y_1 = e_2$，$o(y_2)\ = p_2$。因此，对于 $k_1 = 2,3, \ldots, n_1 - 1$，有 $o(x_2, y_2)\ = p_1^{k_1}p_2$。

综合以上两种情形，得到所需结论。以类似方式，阶为 p_1^k的 k 个阶为两种情形之一的元素相邻。

□

推论 8.1. 阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素与阶为 $p_1^{k_1}$ 和 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素相邻，其中 $k_1 \geq 2$。此外，阶为 $p_1p_2^{k_2}$ 的元素与阶为 $p_2^{k_2}$ 和 $p_1p_2^{k_2}$ 的元素相邻，其中 $k_2 \geq 2$。

证明。根据引理 8.2，若一个阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素 (x_1, y_1) 与一个阶为 $p_1^{k_1}$ 的元素 (x_2, y_2) 相邻，则 $(x_2, y_2) = (x_1^{-1}, e_2)$。此处，$o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_2$。设 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}p_2$，且 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，其中$o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_1$。因此，

$$\begin{aligned} & o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_1 \\ \Longrightarrow\ & o(x_1x_2, y_1y_2) = p_1 \\ \Longrightarrow\ & o(x_1x_2) = p_1, y_1y_2 = e_2 \\ \Longrightarrow\ & o(x_1) = o(x_2), y_2 = y_1^{-1} \\ \Longrightarrow\ & o(x_1, y_1) = o(x_2, y_2). \end{aligned} \tag{15}$$

显然，对于 阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素 $(x_1,\ y_1)$ 与阶为 $p_1^{k_1}$ 和 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素相邻。
Sim似地，阶为 p_1p 的元素 ^{k} $_{2^2}$ 与阶为 p 的元素相邻 ^{k} $_{2^2}$ 和 $p_1p2^{k_2}$. □

根据 引理 8.2 及其 推论 8.1，对于 $k_1 \geq 2$ 阶为 $p_1^{k_1}$和 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素，根据其邻接条件属于同一个连通分支。根据 引理 8.1，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$ 是不连通的，因此我们可以将该图的连通分支记为 $C^{(1)}$，$C^{(2)}$，……，$C^{(l)}$。设 $C^{(1)}$ 是一个包含阶为 $p_1^{k_1}$和 $p_1^{k_1}p_2$的元素的连通分支，其中 $k_1 \geq 2$。

引理 8.3。连通分支 $C^{(1)}$ 至少包含 $2p_1p_2$ 个度为 $(p_1 + p_2 - 2)$ 的顶点。

证明。由 引理 4.1 可知，在阿贝尔群的 POE 图中，一个元素及其逆元属于同一个连通分支。

设 $(x_1, y_1) \in C^{(1)}$ 使得 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}$。则，$(x_1, y_1) = (x_1, e_2)$，根据引理 4.5，阶为 $p_1^{k_1}$的每个元素都与 $(p_1 - 1)$个阶为 $p_1^{k_1}$的元素相邻。由于 $(x_1, y_1) = (x_1, e_2)$，阶为 $p_1^{k_1}$的元素可以视为图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}})$的顶点。因此，根据引理 4.5 和定理 4.1，我们称 $C^{(1)}$ 包含$2p_1$ 个阶为 $p_1^{k_1}$的元素。此外，根据引理 8.2，如果一个 (x_1, e_2)阶为 $p_1^{k_1}$的元素与一个 (x_2, y_2)阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素相邻，则 $(x_2, y_2) = (x_1^{-1}, y_2)$，其中 $o(y_2) = p_2$。由于群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}}$包含 $(p_2 - 1)$个阶为p_2的元素，因此对于 $C^{(1)}$ 中每个与阶为 $p_1^{k_1}$的元素相关联的顶点，我们得到 $(p_2 - 1)$个与阶为 $p_1^{k_1}p_2$的元素相关联的顶点。根据引理 4.3 和引理 4.5，$C^{(1)}$ 中每个与阶为 $p_1^{k_1}$的元素相关联的顶点的度为 $(p_1 + p_2 - 2)$。因此，$C^{(1)}$ 中的顶点数至少为 $2p_1 + 2p_1(p_2 - 1) = 2p_1p_2$。 □

引理 8.4。连通分支 $C^{(1)}$ 中阶为 $p_1^{k_1}$ 的元素与 $2p_1(p_2-1)$ 个阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素相邻，从而构成 p_2- 条边。

证明。现在，我们需要证明它们是 $2p_1p_2$ 中仅有的 $C^{(1)}$ 个元素。根据 推论 8.1，阶为 $p_1^{k_1}p_2$ 的元素与阶为 $p_1^{k_1}$ 和 $p_1^{k_1}p_2$ 相邻。设 $(p_1^{k_1}$ o x_2 y_2 $= p_1^{k_1}p_2$ $x_2 = x_1^{-1}$ o y_2 $= p_2$ x_2 y_2 $p_1^{k_1}p_2$ $,)$ $(,)$，其中 $(,)$ 和 $(,)$。显然，且 $(\ )$。因此，阶为 $(,)$ 的元素最多只能与一个阶为 $p_1^{k_1}$ 的元素相邻。

我们将阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素记作

$$S_1 = \{(x_1, e_2), (x_2, e_2), \ldots, (x_{p_1}, e_2), \ldots, (x_1^{-1}, e_2), (x_2^{-1}, e_2), \ldots, (x_{p_1}^{-1}, e_2)\}.$$

设阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素 $(x_i,\ e_2)$ 与

$$S_2 = \{(x_i^{-1}, y_1), (x_i^{-1}, y_2), \ldots, (x_i^{-1}, y_{\frac{p_2-1}{2}})\}(i = 1, 2, \ldots, p_1)$$

and

$$S_3 = \{(x_i^{-1}, y_1^{-1}), (x_i^{-1}, y_2^{-1}), \ldots, (x_i^{-1}, y_{\frac{p_2-1}{2}}^{-1})(i = 1, 2, \ldots, p_1)\}$$

阶为 $p_1^{k_1}p_2(k_1 \geq 2)$ 的元素相邻。

同理，形如 $(x_i^{-1}\ ,\ e_2)$ 的阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素与这些元素相邻

$$S_4 = \{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \ldots, (x_i, y_{\frac{p_2-1}{2}})\}(i = 1, 2, \ldots, p_1)$$

and

$$S_5 = \{(x_i, y_1^{-1}), (x_i, y_2^{-1}), \ldots, (x_i, y_{\frac{p_2-1}{2}}^{-1})\}(i = 1, 2, \ldots, p_1)$$

阶为 $p_1^{k_1}p_2(k_1 \geq 2)$。其中，$|S_2| = |S_3| = |S_4| = |S_5| = {}^{p_1}\!\!\not{(p_2-1)}\,\not{2}$。因此，$|S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| = 2p_1(p_2 - 1)$。 □

引理 8.5。 连通分支 $C^{(1)}$ 仅包含 $2p_12p_2$ 个顶点。

证明。 根据引理 8.4，连通分支 $C^{(1)}$ 包含来自 S_2的所有元素， S_3， S_4， S_5。现在，我们需要证明 $V(C^{(1)})$ $= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$。

$C^{(1)}$ 中阶为 $p_1^{k_1}p_2(k_1 \geq 2)$ 的元素是 $S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$。我们已经计算了阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素的度，因此还需要确定阶为 $p_1^{k_1}p_2(k_1 \geq 2)$ 的元素总数及其度。

S_2 中的每个元素都与一个阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素相邻。设 $(x_i, y_m) \in S_2$，那么根据推论 8.1，唯一的阶为 $p_1^{k_1}$ $(k_1 \geq 2)$ 的元素是 $(x_i^{-1}, e_2) \in S_1$。类似地，若 $(x_i^{-1}, y_m^{-1}) \in S_3$，那么它与元素 $(x_i, e_2) \in S_1$ 相邻；若 $(x_i, y_m) \in S_4$，那么它与 $(x_i^{-1}, e_2) \in S_1$ 相邻；若 $(x_i, y_m^{-1}) \in S_5$，那么它与 $(x_i^{-1}, e_2) \in S_1$ 相邻。根据推论 8.1，显然， S_2、 S_3、 S_4、 S_5 中的每个元素都至多与 S_1中一个阶为 $p_1^{k_1}(k_1 \geq 2)$ 的元素相邻。

设 $(x_s^{-1}, y_m) \in S_2$，则 $(x_s^{-1}, y_m) \sim (x_s, e_2)$，且 $((x_s^{-1}, y_m)(x_s, e_2)) = y_m$。此复合得到一个阶为 p_2 的元素。根据推论 8.1，(x_s^{-1}, y_m) 与 $(x_s, y_j) \in S_4(j = 1, 2, \ldots, \frac{p_2-1}{2})$ 相邻，且 $(x_s, y_j^{-1}) \in S_5(j = 1, 2, \ldots, \frac{p_2-1}{2})$ and $j \neq m$。与 S_4、 S_5 中的元素以及 (x_s, e_2) 复合后，得到阶为 p_2 的元素总数为 $p_2 - 1$。

元素 $(x_s^{-1}, y_m) \sim (x, y_m^{-1})$ 在 S_3 和 S_5 并根据 定理 4.1，这些总共是 $p_1 - 1$ 个。因此，来自 S_2 与 $p_1 + p_2 - 2$ 中的元素数量为 $C^{(1)}$。

同理，我们可以证明，来自 S_3、 S_4、 S_5 的元素与 $p_1 + p_2 - 2$ 个元素相邻，并且它们与来自 S_1、 S_2、 S_3、 S_4、 S_5 的元素相邻。因此， $V(C^{(1)}) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$。于是，$|V(C^1)| = 2p_1p_2$。

□

设 $C^{(2)}$ 是阶为 $p_2^{k_2}$ 和 $p_1p_2^{k_2}$ 的元素的一个连通分支，其中 $k_2 \geq 2$.

推论 8.2. 连通分支 $C^{(2)}$ 包含 $2p_1p_2$ 个度为 $(p_1 + p_2 - 2)$ 的顶点。

引理 8.6. 对于一个元素 $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}}$，使得 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ 与 (x_2, y_2) 相邻，且 $o(x_2, y_2) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，其中 $k_1 \geq 2$，并且 $k_2 \geq 2$。

证明。 令 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，即 $o(x_1) = p_1^{k_1}$， $o(y_1) = p_2^{k_2}$且 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$。于是，我们有以下几种情形:

情形一： 令 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 且 $o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_1$。这意味着

$$\begin{aligned} & o(x_1x_2, y_1y_2) = p_1 \\ \Longrightarrow\ & o(x_1x_2) = p_1, y_1y_2 = e_2 \\ \Longrightarrow\ & o(x_1x_2) = p_1, y_1 = y_2^{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

由于 $((x_1, y_1)(x_2, y_2))$ 的阶仅取决于 x_1x_2 的阶，因此我们可以将元素 x_1、 x_2 视为群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}$ 的元素。根据引理 4.3 以及与两个阶为 $p_1^{k_1}$ 的元素对应的两个顶点的邻接条件，在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}})$ 中，我们有 $o(x_1) = o(x_2)$，即 $o(x_2) = p_1^{k_1}$ $(k_1 \geq 2)$。此外， $y_1 = y_2^{-1} \Longrightarrow o(y_1) = o(y_2) = p_2^{k_2} \Longrightarrow o(x_2, y_2) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$。因此， $o(x_1, y_1) = o(x_2, y_2) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$。

情形 II： 设 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ 且 $o((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = p_2$。这意味着

$$\begin{aligned} & o(x_1x_2, y_1y_2) = p_2 \\ \Longrightarrow\ & x_1x_2 = e_1, o(y_1y_2) = p_2 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = x_2^{-1}, o(y_1y_2) = p_2. \end{aligned} \tag{17}$$

$o\ y_1\ = o\ y_2$ $o\ x_1\ = o\ x_2\ =$

按照情形 I 的相同方法，我们可以得出 $p_1^{k_1}\ k_1 \geq 2$ $o\ x_1\ y_1\ = o\ x_2\ y_2\ = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ ( ) ( )

$= p_2^{k_2}(k_2 \geq 2)$ 且 ( ) ( ) ( )。因此，(,) (,)。

□

由上述引理 8.6，若 $o(x_1, y_1) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，且 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，则要么 $(x_2, y_2) = (x_2, y_1^{-1})$，其中$o(x_1) = o(x_2)$；要么 $(x_2, y_2) = (x_1^{-1}, y_2)$，其中 $o(y_1) = o(y_2)$，这里 $k_1, k_2 \geq 2$。设 $C^{(3)}$ 是阶为 $p_1^{k_1}p_2^{k_2}(k_1, k_2 \geq 2)$ 的元素的一个连通分支。

引理 8.7. 连通分支 $C^{(3)}$ 至少包含 $2p_1p_2$ 个度为 $(p_1 + p_2 - 2)$ 的顶点。

证明。根据引理 8.6，阶为 $p_1^{k_1}p_2^{k_2}(k_1,k_2\geq 2)$ 的元素彼此相邻。设 $(x_i,y_i)\in C^{(3)}$ and $o((x_i,y_i)(x_j,y_j))=p_1$，则 $(x_j,y_j)=(x_j,y_i^{-1})$。于是，根据引理 8.6，当它们复合后得到一个阶为 p_1 的元素时，$(x_i,y_i)\sim(x_j,y_i^{-1})$。由于群 $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}}$包含 p_1-1 个阶为 p_1 的元素，因此 (x_i,y_i) 与 (x_j,y_i^{-1}) 相邻，其中 $o(x_ix_j)=p_1$。根据引理 8.2，可知 (x_i,y_i) 与 p_1-1 个这样的元素相邻。

若 $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 且 $o((x_1,y_1)(x_2,y_2))=p_i(i=1,2)$，那么我们可以说，元素 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 之间存在一个 p_i-edge。

设 $(x,y)\in C^{(3)}$ 是一个元素，并且它与元素集合 S_1 相邻。元素 (x,y) 与 S_1 中的每个元素都有 p_1-edge。集合 S_1 为

$$S_1=\{(x_i,y^{-1}):i=1,2,\dots p_1-1\}. \tag{18}$$

根据引理 4.1，(x,y) 及其逆元 (x^{-1},y^{-1}) 属于同一个连通分支 $C^{(3)}$，(x^{-1},y^{-1}) 与元素集合有 p_1-edge

$$S_1^{-1}=\{(x_i^{-1},y):i=1,2,\dots p_1-1\}. \tag{19}$$

这里，$|S_1|=|S_1^{-1}|=p_1-1$。根据引理 4.7，$(x_i,y^{-1})\sim(x_j^{-1},y)$，其中 $i,j=1,2,\dots,p_1-1$, $o(x_ix_j^{-1})=p_1$以及 $i\neq j$。因此，$S_1\cup S_1^{-1}\cup\{(x,y),(x^{-1},y^{-1})\}$ 中的元素将其 p_1-edge 放在该集合内。此外，$|S_1\cup S_1^{-1}\cup\{(x,y),(x^{-1},y^{-1})\}|=2p_1$。

现在，集合 $S_1\cup S_1^{-1}\cup\{(x,y),(x^{-1},y^{-1})\}$ 中的每个元素都与具有其 p_2-edge 的 p_2-1 个元素相邻。我们有 $2p_1+2p_1(p_2-1)=2p_1p_2$ 个元素属于 $C^{(3)}$。我们只需证明这些 $2p_1p_2$ 个元素是连通分支 $C^{(3)}$中的唯一元素。□

引理 8.8. 连通分支 $C^{(3)}$ 仅包含 $2p_1p_2$ 个顶点。

证明。第 个顶点 (x,y) 和 (x^{-1},y^{-1}) 与 T和 T^{-1}中的元素构成 p_2-边，其中

$$T=\{(x^{-1},y_j):j=1,2,\dots,p_2-1\},\text{and } T^{-1}=\{(x,y_j^{-1}):j=1,2,\dots,p_2-1\}. \tag{20}$$

此外，对于 $i=1$，2、.....、(p_1-1)，顶点 (x_i,y^{-1}) 和 (x_i^{-1},y) 与元素集合 T_i和 T_i^{-1}相邻，从而构成 p_2-边，其中

$$T_i=\{(x_i^{-1},y_j^{-1}):j=1,2,\dots,p_2-1\},\text{ and } T_i^{-1}=\{(x_i,y_j):j=1,2,\dots,p_2-1\}. \tag{21}$$

我们需要证明 $V(C^{(3)})=S_1\cup S_2\cup T\cup T^{-1}\cup\{\cup_{i=1}^{p_2-1}T_i\}\cup\{\cup_{i=1}^{p_2-1}T_i^{-1}\}\cup\{(x,y),(x^{-1},y^{-1})\}$。 T中的元素 (x^{-1},y_j) 与 T^{-1} 中的 (x,y_k^{-1}) 相邻，其中 $j\neq k$and $o((x^{-1},y_j)(x,y_k^{-1}))=p_2$。此外，对于 $i=1,2,\dots,p_1-1$and 每个 j，元素 $(x^{-1},y_j)\sim(x_i^{-1},y_j^{-1})$ 和 $(x,y_j^{-1})\sim(x_i,y_j)$ 构成 p_1-边。对于每个 i， T_i中的元素 (x_i^{-1},y_j^{-1}) 与 T_i^{-1} 中的 (x_i,y_k) 相邻，而 $j\neq k$构成 p_2-边。此外，对于每个 j，$(x_i,y_j)\sim(x,y_j^{-1})$，以及 $(x_i^{-1},y_j^{-1})\sim(x_k,y_j)$ 和 $(x_i^{-1},y_j^{-1})\sim(x^{-1},y_j)$，其中 $i\neq k$以形成 p_1-边。根据以上计算可知，来自 $S_1\cup S_2\cup T\cup T^{-1}\cup\{\cup_{i=1}^{p_2-1}T_i\}\cup\{\cup_{i=1}^{p_2-1}T_i^{-1}\}\cup\{(x,y),(x^{-1},y^{-1})\}$ 的元素在该集合内构成了所有的 p_1-边和 p_2-边。因此，连通分支 $C^{(3)}$中没有其他元素。由于它们每个都有 (p_1+p_2-2) 条边，因此每个 $2p_1p_2$ 元素的度为 (p_1+p_2-2)。表1列出了连通分支 $C^{(3)}$中的所有邻接关系。□

定理 8.1. 对于两个奇素数 p_1 和 p_2，$\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})\cong\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}})$ 是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ 与$p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}-1$ 个连通正则分支的并，每个分支有 $2p_1p_2$ 个顶点，度为 p_1+p_2-2。

证明。从引理 8.1 可知，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$ 不连通，且其中一个分量同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$。引理 8.2、引理 8.3、引理 8.6 和引理 8.7 表明，其余连通分支各包含 $2p_1p_2$个元素，且每个元素的度为 p_1+p_2-2。由于一个连通分支 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ 包含 p_1p_2个元素，其余分支包含 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}-p_1p_2$。由于每个连通分支包含$2p_1p_2$ 个元素， $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$有 $\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}-p_1p_1}{2p_1p_2}$，即除 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ 外还有 $\frac{p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}-1}{2}$ 个连通分支。因此，图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$ 是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$与 $\frac{p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}-1}{2}$ 个连通分支的并，这些分支包含 $2p_1p_2$ 个顶点，且每个顶点的度为（p_1+p_2-2）。

□

定理 8.2。对于 k奇素数 $p_1,p_2,\dots p_k$, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}})\cong\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\times\dots\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}})$ 是 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2\dots p_k})$与 $\frac{p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}\dots p_k^{n_k-1}}{2}$ 个连通正则分支的并，每个分支有 $2p_1p_2\dots p_k$ 个顶点，度为 $p_1+p_2+\dots p_k-k$。

.	$(x,\ y)$	$(x^{-1},\ y^{-1})$	$(x_i,\ y^{-1})$	$(x_i^{-1},\ y)$	$(x^{-1},\ y_j)$	$(x,\ y_j^{-1})$	$(x_i,\ y_j)$	$(x_i^{-1},\ y_j^{-1})$
$(x,\ y)$	$\nsim$	$\nsim$	p_1	$\nsim$	p_2	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$
$(x^{-1},\ y^{-1})$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	p_1	$\nsim$	p_2	$\nsim$	$\nsim$
$(x_k,\ y^{-1})$	p_1	$\nsim$	$\nsim$	$p_1(k \neq i)$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	$p_2(k = i)$
$(x_k^{-1},\ y)$	$\nsim$	p_1	$p_1(i \neq k)$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	p_2	$\nsim$
$(x^{-1},\ y_s)$	p_2	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	$p_2(j \neq s)$	$\nsim$	p_1
$(x,\ y_s^{-1})$	$\nsim$	p_2	$\nsim$	$\nsim$	$p_2(j \neq s)$	$\nsim$	p_1	$\nsim$
$(x_k,\ y_s)$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$	$p_2(k = i)$	$\nsim$	$p_1(j = s)$	$\nsim$	$\nsim$
$(x_k^{-1},\ y_s^{-1})$	$\nsim$	$\nsim$	$p_2(k = i)$	$\nsim$	$p_1(j = s)$	$\nsim$	$\nsim$	$\nsim$

表1：连通分支中的邻接关系 $C^{(3)}$ 在图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}})$ 这些元素之间的关系，详见引理 8.8。这里 $\nsim$ 表示顶点之间不存在边。此外， p_i 表示相应行和列中的顶点之间存在一条p_i边。

证明。群 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \ldots \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}})$ 的元素形式为 $\{(x_1, x_2, \ldots x_k)\colon\ x_i \in \mathbb{Z}_{p_i^{n_i}},$ 其中 $i = \{1, 2, \ldots, k\}\}$。单位元为 $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$，其中 e_i 是 $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ 的单位元。当 k 为偶数时，存在一条路径 $(e_1, e_2, \ldots, e_k) \sim (x_1, e_2, \ldots, e_k) \sim (x_1^{-1}, x_2, \ldots, e_k) \sim (x_1, x_2^{-1}, x_3, \ldots, e_k) \sim \ldots (x_1^{-1}, x_2, \ldots, x_k)$；当 k 为奇数时，存在一条路径 $(e_1, e_2, \ldots, e_k) \sim (x_1, e_2, \ldots, e_k) \sim (x_1^{-1}, x_2, \ldots, e_k) \sim (x_1, x_2^{-1}, x_3, \ldots, e_k) \sim \ldots (x_1, x_2^{-1}, \ldots, x_k)$。其中 $o(x_i) = p_i$，适用于 $i = 1, 2, \ldots, k$。从这些路径可以看出，阶为 $p_i (i = 1, 2, \ldots, k)$、$p_{i_1}p_{i_2} (i_1 \neq i_2)$、$p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3} (i_1 \neq i_2 \neq i_3) \ldots p_{i_1}p_{i_2} \ldots p_{i_k} (i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k)$ 的元素属于同一个连通分支。仿照引理 8.1 的方法，可以证明图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \ldots \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}})$ 非连通，且其中一个连通分支同构于 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2 \ldots p_k})$。此外，应用引理 8.2、引理 8.3、引理 8.4、引理 8.5、引理 8.6、引理 8.7 和引理 8.8 中的相同方法，按照各自的邻接判据按阶对元素进行划分，然后通过推广相同的数学归纳法即可证明所需结论。

□

致谢

作者感谢加尔各答 Presidency University 的 Angsuman Das 博士在本研究初期进行的讨论。

参考文献

[1] Sudip Bera 和 AK Bhuniya。关于有限群的增强幂图。《代数及其应用杂志》，17(08):1850146，2018。

[2] Wilhelm Magnus、Abraham Karrass 和 Donald Solitar。 组合群论：用生成元和关系表示群。Courier Corporation，2004 年。

[3] Cayley 教授。 desiderata 与建议：第 2 号。《群论》：图形表示。 《美国数学杂志》，1(2):174–176，1878 年。

[4] Peter J Cameron 和 Shamik Ghosh。 有限群的幂图。 《离散数学》，311(13):1220–1222，2011 年。

[5] Ajay Kumar、Lavanya Selvaganesh、Peter J Cameron 和 T Tamizh Chelvam。有限群幂图的最新进展综述。《*AKCE* 国际图与组合杂志》，18(2):65–94，2021。[6] Subarsha Banerjee。关于有限群元素阶所定义的一种新图。*arXiv* 预印本 *arXiv:1911.02763*，2019。[7] Natalia V Maslova。关于有限群的 Gruenberg–Kegel 图。载于第*47*届国际青年学校会议《数学及其应用中的现代问题》论文集。由 *SF Pravdin*、*AA Makhnev* 编，2016。

[8] Sucharita Biswas、Peter J Cameron、Angsuman Das 和 Hiranya Kishore Dey。关于有限群增强幂图与幂图之差异。组合理论杂志，A辑，208:105932，2024。[9] Saieed Akbari、Babak Miraftab 和 Reza Nikandish。群的子群余极大图。加拿大数学公报，60(1):12–25，2017。[10] Angsuman Das、Manideepa Saha 和 Saba Al-Kaseasbeh。关于群的余极大子群图。数学研究，73(4):2075–2089，2024。[11] Angsuman Das 和 Manideepa Saha。关于群的余极大子群图 II。数学研究，74(1):91–104，2025。[12] Alexander Betz 和 David A Nash。对具有少量子群的群进行分类。《美国数学月刊》，129(3):255–267，2022。[13] S Akbari、A Mohammadian、H Radjavi 和 P Raja。关于交换图的直径。线性代数及其应用，418(1):161–176，2006。[14] G Arunkumar、Peter J Cameron、Rajat Kanti Nath 和 Lavanya Selvaganesh。群上的超图 I。图与组合，38(3):100，2022。[15] G Arunkumar、Peter J Cameron 和 Rajat Kanti Nath。群上的超图 II。《离散应用数学》，359:371–382，2024。[16] Zahra Bahrami 和 Bijan Taeri。有限群连接图的进一步结果。土耳其数学杂志，43(5):2097–2113，2019。[17] He Huang、Binzhou Xia 和 Sanming Zhou。凯莱图中的完美码。SIAM离散数学杂志，32(1):548–559，2018。[18] Xuanlong Ma、Gary L Walls、Kaishun Wang 和 Sanming Zhou。凯莱图中的子群完美码。SIAM离散数学杂志，34(3):1909–1921，2020。[19] Qiuyan Wang、Xiaodan Liang、Rize Jin 和 Yang Yan。强正则凯莱图在码本中的应用。IEEE Access，11:106980–106986，2023。[20] Alain Bretto 和 Alain Faisant。凯莱图与 g-图：若干应用。符号计算杂志，46(12):1403–1412，2011。[21] Rupali S Jain、B Surendranath Reddy 和 Wajid M Shaikh。从单位图构造线性码$G(\mathbb{Z}_n)$。亚欧数学杂志，16(11):2350213，2023。[22] Peter J Cameron。定义在群上的图。arXiv 预印本 arXiv:2102.11177，2021。[23] Tapa Manna、Angsuman Das 和 Baby Bhattacharya。群的素数阶元素图：T. Manna 等。数学研究，74(3):1305–1319，2025。[24] Tapa Manna、Angsuman Das 和 Baby Bhattacharya。素数阶元素图的禁子图。arXiv 预印本 arXiv:2412.19905，2024。[25] Joseph Gallian。当代抽象代数。Chapman and Hall/CRC，2021。[26] DS Dummit、RM Foote、Upper Saddle River Prentice-Hall、WA Adkins 和 SH Weintraub。基础群论。[27] Douglas Brent West 等。图论导论，第2卷。Prentice hall Upper Saddle River，2001。[28] Roger A Horn 和 Charles R Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，2012。[29] Chris Godsil 和 Gordon F Royle。代数图论，第207卷。Springer Science & Business Media，2013。