arXiv:2603.19786v1 [math.LO] 20 Mar 2026

整数与 p-adic 赋值域的远 distal 扩张

Koki Okura*

摘要

本文研究由投影映射的像所生成的一元子集对远 distal 结构的扩张。我们首先给出此类扩张保持远 distal 性的一个充分条件。基于这一判据，我们证明了涉及整数或 p-adic 赋值域的三类扩张具有远离性。设 R 为一个几乎稀疏序列。我们证明 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 是远 distal 的，从而回答了 Tong 提出的问题。此外，我们证明 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 和 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}}, p^R)$ 的远离性。后者给出了一个 NIP 扩张的例子：该扩张的 p-adic 赋值域上的庞加莱级数不具有有理性。

目录

1 引言 21.1 记号.3

2 远离性 **4**

2.1 远离性的概论.4 2.2 远侧性判据.6

3 $(\mathbb{Z}; <, +)$ 与一个近乎稀疏序列 8

3.1 近乎稀疏序列.9 3.2 回返构造.11 3.3 变量分离.14 3.4 远离性.15

4 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 和 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}}, p^R)$ 15

4.1 F作用为d brief h历史.15

4.2 $(\mathbb{Q}_p)$ 的初等行为 $(+, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$.17 4.3 $(\mathbb{Q}_p)$ 的回返构造 $(+, \cdot, p^{\mathbb{Z}}, p^R)$.19 4.4 变量分离.23 4.5 远离性与庞加莱级数.24

*筑波大学数学博士课程，茨城 305-8571，日本 电子邮件：k_okura@math.tsukuba.ac.jp

1 引言

2013年，Simon [23] 引入了远 *distal* 理论，将其作为 NIP 理论的一个特殊子类，旨在刻画那些“纯粹不稳定”的 NIP 理论。远离性不仅为 NIP 理论提供了更精细的分类，还蕴含了理想的组合性质，例如强 Erdős-Hajnal 性质以及 Zarankiewicz 问题的上界 [4, 3]。

许多理论已被证明是 distal 的。典型例子包括 o-极小理论和 P-极小理论；特别地，实数域和 p-进域都是 distal 的。另一个例子是整数的有序加法群。文献 [1] 给出了亨泽尔赋值域远离性的 AKE 型刻画。

一个持续受到关注的问题是，远离结构的扩张中哪些仍然是 distal 的。例如，Hieronymi 和 Nell [10]研究了 o-极小有序群的扩张，并证明了通过实数域正部分的循环乘法子群扩张得到的结构具有远离性。特别地，$(\mathbb{R};+,\cdot,2^{\mathbb{Z}})$ 是 distal 的，其中 $2^{\mathbb{Z}}=\{2^z \mid z\in\mathbb{Z}\}$。另一方面，Tong [26]证明，若序列是“同余周期”的，则通过“稀疏序列”扩张 $(\mathbb{Z};<,+)$ 得到的结构是 distal 的。

本文的主要结果如下：

定理。设 R 是一个由整数构成的近乎稀疏序列。设 $p^{\mathbb{Z}}=\{p^z \mid z\in\mathbb{Z}\}$和 $p^R=\{p^r \mid r\in R\}$。那么，以下结构是 *distal* 的：

- $(\mathbb{Z};<,+,R)$
- $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}})$
- $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R)$

值得注意的是，我们不要求 R 具有同余周期性。因此，第一个结果肯定地回答了Tong [26, 问题1.4]所提出的问题：是否可以省略同余周期性。第二个结果类似于 $(\mathbb{R};+,\cdot,2^{\mathbb{Z}})$ 的远离性，并加强了 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}})$ 的 NIP 性质；后者是 Mariaule的结果 [17,推论6.5] 的直接结论。第三个结构结合了前两者；由于此前甚至不知道它是否具有 NIP，因此它是第一个缺乏庞加莱级数有理性的 NIP 扩张 p-进域的例子。

为证明这些结果，我们首先为通过投影映射的像得到的一元子集 R 扩张 distal 结构 $\mathcal{N}$ 建立远离性判据。简而言之，$(\mathcal{N},R)$ 是 distal 的，当且仅当：

1. 它的初等行为由 $\mathcal{N}$ 的初等行为以及 R 上的 distal 结构 $\mathcal{R}$ 决定。

2. 它具有“变量分离”性质。

这一判据在第 2 章中介绍，之前先回顾远离性的定义和基本性质。Hieronymi 和 Nell [10, 定理 2.1] 以及 Aschenbrenner、Chernikov、Gehret 和 Ziegler[1, 命题 7.1]也提出了类似的判据。我们预计这一判据适用于其他各种扩张。例如，Hieronymi 和 Nell（同上）证明了带有标准部分映射的实闭域对具有远离性，而我们的判据或可用于得出关于 p-进闭域的类似结果。

为验证该判据的第一个条件，我们采用回返构造论证。第 3 章专门讨论结构 $(\mathbb{Z};<,+,R)$。在考察几乎稀疏序列的基本性质之后，我们建立了所需的回返构造与变量分离结果，这些结果通过我们的判据立即推出远离性。第 4 章讨论结构 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}})$ 和 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R)$。尽管 Mariaule [16], 已经证明了结构 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}})$ 的量词消去性质，我们仍对结构 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R)$ 进行了回返构造分析。随后，我们建立了一种适用于这两种结构的统一变量分离形式。根据我们的判据，它们的远离性同样可立即得出。最后，我们引入庞加莱级数，并证明结构 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R)$ 的庞加莱级数不具有有理性。

致谢

本研究得到 JST SPRING 项目（编号：JPMJSP2124）以及位于京都大学的国际联合使用与研究中心——数学科学研究所的支持。作者谨向其导师 Kota Takeuchi 致以诚挚谢意，感谢他在本文准备过程中给予的悉心指导。

1.1 符号约定

我们用 $a\Subset X$ 表示其每个分量都属于 X。有时，我们用并置记号 ab 或 AB 表示元组 a 和 b 的拼接，或集合 A 和 B 的并。对于一个 L-理论 T，$|T|$ 表示 L-公式的数量，即 $|T|=|L|+\aleph_0$。对于结构的子集 X 和函数集 $\mathcal{F}$，我们用 $\langle X\rangle_{\mathcal{F}}$ 表示相对于 $\mathcal{F}$ 由 X 生成的子集：

$$\langle X\rangle_{\mathcal{F}}=\{t(\overline{a})\mid \overline{a}\in X \text{ and } t \text{ is a term involving functions in } \mathcal{F}\}.$$

注记 1.1. 本文的大部分内容都在怪兽模型中进行。所谓“怪兽模型”，是指一个结构 $\mathcal{U}$，使得任何可在$\mathcal{U}$中解释的结构（包括$\mathcal{U}$本身）都是 κ-饱和且强 κ-齐次的，其中基数 κ足够大。Hodges [11, 第 10]章引入了 κ-大性的概念，并证明它蕴含 κ-饱和性和强 κ-齐同性。此外，κ-大性在解释下保持不变，并且对于任意 κ，每个结构都有一个 κ-大的初等扩张。因此，κ-大的模型可作为合适的怪兽模型。除非明确指定环境模型，否则我们取自怪兽模型的元素和

参数集。 κ-大的怪兽模型的子集若其基数小于 κ，则称为小的。我们假设，在怪兽模型中考虑的所有元组和参数集都是小的。

2 远离性

2.1 关于远离性的一般说明

在本节中，我们固定一个具有无限模型的完备 L-理论 T。如果 T 具有深度为 κ 的 ICT- 模式，我们就称 *dp*- 秩 至少为 κ。（由于我们的论证并不需要 ICT-模式的正式定义，故略去。）如果一个理论的 dp-秩大于任意基数，我们就认为其秩为 ∞。虽然存在几种等价的定义，但如果 T 的 dp-秩小于 ∞，或等价地小于 $|T|^+$，则称其具有NIP （非独立性性质）。dp-秩为 1 的理论称为 *dp*-极小理论。关于 NIP 理论的全面论述，请参阅 Simon 的教科书 [24]。

Simon [23]提出了远离性的概念，用以刻画那些“纯粹不稳定”的 NIP 理论。

定义 2.1. 设 I 和 J为线性有序集。我们用 $I+J$表示 I 与 J 的拼接（即，对于任意 $i \in I$ 和 $j \in J$，都有 $i < j$）。若切口 (I, J) 满足 I 没有最大元且 J 没有最小元，则称其为$I+J$ 的戴德金 切口。

定义 2.2. T若满足以下条件，则称其为远离的：对于任意序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$和任意单元素集 b，如果：

- $(I,\ J)$ 是戴德金的；
- $(\overline{a_k})_{k\in I+(c)+J}$ 是不可分辨的；
- $(\overline{a_k})_{k\in I+J}$ 在 b上不可分辨；

那么 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 在 b 上不可分辨。若一个结构的理论是远离的，则称该结构是远离的。

注 2.3. 定义 2.2 是远离性的“外部刻画”，而非其原始定义（参见 Simon [23]）。其他刻画，例如涉及远距不变类型、强诚实定义或泛稳定测度光滑性的刻画，可见 Simon [24]。

备注 2.4：已知远 distal 理论具有 NIP。参见 Gehret 和 Kaplan [9,命题 2.9]，可快速了解证明；或参见 Walker [27, §6]，其中给出了更强的结果。与 NIP 不同，远 distal 结构的约化不一定是远 distal 的。例如，$(\mathbb{R},\ <)$ 是远 distal 的，但其约化到空语言后则不是。已知没有未实现的泛稳定类型的 dp-极小结构是远 distal 的 [23, 推论 2.30]。这类结构包括所有 dp-极小线性有序结构以及p-adic 域。

引理 2.5. 远离性的等价定义可通过以下方式得到：

1. 允许 a_k 为无限元组。 *2.* 将“不可分辨”替换为“在 C上不可分辨”，并将“在b上不可分辨”替换为“在 Cb上不可分辨”，其中 C 是任意参数集。 *3.* 将 b 替换为任意参数集 B。 *4.* 只要求对于任意 $k \in I + J$，都有$\mathrm{tp}(a_k/b) = \mathrm{tp}(a_c/b)$，而不要求$a_k$的不可分辨性在 b上成立。 *5.* 将(I, J) 限制为特定类别的戴德金分割。

证明。 (1) 注意，一般而言，若 $|a_k| = \infty$，则 $(a_k)_{k\in I}$ 不可分辨，当且仅当对于 a_k 的每个有限子元组 $\widehat{a_k}$，$(\widehat{a_k})_{k\in I}$ 不可分辨。

(2) 一般来说，$(a_k)_{k\in I}$ 在 C上不可分辨，当且仅当 $(a_k C)_{k\in I}$ 不可分辨，其中我们将 $a_k C$ 视为一个扩充元组。

(3) 通过将 B 良序为 $\{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$，我们可以对任意 $\alpha \leq \lambda$，用超限归纳法证明 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 在 $\{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$ 上不可分辨。

(4) 考虑一个序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 和一个满足定义 2.2 中条件的单元素集 b。要证明 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 在 b 上不可分辨，只需任取 I 中的 m、$n \geq 0$、$i_1 < \cdots < i_m < i_{m+1}$，以及 J 中的 $j_1 < \cdots < j_n$，并证明:

$$\mathrm{tp}(\overline{a_{i_1}} \ldots \overline{a_{i_m} a_c a_{j_1}} \ldots, \overline{a_{j_n}}/b) = \mathrm{tp}(\overline{a_{i_1}} \ldots \overline{a_{i_m} a_{i_{m+1}} a_{j_1}} \ldots, \overline{a_{j_n}}/b).$$

由于 (I, J) 是戴德金的，我们可以选取无限序列 $i_{m+1} = i'_0 < i'_1 < \ldots$，取自 I，以及 $j'_0 > j'_1 > \ldots$，取自 J，使得 $j_1 > j'_0$。令 $I' = (i'_k)_{k\in\omega}$ 和 $J' = (j'_k)_{k\in\omega^*}$，其中 ω^* 是 ω 的反序型。于是:

- $(\overline{a_k})_{k\in I'+(c)+J'}$ 在 $a_{i_1} \ldots a_{i_m} a_{j_1} \ldots a_{j_n}$上不可分辨;
- $(\overline{a_k})_{k\in I'+J'}$ 在 $a_{i_1} \ldots a_{i_m} a_{j_1} \ldots a_{j_n} b$上不可分辨。

条件 (4) 随即推出:

$$\mathrm{tp}(\overline{a_c}/\overline{a_{i_1}} \ldots \overline{a_{i_m} a_{j_1}} \ldots \overline{a_{j_n}} b) = \mathrm{tp}(\overline{a_{i_{m+1}}}/\overline{a_{i_1}} \ldots \overline{a_{i_m} a_{j_1}} \ldots \overline{a_{j_n}} b),$$

由此得到所需的等式。

(5) 我们证明，如果 T 不是 distal，那么对于任意戴德金切口 (I,J)，都能找到一个非远离性的见证 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }$。假设 T 不是 distal。由 (4)，存在一个戴德金切口 (I, J)、一个序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$、一个单元素集 b，以及一个公式 $\varphi(x, y)$，使得:

- $(\overline{a_k})_{k\in I+(c)+J}$ 是不可分辨的;
- $(\overline{a_k})_{k\in I+J}$ 在 b上是不可分辨的;
- 对所有 $k \in I + J$，$\bullet \models \varphi(a_k, b)$都成立，但 $\bullet \not\models \varphi(\overline{a_c}, b)$。

由紧致性可知，我们可以构造一个序列 $(a'_k)_{k\in\widehat{I+(c)}+\widehat{J}}$，使其满足给定切口 (I, J) 的这些$\widehat{\ }\ \widehat{\ }$相同条件。■

注记 2.6。 根据引理 2.5 (5)，本文中我们始终假设指标集 I 和 J 是足够饱和的无端点稠密线性序。

2.2 远离性的判据

本节中，我们给出一个充分条件，使扩张 $(\mathcal{N}, R)$ 成为 distal 结构，其中 R 是 N 的一元子集。

设定如下：令 $\mathcal{R}$ 为 R 上的一个结构，它在 $\mathcal{N}$ 中是 $\emptyset$-可定义的（也就是说，$\mathcal{R}$ 中的所有函数和关系符号在 $\mathcal{N}$ 中都是 $\emptyset$-可定义的）。令 $\mathcal{F}_N$（分别为 $\mathcal{F}_R$）为定义在 N^n（分别为 R^n）上的函数集，其中某个 n 使得它们在 $\mathcal{N}$（分别为 $\mathcal{R}$）中是 $\emptyset$-可定义的。令 $\lambda: N \to R$ 为一个在 $\mathcal{N}$ 中 $\emptyset$-可定义的函数。我们将每个 $h \in \mathcal{F}_R$ 视为定义在 N^n 上的函数，定义为 $h(x) = h(\lambda(x_1)\ldots,\lambda(x_n))$。令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N \cup \mathcal{F}_R \cup \{\lambda\}$。

由于截断是其远离性时，$\widetilde{\mathcal{N}}$ 我们以下假设 $\widetilde{\mathcal{N}}$ 本身就是一个怪兽模型。

定义 2.7。对于一个序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$，若 (I', J') 是 (I, J) 的一个截断，则称之为：I' 是 I 的非空终段，且 J' 是 J 的非空始段，并记作 $(I', J') \subset_t (I, J)$。$(I', J')$ 之外的一个参数集是 $\{a_k \mid k \in (I \setminus I') \cup (J \setminus J')\}$ 的一个小子集。

定义 2.8. 在上述设定中，$\mathcal{N}$ 满足变量分离，如果对于任意序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 和任意满足定义 2.2 中假设的单元素集 b，以及任意 $\mathcal{F}$ 项 $t(x, y)$，都存在：

- 一个截断 $(I', J') \subset_t (I, J)$,
- 一个 $\mathcal{F}_N$ 项 $u(\bar{z}, \bar{w})$,
- $\mathcal{F}$ 项 $r(x) = (r_1(x)\ldots, r_m(x))$ 和 $s(y) = (s_1(y)\ldots, s_n(y))$ 的元组，其中涉及的参数不属于 (I', J'),

使得对于任意 $k \in I' + (c) + J'$:

$$t(\overline{a_k}, b) = u(\bar{r}(\overline{a_k}), \bar{s}(b)),$$

并且如果 t 具有某个 $h \in \mathcal{F}_R \cup \{\lambda\}$ 的形式 $h(t)$，那么 $\bar{s}(b) \in R$。

我们可以选取一个截断 (I', J')，使其适用于所有项 t，且不会产生新的参数。具体而言：

引理 2.9. 假设 $\mathcal{N}$ 具有变量分离。取一个序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 和一个满足定义 2.2 中假设的单元素集 b。那么，存在一个截断 $(I', J') \subset_t (I, J)$，以及一个位于 (I', J') 之外的参数集 P，具有如下性质：对于任意涉及 P 的 $\mathcal{F}$-项 $t(x, y)$，都存在一个 $\mathcal{F}_N$-项 $u(z, w)$ 和由 $\mathcal{F}$-项构成的元组 $r(x)$、$s(y)$，它们涉及 P，使得对于任意 $k \in I' + (c) + J'$:

$$t(\overline{a_k}, b) = u(\bar{r}(\overline{a_k}), \bar{s}(b)),$$

并且如果 t 具有 $h(t)$ 的形式，其中 $h \in \mathcal{F}_R \cup \{\lambda\}$，那么 $\bar{s}(b) \in R$。

证明。设 $(I_0, J_0) = (I, J)$ 且 $P_0 = \emptyset$。我们构造一个截断序列 $(I_0, J_0) \supset_{\mathrm{t}} (I_1, J_1) \supset_{\mathrm{t}} \dots$ 以及一个参数集序列 $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$，使得 P_m 位于 (I_m, J_m) 之外。假设我们已经得到 (I_m, J_m) 和 P_m。通过对涉及 P_m 的 $\mathcal{F}$-项集合进行良序，并超限多次应用变量分离，我们可以构造一个截断 $(I_{m+1}, J_{m+1}) \subset_{\mathrm{t}} (I_m, J_m)$，且 $P_{m+1} \supseteq P_m$ 位于 (I_{m+1}, J_{m+1}) 之外，使得对于任意涉及P_m的 $\mathcal{F}$-项 $t(x, y)$，$t(a_k, b)$ 都能在 $I_{m+1} + (c) + J_{m+1}$ 上分解，使用某些涉及 P_{m+1}的 $\mathcal{F}$-项 $r(x)$ 和$s(y)$。（注意，由于注 2.6，我们总能确保 I_{m+1} 和 J_{m+1}非空。）我们定义 $I' = \bigcap_{i\in\omega} I_i$、$J' = \bigcap_{i\in\omega} J_i$和 $P = \bigcup_{i\in\omega} P_i$，它们满足所需条件。■

定理 2.10。 $\mathcal{N}$ 是 *distal* 的，当且仅当满足以下条件：

1. $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{R}$都是 *distal*。*2.* 对任意满足 $\langle M\rangle_{\mathcal{F}} = M$ 的 $M \subseteq N$ 以及任意 b、$b' \in R$，若 $tp^{\mathcal{R}}(b/M \cap R) = tp^{\mathcal{R}}(b'/M \cap R)$，则 $tp^{\mathcal{N}}(b/M) = tp^{\mathcal{N}}(b'/M)$。*3.* 对任意满足 $\langle M\rangle_{\mathcal{F}} = M$ 的 $M \subseteq N$ 以及任意 b、$b' \in N$，若 $tp^{\mathcal{N}}(b/M) = tp^{\mathcal{N}}(b'/M)$，且对任意 $x \in \langle bM\rangle_{\mathcal{F}_N}$，$\lambda(x) \in M$，则 $tp^{\mathcal{N}}(b/M) = tp^{\mathcal{N}}(b'/M)$。*4.* $\mathcal{N}$ 允许变量分离。

证明。 取一个序列 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 和一个满足定义 2.2 中假设的单元素集 b。

断言 1。 如果 $b \in R$，则 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 在 b上不可分辨。

断言的证明。 根据引理 2.5 (4)，只需证明对于任意 $k \in I + J$，$\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, a_k) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, a_c)$。设 $M_k = \langle a_k\rangle_{\mathcal{F}}$。由于 $\mathcal{R}$ 在 $\mathcal{N}$中是 $\emptyset$-可定义的：

- $(M_k \cap R)_{k\in I+(c)+J}$ 在 $\mathcal{R}$中不可分辨。
- $(M_k \cap R)_{k\in I+J}$ 在 $\mathcal{R}$中关于 b 不可分辨。

由 $\mathcal{R}$ 的远离性可知，$(M_k \cap R)_{k\in I+(c)+J}$ 在 $\mathcal{R}$ 关于 M_c 不可分辨。对于任意 $k \in I + J$，我们将部分初等映射 $f : M_k \to b'$ 扩展为 $\mathcal{N}$ 的一个自同构，并令 $b' = f^{-1}(b)$。由于 $\mathrm{tp}^{\mathcal{R}}(b, M_k \cap R) = \mathrm{tp}^{\mathcal{R}}(b, M_c \cap R)$，我们有 $\mathrm{tp}^{\mathcal{R}}(b/M_k \cap R) = \mathrm{tp}^{\mathcal{R}}(b'/M_k \cap R)$。条件 (2) 随后推出 $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b/M_k) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b'/M_k)$，这等价于 $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_k) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_c)$。■$_{\mathrm{Claim}}$

断言 2. 对于任意 $b \in N$，$(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 在 b 上不可分辨。

断言的证明。 我们选择一个截断 $(I', J') \subset_{\mathrm{t}} (I, J)$，以及一个位于 (I', J') 之外的参数集 P，使其满足引理 2.9 的推论。对于每个$k \in I' + (c) + J'$，定义 $A_k = \langle a_k P\rangle_{\mathcal{F}}$。此外，令 $B = \langle bP\rangle_{\mathcal{F}} \cap R$。这些定义确保如下性质：

- $(A_k)_{k\in I'+(c)+J'}$ 不可分辨。
- $(A_k)_{k\in I'+J'}$ 在 Bb 上不可分辨。
- $B \subseteq R$。

结合这些条件、断言 1 以及引理 2.5 (1) 和 (3) 的证明，可知 $(A_k)_{k\in I'+(c)+J'}$ 在 B 上不可分辨。$\mathcal{N}$ 的远离性意味着 $(A_k)_{k\in I'+(c)+J'}$ 在 $\mathcal{N}$ 中的 Bb 上不可分辨。

现在，令 $M_k = \langle A_k B\rangle_{\mathcal{F}_N}$。对于任意 $k \in I' + J'$，注意到映射 $f\colon M_k \to_\sim M_c$ 在 $\mathcal{N}$ 中是部分初等的，这是因为 $(A_k)_{k\in I'+(c)+J'}$ 在 B 上的不可区分性。我们还有 $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_k) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_c)$。此外，对于任意 $x \in \langle bM_k\rangle_{\mathcal{F}_N}$ 以及任意 $h \in \mathcal{F}_R \cup \{\lambda\}$，$h(x)$ 可表示为 $u(r(a_k)\ s(b))$，其中 $s(b) \in R$，且存在某个 $\mathcal{F}_N$-项 u 和涉及 P 的 $\mathcal{F}$-项 r 和 s。于是我们有 $r(a_k) \in A_k$ 和 $s(b) \in B$，这意味着 $h(x) \in M_k$。特别地，对于所有 $x \in \langle bM_k\rangle_{\mathcal{F}_N}$，我们有 $\langle M_k\rangle_{\mathcal{F}} = M_k$ 和 $\lambda(x) \in M_k$。因此，应用条件 (3)，可得 $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_k) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b, M_c)$。$\blacksquare_{\text{Claim}}$

$\blacksquare$

3 $(\mathbb{Z}; <, +)$ 带有一个近乎稀疏序列

本章致力于研究结构（$\mathbb{Z}; <, +, R$），该结构由整数的有序加法群扩充一个“几乎稀疏”序列R而成。Lambotte、Point、Semënov 和 Tong 等多位作者对这一结构进行了广泛研究 [21, 20, 14, 13, 26]。

继 Semënov 的奠基性工作之后，Point [20] 在额外假设 R 具有“同余周期性”的情况下，证明了该结构的量词消去。随后，Lambotte 和 Point[14] 在相同假设下证明了该结构具有 NIP，而 Lambotte [13]后来将这一结果推广到不要求同余周期性的普遍情形。最近，Tong[26] 在假设具有同余周期性的条件下，证明了（$\mathbb{Z}; <, +, R$）的远离性。

本章建立了若干结果，使我们能够应用定理 2.10，在不假设同余周期性的情况下证明（$\mathbb{Z}; <, +, R$）的远离性，从而强化了先前的发现，并回答了 Tong 提出的问题（同上，问题 1.4）。

本章的安排如下。在第 3.1 节考察几乎稀疏序列的基本性质之后，我们在第 3.2 节进行来回论证，以建立对应于定理 2.10 条件 (2) 和 (3) 的两个命题。第 3.2 节的方法受到 Point 关于量词消去的工作的启发 [20, §3]。我们的命题可以看作她的结果的较弱形式，不要求序列具有同余周期性。第 3.3 节专门讨论变量分离。尽管 Lambotte 和 Point 的工作中已有类似论证 [14, 断言 2.33]，我们给出一个专为证明远离性而设计的版本。最后，在第 3.4 节，我们得出结论：只要 R 是几乎稀疏的，$(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 就是 distal。

我们对 $(\mathbb{Z};<,\ +,\ R)$ 的分析对于扩张 p-adic 域 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 也很重要，我们稍后将讨论这一点。事实上，$(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 解释了结构 $(p^{\mathbb{Z}};<_v,\ \cdot,\ p^R)$，它与 $(\mathbb{Z};<,\ +,\ R)$ 同构。

3.1 几乎稀疏序列的基本性质

我们将探究远离性论证所需的几乎稀疏序列的关键性质。设 $R=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增的整数序列。我们定义后继函数 $S(r_n)=r_{n+1}$ 及其逆函数 $S^{-1}(r_{n+1})=r_n$（其中 $S^{-1}(r_0)=r_0$）。

定义 3.1. R 上的一个算子 是形如 $A(x)=\sum_{i=-n}^{m} z_i S^i(x)$ 的项，其中 $z_i\in\mathbb{Z}$。对于算子 $A(x)$ 和 $B(x)$，若对除有限多个 $a\in R$ 之外的所有情况都有 $A(a)>B(a)$，则记作 $A>_{ae}B$。关系 $A<_{ae}B$ 和 $A=_{ae}B$ 的定义类似。

定义 3.2. $R=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 若满足以下条件，则称为几乎稀疏：

1. 对任意算子 $A(x)$ 和 $B(x)$，$A>_{ae}B$、$A<_{ae}B$ 或 $A=_{ae}B$ 中至少有一个成立。2. 对满足 $A>_{ae}B$ 的任意算子 $A(x)$ 和 $B(x)$，存在一个整数 $\Delta\geq 0$，使得 $A(S^{\Delta}(x))>_{ae}B(S^{\Delta}(x))+x$。

注记 3.3. 根据定义可知，对于任意算子 $A(x)$ 和 $B(x)$ 以及任意 $z\in\mathbb{Z}$，$A(x)>_{ae}B(x)\Leftrightarrow A(S^z(x))>_{ae}B(S^z(x))$；对于 $<_{ae}$ and $=_{ae}$，也有类似的等价关系。

例 3.4. 容易看出，序列 $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎稀疏。其他例子包括斐波那契数列。相反，$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(2^n+n)_{n\in\mathbb{N}}$ 并非几乎稀疏。详情见 [20, §2]。

几乎稀疏性还可以用另一种方式刻画。Point 和 Lambotte [14] 引入了正则序列的概念。若存在某个实数 $\theta>1$ 或 $\theta=\infty$，使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=\theta$，并且若 θ 是一个在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上最小多项式为 $\sum_{i=0}^{d}a_i x^i$ 的代数数，则 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为几乎正则。$\sum_{i=0}^{d}a_i S^i(x)=_{ae}0$。[14, 引理 2.26] 和 [26, 定理 2.27] 已证明，几乎稀疏性与几乎正则性等价。

在本文余下部分，我们均假设 R 是几乎稀疏的。

引理 3.5。 若算子 $A(x)$ 满足 $A>_{ae}0$，则存在 $m\in\mathbb{Z}$，使得 $A=_{ae}S^m(x)$ 或 $S^m(x)<_{ae}A<_{ae}<S^{m+1}(x)$成立。

证明。

断言 1。 对每个 $n\geq 1$，存在 $k\geq 1$，使得 $nx<_{ae}S^k(x)$。

断言的证明。由于 $S(x)>_{ae}x$，根据几乎稀疏性，存在 $\Delta\geq 0$使得 $S^{\Delta+1}(x)>_{ae}S^{\Delta}(x)+x$。因此，$2x\leq x+S^{\Delta}(x)<_{ae}S^{\Delta+1}(x)$。迭代可得，$4x<_{ae}2S^{\Delta+1}(x)<_{ae}S^{2\Delta+2}(x)$，$8x<_{ae}2S^{2\Delta+2}(x)<_{ae}S^{3\Delta+3}(x)$，依此类推，从而证明该断言。■$_{\text{Claim}}$

现在，我们考虑算子 $A(x) = \sum_{i=-n}^{m} z_i S^i(x)$。根据断言 1，存在 $k \geq 1$ 使得对所有 $-n \leq i \leq m$， $z_i S^i(x) <_{ae} S^k(x)$。我们还可以找到 $l \geq 1$ 使得 $(m+n+1)S^k(x) <_{ae} S^l(x)$。由此可得 $A <_{ae} S^l(x)$。反过来，由于 $A >_{ae} 0$，存在 $\Delta \geq 0$ 使得 $A(S^{\Delta}(x)) >_{ae} x$，或者等价地， $A >_{ae} S^{-\Delta}(x)$。既已证明 $S^{-\Delta}(x) <_{ae} A <_{ae} S^l(x)$，取满足$S^m(x) \leq_{ae} A$的最大整数，即可得到所需的 m 。■

我们考虑结构 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$，其中 R被视为 $\mathbb{Z}$的子集$\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。

定义 3.6. 我们在 $\mathbb{Z}$ 上定义 λ、 S和 S^{-1} 这几个函数，它们在 $\mathbb{Z}$ 上的定义如下:

- $\lambda(x) = \max\{r \in R \mid r \leq x\}$ ，如果 $x \geq r_0$ ；否则， $\lambda(x) = r_0$ 。
- $S(x) = S(\lambda(x))$，且 $S^{-1}(x) = S^{-1}(\lambda(x))$。

注意，$\mathrm{Im}(\lambda) = R$，并且这些函数在 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 中是 $\emptyset$-可定义的。为方便起见，我们将 $S^0(x)$ 视为 $\lambda(x)$，因此对于任意算子 A 和 $x \in \mathbb{Z}$，都有 $A(x) = A(\lambda(x))$。

设 $\mathcal{U}$是 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 的一个怪兽模型。按照通常记法，我们用 $R^{\mathcal{U}}$ 表示符号 R 在 $\mathcal{U}$ 中的解释。我们称 $\mathbb{Z} \subseteq U$为 $\mathcal{U}$的标准部分。如果 $x > 0$ 不属于标准部分，那么对于任意算子 A 和 B，都有 $A >_{ae} B \iff A(x) > B(x)$； $<_{ae}$ 和 $=_{ae}$也具有类似性质。

定义 3.7。 对于正元素 a， $b \in U$，我们定义以下关系:

- $a \approx b$如果（a， $b \in \mathbb{Z}$）或（a， $b \notin \mathbb{Z}$并且存在一个自然数 m，使得 $S^{-m}(a) < b < S^m(a)$ 。）
- $a \ll b$ 如果 $a < b$ 且 $a \not\approx b$，这等价于对所有 $m \in \mathbb{N}$， $S^m(a) < S^{-m}(b)$。

显然， $\approx$ 是一个等价关系。

引理 3.8. *1.* 对于任意正元素 $a \in U \backslash \mathbb{Z}$ 和任意算子 $A >_{ae} 0$,$a \approx A(a)$。

2. 对于任意满足 $a \ll b$ 的正元素 a、 $b \in U$ ，以及任意算子 $A <_{ae} C <_{ae} B$，我们有 $A(b) < C(b) \pm a < B(b)$。特别地， $b \pm a \approx b$。

证明。 第一个断言直接由引理 3.5 得出。对于第二个断言，注意到 $b \notin \mathbb{Z}$。由于 $B - C >_{ae} 0$，根据几乎稀疏性，存在 $\Delta \geq 0$ ，使得 $B - C >_{ae} S^{-\Delta}(x)$。由此可得 $B(b) - C(b) > S^{-\Delta}(b) > a$。类似的论证表明 $C(b) - A(b) > a$。■

引理 3.9。 设 $M \subseteq U$ 是一个包含 $\mathbb{Z}$ 的子群，并且在 λ、 S 和 S^{-1} 下封闭。对于 $a \in M$、 $b \in R^{\mathcal{U}} \setminus M$ 以及一个算子 A，以下结论成立:

1. $|a| \ll b$ 或 $b \ll |a|$。

2. $|A(b) + a| \approx b$ 或 $|A(b) + a| \approx |a|$。 *3.* $A(b) + a > 0$ 当且仅当（$|a| \ll b$ 且 $A >_{ae} 0$）、（$b \ll a$）或（$A =_{ae} 0$且 $a > 0$）。 *4.* 集合 $M = \{A(b) + a \mid A$ 是一个算子，$a \in M\}$ 是一个在 λ、S 和 S^{-1}下封闭的子群。*5.* 如果 $A(b) + a \in R^{\mathcal{U}}$，那么它要么属于 $M \cap R^{\mathcal{U}}$，要么等于某个$z \in \mathbb{Z}$对应的 $S^z(b)$。

证明。如果 $|a| \approx b$，那么 b 将是某个 $z \in \mathbb{Z}$ 的 $S^z(|a|) \in M$，这就产生了矛盾；因此 (1) 成立。若 $A \neq_{ae} 0$，则由引理 3.8 可得断言 (2)；否则显然成立。断言 (3) 是 (1) 和引理 3.8 的直接推论。对于 (4)，M 显然是一个子群。若 $A(b) + a \leq 0$，则 $\lambda(A(b) + a) \in \mathbb{Z} \subseteq M$。否则，通过应用 (2) 可以看出，$\lambda(A(b) + a)$ 要么属于 M，要么等于某个 $z \in \mathbb{Z}$ 的 $S^z(b)$。由此可得，对于 λ 和 (5)，(4) 成立。由于 $S = S \circ \lambda$ 和 $S^{-1} = S^{-1} \circ \lambda$，对于 S 和 S^{-1}，断言 (4) 也成立。■

3.2 回返构造

整数的有序加法群 $(\mathbb{Z}; <, +)$ 的量词消去是一个经典结果。

定理 3.10。结构 $(\mathbb{Z}; <, +)$ 在语言 $\{0, 1, +, -, <, (\equiv_n)_{n\geq 2}\}$ 中具有量词消去，其中 $\equiv_n$ 表示模 n 的同余关系。

例如，可以在 Marker 的教科书 [18, 第 3.1] 节中找到证明。我们在引理 3.16 的证明中利用这一结果。我们的目标是为结构 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 建立一个来回系统，以识别部分初等嵌入。

定义 3.11。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 L-结构。$\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 之间的来回系统是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的部分 L-嵌入的非空集合 $\mathcal{I}$，满足以下条件：

1. 向前：对于任意 $a \in M$ 和 $f \in \mathcal{I}$，存在扩展 f 且将 a 包含在其定义域中的 $g \in \mathcal{I}$。2. 向后：对于任意 $b \in N$ 和 $f \in \mathcal{I}$，存在扩展 f 且将 b 包含在其像中的 $g \in \mathcal{I}$。

定理 3.12。如果 $\mathcal{I}$ 是一个来回系统，那么每个 $f \in \mathcal{I}$ 都是一个部分 L-初等嵌入。

定理 3.12 的证明通过对 L-公式的复杂度进行直接归纳来完成，具体证明从略。在本文中，我们始终考虑从一个怪兽模型到其自身的回返构造，并假设系统中的每个映射都具有小定义域（见注记 1.1）。

记号 3.13。对于 $n \geq 2$ 和 $0 \leq i < n$，令 $\cdot \equiv_n i$ 表示 R 上的一元关系，该关系确定满足 $x \equiv i$ （模 n）的元素 $x \in R$。

在我们的怪兽模型 $\mathcal{U}$ 中，$(\mathbb{Z}; <, +, R)$，$(R^{\mathcal{U}}; <, (\cdot \equiv_n i)_{n,\, i})$——由带有诱导序和剩余类谓词的 $R^{\mathcal{U}}$ 组成——在我们的来回系统中起着关键作用。

定义 3.14。令 $L_R = \{0, 1, <, +, -, R, \lambda, S, S^{-1}\}$。我们将 $\mathcal{I}$ 定义为满足以下条件的部分函数 $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 集合：

1. $\mathrm{Dom}(f)$ 是一个 L_R-子结构。
2. f 是一个部分 L_R-嵌入。
3. f 是 $(U; <, +)$ 的部分初等嵌入。
4. $f|_{\mathrm{Dom}(f) \cap R^{\mathcal{U}}}$ 是 $(R^{\mathcal{U}}; <, (\cdot \equiv_n i)_{n,\, i})$ 的部分初等嵌入。

此外，我们考虑以下条件：

2'. 对任意 $a \in \mathrm{Dom}(f)$，$a \in R^{\mathcal{U}} \Rightarrow f(a) \in R^{\mathcal{U}}$。

引理 3.15. 设部分函数 $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 满足定义 *3.14* 的条件 *(1)*、*(2')*、*(3)* 和 *(4)*。那么 f 是一个部分 L_R 嵌入，因此 $f \in \mathcal{I}$。

证明。我们必须证明，对于任意 $a \in \mathrm{Dom}(f)$，$f(a) \in R^{\mathcal{U}} \Rightarrow a \in R^{\mathcal{U}}$，并且 f 与 λ、S 和 S^{-1} 相交换。取满足 $a \geq r_0$ 的 $a \in \mathrm{Dom}(f)$。根据 (1)，$\lambda(a)$、$S(a) \in \mathrm{Dom}(f)$，并且根据 (3)，$f(\lambda(a)) \leq f(a) < f(S(a))$。在结构 $R^{\mathcal{U}}$ 中，$S(a)$ 是 $\lambda(a)$ 的后继元，这一事实可以用一个句子表示。根据 (4)，在 $R^{\mathcal{U}}$ 中，$f(S(a))$ 必定是 $f(\lambda(a))$ 的后继元，这意味着 $\lambda(f(a)) = f(\lambda(a))$，且 $S(f(a)) = f(S(a))$。同理可对 S^{-1} 进行论证，得到 $S^{-1}(f(a)) = f(S^{-1}(a))$。最后，若 $f(a) \in R^{\mathcal{U}}$，则 $f(a) = \lambda(f(a)) = f(\lambda(a))$，这意味着 $a = \lambda(a) \in R^{\mathcal{U}}$。■

我们的目标是证明，$\mathcal{I}$ 在语言 $\{<, +, R\}$ 中构成一个来回系统。由于当 $f \in \mathcal{I}$ 时有 $f^{-1} \in \mathcal{I}$，故只需证明“前向”方向即可。我们首先考虑所添加的元素属于 $R^{\mathcal{U}}$ 的情形。

引理 3.16。设 $f \in \mathcal{I}$，并将 $\mathrm{Dom}(f)$ 记为 M，取 $b \in R^{\mathcal{U}} \setminus M$。则存在 $c \in R^{\mathcal{U}}$ 使得：

$$\mathrm{tp}^{(R^{\mathcal{U}}; <, (\cdot \equiv_n i))}(b, M \cap R^{\mathcal{U}}) = \mathrm{tp}^{(R^{\mathcal{U}}; <, (\cdot \equiv_n i))}(c, f(M \cap R^{\mathcal{U}})).$$

~ ~此外，对于任意这样的 c，都存在 f 的一个扩张 $f \in \mathcal{I}$，使得 $f(b) = c$。

证明。由于 $\mathcal{U}$ 是一个怪兽模型，结构 $(R^{\mathcal{U}}; <, (\cdot \equiv_n i)_{n,\, i})$ 具有充分的饱和性。这一饱和性结合定义 3.14（4），使我们能够找到这样的元素 $c \in R^{\mathcal{U}}$。现在我们证明，f 可以按所需方式扩张。

断言 1. 对于任意 $a \in M$, $a \leqslant b \iff f(a) \leqslant c$。

断言的证明. 不妨设 $a > \mathbb{Z}$，因为 $b, c > \mathbb{Z}$。于是 $\lambda(a) \leq a < S(a)$。由引理 3.9 (1) 可知，$a \ll b$ 或者 $b \ll a$。若 $b \ll a$，则 $b < \lambda(a)$，并且根据我们对 c 的选择，有 $c < f(\lambda(a)) \leq f(a)$。反过来，若 $a \ll b$，则$S(a) < b$，这意味着 $f(a) < f(S(a)) < c$。$\blacksquare_{\text{Claim}}$

对于任意算子 $A(x)$ 和任意 $a \in M$，断言 1 和引理 3.9 (3) 保证 $A(b) + a \gtreqless 0 \Leftrightarrow A(c) + f(a) \gtreqless 0$。此外，根据 c 的选取，对于所有 $z \in \mathbb{Z}$ 和 $n \geq 2$，我们有$S^z(b) \equiv_n S^z(c)$；而根据定义 3.14 (3)，$a \equiv_n f(a)$ 成立。因此，对于所有 $n \geq 2$，$A(b) + a \equiv_n A(c) + f(a)$。

我们定义 $\widetilde{M} = \{A(b) + a \mid A$ 是一个算子，并将 f 延拓到$\widetilde{M}$ 上的函数 $\widetilde{f}\colon \widetilde{M} \to \mathcal{U}$，定义为 $\widetilde{f}(A(b) + a) = A(c) + f(a)$。以上观察保证$\widetilde{f}$，$f$是一个良定义的 $\{0, 1, +, -, <, (\equiv_n)_{n\geq 2}\}$-嵌入。

断言 2。$\widetilde{f}$ 属于 $\mathcal{I}$。

断言的证明。定义 3.14 (1) 由引理 3.9 (4) 得到满足。由于根据定理 3.10，f 是（U；$<$，$+$）的部分初等嵌入，定义 3.14 (3) 成立。根据引理 3.9 (5)，$\widetilde{M} \cap R^{\mathcal{U}} = (M \cap R^{\mathcal{U}}) \cup \{S^z(b) \mid z \in \mathbb{Z}\}$，从而满足定义 3.14 (2')。由于这一交集包含于（$R^{\mathcal{U}}$；$<$，$(\cdot \equiv_n i)_{n,\, i}$）中 $\{b\} \cup (M \cap R^{\mathcal{U}})$ 的可定义闭包内，定义 3.14 (4) 由$\widetilde{f}|_{\{b\}\cup(M\cap R^{\mathcal{U}})}$ 在此结构中的初等性推出，这等价于关于 b 和 c的类型的假设。$\blacksquare_{\text{Claim}}$

$\blacksquare$

注 3.17。注意，在引理 3.16 中，我们构造了 $f \in \mathcal{I}$，使得 $\mathrm{Dom}(\widetilde{f}) = \{A(b) + a \mid A$是一个算子，且 $a \in \mathrm{Dom}(f)\}$。

接下来，我们证明任意元素都可以加入定义域。

引理 3.18。对于任意 $f \in \mathcal{I}$ 和任意 $b \in \mathcal{U}$，存在 f的一个扩张，使得对于任意 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-\}}$，都有 $\lambda(x) \in \mathrm{Dom}(\widetilde{f})$。

证明。设 $T = \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-,\lambda,S,S^{-1}\}}$。通过超限地应用引理 3.16 $\widetilde{|T|}$次，我们可以将 f扩张为 $\widetilde{f} \in \mathcal{I}$，使得 $\mathrm{Dom}(\widetilde{f})$ 包含 $T \cap R^{\mathcal{U}}$。根据注 3.17，我们有 $\mathrm{Dom}(\widetilde{f}) \subseteq T$。由此可得 $\langle b, \mathrm{Dom}(\widetilde{f})\rangle_{\{+,-\}} \subseteq T$，因此对于任意 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(\widetilde{f})\rangle_{\{+,-\}}$，都有 $\lambda(x) \in T \cap R^{\mathcal{U}} \subseteq \mathrm{Dom}(\widetilde{f})$。$\blacksquare$

引理 3.19。假设 $b \in \mathcal{U}$ 和 $f \in \mathcal{I}$ 满足：对于任意 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-\}}$，都有 $\lambda(x) \in \mathrm{Dom}(f)$。那么存在 $c \in \mathcal{U}$ 使得：

$$\mathrm{tp}^{(U;<,+)}(b, \mathrm{Dom}(f)) = \mathrm{tp}^{(U;<,+)}(c, \mathrm{Im}(f)).$$

此外，对于任意这样的 c，存在 f 的一个扩张 $\widetilde{f} \in \mathcal{I}$，使得 $\widetilde{f}(b) = c$。

证明。根据定义 3.14 (3) 和 $\mathcal{U}$ 的饱和性，这样的 $c \in \mathcal{U}$ 存在。我们将 f 扩展为一个部分 $\{<, +\}$-初等嵌入 $\widetilde{f}\colon \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-\}} \to \mathcal{U}$，方法显而易见。我们证明 $\widetilde{f} \in \mathcal{I}$。定义 3.14 (3) 显然成立。根据我们的假设，$\langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-\}}$ 对 λ, S, S^{-1} 封闭，因此定义 3.14 (1)

成立。此外，$\langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-\}} \cap R^{\mathcal{U}} = \mathrm{Dom}(f) \cap R^{\mathcal{U}}$，这保证了定义 3.14 (2') 和 (4)。■

因此，我们有：

定理 3.20。 $\mathcal{I}$构成语言 $\{<, +, R\}$中的一个来回系统。因此，每个 $f \in \mathcal{I}$都是一个部分 $\{<, +, R\}$-初等嵌入。

3.3 变量分离

设 $(a_k)_{k\in I+(c)+J}$ 是一个序列， b 是一个满足定义 2.2 中假设的单元素集。如注 2.6 所述，我们假设 I 和 J 是足够饱和且无端点的稠密线性序。我们沿用定义 2.7 中的术语。在本节中，为简洁起见，我们将 $\{+, -, \lambda, S, S^{-1}\}$-项称为项。

引理 3.21。 设 $t(x, y)$ 是一个项。那么存在一个截断 $(I', J') \subset_{\mathrm{t}} (I, J)$ 以及项 $u(x)$ 和 $r(y)$，它们涉及的参数位于 (I', J')之外，使得：

$$t(\overline{a_k}, b) = u(\overline{a_k}) + r(b)$$

对于所有 $k \in I' + (c) + J'$。特别地，如果 t 的形式为 $\lambda(t')$、 $S(t')$ 或 $S^{-1}(t')$，那么要么 u，要么 r 为 0。

证明。 首先注意，对于任意项 $u(x)$ 和 $r(y)$，当 k 在 $I + (c) + J$中变化时，$u(a_k) + r(b)$ 的符号保持不变。事实上，关于不可区分性的假设蕴含了 $(u(a_k))_{k\in I+(c)+J}$ 的单调性，以及 $(u(a_k) + r(b))_{k\in I+J}$符号的恒定性。我们将反复隐式地使用这一事实。

我们按 t的复杂度进行归纳。非平凡的情形是 t 的形式为 $\lambda(t')$（ S 和 S^{-1} 的情形可由 $S = S \circ \lambda$ 和$S^{-1} = S^{-1} \circ \lambda$推出）。根据归纳假设，我们可以写成 $t'(a_k, b) = u(a_k) + r(b)$。我们可以假设，对于所有 $k \in I + (c) + J$，都有 $u(a_k) + r(b) > 0$，因为否则$\lambda(u(a_k) + r(b))$ 就恒等于某个整数。

情形 1. $(u(a_k))_{k\in I+(c)+J}$ 是常数。

通过选取 $i_0 \in I$ 并将 I 缩减为终段 I'，使得 $i_0 \notin I'$，我们可以将 $u(a_k) + r(b)$记作 $r'(b)$，其中 $r'(y) = u(a_{i_0}) + r(y)$ 是一个涉及 (I', J) 之外参数的项。

情形 2. $(u(a_k))_{k\in I+(c)+J}$ 严格单调。

假设该序列严格递增（递减情形可通过缩减 J 对称地处理）。我们选取某个 $i_0 \in I$，并将 I 缩减至 I'，使得 $i_0 \notin I'$。于是：

$$u(\overline{a_k}) + r(b) = (u(\overline{a_k}) - u(\overline{a_{i_0}})) + (u(\overline{a_{i_0}}) + r(b)).$$

这使我们能够重新定义 u 和 r，使得 $u(\overline{a_k})$ 和 $r(b)$ 均为正。

若对于任意 k 和 m， $u(a_k) > S^m(r(b))$，则由引理 3.8 (2)，可得$\lambda(u(a_k)) < u(\overline{a_k}) + r(b) < S^2(u(a_k))$。由于 $S(u(a_k)) - (u(a_k) + r(b))$的符号是常数， $\lambda(u(a_k) + r(b))$等于 $\lambda(u(a_k))$或 $S(u(a_k))$，且与k无关。

若存在 m，使得对于所有 k，都有 $u(a_k) \leq S^m(r(b))$，则由引理 3.8 (1)，$u(a_k) + r(b) \approx r(b)$。这意味着存在 $z \in \mathbb{Z}$，使得对于所有 k，都有 $S^z(r(b)) \leq u(a_k) + r(b) < S^{z+1}(r(b))$。因此，$\lambda(u(a_k) + r(b)) = S^z(r(b))$。

■

3.4 远离性

我们在第 3.2 节中为（$\mathbb{Z}$；$<$，$+$，R）建立了一个来回系统。直观而言，这表明该扩张的模型论行为由其组成部分决定：（$\mathbb{Z}$；$<$，$+$）和（R；$<$，$(\cdot \equiv_n i)_{n,\, i}$）。已知这些结构是 dp-极小的，因此具有 distal 性质。

定理 3.22（Aschenbrenner、Dolich、Haskell、Macpherson 和 Starchenko[2]）。（$\mathbb{Z}$；$<$，$+$）是 ***dp***- 极小的。

定理 3.23（Simon [22, 命题 4 的一个特例。2]）。设 M 是一个线性序，且 $(C_i)_{i<\alpha}$ 是 M 的一族一元子集。那么，$(M; <, (C_i)_{i<\alpha})$ 是 ***dp***-极小的。

Simon 的教科书 [24,命题 A.2] 中给出了定理 3.23 的简洁证明。这些结构的 dp-极小性意味着它们具有远离性（参见注 2.4）。

定理 3.24. $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 是 ***distal*** 的。

证明。我们将定理 2.10 应用于 $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}; <, +)$、$\mathcal{R} = (R; <, (\cdot \equiv_n i)_{n,i})$、$\mathcal{F}_N = \{+, -\}$ 和 $\mathcal{F}_R = \{S, S^{-1}\}$。定理的条件 (2) 由引理 3.16 满足，条件 (3) 由引理 3.19 满足，而变量分离由引理 3.21 满足。由于 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{R}$ 都是 distal 的，$(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 是 distal 的。■

由于 distal 结构具有 NIP，$(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 的 dp-秩至多为 $\leq \aleph_0$。事实上，可以构造一个深度为 $\aleph_0$ 的 ICT-模式，表明 dp-秩恰为 $\aleph_0$。证明留给读者。也可以从 Dolich 和 Goodrick [7,推论 2.20] 推导出这一事实。

4 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}})$ 以及 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$

本章中，我们证明结构 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}})$ 和 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 是 distal 的，其中 R 是一个几乎稀疏序列。

4.1 事实与简史

回想一下，p-***adic*** 域 $\mathbb{Q}_p$ 是由以下形式的形式洛朗级数组成的域：

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}$$

其运算定义为典范加法和带进位乘法。 p-adic 赋值 v_p： $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ 定义为 $v_p\left(\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i\right) = m$，其中 a_m 是第一个非零系数。 $\mathbb{Q}_p$ 是一个亨泽尔赋值域，这意味着 p-adic 赋值在域语言中是 $\emptyset$-可定义的。因此，我们可以像赋值属于该语言一样使用它。关于 p-adic 域的模型论的详细介绍，请参阅 Marker 的讲义 [19]。

记号 4.1. 对于 $n \geq 2$，令 P_n 表示 $\mathbb{Q}_p^\times$ 中所有 n 次幂的集合： $P_n = \left\{x \in \mathbb{Q}_p^\times \mid \exists y \in \mathbb{Q}_p^\times (x = y^n)\right\}$。注意， P_n 是 $\mathbb{Q}_p^\times$ 的子群。

以下事实是亨泽尔性的一个标准推论（参见 Marker（同上，第 2 章））。

事实 4.2. 对于 $n \geq 2$，商群 $\mathbb{Q}_p^\times / P_n$ 是有限的，且每个陪集都由一个正整数 k 表示。此外，对于任意 n，存在一个正整数 m，使得若 $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{Q}_p$ 满足 $v_p(\varepsilon) \geq v_p(x) + m$，则 $(x+\varepsilon)/P^n = x/P^n$。

稍后我们将使用一般赋值域的一个众所周知的性质：

引理 4.3. 设 (L, v) 是一个赋值域，且 $K \subseteq L$ 是一个子域。若 $a \in L$ 在 K 上代数，则存在 $n \geq 1$ 和 $b \in K$，使得 $nv(a) = v(b)$。

证明。 取满足 $f(a) = 0$ 的 $f(X) = \sum_i c_i X^i \neq 0$，其中 $c_i \in K$。如果只有一个指标 i 满足 $v(c_i a^i) = \min\left\{v(c_k a^k)\right\}_k$，那么 $v(f(a)) = v(c_i a^i)$，这与 $f(a) = 0$ 矛盾。因此，必定存在 $i < j$ 使得 $v(c_i a^i) = v(c_j a^j)$。因此，$(j-i)v(a) = v\left(\frac{c_i}{c_j}\right)$。■

现在我们考虑集合 $p^{\mathbb{Z}} = \{p^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$。Macintyre [15] 证明了 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot)$ 在语言 $\{0, 1, +, -, \cdot, (P_n)_{n\geq 2}\}$ 中具有量词消去性质。Mariaule [16] 后来通过引入投影映射，证明了 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 具有量词消去性质。

定义 4.4. 我们定义映射 $\pi: \mathbb{Q}_p \to p^{\mathbb{Z}}$ 如下：

$$\pi(a) = \begin{cases} p^{v_p(a)} & (a \neq 0) \\ 1 & (a = 0) \end{cases}.$$

注意， π 是 $\mathbb{Q}_p^\times$ 上的乘法自同态。此外，对于任意 $a \in \mathbb{Q}_p^\times$，$\pi(a)$ 是唯一满足 $\pi(a) \in p^{\mathbb{Z}}$ 且 $v_p(\pi(a)) = v_p(a)$ 的元素。因此，π 在 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 中是 $\emptyset$-可定义的。反过来， $p^{\mathbb{Z}}$ 是利用 π 定义为集合 $\{a \in \mathbb{Q}_p \mid \pi(a) = a\}$。因此，就可定义集而言，$(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 与 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, \pi)$ 一致。

定理 4.5 (Mariaule [16])。 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 在语言 $\{0, 1, +, -, \cdot, (P_n)_{n\geq 2}, \pi\}$ 中满足量词消去。

除了量词消去之外，这些结构还表现出稳定性理论意义上的驯良性：

定理 4.6（Dolich、Goodrick 和 Lippel [8]）。（$\mathbb{Q}_p$；$+$，$\cdot$）是 *dp*-极小的。

定理 4.7 (Mariaule [17])。($\mathbb{Q}_p$；$+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$) 具有 *NIP*。

事实上，Mariaule 给出了一个更强的结果：在 $\mathbb{Z}_p$ 上加入所有解析函数的扩张同样具有 NIP。

对于近乎稀疏序列 R，令 $p^R = \{p^r \mid r \in R\}$。本章的主要结果是 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$) 和 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，p^R) 的远离性。前者不仅加强了 Mariaule的结果，还提供了一个 p-进类比，对应于 Hieronymi 和 Nell [10] 所证明的 ($\mathbb{R}$;$+$，$\cdot$，$2^{\mathbb{Z}}$) 的远离性。此前人们甚至不知道 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，p^R) 是否具有 NIP；正如我们将看到的，它给出了一个例子：该例是 p-进域的一个 NIP 扩张，但其庞加莱级数不具有有理性。

本章余下部分的组织如下。在第 4.2 节中，我们针对定理 2.10 的条件 (2) 和 (3)，为 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$) 建立两个引理。第 4.3 节通过来回论证，专门验证 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，p^R) 满足这些条件。第 4.4 节建立了 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$) 和 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，p^R) 的变量分离性。这些结果最终在第 4.5 节中导出远离性的证明，随后讨论 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，p^R) 的庞加莱级数的非有理性。

4.2 ($\mathbb{Q}_p$（$+$；$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$，）的初等行为

基于 Mariaule 的量词消去结果，我们证明 ($\mathbb{Q}_p$; $+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$) 满足定理 2.10 的条件 (2) 和 (3)。

记号 4.8。 $a <_v b$ 当且仅当 $v_p(a) < v_p(b)$ 对于 a，$b \in \mathbb{Q}_p$。

注意到，关系 $<_v$ 在（$\mathbb{Q}_p$；$+$，$\cdot$）中是 $\emptyset$-可定义的，因为 p-进赋值是 $\emptyset$-可定义的。存在一个同构（$\mathbb{Z}$；$<$，$+$）$\cong$（$p^{\mathbb{Z}}$；$<_v$，$\cdot$），由 $z \mapsto p^z$ 给出。令 $\mathcal{U}$ 为（$\mathbb{Q}_p$；$+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$）的怪兽模型。

定义 4.9。 **</style}令 为 的一个子域。对于 上的多项式 (, . . . , X_{d-1}) 以及** $b_0, \ldots, b_{d-1} \in U$，如果：我们称 $a_I b_0^{m_0} \ldots b_{d-1}^{m_{d-1}}$ 是 $P(b_0, \ldots, b_{d-1})$ 的主导项：

$$v_p(a_I b_0^{m_0} \ldots b_{d-1}^{m_{d-1}}) < v_p(a_{I'} b_0^{n_0} \ldots b_{d-1}^{n_{d-1}}) - l$$

对于任何其他项 $a_{I'} b_0^{n_0} \ldots b_{d-1}^{n_{d-1}}$ 以及任何正整数 l。

引理 4.10。 在上述设定下，我们有：

- $v_p(P(b_0, \ldots, b_{d-1})) = v_p(a_I b_0^{m_0} \ldots b_{d-1}^{m_{d-1}})$.
- $\pi(P(b_0, \ldots, b_{d-1})) = \pi(a_I b_0^{m_0} \ldots b_{d-1}^{m_{d-1}})$.
- $P(b_0, \ldots, b_{d_1})/P_n = a_I b_0^{m_0} \ldots b_{d-1}^{m_{d-1}}/P_n$ 对于任意 $n \geq 2$。

证明。 第一个断言很容易。第二个断言由以下事实得出：$v_p(x) = v_p(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$。第三个断言是事实 4.2 的推论。■

下一个引理是 [17, 定理 6.4] 的直接推论。不过，为方便读者，我们仍给出证明。这也展示了一种处理多项式的方法：利用它们的主导项；这一方法稍后还会再次用到。

引理 4.11. 设 $K \subseteq U$ 是一个子域，使得 $\pi(K) \subseteq K$，并设 $b, c \in (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$。若

$$\mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot)}(b/K \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}) = \mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot)}(c/K \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}), \tag{*}$$

则 $\mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(b/K) = \mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(c/K)$。

证明。 不妨设 $b, c \notin K$。

断言 1. 不妨设 K 在 U 中代数闭，因此 b 和 c 在 K 上超越。

断言的证明。 设 K^{ac} 是 K 在 U 中的代数闭包。对于任意 $s \in K^{ac}$，根据引理 4.3，存在 $t \in K$ 和 $n \geq 1$，使得 $nv_p(s) = v_p(t)$。由于 π 是一个乘法同态，且 $v_p(x) = v_p(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$，因此可得 $\pi(s)^n = \pi(t) \in K$。于是，K^{ac} 对 π 封闭。此外，这表明 $K^{ac} \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$ 包含于 $((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}; <_v, \cdot)$ 中 $K \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$ 的可定义闭包。因此可得：

$$\mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot)}(b/K^{ac} \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}) = \mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot)}(c/K^{ac} \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}).$$

因此，我们可以用 K^{ac} 替换 K。 $\blacksquare_{\text{Claim}}$

断言 2. 对于任意非零多项式 $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in K[X]$，$P(b)$ 都有一个主导项 $a_{i_0} b^{i_0}$。此外，$a_{i_0} c^{i_0}$ 是 $P(c)$ 的主导项。

断言的证明。 $i < j$ 和 $z \in \mathbb{Z}$ 不可能满足 $v_p(a_i b^i) = v_p(a_j b^j) + z < \infty$，否则 $b^{j-i} = \pi(b)^{j-i} = {}^{\pi_{(a_i)}}\pi(p^z a_j) \in K$，这与 b 的超越性矛盾。因此，$P(b)$ 有一个主导项 $a_{i_0} b^{i_0}$。对于任何其他项 $a_i b^i$ 以及任意 l，我们有：

$$\begin{aligned} v_p(a_{i_0} b^{i_0}) < v_p(a_i b^i) - l &\iff \pi(a_{i_0}) b^{i_0} <_v \pi(a_i) b^i p^{-l} \\ &\iff \pi(a_{i_0}) c^{i_0} <_v \pi(a_i) c^i p^{-l} \\ &\iff v_p(a_{i_0} c^{i_0}) < v_p(a_i c^i) - l, \end{aligned}$$

其中第二个等价关系由 (*) 得出。因此，$a_{i_0} c^{i_0}$ 是 $P(c)$ 的主导项。$\blacksquare_{\text{Claim}}$

断言 3. 设 $f : K[b] \to K[c]$ 为将 b 映到 c 的环同构。那么 $K[b]$ 在 π 下封闭，并且对所有 $n \geq 2$，f 保持 P_n，且与 π 可交换。因此，根据定理 *4.5*，f 是一个部分 $\{+, \cdot, p^{\mathbb{Z}}\}$-初等嵌入。

断言的证明。 对于任意非零的 $P(b) \in K[b]$，令 $a_{i_0} b^{i_0}$ 为其主导项。由引理 4.10，$\pi(P(b)) = \pi(a_{i_0}) b^{i_0} \in K[b]$，且 $f(\pi(P(b))) = f(\pi(a_{i_0}) b^{i_0}) = \pi(a_{i_0}) c^{i_0} = \pi(P(c)) = \pi(f(P(b)))$。我们还将证明，对于任意 $n \geq 2$,

$P(b)/P_n = f(P(b))/P_n$，或者等价地，$a_{i_0}b^{i_0}/P_n = a_{i_0}c^{i_0}/P_n$。由 (*)，对于每个 n，都存在某个 $0 \le i < n$，使得 bp^{-i} 和 cp^{-i} 均为 $(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$ 中某些元素的 n 次幂。于是 bp^{-i} 和 cp^{-i} 属于 P_n，这意味着$b/P_n = c/P_n$。■$_{\text{Claim}}$

■

引理 4.12. 设 $K \subseteq U$ 是一个子域，满足 $\pi(K) \subseteq K$，并设 $b, c \in U$。若

$$\mathrm{tp}^{(U;+,\cdot)}(b/K) = \mathrm{tp}^{(U;+,\cdot)}(c/K)$$

且对所有 $x \in K(b)$，都有 $\pi(x) \in K$，则 $\mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(b/K) = \mathrm{tp}^{\mathcal{U}}(c/K)$。

证明。该假设给出一个域同构 $f : K(b) \to K(c)$，它在 K 上且将 b 映到 c；此同构在 $(U; +, \cdot)$ 中是初等的。对所有 $n \ge 2$，f 保持 P_n，因为它在域语言中是 $\emptyset$-可定义的。对任意 $x \in K(b)$，有 $v_p(x) = v_p(\pi(x))$，因此 $v_p(f(x)) = v_p(f(\pi(x)))$（$v_p$ 在域语言中也为 $\emptyset$-可定义的）。由于 $\pi(x) \in K$，可得 $f(\pi(x)) = \pi(x)$。这意味着 $\pi(f(x)) = \pi(x) = f(\pi(x))$。因此，根据定理 4.5，$f$ 在语言 $\{+, \cdot, p^{\mathbb{Z}}\}$ 中是初等的。■

4.3 关于 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 的回返构造

设 $p^R = \{p^r \in \mathbb{Q}_p \mid r \in R\}$。本节将为结构（$\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R$）建立一个来回系统。我们将函数 λ、S 和 S^{-1} 扩展到 $\mathbb{Q}_p$，如下所示：

定义4.13。我们在 $p^{\mathbb{Z}}$ 上定义 λ、S 和 S^{-1}，使得（$p^{\mathbb{Z}}$; $<_v$、$\cdot$、λ、S、S^{-1}）与（$\mathbb{Z}$; $<$、$+$、λ、S、S^{-1}）同构。对于 $x \in \mathbb{Q}_p \setminus p^{\mathbb{Z}}$，令 $\lambda(x) = \lambda(\pi(x))$、$S(x) = S(\pi(x))$，以及 $S^{-1}(x) = S^{-1}(\pi(x))$。这些函数在（$\mathbb{Q}_p$; $+$、$\cdot$、$p^{\mathbb{Z}}$、p^R）中是 $\emptyset$-可定义的。

设 $\mathcal{U}$ 是 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}}, p^R)$ 的一个怪兽模型。那么 $((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}; <_v, \cdot, (p^R)^{\mathcal{U}})$ 是 $(\mathbb{Z}; <, +, R)$ 的一个怪兽模型。回顾一下，算子是形如 $A(x) = \sum_{i=-n}^{m} z_i S^i(x)$ 的项，它将 $r \in R$ 送到 $A(r) \in \mathbb{Z}$。由于我们在 $(p^{\mathbb{Z}}; <_v, \cdot, p^R)$ 中采用乘法记号，因此对于算子 A，我们将其写作 $A^*(x) = \prod_{i=-n}^{m} S^i(x)^{z_i}$。为了运用主导项方法，我们引入次数的概念。

定义 4.14. R 的次数 记作 $\deg(R)$，是满足以下条件的最小整数 d：存在一个算子 $A(x) = \sum_{i=0}^{d} z_i S^i(x)$，使得对于某个 $0 \le i \le d$ 和 $A =_{ae} 0$，有 $z_i \neq 0$。（注意，由于 d 的最小性，z_0 和 z_d 必须非零。）如果不存在这样的 d，则令 $\deg(R) = \infty$。

如第 3.1 节所述，存在 $1 < \theta \le \infty$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \theta$。由 La——mbotte 和 Point [14, 引理 1.10 至引理 1.13] 可知，$\deg(R) = d < \infty$ 当且仅当 θ 是次数为 d 的代数数。由于证明与本文无关，我们不予给出。

若 $\deg(R)$ 有限，我们固定 $d = \deg(R)$；否则，固定任意正整数。

引理 4.15。设 $K \subseteq U$ 是一个在 π、λ、S 和 S^{-1} 运算下封闭的子域，并设 $b \in (p^R)^{\mathcal{U}} \setminus K$。那么，对于任意非零多项式 $P \in K[X_0, \ldots, X_{d-1}]$，$P(b, \ldots, S^{d-1}(b))$ 都有一个主导项。特别地，b、$\ldots$、$S^{d-1}(b)$ 在 K 上代数独立。

证明。反设两个不同的非零项 $a_I X_0^{m_0} \ldots X_{d-1}^{m_{d-1}}$ 和 $a_{I'} X_0^{n_0} \ldots X_{d-1}^{n_{d-1}}$ 满足

$$v_p(a_I b^{m_0} \ldots S^{d-1}(b)^{m_{d-1}}) = v_p(a_{I'} b^{n_0} \ldots S^{d-1}(b)^{n_{d-1}}) + l$$

对于某个 $l \in \mathbb{Z}$。那么有

$$\pi(a_I) b^{m_0} \ldots S^{d-1}(b)^{m_{d-1}} = \pi(a_{I'}) b^{n_0} \ldots S^{d-1}(b)^{n_{d-1}} p^l,$$
$$\text{and hence that } b^{m_0 - n_0} \ldots S^{d-1}(b)^{m_{d-1} - n_{d-1}} = \pi(a_I^{-1} a_{I'}) p^l.$$

令 $A(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (m_i - n_i) S^i(x)$。根据次数的定义，$A \neq_{ae} 0$，因此由引理 3.8 可得 $A^*(b) \approx b$ 或 $A^*(b)^{-1} \approx b$。然而，$A^*(b) = \pi(a_I^{-1} a_{I'}) p^l \in K \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$，这与引理 3.9 (1) 矛盾。■

相反，对于任意 $z \in \mathbb{Z}$，$S^z(b)$ 在 $K(b, \ldots, S^{d-1}(b))$ 上是代数的：

引理 4.16。若 $d = \deg(R)$ 有限，则对于每个 $z \in \mathbb{Z}$，存在 $m \geq 1$和 $w_i \in \mathbb{Z}$，使得对 $0 \leq i < d$ 有 $mS^z(x) =_{ae} \sum_{i=0}^{d-1} w_i S^i(x)$。

证明。选取一个算子 $A(x) = \sum_{i=0}^{d} z_i S^i(x)$，使得 z_0，$z_d \neq 0$ 且 $A =_{ae} 0$。于是，对于所有 $k \geq 0$，都有 $z_d S^{d+k}(x) =_{ae} \sum_{i=0}^{d-1} -z_i S^{i+k}(x)$。因此，我们可以归纳地找到所需的 m 和 w_i，使其适用于 d，$d+1$，.....，同样也适用于 -1，-2，.....。■

现在我们定义来回系统。

定义 4.17。设 $L_{p^R} = \{0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, p^{\mathbb{Z}}, \pi, p^R, \lambda, S, S^{-1}\}$。$\mathcal{I}$是满足以下条件的部分函数 $f: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$：

1. $\mathrm{Dom}(f)$ 是一个 L_{p^R}-子结构。
2. f 是一个部分 L_{p^R}-嵌入。
3. f是（$\mathbb{Q}_p$；$+$，$\cdot$，$p^{\mathbb{Z}}$）的部分初等嵌入。
4. $f|_{\mathrm{Dom}(f) \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}}$是 $\left((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}\right.$的部分初等嵌入；$<_v$，$\cdot$，$\left.(p^R)^{\mathcal{U}}\right)$。

我们还考虑以下替代条件：

2’ $a \in (p^R)^{\mathcal{U}} \Rightarrow f(a) \in (p^R)^{\mathcal{U}}$对于任意 $a \in \mathrm{Dom}(f)$。

4’ $f|_{\mathrm{Dom}(f) \cap (p^R)^{\mathcal{U}}}$是 $\left((p^R)^{\mathcal{U}}\right.$的部分初等嵌入；$<_v$，$\left.(\cdot \equiv_n i)_{n,\ i}\right)$。

引理 4.18. 若部分函数 $f: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 满足条件 *(1)*、*(2’)*、*(3)* 和 *(4’)*，则 f 满足条件 *(2)* 和 *(4)*，因此 $f \in \mathcal{I}$。

证明。 为证明 (4)，我们注意到 $f|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}}$ 属于定义 3.14 中定义的来回系统，并应用定理 3.20。显然成立。根据 (4)，$f|_{\mathrm{Dom}(f)\cap(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}}$ 保持 p^R，并与 λ、S 和 S^{-1}交换。由于 $p^R \subseteq p^{\mathbb{Z}}$ 以及定义在 U 上的函数 λ、S 和 S^{-1} 是通过 π 定义的（例如，$\lambda = \lambda \circ \pi$），映射 f 在其整个定义域上也满足这些条件。因此，(2) 得证。■

由于 $f^{-1} \in \mathcal{I}$ 若 $f \in \mathcal{I}$，因此只需证明“前向”方向。与第 3.2 节一样，我们首先处理添加的元素属于 $(p^R)^{\mathcal{U}}$ 的情形。

引理 4.19。 设 $f \in \mathcal{I}$，其中 $\mathrm{Dom}(f)$ 记为 K。对于任意 $b \in (p^R)^{\mathcal{U}} \setminus K$，存在 $c \in (p^R)^{\mathcal{U}}$，使得

$$\mathrm{tp}^{((p^R)^{\mathcal{U}};<_v,(\cdot\equiv_n i)_{n,i})}(b, K \cap (p^R)^{\mathcal{U}}) = \mathrm{tp}^{((p^R)^{\mathcal{U}};<_v,(\cdot\equiv_n i)_{n,i})}(c, f(K) \cap (p^R)^{\mathcal{U}}).$$

此外，对于任意这样的 c，存在 f 的一个扩张 $f \in \mathcal{I}$，使得 $f(b) = c$。

证明。 由于 $\mathcal{U}$ 是一个怪兽模型，根据定义 4.17 (4)，存在这样的$c \in (p^R)^{\mathcal{U}}$。引理 3.16 和定理 3.20 进而推出：

$$\mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot,(p^R)^{\mathcal{U}})}(b, K \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}) = \mathrm{tp}^{((p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}};<_v,\cdot,(p^R)^{\mathcal{U}})}(c, f(K) \cap (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}). \quad (**)$$

根据引理 4.15，$b, \ldots\ldots, S^{d-1}(b)$（分别地，$c, \ldots\ldots, S^{d-1}(c)$）在 K（分别地，$f(K)$）上代数无关。我们通过定义 $f_1(S^i(b)) = S^i(c)$（对每个$0 \le i \le d-1$；若 $\deg(R) = \infty$，则 $\mathrm{Dom}(f_1) = K[b, S(b), S^2(b), \ldots])$ 将 f 延拓为环同构 $f_1 : K[b, \ldots, S^{d-1}(b)] \to f(K)[c, \ldots, S^{d-1}(c)]$。

断言 1。 $K[b, \ldots, S^{d-1}(b)]$ 在 π下封闭。此外，f_1 对所有$n \ge 2$保持 P_n，并且与 π交换。由此，根据定理 *4.5*，f_1 是一个部分 $\{+, \cdot, p^{\mathbb{Z}}\}$-初等嵌入。

断言的证明。 考虑任意非零的 $a = P(b, \ldots\ldots, S^{d-1}(b)) \in K[b, \ldots, S^{d-1}(b)]$。令 $a_I b^{m_0} \ldots S^{d-1}(b)^{m_{d-1}}$ 为 a的主导项，该主导项由引理 4.15 保证存在。通过使用 (**) 对引理 4.11 中的断言 2 进行类似论证，可得$f(a_I)c^{m_0} \ldots S^{d-1}(c)^{m_{d-1}}$是 $f_1(a)$ 的主导项。此外，对于任意 $n \ge 2$，根据事实 4.2，存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $a_I/P_n = m/P_n$，从而$f(a_I)/P_n = k/P_n = a_I/P_n$。如同引理 4.11 中的断言 3，我们可以证明$K[b, \ldots, S^{d-1}(b)]$ 在 π下封闭，f_1与 π交换，并且 f_1对所有 $n \ge 2$ 保持P_n。■$_{\mathrm{Claim}}$

根据断言 1，我们将 f_1扩展为一个部分 $\{+, \cdot, p^{\mathbb{Z}}\}$-初等嵌入$\widetilde{f}$：$K(b, \ldots\ldots, S^{d-1}(b))^{ac} \to \mathcal{U}$（代数闭包取自 U 内部）。

断言 2。 $f \in \mathcal{I}$。

断言的证明。 定义 4.17 (3)就是 f的定义。我们先证明定义 4.17 (1)；也就是说，$K(b, \ldots, S^{d-1}(b))^{ac}$在 π, λ, S和 S^{-1}下封闭。对于任意非零的 $a \in K(b, \ldots, S^{d-1}(b))^{ac}$，存在 $n \ge 1$和 $x, y \in$

$K[b,\dots,S^{d-1}(b)]$，使得根据引理 4.3，$nv_p(a) = v_p(x/y)$。根据引理 4.10，$\pi(a)^n = \pi(x/y) = \pi(x)/\pi(y) = a_0 b^{z_0}\dots S^{d-1}(b)^{z_{d-1}}$，其中 $a_0 \in K\cap(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$和$z_i \in \mathbb{Z}$。因此，$\pi(a) \in K(b,\dots,S^{d-1}(b))^{ac}$。为了证明关于 λ、S和S^{-1}的断言，我们可以假设 $a \in (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$，且 $a >_v 1$。于是 $a^n = a_0 b^{z_0}\dots S^{d-1}(b)^{z_{d-1}}$。由引理 3.8 (1)，可得 $a \approx a^n$。由引理 3.9 (2)，$a_0 b^{z_0}\dots S^{d-1}(b)^{z_{d-1}}$近似等于 a_0 或 b。因此，$a \approx a_0$ 或 $a \approx b$ 成立。我们可以看出，对于某个 z，$\lambda(a)$等于 $S^z(a_0)$或 $S^z(b)$；根据引理 4.16，这两者都属于$K(b,\dots,S^{d-1}(b))^{ac}$。

接下来，我们验证定义 4.17 (2') 和 (4')。对于任意 $a \in K(b,\dots,S^{d-1}(b))^{ac}\cap(p^R)^{\mathcal{U}}$，上述论证表明，$a$ 要么属于 $K\cap(p^R)^{\mathcal{U}}$，要么具有 $S^z(b)$ 的形式，其中 $z \in \mathbb{Z}$ 是某个元素。由引理 4.16 可知，对于任意 $z \in \mathbb{Z}$，存在 $m \geq 1$ $\sim f((S^z(b))^m) = (S^z(c))^m$，因此 $f(S^z(b)) = S^z(c)$（因为 $(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$ 是无挠的）。根据与引理 3.16 中断言 2 相同的推理，条件 (2') 和 (4') 得以满足。$\blacksquare_{\text{Claim}}$

$\blacksquare$

引理 4.20。对于任意 $b \in \mathcal{U}$ 和任意 $f \in \mathcal{I}$，存在 f 的一个扩张，使得对于任意 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}}$，都有 $\lambda(x) \in \mathrm{Dom}(f)$。

证明。令 $f_0 = f$。我们构造一个递增序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其取值于 $\mathcal{I}$，如下所示：假设 $f_n \in \mathcal{I}$ 已定义。接着，我们将 f_n 扩展为 $f_{n+1} \in \mathcal{I}$，使得 $\mathrm{Dom}(f_{n+1})$ 包含 $\langle b$ 中的所有元素，$\mathrm{Dom}(f_n)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi,\lambda,S,S^{-1}\}}\cap(p^R)^{\mathcal{U}}$。这是通过应用引理 4.19 超限多次实现的。

我们定义 $f^\sim = \bigcup_{n<\omega} f_n \in \mathcal{I}$。对于任意 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}}$，存在 $n \geq 0$ 使得 $x \in \langle b, \mathrm{Dom}(f_n)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}}$。根据我们的构造，$\lambda(x) \in \mathrm{Dom}(f_{n+1}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$，证毕。$\blacksquare$

引理 4.21。设 $b \in \mathcal{U}$ 和 $f \in \mathcal{I}$ 满足：对于任意 $x \in \langle b$，都有 $\lambda(x) \in \mathrm{Dom}(f)$，$f)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}}$。则存在 $c \in \mathcal{U}$ 使得

$$\mathrm{tp}^{(U;+,\cdot,(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}})}(b,\mathrm{Dom}(f)) = \mathrm{tp}^{(U;+,\cdot,(p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}})}(c,\mathrm{Im}(f)).$$

此外，对于任意这样的 c，存在 $f \in \mathcal{I}$ 的一个扩张 f，使得 $\sim f(b) = c$。

证明。根据 $\mathcal{U}$ 的饱和性和定义 4.17 (3)，这样的 c 的存在性是显然的。对 c 作此选择后，我们可以按照自然方式将 f 扩展为一个部分 $\{+,\cdot,p^{\mathbb{Z}}\}$-初等嵌入 $f\colon \langle b, \mathrm{Dom}(f)\rangle_{\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}} \to \mathcal{U}$。现在我们验证 $f \in \mathcal{I}$。定义 4.17 (3) 显然成立。关于 b 和 f 的假设保证了定义 4.17 (1) 以及 $\mathrm{Dom}(\widetilde{f})\cap(p^R)^{\mathcal{U}} = \mathrm{Dom}(f)\cap(p^R)^{\mathcal{U}}$，从而推出定义 4.17 (2') 和 (4')。$\blacksquare$

定理 4.22。$\mathcal{I}$在语言 $\{+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R\}$ 中构成一个来回系统。因此，每个 $f \in \mathcal{I}$ 都是一个部分 $\{+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R\}$-初等嵌入。

4.4 变量分离

在本节中，我们假设 $\mathcal{U}$ 是 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}})$ 或 $(\mathbb{Q}_p;+,\cdot,p^{\mathbb{Z}},p^R)$ 的怪兽模型。这里的"项"在前一种情况下指 $\{+,-,\cdot,^{-1},\pi\}$-项，在后一种情况下指 $\{+,-,\cdot,^{-1},\pi,\lambda,S,S^{-1}\}$-项。

固定一个序列 $(\overline{a_k})_{k\in I+(c)+J}$ 和一个满足定义 2.2 中假设的 b 单元素集，其中按照注 2.6 所述，I 和 J 取为充分饱和的无端点的稠密线性序。我们沿用定义 2.7 中的术语。

引理 4.23。对于任意项 $(u_i(x))_{1\le i\le m}$ 和 $(r_i(y))_{1\le i\le m}$，存在一个截断 $(I',J')\subset_{\mathrm{t}}(I,J)$ 以及涉及 (I',J') 之外参数的项 $u(x)$ 和 $r(y)$，使得对所有 $k\in I'+(c)+J'$：

$$v_p\left(\sum_{i=1}^m u_i(\overline{a_k})r_i(b)\right)=v_p(u(\overline{a_k})r(b)).$$

证明。我们对 m 进行归纳。$m=1$ 的情形是平凡的。假设该断言对 m 成立。我们可以假设，对于所有 $k\in I+(c)+J$，$u_{m+1}(a_k)$ 和 $r_{m+1}(b)$ 都不为 0。此外，由于

$$v_p\left(\sum_{i=1}^{m+1} u_i(\overline{a_k})r_i(b)\right)=v_p(u_{m+1}(\overline{a_k})r_{m+1}(b))+v_p\left(\sum_{i=1}^m \frac{u_i(\overline{a_k})}{u_{m+1}(\overline{a_k})}\frac{r_i(b)}{r_{m+1}(b)}+1\right),$$

我们还可以进一步假设 $u_{m+1}(a_k)=r_{m+1}(b)=1$。

令 $u(\overline{a_k})=(u_1(\overline{a_k}),\dots,u_m(\overline{a_k}))$ 对于 $k\in I+(c)+J$。由于 $(u(\overline{a_k}))_{k\in I+(c)+J}$ 是不可分辨的，且 $(u(\overline{a_k}))_{k\in I+J}$ 在 $\{r_1(b),\dots,r_m(b)\}$ 上是不可分辨的，p-adic fields 的远离性（注 2.4）意味着 $(u(a_k))_{k\in I+(c)+J}$ 在 $\{r_1(b),\dots,r_m(b)\}$ 上、语言 $\{+,\cdot\}$ 中是不可分辨的。由于超度量空间中的任意三个点构成等腰三角形，这种不可分辨性确保了需要考虑以下三种情况：

情况 1。$v_p(\sum_{i=1}^m u_i(\overline{a_k})r_i(b)+1)=v_p(\sum_{i=1}^m u_i(a_l)r_i(b)+1)$ 对所有 $k<l$ from $I+(c)+J$ 成立。

选取一些 $i_0\in I$，并将 I 缩小到 I'，使得 $i_0<I'$。接着取一项 $r(y)=\sum_{i=1}^m u_i(a_{i_0})r_i(y)+\overline{1,}$ 其中涉及 (I',J) 之外的参数。

情形 2。$v_p(\sum_{i=1}^m u_i(\overline{a_k})r_i(b)+1)=v_p(\sum_{i=1}^m u_i(a_k)r_i(b)-\sum_{i=1}^m u_i(a_l)r_i(b))$ 对所有来自 $I+(c)+J$ 的 $k<l$ 都成立。

选取一些 $j_0\in J$，并将 J 缩小到 J'，使得 $J'<j_0$。那么对于所有的 $k\in I+(c)+J'$，我们有：

$$v_p\left(\sum_{i=1}^m u_i(\overline{a_k})r_i(b)+1\right)=v_p\left(\sum_{i=1}^m\left(u_i(\overline{a_k})-u_i(\overline{a_{j_0}})\right)r_i(b)\right).$$

由于每个 $u_i(x)-u_i(a_{j_0})$ 都是涉及 (I,J') 之外参数的项，因此归纳假设适用于右侧。

情形 3。 $v_p(\sum_{i=1}^m u_i(a_l)r_i(b) + 1) = v_p(\sum_{i=1}^m u_i(a_k)r_i(b) - \sum_{i=1}^m u_i(a_l)r_i(b))$ 对所有 $k < l$ 均成立，其中 $I + (c) + J$。

我们通过缩小 I，以类似情形 2 的方式继续。

■

引理 4.24。 对于任意项 $t(x, y)$，存在一个截断 $(I', J') \subset_{\mathrm{t}} (I, J)$ 以及项 $\alpha_i(x)$、$\beta_i(x)$、$r_i(y)$、$s_i(y)$ $(1 \le i \le m)$，它们涉及 (I', J') 之外的参数，使得

$$t(\overline{a_k}, b) = \frac{\sum_i \alpha_i(\overline{a_k}) r_i(b)}{\sum_i \beta_i(\overline{a_k}) s_i(b)}$$

对于所有 $k \in I' + (c) + J'$。此外，如果 t 的形式为 $\pi(t')$、$\lambda(t')$、$S(t')$ 或 $S^{-1}(t')$，那么 $t(a_k, b) = \alpha(a_k) r(b)$，且 $\alpha(a_k)\ r(b) \in (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$。此外，对于 λ、S 或 S^{-1}，α 和 r 中至少一个等于 1。

证明。对 t 的复杂度作归纳即可证明。非平凡情形是 t 的形式为 $\pi(t')$、$\lambda(t')$、$S(t')$ 或 $S^{-1}(t')$。π 的情形由引理 4.23 得出，因为 $v_p(x) = v_p(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$。对于 λ、S 和 S^{-1}，我们可以假设 $t'(a_k,\ b) = \alpha(a_k) r(b)$ 且 $\alpha(a_k)\ r(b) \in (p^{\mathbb{Z}})^{\mathcal{U}}$，因为例如 $\lambda = \lambda \circ \pi$。接着，我们按照引理 3.21 中的方法进行，以得到所需的形式。■

4.5 可定义稳定性与庞加莱级数

p-进域 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot)$ 具有远离性（注 2.4）。此外，结构 $(p^{\mathbb{Z}}; <_v, \cdot) \cong (\mathbb{Z}; <, +)$ 以及 $(p^R; <_v, (\cdot \equiv_n i)_{n,\ i})$ 也具有远离性（定理 3.22 和定理 3.23）。

定理 4.25。 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}})$ 具有远离性。

证明。我们通过令 $\mathcal{N} = (\mathbb{Q}_p; +, \cdot)$、$\mathcal{R} = (p^{\mathbb{Z}}; <_v, \cdot)$、$\mathcal{F}_N = \{+, -, \cdot, ^{-1}\}$、$\mathcal{F}_R = \emptyset$ 和 $\lambda = \pi$，应用定理 2.10 中的判据。引理 4.11、引理 4.12 和引理 4.24 满足所需条件。■

定理 4.26。$(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 是 *distal* 的。

证明。我们再次应用定理 2.10，这次设定 $\mathcal{N} = (\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}})$、$\mathcal{R} = (p^R;\ <_v, (\cdot \equiv_n i)_{n,\ i})$、$\mathcal{F}_N = \{+, -, \cdot, ^{-1}, \pi\}$ 和 $\mathcal{F}_R = \{S, S^{-1}\}$。这些条件由引理 4.19、引理 4.21 和引理 4.24 验证。■

由于远 distal 结构具有 NIP，$(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}},\ p^R)$ 是一个 NIP 扩张。通过构造深度为 $\aleph_0$ 的 ICT-模式，可以证明 $(\mathbb{Q}_p;\ +,\ \cdot,\ p^{\mathbb{Z}})$ 的 dp-秩恰好为 $\aleph_0$。证明留给读者。在庞加莱级数的语境下，这些扩张的 NIP 尤其重要。

定义 4.27。 对于 $\mathbb{Z}_p^n$ 和 $m \ge 0$ 的子集 A，令 N_m 为集合 $\{(x_1 \bmod p^m, \ldots\ldots, x_n \bmod p^m) \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^n \mid x \in A\}$ 的基数。A 的庞加莱级数 是形式幂级数 $P_A(T) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m T^m$。

Denef 的一项著名结果 [5] 指出，若 $A \subseteq \mathbb{Z}_p^n$ 在纯 p-adic 域 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot)$ 中可定义，则其庞加莱级数是有理函数。结合 Simon 和 Walsberg [25]（dp-极小 $\Rightarrow$ P-极小）以及 Kovacsics 和 Leenknegt[12]（P-极小 $\Rightarrow$ 有理性）的结果，这种有理性可推广至 p-adic 域的任意 dp-极小扩张。尽管 Denef [6] 证明了 $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}})$ 尽管 dp-秩为 $\aleph_0$，仍具有有理性，但我们证明这一结论并不适用于所有 NIP 扩张。

命题 4.28. p^R 的庞加莱级数不是有理函数。

证明。为简单起见，考虑 $R = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$。对于每个 $m \geq 0$，$N_m = \left|\left\{x \text{ 模 } p^m \mid x \in p^R\right\}\right|$ 等于 $1 + |\{n \mid 2^n < m\}|$。因此，p^R 的庞加莱级数为：

$$P(T) = \sum_{m=0}^{\infty} T^m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=2^n+1}^{\infty} T^m,$$

化简后得到 $(1-T)P(T) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} T^{2^n+1}$。只需证明右侧不是有理函数。若它是有理函数，则存在非零多项式 $f(T)$ $g(T) \in \mathbb{Z}[T]$，使得 $f(T) = g(T)\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} T^{2^n+1}\right)$。然而，当 n足够大时，$g(T)T^{2^n+1}$和 $g(T)T^{2^{n+1}+1}$无法重叠，使 $g(T)\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} T^{2^n+1}\right)$ 成为多项式。■

因此，$(\mathbb{Q}_p; +, \cdot, p^{\mathbb{Z}}, p^R)$ 提供了一个 NIP 扩张的例子：它扩张了 p 进数域，但其庞加莱级数不具有有理性。由于该结构的 dp-秩为 $\aleph_0$，关于秩更低的结构自然产生了一个问题：

问题 4.29。如果 p 进数域的一个扩张是强依赖的（即其 *dp*-秩小于 $\aleph_0$），那么它的庞加莱级数是否必定具有有理性？

在实数域的语境中，强依赖意味着开可定义集具有良好的驯性。具体来说，设 $\mathcal{M}$ 是定义在拓扑空间 M 上的一个结构，并且定义了该空间拓扑的一个基。开核 $\mathcal{M}^\circ$ 是 $\mathcal{M}$ 的约化，其谓词符号是 $\mathcal{M}$ 中可定义的开集。此外，$\mathcal{M}$ 的一个 $\widetilde{}$ 扩张 $\mathcal{M}$ 若满足：$\mathcal{M}$ 中可定义的每个一元集合都已在 $\mathcal{M}$ 中可定义，则称其为 $\mathcal{M}$-极小的。

定理4.30 (Walsberg [28, 定理9。15])。如果 $\mathcal{R}$ 是（$\mathbb{R}$； $<, +$）的一个强依赖扩张，那么其开核 $\mathcal{R}^\circ$ 要么是 *o*-极小的，要么对于某个 $\alpha > 0$是（$\mathbb{R}$； $<, +, \alpha\mathbb{Z}$）-极小的。

特别地，如果 $\mathcal{R}$ 是实数域的一个强依赖扩张，那么$\mathcal{R}^\circ$是 o-极小的，因为它定义了乘法，因而不可能是（$\mathbb{R}$； $<$， $+$， $\alpha\mathbb{Z}$）-极小的。我们可以问，对于 p-进域是否存在类似的情形：

问题4.31。对于任意强依赖的 p-进域扩张，其开核是否为 *P*-极小？

若此问题的答案为肯定，则问题 4.29 也将得到肯定的答案。容易看出，A 的任意 $\mathbb{Z}_p^n$ 子集与其拓扑闭包具有相同的庞加莱级数。根据 Kovacsics 和 Leenknegt [12], ，开核的 P-极小性将确保原扩张也具有有理性。

参考文献

[1] Matthias Aschenbrenner、Artem Chernikov、Allen Gehret 和 Martin Ziegler。《赋值域及相关结构中的远离性》。美国数学会会刊 375.7（2022），第 4641–4710 页（引文见第 2、3 页）。[2] Matthias Aschenbrenner、Alf Dolich、Deirdre Haskell、Dugald Macpherson 和 Sergei Starchenko。《某些不具独立性性质的理论中的 Vapnik-Chervonenkis 密度 I》。美国数学会会刊 368.8（2016），第 5889–5949 页（引文见第 15 页）。[3] Artem Chernikov、David Galvin 和 Sergei Starchenko。《远 distal 结构中的切割引理与 Zarankiewicz 问题》。*Selecta Mathematica* 26.2，25（2020）（引文见第 2 页）。[4] Artem Chernikov 和 Sergei Starchenko。《远 distal 结构的正则性引理》。*Journal of the European Mathematical Society* 20.10（2018），第 2437–2466 页（引文见第 2 页）。[5] Jan Denef。《与簇上的 p-进点相关的庞加莱级数的有理性》。*Inventiones mathematicae* 77.1（1984），第 1–23 页（引文见第 25 页）。[6] Jan Denef。《某些 p-进积分的计算》。数论研讨班，巴黎 *1983-84*。数学进展 59。Birkhäuser，1985，第 25–47 页（引文见第 25 页）。[7] Alfred Dolich 和 John Goodrick。《有序阿贝尔群的强理论》。数学基础 236.3（2017），第 269–296 页（引文见第 15 页）。[8] Alfred Dolich、John Goodrick 和 David Lippel。《Dp-极小性：基本事实与例子》。圣母大学形式逻辑杂志 52.3（2011），第 267–288 页（引文见第 17 页）。[9] Allen Gehret 和 Elliot Kaplan。《对数超级级数域的渐近对的远离性》。圣母大学形式逻辑杂志61.2（2020），第 341–361 页（引文见第 4 页）。[10] Philipp Hieronymi 和 Travis Nell。《远离对与非远离对》。符号逻辑杂志 82.1（2017），第 375–383 页（引文见第 2、3、17 页）。[11] Wilfrid Hodges。模型论。剑桥大学出版社，1993（引文见第 3 页）。

[12] Pablo Cubides Kovacsics 和 Eva Leenknegt。《P-极小结构中的积分与胞分解》。符号逻辑杂志 81.3（2016），第 1124–1141 页（引文见第 25、26 页）。[13] Quentin Lambotte。《整数的温和对》。博士论文。蒙斯大学，2021（引文见第 8 页）。[14] Quentin Lambotte 和 Françoise Point。《关于（$\mathbb{Z}$，$+$，0）的扩张》。纯粹与应用逻辑年刊 171.8，102809（2020）（引文见第 8、9、19 页）。[15] Angus Macintyre。《关于 p-进域中的可定义子集》。符号逻辑杂志 41.3（1976），第 605–610 页（引文见第 16 页）。[16] Nathanaël Mariaule。《带有整数幂谓词的 p-进数域》。符号逻辑杂志 82.1（2017），第 166–182 页（引文见第 3、16 页）。[17] Nathanaël Mariaule。《乘法子群扩张的 p-进数域的模型论》。2018。arXiv：1803.10564 [math.LO]（引文见第 2、17、18 页）。[18] David Marker。《模型论：导论》。数学研究生教材 217。Springer Science & Business Media，2002（引文见第 11 页）。[19] David Marker。《赋值域的模型论》。AMS 开放数学笔记：201906.110798。2019（引文见第 16 页）。[20] Françoise Point。《关于 Presburger 算术的可判定扩张：从 A. Bertrand 计数系统到 Pisot 数》。符号逻辑杂志 65.3（2000），第 1347–1374 页（引文见第 8、9 页）。[21] Aleksei L. Semënov。《关于自然数加法算术的某些扩张》。苏联数学-Izvestiya 15.2（1980），第 401–418 页（引文见第 8 页）。[22] Pierre Simon。《关于 dp-极小有序结构》。符号逻辑杂志 76.2（2011），第 448–460 页（引文见第 15 页）。[23] Pierre Simon。《远离的与非远离的 NIP 理论》。纯粹与应用逻辑年刊 164.3（2013），第 294–318 页（引文见第 2 、 4 页）。[24] Pierre Simon。《 NIP 理论指南》。第 44 卷。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2015（引文见第 4、15 页）。[25] Pierre Simon 和 Erik Walsberg。《Dp 及其他极小性》。符号逻辑杂志 90.4（2025），第 1410–1439 页（引文见第 25 页）。[26] Mervyn Tong。《带稀疏谓词的 Presburger 算术的远 distal 扩张》。符号逻辑杂志（2025），第 1–33 页。预发表（引文见第 2、8、9 页）。[27] Roland Walker。《远 distal 秩》。符号逻辑杂志 88.2（2023），第 704–737 页（引文见第 4 页）。[28] Erik Walsberg。《实数有序加法群的外部可定义商与 NIP 扩张》。美国数学会会刊 375.3（2022），第 1551–1578 页（引文见第 25 页）。