arXiv:2603.19854v1 [math.CT] 20 Mar 2026

拟运算子与等变性

Alexander S. Corner NickGurski
alex.corner@shu.ac.uk nick.gurski@case.edu

摘要

May 最初将拟运算子定义为具有对称群的右作用，但后来的表述也采用了完全没有群作用的形式，或采用由辫群等群族给出的群作用。我们称这样的群族为作用歌剧，因为它们是编码拟运算子上参数化群作用的代数对象。在本文第一部分中，我们研究作用歌剧的基本代数 Λ 以及它们作用于其上的 Λ-拟运算子。在第二部分中，我们研究小范畴的 2-范畴中的 Λ-拟运算子。

目录

1 引言 2 2 记号与约定 5 第一部分：拟运算子与作用歌剧 3 3 背景：拟运算子 8 4 作用歌剧 12 5 例子 20 6 作为扩张的作用歌剧 25 7 作用歌剧的表示 27 8 Λ-拟运算子及其代数 33 9 代入积 43 第二部分：范畴中的拟运算子 10 10 背景：群作用与 2-极限 49 11 背景：2-单子及其代数 53 12 Λ-Cat 中的拟运算子作为 2-单子 55 13 相干性 64 14 群作用与笛卡尔的 2-单子 69

15 作为俱乐部的作用算子 7416 扩展示例：余边界范畴 17 拟交换性

79

83

1 引言

如今，拟运算子已成为众多领域中广泛采用的工具，应用范围从代数 [46]和组合学 [56] 到同伦论 [15] 和数学物理 [51]。拟运算子最早由 May 在 [53]，中明确给出定义，其工作承接了 Whitehead [64]，、Stasheff [61]，和 Boardman-Vogt [6]，的研究；拟运算子是诸多形式体系之一[1]，用于表示不同类型的代数结构。一个拟运算子 P 由一系列对象 P（n）组成，这些对象以自然数为指标，并配有复合运算

$$\mu\colon P(n)\times P(k_1)\times\cdots P(k_n)\to P(k_1+\cdots+k_n)$$

以及单位元 id $\in P(1)$。典型的拟运算子是集合 $\mathcal{E}_X$ 上的自同态算子 X (见例 3.7)：集合 $\mathcal{E}_X(n)$ 由所有函数构成 $f\colon X^n\to X$，复合运算是函数的 n元复合

$$\begin{aligned}&\mu(g;f_1,\dots,f_n)\big(x_{1,1},\dots,x_{1,k_1},x_{2,1},\dots,x_{n,k_n}\big)\\&\quad=g\Big(f_1(x_{1,1},\dots,x_{1,k_1}),\dots,f_n(x_{n,1},\dots,x_{n,k_n})\Big),\end{aligned}$$

单位元是恒等函数 $1_X\colon X\to X$；拟运算子的公理旨在体现上述结构所满足的结合律和单位元关系。

May 的定义还包含对称群作用 $P(n)\times\Sigma_n\to P(n)$，用于刻画输入变量的置换运算；当强调等变性时，这些拟运算子如今常称为 *symmetric operads* 。Fiedorowicz 后来在 [15]，中将这些对称群作用推广为辫群作用，并研究了双环空间上的运算。Wahl [63] 进一步将这些思想推广到带状辫子及其他群族，以研究由稳定映射类群产生的谱。这些作者各自利用了相关拟运算子上的不同群作用，为其上的代数赋予额外结构。本文是对预印本 [9, 21]，的更新版本，旨在阐述群族 $\Lambda=\{\Lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的基本代数结构，这些群族出现在拟 operad 理论中，例如对称群、辫群和带状辫群；本文称之为 *action operads*。

作用歌剧

设 $\{\Lambda（n）\}$ 是一个 $\mathbb{N}$-指标群族，作用于一个拟运算子 P，其作用通过 $P（n）\times\Lambda（n）\to P（n）$ 给出。在这些群作用与幺半群复合之间施加某种相容性是自然的，而这种相容性要求群 $\Lambda（n）$ 本身构成一个拟运算子。由对称群 Σ_n 和 May 的对称歌剧这一例子可见，由 $\Lambda（n）$ 组成的拟运算子不必是群范畴内部的拟运算子：幺半群复合并非群同态，而是满足同态公理的一个扭曲版本。这些考量引出了定义 4.1 中作用歌剧的定义，它由4.1组成，

[1]其他还包括单子 [14], 代数理论或Lawvere理论 [42],以及PROPs [48]。

- 一个集合拟运算子 Λ，其中每个 $\Lambda(n)$ 都配备有群结构；以及
- 函数 $\pi_n\colon\ \Lambda(n) \to \Sigma_n$，它们既是群同态，又组合成一个 operad 映射 $\Lambda \to \Sigma$;

并满足一个额外公理，该公理将拟运算子的结构与群结构联系起来。

正如 May、Fiedorowicz 和 Wahl 的研究所表明的那样，改变拟运算子 P 上的群作用，可能会使其上的代数 P具有不同的结构。给定一个拟运算子 P，可能有许多不同的作用歌剧 Λ 作用于它。最简单的例子是，任何对称歌剧也是非对称意义下的拟运算子；也就是说，我们可以改为考虑群作用 $P(n) \times T(n) \to P(n)$，其中每个 $T(n)$ 都是平凡群。我们的许多后续结果，尤其是第14节和第17节中的结果，都同时考虑拟运算子 P及作用于它的作用歌剧 Λ。大量 operad 文献聚焦于对称情形，既因为它在历史上意义重大，也因为它似乎具有普遍性。这种普遍性最能由一种对称化函子的存在来解释（定义 8.17）：该函子保留代数结构（推论8.21和8.25）。遗憾的是，对称化并不能保留人们可能希望拟运算子具有的所有性质；注释17.21通过考察对称化在编织拟运算子的情境下如何与可缩性交互，展示了这一点。我们将此例视为证据，说明对拟运算子施加的等变条件应当灵活处理，并选择作用于拟运算子 P 的作用歌剧 Λ，使其尽可能平衡所需的各种性质。为此，我们从初等和范畴论视角，全面考察作用歌剧的基本代数。

有哪些变化?

如上所述，本文汇集了作者此前的研究成果 [9, 21]，这些成果此前仅以预印本形式发表。按时间顺序阅读这些预印本，与阅读本文会有很大不同：较早的 [9] 预印本包含了本文第二部分的大部分内容，而较晚的 [21]预印本则包含了如今构成第一部分的大部分内容。在这两部分中，我们对预印本中的材料进行了完善、扩充和重组，有时也予以删去，缘由是其他研究者提出的问题或意见，或者在一个案例中，我们的工作后来得到了一项应用。对这些预印本的引用，是促使我们最终发表这些材料的因素之一。特别是，Yau [66] 已将我们的许多理论推广到了无穷范畴背景。我们的伪交换结构研究也被用于 [18, 19] 构造等变乘法 K-理论机器。这些作者指出了一条缺失的公理，详见备注 17.13；遗漏该公理导致了备注 17.22中所述的错误；我们后来已删除了这些错误结果。

概述与主要结果

本引言的其余部分包含一个简短的记号与约定章节，介绍我们全文采用的记号和约定。

第一部分一般性地研究作用歌剧。

- 第 3 节回顾拟运算子的基础理论，包括其对称、非对称（或非对称性）及编织变体。

- 第 4 节给出了作用歌剧的定义，以及一些基本例子。本节的大部分内容都致力于研究作用歌剧的基础代数，而定理 4.15 则用分块和与重复运算来刻画作用歌剧，而非使用幺半群复合。

• 第 5 节包含了许多作用歌剧的关键例子，以及大量反例。

• 简短的第 6 节讨论作用歌剧与群范畴**Grp** 中的拟运算子之间的关系；我们构造作用歌剧映射的核与像，并在推论 6.8 中证明，每个作用歌剧要么是**Grp** 中的拟运算子，要么是对称群由**Grp**中的拟运算子扩张而成。

• 第 7 节致力于证明作用歌剧范畴是局部有限可呈现的，并利用这一结构建立自由作用歌剧函子。我们利用作用歌剧与集合族之间由此得到的伴随来定义作用歌剧的表示，并明确计算了对称群作为作用歌剧的一种表示。

• 第8 节给出了关于 Λ 作用歌剧的 Λ-拟运算子的定义，以及 Λ-拟运算子上的代数。本节的主要技术结果是与任意作用歌剧映射$f\colon \Lambda \to \Lambda'$相关联的作用歌剧变换伴随$f_! \dashv f^*$，我们利用它定义并研究对称化函子。

• 在第 9 节中，我们将 Λ-拟运算子表示为在 9.4 定理中， Λ-集合族范畴上关于代入积的幺半群。我们采用余端优先方式来实现这一点，而非通过初等计算，并借助与代入积伴随的内部同函子。

第二部分将理论专门应用于范畴或 2-范畴 **Cat** 中的算子。

• 我们先介绍两个背景章节：第 10 节讲述我们将要用到的、与群作用以及极限/2-极限相关的构造；第 11 节回顾 2-单子的基本理论。

• 第 12 节从 2-单子观点阐释 Λ-拟运算子在 **Cat** 中的代数。本节最重要的构造是推论 $E\Lambda$ 中的拟运算子 12.14，随后在定义 Λ12.15 中定义了 - 幺半范畴。最后，我们在命题 Λ中计算范畴 X 上的自由 12.20-幺半范畴。

• 第13 节讨论两类相干定理。第一类是由 $E\Lambda$ 诱导的 2-单子的抽象相干定理，见推论 13.6。第二类是标准的严格化型定理，见定理13.15。

• 第14 节研究群作用 $P(n) \times \Lambda(n) \to P(n)$ 之间的相互作用，以及由 P 诱导的 2-单子是否为 2-笛卡尔。在范畴论文献中，众所周知，每个定义在**集合**上的非对称拟运算子都会诱导一个笛卡尔单子，但并非每个对称拟运算子都如此。推论 14.7 简明地刻画了在**Cat** 上诱导 2-笛卡尔 2-单子的对称拟运算子：它们正是所有对称群作用都自由的拟运算子。我们在定理 Λ 14.9 中将这一结果推广到其他 $E\Lambda$ ，并特别证明，对于任意作用歌剧 Λ ，由其诱导的 2-单子都是 2-笛卡尔，见推论14.10。

• 第 15 节首先回顾 Kelly 关于俱乐部的概念，随后说明每个作用歌剧都会导出一个俱乐部。在定理 15.9中，我们刻画哪些俱乐部源自作用歌剧，并在定理 15.12中比较 Kelly 对俱乐部的表示与我们对作用歌剧的表示。该定理展示了如何轻松地将某类幺半结构（例如对称幺半或辫编幺半）的定义形式转化为作用歌剧的表示 Λ ，使得相关的幺半范畴类型恰好就是 $E\Lambda$-代数。

- 第 16 节给出了上一节理论的一个示例。我们说明， [23] 中关于余边界范畴的计算，可以理解为是在计算仙人掌群的作用歌剧表示。

- 第 17 节研究何时一个 Λ-拟运算子 P 具有伪交换结构。这一附加结构为 P 上的代数的 2-范畴赋予了额外的张量积和内 Hom，使其在 2-维意义下成为闭幺半结构。我们在定义 17.12 中定义了一个 Λ-拟运算子P 的伪交换结构，并在定理 17.14 中证明它在所诱导的 2-单子上诱导出一个伪交换结构。因此，每个可缩的对称歌剧都获得一个对称伪交换结构（推论17.20）。

致谢

本研究得到 EPSRC早期职业奖学金134023 和 LMS研究重启项目42031 的支持。作者还要感谢 Nathaniel Arkor、Daniel Graves 和 Ang´elica Osorno。

2 记号与约定

记号 2.1（对称群）。我们用 Σ_n 表示符号 1、2、.....、 n 上的对称群。对称群的元素通常用小写希腊字母表示，或写成循环表示法。

记号 2.2（辫群）。我们将 n 股辫的辫群记作 B_n。

记号 2.3（单位元）。符号 e 通常表示群中的一个单位元。若考虑由自然数索引的一族群 $\{\Lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，那么 e_n 是 $\Lambda(n)$ 中的单位元。若下标 n 在 $\Lambda(n)$ 中可由上下文明确确定，或与当前论证无关，我们通常会省略下标，直接写作 e 。

约定 2.4（恒等态射）。我们通常将恒等态射 $A \to A$ 记作 $\mathbf{1}$ 或 1_A。

记号 2.5（群作用）。对于群 G，集合 X 上的右 G-作用记作 $(x, g) \mapsto x \cdot g$ 或 $(x, g) \mapsto xg$。左作用以及群中的乘法也采用类似记号。

约定 2.6（指标对象）。我们通常将 $\{\Lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 记作一个 $\mathbb{N}$-指标对象族 $\Lambda(n)$。有时我们也会用 Λ_n 代替 $\Lambda(n)$，尤其是在图表中，或对象 Λ_n 已单独定义时，例如记号 2.1 和 2.2。

约定 2.7（积与商）。我们常常会关注形如 $A \times B(1) \times \cdots \times B(n) \times C$（或类似形式，例如不带 A 或 C）的积中的元素。我们将该集合中的元素记作 $(a; b_1, \ldots..., b_n; c)$，其中 $b_i \in B(i)$。当需要考虑这类元素的等价类时，我们将这些等价类记作 $[a; b_1, \ldots..., b_n; c]$。考虑这类等价类最常见的情形，是如下意义下左、右群作用的余等化子。映射的余等化子

$$A \times G \times B \underset{\rho\times 1}{\overset{1\times\lambda}{\rightrightarrows}} A \times B \xrightarrow{\ \varepsilon\ } A \otimes_G B$$

记作 $A \otimes_G B$，其中 ρ 是 A 上的 G 右作用，而 λ 是 B上的 G 左作用。这个记号旨在强调它与 R-模的张量积之间的类比，即使其中涉及的幺半结构是笛卡尔的。它也将这些余等化子与拉回区分开来。

约定 2.8（尊重等变性的映射的波浪号记法）。假设 $A \otimes_G B$ 是约定 2.7中的余等化子。根据定义，映射 $f\colon\ A \otimes_G B \to X$ 与满足余等化子条件的映射 $A \times B \to X$ 之间存在双射，后者使 $1 \times \lambda$ 和 $\rho \times 1$相等化。给定这样的映射 f，我们总是将相应的映射 $A \times B \to X$ 记作 $\tilde{f}$。

约定 2.9（拉回）。图表的拉回

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & A \end{array}$$

将写作 $X \times_A Y$。

定义 2.10（底层置换）。假设 $f\colon\ G \to \Sigma_n$ 是给定的群同态，并且有 $x \in G$。x 的 *underlying permutation* 是元素 $f(x) \in \Sigma_n$。如果可能会混淆所使用的同态 f，我们将称 $f(x)$ 为 *underlying permutation with respect to* f。

记号 2.11（应用底层置换）。在全文中，我们将使用映射 $\pi_n\colon O(n) \to \Sigma_n$，其中 $O(n)$ 是拟运算子 O 的 n 元运算集合，而 Σ_n 是作用在 n 个元素上的对称群。对于任意 $\sigma \in O(n)$，我们将用 $\sigma(i)$ 表示 $\pi_n(\sigma)(i)$，即 i在 σ的底层置换下的像；记号 $\sigma^{-1}(i)$ 则表示 i 在 σ的底层置换下的原像。

注 2.12（对称群对元组的左作用）。我们将遇到的最常见群作用，是对称群 Σ_n 在形如 X^n的集合上的左作用。我们将此作用记作 $\sigma \cdot (x_1, \ldots\ldots, x_n)$，并强调它由以下公式给出

$$\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

定义 2.13（分块和）。设 $k_1, \ldots\ldots, k_n$ 为自然数，并假设 $\sigma_i \in \Sigma_{k_i}$ 是置换。$\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n$ 的分块和记作

$$\beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

是 Σ_K 中的置换，其中 $K = \sum_{i=1}^{n} k_i$，其定义如下。对于 $1 \leq j \leq K$，将 c 定义为满足以下条件的唯一整数

$$k_1 + \cdots + k_c < j \leq k_1 + \cdots + k_c + k_{c+1}.$$

定义

$$\beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(j) = k_1 + \cdots + k_c + \sigma_{c+1}\big(j - (\sum_{i=1}^{c} k_i)\big).$$

注记 2.14. 上面的公式表达了这样一个想法：$\beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ 使用 σ_1 对前 k_1 个元素进行置换，使用 σ_2 对接下来的 k_2 个元素进行置换，依此类推。

定义 2.15（重复）。设 $k_1,\ldots,k_n$ 是自然数，并且 $\sigma\in\Sigma_n$ 是一个置换。关于 $k_1,\ldots,k_n$ 对 σ 进行的 *duplication*，记作

$$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma),$$

是 Σ_K 中的置换，其中 $K=\sum_{i=1}^n k_i$，其定义如下。对于 $1\leq j\leq K$，定义 c 为满足以下条件的唯一整数：

$$k_1+\cdots+k_c<j\leq k_1+\cdots+k_c+k_{c+1}.$$

定义

$$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)(j)=\Big(\sum_{\sigma(k_i)<\sigma(k_{c+1})}k_i\Big)+j-\Big(\sum_{i=1}^{c}k_i\Big).$$

注 2.16。上面对 $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)$ 的公式，最好通过如下绘制 σ 的图来说明。函数 σ 可以表示为两行，每行有 n 个点，并将顶行的点 i 与底行的点 $\sigma(i)$ 相连。然后，$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)$ 可通过以下方式得到：

- 将顶行中的点 i 替换为 k_i 个点，
- 将底行中的点 $\sigma(i)$ 替换为 k_i 个点，并且
- 以保持顺序的唯一方式连接这两组 k_i 个点。

因此我们看到，$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)$ 中，i 对应的项重复了 k_i 次。

注 2.17。置换作为 Σ_n 的元素，可以视为置换*matrices*，其每一行和每一列恰好有一个 1。例如，置换 (1 3 2) $\in\Sigma_3$可以视为一个矩阵，通过左乘来置换三个元素 $\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}$：

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}.$$

那么，分块和 β（定义 213）对应于将原置换矩阵组成分块对角矩阵的过程。因此，给定元素 (1 2) $\in\Sigma_2$，$e_1\in\Sigma_1$ 和 (1 2 3) $\in\Sigma_3$，则

$$\beta((1\ 2),e_1,(1\ 2\ 3))=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}&0&0\\0&\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}&0\\0&0&\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

并且它是循环表示法中的置换 (1 2)(3)(4 5 6)。

类似地，我们可以将重复 δ（定义 2.15）描述为置换矩阵上的一种运算。对于 $\sigma\in\Sigma_n$，$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)$，取恒等矩阵 I_{k_1} 的分块对角矩阵，$\ldots$，I_{k_n}（这对应于 $\beta(e_{k_1},\ldots,e_{k_n})\in\Sigma_{k_1+\ldots+k_n}$），并根据置换 σ 的作用对这些矩阵进行置换。例如，给定 $\sigma=$(1 2 3)，则

$$\delta_{3;2,1,3}(\sigma)=\sigma*\begin{bmatrix}I_2&0&0\\0&I_1&0\\0&0&I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}I_2&0&0\\0&I_1&0\\0&0&I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&I_3\\I_2&0&0\\0&I_1&0\end{bmatrix}.$$

我们在“非例”5.6.中给出的一个反例中，采用了对带符号置换和分块对角矩阵的类似解释。

约定 2.18（上标）。我们通常会在需要时使用上标，以区分与不同结构相关联的同类型运算。例如，幺半群同态 $f\colon A \to B$ 的公理可写为

$$f(x \cdot^A y) = f(x) \cdot^B f(y),$$
$$f(1^A) = 1^B.$$

第一部分：拟运算子与作用拟运算子

3 背景：拟运算子

本节将汇集拟运算子的基础背景知识，并在第 8 节将其推广。我们先从最常见的一类拟运算子——对称歌剧——讲起，然后再定义另外两类拟运算子：普通拟运算子和编织拟运算子。

定义 3.1（对称歌剧）。A *symmetric operad* O （在集合范畴中）由以下部分组成

- 一个集合， $O(n)$ ，对每个自然数 n,
- 对每个 n，在 $O(n)$ 上有一个右 Σ_n-作用,
- 一个元素 $\mathrm{id} \in O(1)$，并且
- 函数$\mu\colon O(n) \times O(k_1) \times \cdots \times O(k_n) \to O(k_1 + \cdots + k_n)$,

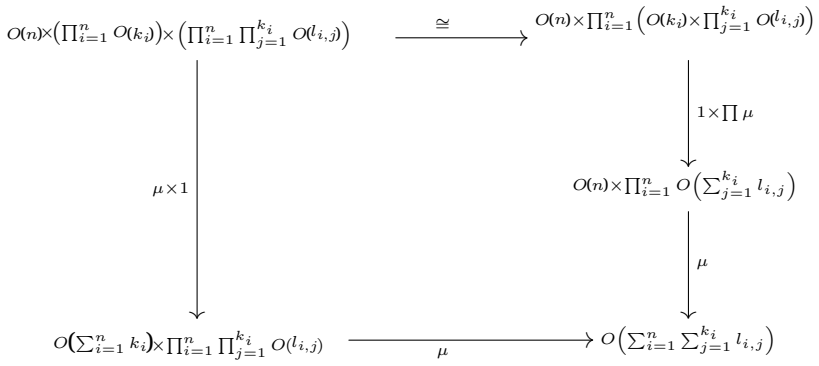
满足以下三条公理。

1. 元素 $\mathrm{id} \in O(1)$ 是 μ 的双侧单位，这意味着

$$\mu(\mathrm{id}; x) = x,$$
$$\mu(x; \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}) = x$$

   对于任意 $x \in O(n)$。

2. 函数 μ 是结合的，这意味着下面的图表可交换。



3. 函数 μ 关于对称群作用是等变的，这意味着两个方程成立。

3.1 假设 $x \in O(n)$、 $y_i \in O(k_i)$ 对于 $i = 1$、.....、n 成立，且 $\tau_i \in \Sigma_{k_i}$ 对于 $i = 1$、.....、n 成立。那么，第一等变公理要求

$$\mu(x; y_1 \cdot \tau_1, \dots, y_n \cdot \tau_n) = \mu(x; y_1, \dots, y_n) \cdot \beta(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

成立，其中 β 是定义 2.13中的函数。

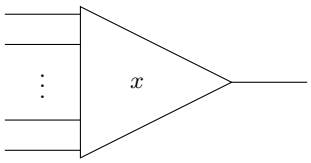
3.2 假设对于 $i = 1, \dots, n$，有 $x \in O(n)$、 $y_i \in O(k_i)$，并且有 $\sigma \in \Sigma_n$。那么，第二等变公理要求

$$\mu(x \cdot \sigma; y_1, \dots, y_n) = \mu\left(x; y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)}\right) \cdot \delta_{n;k_1,\dots,k_n}(\sigma)$$

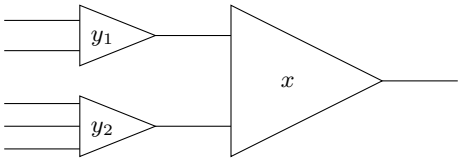
成立，其中 $\delta_{n;k_1,\dots,k_n}$ 是定义 2.15中的函数。

术语 3.2（幺半群乘法、复合）。定义 3.1 中的函数 μ **称为** *operadic multiplication* 或 *operadic composition* 映射。

注 3.3。这里意在将 $x \in O(n)$ 视为一个有 n 个输入和一个输出的函数，如下所示。



因此，幺半群复合是函数复合的一种推广。下方的图示表示 $\mu(x; y_1, y_2)$，其中 μ: $O(2) \times O(2) \times O(3) \to O(5)$。



术语 3.4（n元运算）。定义 $O(n)$ 中的集合 3.1 称为 *n-ary operations* 的 O集合。

注 3.5。可以将 **集合** 上的拟运算子改为定义在另一个（对称）幺半范畴 $\mathcal{V}$ 上的拟运算子，方法是要求每个 $O(n)$ 都是 $\mathcal{V}$ 中的一个对象，并将 $\mathcal{V}$中所有笛卡尔积替换为相应的张量积。此外，还可以将元素 $\mathrm{id} \in O(1)$ 替换为一个映射 $I \to O(1)$，它从 $\mathcal{V}$ 的单位对象映至 $O(1)$。对于对称拟运算子，还可以将右群作用表示为同态

$$\Sigma_n^{op} \to \mathcal{V}\big(O(n), O(n)\big).$$

如果 O 是定义在 **集合**以外的范畴上的拟运算子，那么我们称 $O(n)$ 为 n元运算的 *object* 。

以下是两个重要的对称歌剧例子。

例 3.6（对称群的对称歌剧）。对称歌剧的典范例子是 a 对称歌剧，我们将其记作 Σ。集合 $\Sigma(n)$是对称群 Σ_n的元素集合，而群作用就是右乘。单位元 $\mathrm{id} \in \Sigma(1)$就是单元素集合上的恒等置换。 Σ 中的幺半群复合则由一个函数给出

$$\Sigma(n) \times \Sigma(k_1) \times \cdots \times \Sigma(k_n) \to \Sigma(k_1 + \cdots + k_n)$$

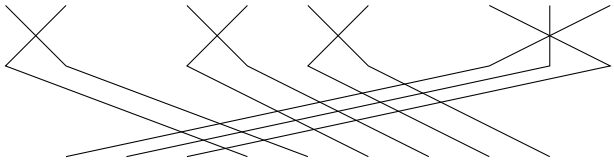
该函数接受置换 $\sigma \in \Sigma_n$， $\tau_i \in \Sigma_{k_i}$ 并生成$\Sigma_{k_1+\cdots+k_n}$中的如下置换：

$$\mu(\sigma;\tau_1,\ldots,\tau_n) = \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)\cdot\beta(\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

与 β 和 δ 如定义 2.13 和 2.15 . . .
下面画出了复合所对应的置换

$$\mu\colon \Sigma(3)\times\Sigma(2)\times\Sigma(4)\times\Sigma(3)\to\Sigma(9)$$

作用于元素 **((1 2 3); (1 2), (1 2)(3 4), (1 3))** 时，用 β和 δ表示。我们将在定理 4.15中进一步阐述。



$\beta\big((1\ 2),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)\big)$

$\delta_{3;2,4,3}\big((1\ 2\ 3)\big)$

例 3.7（自同态拟运算子）。设 X 是一个集合。 X的 *endomorphism operad*，记作 $\mathcal{E}_X$，由以下内容组成

- 这些集合
$$\mathcal{E}_X(n) = \mathbf{Sets}(X^n, X),$$
- 由以下方式给出的右群作用 $\mathcal{E}_X(n)\times\Sigma_n\to\mathcal{E}_X(n)$
$$(f\cdot\sigma)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)}),$$
- 元素 $\mathrm{id}\in\mathcal{E}_X(1)$ 是恒等函数 $1\colon X\to X$，并且
- 由以下方式给出的幺半群乘法
$$\mu(g;f_1,\ldots,f_n) = g\circ(f_1\times\cdots\times f_n).$$

公理的验证留给读者。

注 3.8（代数与自同态算子）。注 3.3 中的直觉通过代数这一概念与例 3.7 相关，参见第 8节。

也可以完全去掉对称群作用，从而得到非对称拟运算子或普通幺半群的概念。

定义 3.9（非对称歌剧）。一个 *non-symmetric operad* O 由以下部分组成

- 一个集合， $O(n)$，对每个自然数 n，
- 一个元素 $\mathrm{id}\in O(1)$，以及
- 函数
$$\mu\colon O(n)\times O(k_1)\times\cdots\times O(k_n)\to O(k_1+\cdots+k_n),$$

满足定义 3.1中的公理 1 和 2。

注 3.10（底层集合族）。每个对称歌剧都有一个底层 *symmetric collection* ，它由按自然数索引的集合 $\{O(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$以及对称群作用构成，但不包含选定的单位元或复合映射。对称集合族范畴是一个预层范畴；我们将在其中赋予一种幺半结构，使得幺半群恰好是定理9.4中的拟运算子。类似的构造若不涉及群作用，则表明每个非对称歌剧都有一个底层（非对称）集合族，它现在只是一个由$\mathbb{N}$索引的集合族。

例 3.11（Trimble 的拟运算子 E）。为了通过迭代富集定义弱 n-范畴，Trimble 构造了一个拟运算子 E，如下所示：

- 对于 $n \geq 0$， $E(n)$ 是连续端点保持映射的空间

$$[0,1] \to [0,n],$$

- 单位元 $1 \in E(1)$ 是恒等映射

$$[0,1] \to [0,1],$$

- 复合通过代入和重新参数化来描述。

关于 Trimble 的拟运算子 E 的更多细节可参见 [44, 定义 T_R] 和 [7, 例 1。7], 其中的变体见 [8]。这是 **Top** 中的一个非对称歌剧；据作者所知，它不具有对称歌剧的结构。

在最初的拓扑应用中， [53], 对称歌剧是核心对象。在 [15] Fiedorowicz 研究了编织歌剧，其中辫群取代了对称群。下面我们概述该定义。

定义 3.12（编织拟运算子，概要）。一个 *braided operad* 由以下组成

- 一个非对称歌剧 O 以及
- 对每个 n，都有一个 n阶辫群 B_n 在 $O(n)$ 上的右作用，

使得拟运算子乘法函数 μ 关于辫群作用是等变的，也就是说，满足以下两个方程。

1 假设 $x \in O(n)$、 $y_i \in O(k_i)$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 成立，且 $\tau_i \in B_{k_i}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 成立。那么，第一等变公理要求

$$\mu(x; y_1 \cdot \tau_1, \ldots, y_n \cdot \tau_n) = \mu(x; y_1, \ldots, y_n) \cdot \beta(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

成立。

2 假设 $x \in O(n)$、 $y_i \in O(k_i)$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 成立，且 $\sigma \in B_n$ 成立。那么，第二等变公理要求

$$\mu(x \cdot \sigma; y_1, \ldots, y_n) = \mu\left(x; y_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, y_{\sigma^{-1}(n)}\right) \cdot \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma)$$

成立。

备注 3.13（辫群的分块和与重复）。上述概述省略了辫子的 β, δ 的定义。这些运算的公式可见 [66, 例 5.1.11、5.1.13], ，尽管其几何解释很简单： β 对辫子取不交并，而 $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\tau)$ 则是将 τ 的第 i 股替换为 k_i 股平行的辫子。这些运算有时称为辫子的“缆线化”运算，例如文献 [11] 中所述。

例 3.14（编织拟运算子）。1. 设 $C_2(n)$ 为小 2-圆盘拟运算子的第 n 个空间，并设 $\widetilde{C_2\ n}$ ( ) 为其万有覆盖。于是， [15] 的例 3.1 表明，这些空间上存在编织拟运算子结构 $\widetilde{C_2\ n}$ ( )。2. 辫群自身也定义了一个编织拟运算子，它由命题 8.8 得到。

我们通过定义集合中的各种拟运算子范畴来结束本节，尽管读者可以将这些定义推广到任意对称幺半范畴中的拟运算子范畴。我们重点讨论对称歌剧的情形，并在后文解释如何修改定义以适用于非对称或编织拟运算子。

定义 3.15（对称算子系映射）。设 O, O' 是集合中的对称歌剧。那么，一个 *map of symmetric operads*（或简写为 *operad map*，当明确意图是保持对称群作用时）$f\colon O \to O'$ 由以下函数组成：对于每个自然数 $f_n\colon O(n) \to O'(n)$，并且对所有 $x \in O(n)$ $y_i \in O(k_i)$ $\sigma \in \Sigma_n$，以下公理成立。

$$f(\mathrm{id}_O) = \mathrm{id}_{O'}$$
$$f\left(\mu^O(x; y_1, \ldots, y_n)\right) = \mu^{O'}(f(x); f(y_1), \ldots, f(y_n))$$
$$f(x \cdot \sigma) = f(x) \cdot \sigma$$

下一个命题指出，对称歌剧及其映射构成一个范畴。证明留给读者。

命题 3.16。 *There is a category with*

- *objects the symmetric operads O in* **集合**,
- *morphisms the maps of symmetric operads between them,*
- *identities $1_O\colon O \to O$ given by*

$$(1_O)_n = 1_{O(n)}\colon O(n) \to O(n),$$

and

- *composition given by*

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n.$$

记号 3.17（对称算子系范畴）。命题 3.16 中的范畴称为 *category of symmetric operads (in* **集合***)*，记作 Σ-**拟运算子**。

注记 3.18（非对称歌剧范畴）。完全省略对称性后，我们也可以构造非对称歌剧的范畴（在 **集合**中），记作 **Op**。其对象是非对称歌剧（定义 3.9），态射所含的数据与对称歌剧映射（定义 3.15相同，但只需满足前两个公理，因为没有需要保持的群作用。复合和恒等态射的定义与对称歌剧完全相同。

注记 3.19（编织算子系范畴）。将对称性替换为辫子后，我们可以构造编织算子系的范畴（在 **集合**中），记作 B-**Op**。其对象是编织拟运算子（定义 3.12）。态射所含的数据与对称歌剧映射（定义 3.15相同，且满足形式上完全相同的公理，只要等变公理是用辫子而非对称性来解释即可。复合和恒等态射的定义与对称歌剧完全相同。

4 作用歌剧

对称拟运算子和编织拟运算子的公理都使用以下特征。

1. 对于每个 n，我们都有一个群 Λ_n 作用于集合 $O(n)$，该集合由拟运算子的 n元作用组成。每个这样的群都配备了一个同态 $\pi_n\colon \Lambda_n \to \Sigma_n$，因此 Λ_n 中的每个元素都有一个底层置换。

2. 第一等变公理要求提供一个函数族

$$\beta\colon \Lambda_{k_1} \times \cdots \times \Lambda_{k_n} \to \Lambda_{k_1 + \cdots + k_n}.$$

为了使其成为一个定义良好的函数，右群作用公理要求这些函数是群同态。

3. 第二等变公理要求额外给出一族函数

$$\delta_{n;k_1,\dots,k_n}\colon \Lambda_{k_1}\times\cdots\times\Lambda_{k_n}\to\Lambda_{k_1+\cdots+k_n}.$$

这些函数不必是群同态，但确实满足一些额外的公理。

本节中，我们在定义 *action operads* 4.1 中定义，以便统一处理满足上述条件的群族。在第 8 节中，我们为每个作用歌剧 Λ 定义一种 Λ-拟运算子；当$\Lambda=\Sigma$时会得到对称歌剧，当 Λ 是平凡群的作用歌剧时会得到非对称歌剧，而当 $\Lambda=B$时会得到编织拟运算子。我们对作用歌剧的定义不会提及 β 或 δ，而是采用一条公理，将群结构、幺半群乘法和底层置换联系起来。本节的主要结果是定理 4.15，我们将在其中证明，作用歌剧完全可以用上述函数 β、δ 来描述。本节将给出作用歌剧的两个例子（对称群和平凡群），其余例子留待第 5 节介绍。

定义 4.1（作用歌剧）。一个 *action operad* $(\Lambda,\ \pi)$由以下部分组成

- 集合范畴中的一个拟运算子 $\Lambda=\{\Lambda(n)\}$，其中每个 $\Lambda(n)$ 都带有群结构，并且
- 一个映射 $\pi\colon\ \Lambda\to\Sigma$，它同时是一个 operad 映射和一个群同态 $\pi_n\colon\ \Lambda(n)\to\Sigma_n$，对每个 n 都成立

使得还满足一条额外公理。记

$$\mu\colon \Lambda(n)\times\Lambda(k_1)\times\cdots\times\Lambda(k_n)\to\Lambda(k_1+\cdots+k_n)$$

为拟运算子 Λ中的乘法。令

$$\begin{aligned}&(g;f_1,\dots,f_n)\in\Lambda(n)\times\Lambda(k_1)\times\cdots\times\Lambda(k_n),\\&(g';f_1',\dots f_n')\in\Lambda(n)\times\Lambda(k_{g^{-1}(1)})\times\cdots\times\Lambda(k_{g^{-1}(n)}).\end{aligned}$$

我们要求

$$\mu\left(g';f_1',\dots f_n'\right)\mu\left(g;f_1,\dots,f_n\right)=\mu\left(g'g;f'_{g(1)}f_1,\dots,f'_{g(n)}f_n\right)\tag{1}$$

在群 $\Lambda(k_1+\cdots+k_n)$ 中。

记号 4.2。我们将一个作用 (Λ,π) 简记为 Λ。在记号中，我们将省略映射 π，因为我们没有理由研究单个拟运算子 Λ 通过 π 和 π' 配备两种不同作用歌剧结构的情形。

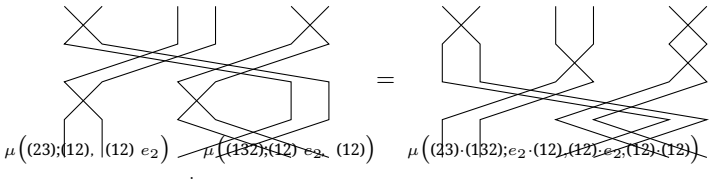
注 4 3 *operads from families of groups* 1 2 [63]，我们对作用歌剧的定义与 Wahl 学位论文第 节中出现的定义相同，但不要求每个 π_n 都是满射。它也与 Zhang 的工作 *group operads* 中出现的定义相同， [69], 尽管我们稍后会证明（见引理 4.12），Zhang 的条件 $e_1\in\Lambda$（1）为单位元可由其余公理推出。

现在我们给出本文中已经出现过的两个作用歌剧例子：对称群和平凡群。

例 4.4（对称群的作用歌剧）。对称歌剧 Σ 具有典范的作用歌剧结构。该结构由令 π 为恒等映射给出，并且它是作用歌剧范畴中的终对象（记号4.9）。

例 4.5（平凡群的作用歌剧）。集合范畴中的终对象歌剧 T 具有唯一的作用歌剧结构。由于 $T(n)$ 对每个 n都是单元素集合，因此群结构是唯一的，映射 π也如此。于是，唯一的作用歌剧公理自动成立，因为方程（1）两边都是恒等态射。这是作用歌剧范畴中的始对象。

注4.6。最后一条公理最好通过对称群的拟运算子 Σ来解释。将对称群元素从上到下读作置换，下面给出了映射 $\mu\colon \Sigma_3\times\Sigma_2\times\Sigma_2\times\Sigma_2\to\Sigma_6$.的最后一条公理的图示



作用歌剧本身也是一个范畴 **AOp** 的对象。该范畴的态射定义如下。

定义4.7（作用歌剧映射）。一个 *map of action operads* $f\colon \Lambda\to\Lambda'$由底层算子空间 $\Lambda\to\Lambda'$ 之间的映射 f: 组成，并满足

1. $\pi^{\Lambda'}\circ f=\pi^{\Lambda}$（即，$f$ 是关于 Σ 的 operad 映射）

以及 2. 每个 $f_n\colon\ \Lambda(n)\to\Lambda'(n)$ 都是群同态。

命题4.8。 *There is a category with*

- *objects the action operads* O *in***集合**,
- *morphisms as defined in Definition 4.7*,
- *identities* $1_\Lambda\colon\ \Lambda\to\Lambda$ *given by the identity morphism of* Λ *as an operad, and*
- *composition given by composition of maps of operads.*

记号 4.9（作用歌剧范畴）。命题 4.8 中的范畴 *category of action operads (in* **集合***)*，称为 **AOp**。

命题 **4 10** *Let* Λ π $\Lambda\to\Sigma$ *is a map of*. . (,) *action operads. be an action operad. The map* π:

现在我们来研究 $\Lambda(n)$ 在 n 取较小值时的一些结构。回顾记号 2.3，我们用 e_n 表示群 $\Lambda(n)$ 中的单位元。我们的许多证明都依赖于以下版本的埃克曼–希尔顿论证 [13]。

命题 **4 11** *Let* G *be a group with identity ele-*。(*ment* e *and suppose* φ $G\times G\to G$ *is a function. If* φ *is a homomorphism meaning* 埃克曼–希尔顿论证)。 ,: ,*that*

$$\varphi(g',h')\cdot\varphi(g,h)=\varphi(g'\cdot g,h'\cdot h),$$

and $\varphi(g,\ e)\ =g=\varphi(e,\ g)$ *for all elements* $g\in G$, *then*

$$\varphi(g,h)=g\cdot h$$

and G *is abelian.*

引理 4.12. *Let* Λ *be an action operad.*

1. In $\Lambda($

1 *the identity element for the group structure* e_1 *is equal to the identity*),, , *element for the operad structure id.*

2. The equation

$$\mu(e_n; e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = e_I$$

holds for any natural numbers n、i_j、$I = \sum_{j=1}^{n} i_j$。

3

The group $\Lambda(1)$ *is abelian*.

Proof. 对于第一个断言，我们将证明 $\mathrm{id} \cdot e_1 = \mathrm{id} \cdot \mathrm{id}$，因此 $e_1 = \mathrm{id}$，利用消去律。注意，由于 Σ_1 的唯一元素是恒等置换，作用歌剧公理方程（1）是

$$\mu(g'; f') \cdot \mu(g; f) = \mu(g'g; f'f)$$

当 g，$g' \in \Lambda(1)$ 时。因此我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \cdot e_1 &= \mu(\mathrm{id}; \mathrm{id}) \cdot \mu(\mathrm{id}; e_1) \\ &= \mu(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}; \mathrm{id} \cdot e_1) \\ &= \mu(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}; \mathrm{id}) \\ &= \mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \end{aligned}$$

利用 id 是拟运算子幺半群乘法的恒等态射、上面解释的 $n = 1$ 作用歌剧公理、e_1 是群乘法的单位元，以及再次利用 id 是拟运算子幺半群乘法的恒等态射。因此，$\mathrm{id} \cdot e_1 = \mathrm{id} \cdot \mathrm{id}$，正如所要求的，并且 $e_1 = \mathrm{id}$。

对于第二个断言，我们将 $\mu(e_n; e_{i_1}$、……、$e_{i_n})$ 写作 $\mu(e; e)$，并考虑该元素的平方。我们得到

$$\begin{aligned} \mu(e; \underline{e}) \cdot \mu(e; \underline{e}) &= \mu(e \cdot e; \underline{e} \cdot \underline{e}) \\ &= \mu(e; \underline{e}), \end{aligned}$$

其中，第一个等式是由最后一个作用歌剧公理以及

e $e \cdot e$ $e_{i_1} \cdot$ 被映射到恒等

$e_{i_1} \ldots e_{i_n} \cdot e_{i_n}$ $\mu\ e\ e$ $\Lambda\ \overline{I}$ $-$

置换这一事实得出的；这里的序列为 ,,。因此，(;) 是群 ( ) 的幂等元，所以必定是单位元 e_I。

对于最后一个结论，注意到特定的幺半群乘法映射 μ: $\Lambda(1) \times \Lambda(1) \to \Lambda(1)$ 是由作用歌剧公理保证的群同态，而 $\mathrm{id} = e_1$ 是双侧单位，因此命题 4.11 表明 μ 实际上是群乘法，并且 $\Lambda(1)$ 是阿贝尔的。

□

引理 4.13。 *Let* Λ *be an action operad, and* $g_i \in \Lambda(k_i)$ *for* $i = 2, \ldots, n$. *Then*

$$\mu(e_n; e_0, g_2, \ldots, g_n) = \mu(e_{n-1}; g_2, \ldots, g_n).$$

Similarly $\mu\ e_n\ h_1$ $h_{n-1}\ e_0 = \mu\ e_{n-1}\ h_1$ h_{n-1} *for any* $h_i \in \Lambda\ k_i$ *for* $i =$,(;, . . . , ,) (;,. . . ,) (), , 1 . . . $n-1$.

Proof. 我们只验证第一个断言，因为第二个可通过类似的计算得出。等式

$$\begin{aligned} \mu(e_n; e_0, g_2, \ldots, g_n) &= \mu\big(\mu(e_2; e_1, e_{n-1}); e_0, g_2, \ldots, g_n\big) \\ &= \mu\big(e_2; \mu(e_1; e_0), \mu(e_{n-1}; g_2, \ldots, g_n)\big) \\ &= \mu\big(e_2; e_0, \mu(e_{n-1}; g_2, \ldots, g_n)\big) \end{aligned}$$

分别由引理 4.12 的第二部分、代数结合律以及引理 4.12 的第一部分可得。因此，引理中的第一个等式可由 $n = 2$ 时的特殊情形以及等式

$$\mu(e_2; e_0, g) = g, \tag{2}$$

通过代入 $g = \mu(e_{n-1};\ g_2,\ \ldots\ldots,\ g_n)$。为了证明方程（2），我们采用与上文相同的方法，得到

$$\begin{aligned} g &= \mu(e_1; g) \\ &= \mu(\mu(e_2; e_0, e_1); g) \\ &= \mu(\mu(e_2; e_0, e_1); \mu(e_1; g)) \\ &= \mu(e_2; e_0, g). \end{aligned}$$

这个计算验证了方程（2），从而完成了引理陈述中第一个等式的证明。

□

推论 4.14. *Let Λ be an action operad. For any $g,\ h \in \Lambda(0)$ the equation*

$$g \cdot h = \mu(e_2; g, h)$$

holds. As a consequence, $\Lambda(0)$ is abelian.

Proof. 由下式给出的函数 $\Lambda(0) \times \Lambda(0) \to \Lambda(0)$

$$g, h \mapsto \mu(e_2; g, h)$$

根据作用歌剧公理方程（1），这是一个群同态，我们将在下文验证。

$$\mu(e_2; g', h') \cdot \mu(e_2; g, h) = \mu(e_2 \cdot e_2; g' \cdot g, h' \cdot h) = \mu(e_2; g' \cdot g, h' \cdot h)$$

为了应用命题 4.11 并得出 $g \cdot h = \mu(e_2; g,\ h)$，我们必须验证

$$\mu(e_2; e_0, g) = g = \mu(e_2; g, e_0)$$

对所有 $g \in \Lambda\ (0)$，但这由引理 4.13立即推出。因此，函数 $\mu\ (e_2;\ -,\ -)$ 满足命题 4.11中的假设。因此 $g \cdot h = \mu\ (e_2;\ g,\ h)$ 以及 $\Lambda\ (0)$ 是阿贝尔的。

□

例 3.6 中的对称群上的对称歌剧结构，是利用定义 2.13 和定义 2.15中的函数 β、δ 分别构造的。现在我们可以证明，任何作用歌剧都能以这种方式描述，正如本节引言中的说明所承诺的那样。

定理 4.15。 *An action operad Λ determines, and is uniquely determined by, the following:*

- *groups $\Lambda\ (n)$ together with group homomorphisms $\pi_n\colon\ \Lambda\ (n) \to \Sigma_n$,*
- *a group homomorphism*

$$\Lambda(k_1) \times \cdots \times \Lambda(k_n) \xrightarrow{\beta} \Lambda(k_1 + \cdots + k_n),$$

  for each $n > 0$ and $k_1,\ \ldots\ldots,\ k_n,$ and

- *a function of sets*

$$\Lambda(n) \xrightarrow{\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}} \Lambda(k_1 + \cdots + k_n)$$

  for each $n,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_n,$

subject to the axioms below. In what we write below, we use the following notational conventions.

- *The symbols $f\ g\ h$ with or without subscripts always refer to an element of some$,,,,()$ group $\Lambda\ n$.*

- *The symbols j k m n p are all natural numbers and i is a natural number between 1 and n.*

Axioms:

1. *The homomorphisms β are natural with respect to the maps π_n, where $K = k_1 + \cdots + k_n$.*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(k_1) \times \cdots \times \Lambda(k_n) & \xrightarrow{\beta} & \Lambda(K) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1 \times \cdots \times \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Sigma_{k_1} \times \cdots \times \Sigma_{k_n} & \xrightarrow[\beta]{} & \Sigma_K \end{array}$$

2. *The homomorphism $\beta\colon \Lambda(k) \to \Lambda(k)$ is the identity.*

3. *The homomorphisms β are associative in the sense that the equation*

$$\beta(\underline{h_1}, \ldots, \underline{h_n}) = \beta(\beta(\underline{h_1}), \ldots, \beta(\underline{h_n}))$$

holds, where $\underline{h_i} = h_{i1}, \ldots, h_{ij_i}$.

4. *The functions $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}$ are natural with respect to the maps π_n where $K = k_1 + \cdots + k_n$.*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(n) & \xrightarrow{\delta} & \Lambda(k_1 + \cdots + k_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Sigma_n & \xrightarrow[\delta]{} & \Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \end{array}$$

5. *The function $\delta_{n;1,\ldots,1}\colon \Lambda(n) \to \Lambda(k_1 + \cdots + k_n)$ maps e_n to $e_{k_1+\cdots+k_n}$ and $\pi_n\colon \Lambda(n) \to \Sigma_n$ is the identity. The function $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}\colon \Lambda(n) \to \Lambda(K)$*

6. *The equation $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(g)\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}(h) = \delta_{n;j_1,\ldots,j_n}(gh)$ holds when*

$$k_i = j_{h^{-1}(i)}.$$

7. *The functions δ are associative in the sense that the equation*

$$\delta_{m_1+\cdots+m_n;\underline{p_1},\ldots,\underline{p_n}}(\delta_{n;m_1,\ldots,m_n}(g)) = \delta_{n;P_1,\ldots,P_n}(g)$$

holds where $P_i = p_{i1} + \cdots + p_{im_i}$ and $p_i = p_{i1} \ldots p_{im_i}$. We note that when $m_i = 0$ then the list p_i is empty and P_i is defined to be 0.

8. *The equation*

$$\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(g)\beta(h_1, \ldots, h_n) = \beta(h_{g^{-1}(1)}, \ldots, h_{g^{-1}(n)})\delta_{n;k_{g^{-1}(1)},\ldots,k_{g^{-1}(n)}}(g)$$

holds, where $h_i \in \Lambda(k_i)$.

9. *The equation*

$$\beta(\delta_1(g_1), \ldots, \delta_n(g_n)) = \delta_c(\beta(g_1, \ldots, g_n))$$

holds, where $\delta_i(g_i)$ is shorthand for $\delta_{k_i;\, m_{i1},\, \ldots\ldots,\, m_{ik_i}}(g_i)$ and δ_c is shorthand for

$$\delta_{k_1+\cdots+k_n;m_{11},m_{12},\ldots,m_{1k_1},m_{21},\ldots,m_{nk_n}}.$$

Proof. 设 Λ 为一个作用歌剧，并定义

$$\beta(g_1,\dots,g_n)=\mu(e_n;g_1,\dots,g_n),$$
$$\delta_{n;k_1,\dots,k_n}(g)=\mu(g;e_{k_1},\dots,e_{k_n}).$$

由于 $\pi\colon\ \Lambda\to\Sigma$ 是一个operad 映射，公理（1）和（4）根据 Σ 在例3.6中的幺半群结构定义成立。由于 Λ 是集合的拟运算子，公理（2）和（5）由算子单位公理和引理4.12的第一部分推出；公理（3）、（7）和（9）则由歌剧结合公理和引理4.12的第二部分推出。公理（6）和（8）是附加作用歌剧公理的特殊情形，β 是一个群同态这一事实也同样如此。

反过来，给定上述数据，我们只需定义拟运算子乘法，验证拟运算子的单位公理和乘法公理，最后检查作用歌剧公理。乘法定义为

$$\mu(g;h_1,\dots,h_n)=\delta_{n;k_1,\dots,k_n}(g)\beta(h_1,\dots,h_n) \tag{3}$$

其中 $h_i\in\Lambda(k_i)$。拟运算子结构的恒等态射为 $e_1\in\Lambda(1)$。

现在验证拟运算子的单位公理。设 $g,h\in\Lambda(n)$。那么

$$\begin{aligned}\mu(e_1;g)&=\delta(e_1)\beta(g)\\&=e_1\cdot g\\&=g,\\ \mu(h;e_1,\dots,e_1)&=\delta_{n;1,\dots,1}(h)\beta(e_1,\dots,e_1)\\&=h\cdot e_n\\&=h\end{aligned}$$

根据公理（2）和（5），并利用 β 是一个群同态这一事实。因此，e_1 满足幺半群乘法的单位公理。

对于拟运算子的结合律公理，设

- $f\in\Lambda(m)$,

当 $i=1,\dots,m$ 时，- $g_i\in\Lambda(n_i)$，并且

- $h_{ij}\in\Lambda(p_{i,j})$ 当 $i=1,\dots,m$ 以及 $j=1,\dots,n_i$。

此外，令 $P_i=p_{i1}+\cdots+p_{in_i}$ 和 h_i 表示列表 h_{i1}，h_{i2}、……、h_{in_i}。接下来我们必须证明

$$\mu\big(f;\mu(g_1;\underline{h_1}),\dots,\mu(g_m;\underline{h_m})\big)=\mu\big(\mu(f;g_1,\dots,g_m);\underline{h_1},\dots,\underline{h_m}\big).$$

根据定义，这个方程的左边是

$$\delta_{m;P_1,\dots,P_m}(f)\beta\big(\mu(g_1;\underline{h_1}),\dots,\mu(g_m;\underline{h_m})\big),$$

and

$$\mu\left(g_i;\underline{h_i}\right)=\delta_{n_i;p_{i1},\dots,p_{in_i}}(g_i)\beta\left(h_{i1},\dots,h_{in_i}\right).$$

从这里开始，我们省略 δ 的下标。由于 β 是一个群同态，我们可以将左边改写为

$$\delta(f)\beta\big(\delta(g_1),\dots,\delta(g_m)\big)\beta\big(\beta(\underline{h_1}),\dots,\beta(\underline{h_m})\big)$$

其中我们省略了 δ上的下标。根据公理（3），

$$\beta\big(\beta(\underline{h_1}),\dots,\beta(\underline{h_m})\big)=\beta\left(\underline{h_1},\dots,\underline{h_m}\right).$$

此外，上面的公理（9）表明

$$\beta\big(\delta(g_1),\ldots,\delta(g_m)\big)=\delta\big(\beta(g_1,\ldots,g_m)\big).$$

因此，我们已经证明拟运算子结合律公理的左侧等于

$$\delta(f)\delta\big(\beta(g_1,\ldots,g_m)\big)\beta\left(\underline{h_1},\ldots,\underline{h_m}\right).$$

现在，右侧为

$$\mu\big(\mu(f;g_1,\ldots,g_m);\underline{h_1},\ldots,\underline{h_m}\big),$$

根据定义，这等于

$$\delta\big(\mu(f;g_1,\ldots,g_m)\big)\beta\left(\underline{h_1},\ldots,\underline{h_m}\right).$$

消去 $\beta\left(h_1,\ldots,h_m\right)$ 项后，验证拟运算子结合律公理就归结为证明

$$\delta(f)\delta\big(\beta(g_1,\ldots,g_m)\big)=\delta\big(\mu(f;g_1,\ldots,g_m)\big). \tag{4}$$

根据 μ 的定义，

$$\delta\big(\mu(f;g_1,\ldots,g_m)\big)=\delta\big(\delta(f)\beta(g_1,\ldots,g_m)\big)$$

而这本身等于

$$\delta\big(\delta(f)\big)\delta\big(\beta(g_1,\ldots,g_m)\big) \tag{5}$$

根据上面的公理（6）。

现在，$\delta(f)$ 在方程（4）左侧使用了 $\delta_{n;P_1,\ldots,P_n}$，而方程（$\delta(\delta(f))$（5）实际上是

$$\delta_{m_1+\cdots+m_n;q_{ij}}\left(\delta_{n;m_1,\ldots,m_n}(f)\right)$$

其中，q_{ij} 根据公理（6）定义为

$$q_{ij}=p_{i,g_i^{-1}(j)}$$

利用公理（β）和（π）的相容性。根据公理（1）。根据公理（7），这些 δ 的复合态射于是为 $\delta_{n;Q_1,\ldots,Q_n}$，其中 $Q_i=q_{i1}+\cdots+q_{im_i}$。但根据 q_{ij} 的定义，我们立即可知 $Q_i=P_i$，因此方程（$\delta(f)$ 中的 4）等于方程（$\delta(\delta(f))$ 中出现的 5），从而证明了拟运算子结合律公理。

记 $\mu(g;\ h)=\mu\left(g;\ h_1,\ldots,h_n\right)=$和 $\mu(g';\ h')=\mu(g';\ h'_1,\ldots,h'_n)$，则作用歌剧公理就是下面的计算，它用到了公理（4）和（8）。

$$\begin{aligned}\mu(g;\underline{h})\mu(g';\underline{h'})&=\delta\left(g\right)\beta\left(h_1,\ldots,h_n\right)\delta\left(g'\right)\beta\left(h'_1,\ldots,h'_n\right)\\&=\delta\left(g\right)\delta\left(g'\right)\beta\left(h_{g'(1)},\ldots,h_{g'(n)}\right)\beta\left(h'_1,\ldots,h'_n\right)\\&=\delta\left(gg'\right)\beta\left(h_{g'(1)}h'_1,\ldots,h_{g'(n)}h'_n\right)\\&=\mu\left(gg';h_{g'(1)}h'_1,\ldots,h_{g'(n)}h'_n\right)\end{aligned}$$

□

命题 4 16 2 17, [69] *Let Λ be an action operad. Then the homo-*。（推论 .）。：（）*morphisms $\pi_n\ \Lambda\ n\ \to\Sigma_n$ are either all surjective or all the zero map.*

Proof. 我们将分别证明每种情况。对于 $n=0$，1，这两种情况相同，因为两者Σ_0，Σ_1 都是平凡群，因此，任何以其中之一为陪域的同态既是满射，也是零映射。由于 Σ_2 只有一个非恒等元，任何同态 $G\to\Sigma_2$ 必然是满射或零映射。

假设 π_2: $\Lambda(2) \to \Sigma_2$ 是满射，因此存在 $g \in \Lambda(2)$，使得 $\pi_2(g) = (1\ 2)$。令 $n > 2$。由于 Σ_n 由相邻换位 $(a\ a+1)$ 生成，我们将证明每个这样的元素都在 π_n 的像中。将 x^i 记为 i-元组 $x, x, \ldots\ldots, x$。那么 $(a\ a+1) = \beta(e_1{}^{a-1}, (1\ 2)\ e_1{}^{n-a-1})$ 属于 Σ，因此

$$\begin{aligned}(a\ a+1) &= \beta(\underline{e_1}{}^{a-1}, (1\ 2), \underline{e_1}{}^{n-a-1}) \\ &= \beta\big(\underline{\pi_1(e_1)}^{a-1}, \pi_2(g), \underline{\pi_1(e_1)}^{n-a-1}\big) \\ &= \pi_n\big(\beta(\underline{e_1}{}^{a-1}, g, \underline{e_1}{}^{n-a-1})\big)\end{aligned}$$

根据公理（1）4.15，因此 π_n 对所有 $n > 2$ 都是满射，条件是 π_2 是满射。

现在我们考虑 π_2 是零映射的情况。假设存在 $g \in \Lambda(n)$，使得 $\pi_n(g) = \sigma \neq e_n$ 属于 Σ_n。那么我们可以找到 $1 \leq i < j \leq n$，使得 $\sigma(j) < \sigma(i)$。考虑元素

$$h = \delta_{n;\underline{0}^{i-1},1,\underline{0}^{j-i-1},1,\underline{0}^{n-j}}(g) \in \Lambda(2).$$

根据 π_2 是零映射这一假设，我们必须有 $\pi_2(h) = e_2$，但根据公理（4）4.15，我们还可以计算出

$$\pi_2(h) = \delta_{n;\underline{0}^{i-1},1,\underline{0}^{j-i-1},1,\underline{0}^{n-j}}\big(\pi_n(g)\big) = \delta_{n;\underline{0}^{i-1},1,\underline{0}^{j-i-1},1,\underline{0}^{n-j}}(\sigma).$$

元素 $\delta_{n;0^{i-1},\ 1,\ 0^{j-i-1},\ 1,\ 0^{n-j}}(\sigma)$ 根据 i、j 以及定义2.15的选择，等于 $(1\ 2)$。对 $\pi_2(h)$ 的这两种计算相互矛盾，因此不存在这样的 $g \in \Lambda(n)$。所以，如果 π_2 是零映射，那么对所有 $n > 2$，π_n 也是零映射。 □

5 例子

在本节中，我们将扩展作用歌剧的例子和反例集合族。除了例子 5.4之外，我们给出的例子都曾在其他地方出现过。我们给出的反例大多源自作者在介绍这项研究的初步报告后收到的问题。

例子 5.1（辫群的作用歌剧）。可以构造一个拟运算子 B，其中 $B(n)$ 是第 n个辫群的底层集合，B_n。我们利用备注 β、δ 中的函数来定义拟运算子的幺半群结构。3.13。Yau 在 [66, 命题 5.2 中验证了这些群和函数满足作用歌剧的公理。5], 不过，我们注意到，定理 4.15 中的九条公理都可以直接通过 β、δ 的几何定义推出。

例子 5.2（带状辫群的作用歌剧）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，*ribbonbraid group* RB_n 定义为 $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n$ 的半直积，其中，利用辫子 γ 的底层置换，B_n 在 $\mathbb{Z}^n$ 上的作用由以下公式给出

$$\gamma \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a_{\gamma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\gamma^{-1}(n)}).$$

或者，RB_n 可以描述为带有标架的辫子的同伦类群 [34, 35, 55]。在 [34, 35] 上文的作用描述中没有使用逆元，但为了与定义 3.12保持一致，我们选择以这种方式表示。对 RB_n 的纯代数表示由生成元给出

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, t_1, \ldots, t_n$$

其中

- 这些 σ_i 是通常的辫群生成元，并满足辫群的关系，而且
- 是 t_i ，它们是 *full twists* ，并满足额外的方程

$$t_i t_j = t_j t_i,$$
$$\sigma_i t_j = t_{\sigma_i^{-1}(j)} \sigma_i$$

对所有的 i, j。

特别地，对于任意给定的辫子 $\sigma \in B_n$，这些关系意味着 $\sigma t_i = t_{\sigma^{-1}(i)}\sigma$。

作用歌剧结构与备注 3.13 中的辫群结构非常相似，其性质在 [63]中有所研究。每个带状辫子都有一个由其底层辫子给出的底层置换，而运算 β是带状辫子的不交并，与辫子的情况相同。特别地，我们可以将每条带的扭转描述为 $t_i = \beta(e_{i-1}, t, e_{n-i})$，其中 $t \in RB_1$是单条带的扭转。带状辫子的"缆线"操作 δ 比辫子的缆线操作稍微复杂一些。不过，对于没有任何扭转的带状辫子，这很容易描述，且与标准缆线操作相同：函数 $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}$ 将第一条带替换为 k_1 条带，依此类推，然后根据底层辫子将它们分块编织。如果涉及扭转，则必须谨慎地加以描述。首先，我们描述第 2]节中的"Garside 半扭转" [17, ：

$$\gamma_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n)(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})\cdots(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1).$$

这是唯一的正辫（即可以写成只含有 σ_i 的乘积），其中辫的任意两股都恰好交叉一次。其底层置换是逆序置换，也就是说，其平方（即完整 Garside 扭转）的底层置换是恒等态射。类似地，每个带状扭转 $t_i \in RB_n$ 的底层置换 e_n 都只是恒等态射。完整 Garside 扭转 γ_n^2 的一个重要性质是，它与任何其他作用于 n 条线上的辫都可交换；也就是说， $\gamma_n^2\sigma = \sigma\gamma_n^2$ 对任意 $\sigma \in B_n$ 都成立。

现在， RB_n 中的任意元素都可以利用将元素描述为带框辫 [34] 的方式来描述。每个元素都可以唯一地表示为以下形式

$$t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}\sigma$$

其中 $m_i \in$Z 且 $\sigma \in B_n$；我们将其解释为 $t_i^{m_i}$，表示在按照 σ 对带进行编织后，带 i 中整圈扭转的数量。对于完整带状缆线操作 δ，我们描述一种一般形式：

$$\delta^{RB}_{n;k_1\cdots k_n}(t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}\sigma) = \beta(\underline{t^{m_1}},\ldots,\underline{t^{m_n}})\beta(\gamma_{k_1}^{2m_1},\ldots,\gamma_{k_n}^{2m_n})\delta^{B}_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma).$$

在这个表达式中， $\underline{t^{m_i}}$表示将 t^{m_i} 重复 k_i 次。

抽象地说，当一个扭转被"复制"时，每条新带都会获得一个完整扭转，随后该组中的所有带都会通过一次完整的 Garside 扭转进行编织。从物理角度看，这相当于先在一条宽大的带上施加一个完整扭转，再将其剪成 k条新带，同时保持端点不变，然后把每条新带上的扭转移至带状辫子的顶部。 [66, 第 6]章介绍了类似的解读，并给出了许多例子。这里不详细验证这些公理，因为它们与辫群的公理大体相似，或者可以利用上文给出的 t_i' 和 Garside 扭转的交换关系。

例 5.3（仙人掌群的作用歌剧）。由 Henriques 和 Kamnitzer 在 n中定义的 [23] -果实仙人掌群的拟运算子具有作用歌剧结构，我们将在第 16节讨论这一结构。

例 5.4（由阿贝尔群构造的作用歌剧）。每个阿贝尔群 A 都能产生一个作用歌剧 $A^\bullet$，构造如下。群 $A^\bullet(n)$ 是 n 个 A、A^n 的直和。要求单位元为 $e \in A^1$，乘法定义为

$$\mu((a_1,\dots,a_n);\underline{b_1},\dots,\underline{b_n}) = (a_1+\underline{b_1}, a_2+\underline{b_2},\dots,a_n+\underline{b_n})$$

其中 $\underline{b_i}$ 是字符串 b_{i1}，…，b_{ik_i}，而 $a_i+\underline{b_i}$ 是

$$a_i+b_{i1}, a_i+b_{i2},\dots,a_i+b_{ik_i}.$$

映射 $\pi_n\colon A^\bullet(n) \to \Sigma_n$ 是零映射。

用映射刻画作用歌剧 π、β 和 δ（如上面的定理所述）4.15 使我们能够更轻松地检验反例，如下所示。不过，其中一些对象，例如循环群、反射群和超八面体群，确实构成交叉单纯群；备注5.7中将结合作用歌剧讨论这些群。

非例 5.5（对称群的子群）。根据命题4.16，唯一一个 $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$ 其同态 π_n 是单射但不是满射的作用歌剧 π，$\Lambda \to \Sigma$ 是平凡群的作用歌剧。因此，不存在由对称群的真非平凡子群构成且具有作用歌剧结构的族。特别是，循环群族 $\{C_n\}$、反射群族 $\Lambda(n) = C_2$ 中的 [40], 交错群族 $\{A_n\}$ 都不具有作用歌剧结构。

非例 5.6（超八面体群）。在 [69], 的例 2.28 中，Zhang 描述了超八面体群序列 $H_n = C_2 \wr \Sigma_n$ 不构成作用拟运算子的一个方式。我们将在此澄清该反例，同时描述另一个反例。群 H_n 有多种描述方式，但我们将其描述为带符号置换矩阵，即可逆的 $n\times n$-矩阵，其元素由 -1、0 或 1 组成，并且每一行和每一列恰好有一个非零元素，这与备注 2.17中的置换矩阵类似。

为了将超八面体群描述为作用拟运算子，我们可以使用定理 4.15 并定义映射 π、β 和 δ。显然的映射 $\pi_n\colon H_n \to \Sigma_n$对带符号置换矩阵取“绝对值”，从而得到底层置换。接着，我们定义 β 为带符号置换矩阵的分块和，其方式与对称群中的情形大致相同。

对于这些映射 δ，似乎有两种合理的方案可供尝试。第一种方案通过先令 r_n 为一个所有元素均为 -1 的逆序带符号置换矩阵来捕捉 Zhang 的反例，也就是说，令其为反对角线上每个元素都是 -1 的 $n\times n$ 矩阵。接着，我们将 $\delta_{n;k_1,\dots,k_n}(\sigma)$ 定义为分块和 $\beta(r_{k_1},\dots,r_{k_n})$ 在 r_n 与 σ 的乘积作用下所得的结果。例如，

$$\begin{aligned}\delta_{3;2,1,3}\left(\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\right) &= \left(r_3\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\right) * \begin{bmatrix}r_2&0&0\\0&r_1&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}r_2&0&0\\0&r_1&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0&-r_1&0\\0&0&r_3\\r_2&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

这一选择给出 $\delta_{1;n}([-1]) = r_n$，如 [69] 所示。像上文一样，取 $\sigma = ((2\ 3); -1, 1, -1)$，我们可以证明公理（8）在定理 4.15 中不成立。公理左侧将为 $\delta_{1;3}([-1])\beta(\sigma) = r_n \cdot \sigma = ((1\ 3\ 2); 1, -1, 1)$。然而，公理右侧将为 $\beta(\sigma)\delta_{1;3}([-1]) = \sigma \cdot r_n = ((1\ 2\ 3); 1, -1, 1)$。显然，若将 $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma) = (\sigma \cdot r_n) * \beta(r_{k_1}, \ldots, r_{k_n})$ 定义为……，也会遇到同样的问题。

另一种定义 δ 的方法是取 $\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\sigma) = \sigma * \beta(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})$，而不涉及反转顺序的置换 r_n，其效果是使 $\delta_{1;n}([-1]) = -I_n$。这样确实满足公理 (8)，但转而不满足公理 (6)；通过下面的反例可以看出这一点：

$$\delta_{3;2,1,3}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\delta_{3;3,1,2}\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$\neq \delta_{3;3,1,2}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right).$$

虽然超八面体群按照定义 4.1的意义并不构成作用歌剧，但这个群族确实满足第 3 节中 [2, 第 3 节。2] 所述的 *general* 作用歌剧。

注 5.7（交叉单纯群）。Krasauskas [40] 以及 Fiedoriwicz 和 Loday [16] 的交叉单纯群与作用歌剧有如下联系。对于对象，我们定义一个函子 $C\colon \mathbf{AOp} \to \mathbf{CSGrp}$，从作用歌剧范畴到交叉单纯群范畴，并定义 $C(\Lambda)_{n+1} = \{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。我们必须检查这个群族构成一个单纯集合。面映射和退化映射由 Λ 的幺半群复合定义，如 [39, 构造 1.1] 和 [4, 第 2]节所示。我们可以根据定理 4.15 的映射 δ 来解释这些映射，其中我们令 $g \in \Lambda_n$ 通过 $\pi_n(g) \in \Sigma_n$ 作用于指标 $\{0, \ldots, n-1\}$，这与单纯集合的标准指标编排一致，而不是 $\{1, \ldots, n\}$：

- 面映射 $d_{n;i}\colon \Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, 定义如下

$$d_{n;i}(g) = \delta^i_{n+1;\underline{1},0,\underline{1}}(g)$$

  其中 0 位于位置 $g^{-1}(i)$。

- 退化映射 $s_{n;i}\colon \Lambda_{n+1} \to \Lambda_{n+2}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, 定义如下

$$s_{n;i}(g) = \delta^i_{n+1;\underline{1},2,\underline{1}(g)}$$

  其中 2 位于位置 $g^{-1}(i)$。

验证单纯恒等式需要反复使用公理（7）。例如，取 $i \le j$，我们要求 $d_j d_i = d_i d_{j+1}$。用我们的映射来表述，这一要求是

$$\delta^j_{n;\underline{1},0,\underline{1}}(\delta^i_{n;\underline{1},0,\underline{1}}(g)) = \delta^i_{n;\underline{1},0,\underline{1}}(\delta^{j+1}_{n;\underline{1},0,\underline{1}}(g)).$$

根据公理（7），取左边的 $m_{g^{-1}(i)} = 0$, $p_{g^{-1}(i)} = \emptyset$ 和 $P_{g^{-1}(i)} = 0$，以及右边的 $m_{g^{-1}(j+1)} = 0$, $p_{g^{-1}(j+1)} = \emptyset$ 和 $P_{g^{-1}(j+1)} = 0$，即可验证这一点。例如，最左边的函数在此被解释为 $\delta^j_n;1,\emptyset,1,0,1$。由于 $i \le j$，它们二者都等于同一个元素

$$\delta_{n+1;\underline{1},0,\underline{1},0,\underline{1}}(g),$$

其中每个 0 都位于位置 $g^{-1}(i) = (\delta^j_n;1,0,1(g))^{-1}(i)$ 和 $g^{-1}(j+1) = (\delta^i_{n;1},0,1)(g)^{-1}(j)$，由此可得恒等态射。类似的论证可得其余的单纯形恒等式，同样要用到公理（7）和公理 (5)。

根据 [40, 定义 1.3] 或 [16, 命题 1.7], , 还需要检验以下公理:

- 映射 $\pi^{C}{}_{(\Lambda_n} = \pi^{\Lambda}_{n+1})$: $\Lambda_{n+1} \to \Sigma_{n+1}$ 构成一个单纯映射,
- 每个 $\pi^{C}{}_{(\Lambda)_n}$ 都是一个同态,
- $d_{n;i}(gh) = d_{n;i}(g) d_{n;g^{-1}(i)}(h)$,
- $s_{n;\,i}(gh) = s_{n;\,i}(g)\, d_{n;\,g^{-1}(i)}(h)$ 。

后两个公理可由公理（6）立即推出，第二个显然成立，而第一个则需要下图中的图表交换，其中右侧图表中的 δ_i 和 $\delta_{g^{-1}(i)}$ 是单纯范畴 Δ中的面映射。

$$\begin{tikzcd}
{[n+1]} \arrow[r, "\sigma_{g^{-1}(i)}"] \arrow[d, "s_i(g)"'] & {[n]} \arrow[d, "g"] \\
{[n+1]} \arrow[r, "\sigma_i"'] & {[n]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[n-1]} \arrow[r, "\delta_{g^{-1}(i)}"] \arrow[d, "d_i(g)"'] & {[n]} \arrow[d, "g"] \\
{[n-1]} \arrow[r, "\delta_i"'] & {[n]}
\end{tikzcd}$$

这两个公理均可由公理（4）以及 Σ 是一个交叉单纯群、因而已经满足这些公理这一事实自动推出。下面给出退化映射的情形，面映射的论证几乎完全相同。

$$\begin{aligned}
\sigma_i(\pi_{n+2}(s_i^{\Lambda}(g))) &= \sigma_i(\pi_{n+2}(\delta^{i,\Lambda}_{n+1;\underline{1},2,\underline{1}}(g))) \\
&= \sigma_i(\delta^{i,\Sigma}_{n+1;\underline{1},2,\underline{1}}(\pi_{n+1}(g))) \\
&= \sigma_i(s_i^{\Sigma}(\pi_{n+1}(g))) \\
&= \pi_{n+1}(g)(\sigma_{\pi_{n+1}(g)^{-1}(i)})
\end{aligned}$$

对于态射，给定一个作用歌剧映射 f: $\Lambda \to \Lambda'$，我们定义 $C(f)_n = f_{n+1}$。根据定义 4.7 中的公理，我们自动得到 $\pi_n^{\Lambda'} \circ f_n = \pi_n^{\Lambda}$ 对每个 n,
C (f) 是单纯映射，
因为 f 是 operad 映射，且每个 f_n 都是同态。函子性可直接得出。

由于移除了群 Λ_0，这个函子既不忠实，也不保守。Zhang [69, 第 2 节.4] 也较为详细地描述了这种联系与作用歌剧的关系，而 Yoshida [67] 则将作用歌剧与相关概念——交叉区间群 [3]联系起来。Semidetnov 的 *operadic* 交叉单纯群可能对应于满足 Λ_0 是平凡群 [60, 定义 2.4]的作用歌剧。

注5.8（克隆系统）。另一种与作用歌剧密切相关的代数结构是克隆系统 [68]。克隆系统由一个 $\mathbb{N}$ 指标群族（G_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 构成，并带有若干结构映射，包括针对每个 $G_m \to G_n$ 的有向系统态射 $m \le n$、针对每个 $G_n \to \Sigma_n$ 的表示映射 n，以及针对每个 $G_n \to G_{n+1}$ 的克隆映射 n ，这些映射与定义 δ 4.1 中的重复映射 十分相似。

Witzel 和 Zerensky [65] 在研究群族的广义汤普森群的背景下定义了这些概念，而 Thumann [62] 还研究了由与编织算子相关的范畴的基本群产生的类汤普森群。这两种研究汤普森群的方法在[2], 中得到了细化并建立了联系，其中证明了作用歌剧与受限拟运算子克隆系统和受限克隆 PRO 直接对应。

6 作为扩张的作用算子

在本节中，我们将作用歌剧置于群范畴中的算子与对称歌剧之间。我们证明两个主要结果。在命题 6.3中，我们证明，群范畴中的算子恰好就是同态 π_n 均为零映射的作用歌剧；在 [69]中，这些作用歌剧被称为“非交叉群算子”。随后，我们转而研究作用歌剧的核、像和短正合列。最后，我们在推论 6.8中证明，每个具有满射 π_n的作用歌剧都可以表示为作用歌剧 Σ 与群范畴中的一个算子的扩张。

注 6.1（群范畴中的算子）。范畴 $\mathbf{Grp}$ 由群及群同态构成，借助群的笛卡尔积成为对称幺半范畴。因此，我们可以构造群范畴中的算子范畴，记作 $\mathbf{Op}(\mathbf{Grp})$，如注 3.10所述。该范畴的对象是算子 P 在**集合** 中，并且每个 $P(n)$ 上都附加了群结构，使得幺半群乘法是群同态，且 $\mathrm{id} = e_1$ 属于 $P(1)$；态射 $f\colon P \to Q$是满足以下条件的算子映射：$f_n\colon P(n) \to Q(n)$ 对每个 n 都是群同态。

命题 6.2. *Let P be an operad in* $\mathbf{Grp}$*. Then there is an action operad, denoted $Z(P)$ with*

- $Z(P)(n) = P(n)$,
- *the same operadic multiplication as P, and*
- *each $\pi_n\colon P(n) \to \Sigma_n$ the zero map.*

Furthermore if Λ is an action operad for which each π_n is the zero map then the ,,() $\mathbf{Grp}$ groups $\Lambda\ n$ define an operad in using the operadic multiplication of Λ.

Proof. 容易验证，利用定义1中的方程（4.1，作用歌剧的幺半群乘法 μ 是群同态，当且仅当 π_n 对所有 n都为零。

□

命题 6.3。 *The assignment on objects $P \mapsto Z(P)$ extends to a functor*

$$Z\colon \mathbf{Op}(\mathbf{Grp}) \to \mathbf{AOp}.$$

This functor is full faithful and its image at the level of objects is precisely the collec- ,, tion of action operads Λ for which each π_n is the zero map.

Proof. 设 $f\colon P \to Q$ 是 Op(Grp) 中的一个态射，也就是说，f由一族群同态 $f_n\colon P(n) \to Q(n)$ 组成，它们定义了一个 operad 映射。定义 $Z(f)_n = f_n$。我们必须验证这些函数定义了一个作用歌剧映射；函子性将立即成立，因为 Op(Grp) 和 AOp 中的复合与恒等态射都是逐层给出的。由于每个作用歌剧 $Z(P)$ 对所有 n 都有 π_n 零映射，因此定义 4.7中的第一条编号公理显然成立。第二条编号公理由 Op(Grp) 中态射的定义推出。由此证明了 $Z(f)$ 是一个作用歌剧映射；同样的推理表明，每个作用歌剧映射 $g\colon Z(P) \to Z(Q)$ 都是某个唯一的 $g'\colon P \to Q$（属于 Op(Grp)）所对应的 $Z(g')$，因此 Z 是忠实且满的。

□

命题 6.4。 *Let $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ be a map of action operads.*

1. *The groups*
$$\operatorname{Ker} f_n = \{x \in \Lambda(n) \,:\, f(x) = e_n\}$$
form an action operad for which the inclusion $f \hookrightarrow \Lambda$ *is a map of action* 核 *operads.*
2. *The groups*
$$\operatorname{Im} f_n = \{f(x) \,:\, x \in \Lambda(n)\}$$
form an action operad for which the inclusion $\pi \hookrightarrow \Lambda'$ *is a map of action* 像 *operads.*

Proof. 首先，我们定义 $\pi_n^{\operatorname{Ker} f}$: Ker $f_n \to \Sigma_n$ 为复合群同态

$$\operatorname{Ker} f_n \hookrightarrow \Lambda(n) \xrightarrow{\pi_n^{\Lambda}} \Sigma_n.$$

由于 $\pi^{\Lambda} = \pi^{\Lambda'} \circ f$，复合映射 $\pi_n^{\operatorname{Ker} f}$ 均为零映射。接下来，我们验证子群 Ker f_n 在幺半群乘法下封闭。设 $y \in$ Ker f_n 且 $x_i \in$ Ker f_{k_i}，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$。那么

$$\begin{aligned} f\big(\mu(y; x_1, \ldots, x_n)\big) &= \mu\big(f(y); f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) \\ &= \mu(e_n; e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}) \\ &= e_{k_1 + \cdots + k_n} \end{aligned}$$

根据 f 是 operad 映射这一假设， y 以及每个 x_i 都属于核，并由引理 4.12 可知，这表明核子群在幺半群乘法下封闭。歌剧单位元 id $\in \Lambda(1)$ 是 Ker f_1 的一个元素，e_1 根据引理 4.12，因为它等于 f_n。因此，群 Ker Λ 构成 Λ 的一个子歌剧，而 Ker f 的作用歌剧公理，即定义 4.1 中的方程（1），可直接由 Λ 的同一公理推出。这就完成了第一项结论的证明；事实上，由命题 6.2 可知，这些群构成了 **Grp** 中的一个拟运算子。

对于第二部分，我们首先将 $\pi_n^{\operatorname{Im} f}$: Im $f_n \to \Sigma_n$ 定义为复合群同态

$$\operatorname{Im} f_n \hookrightarrow \Lambda'(n) \xrightarrow{\pi_n^{\Lambda'}} \Sigma_n.$$

这些子群在 Λ' 中的幺半群乘法下封闭，因为 f 是一个作用歌剧映射。歌剧单位元 id $\in \Lambda'(1)$ 是 Im f_1 中的一个元素， e_1 因为根据引理 4.12，它等于 f_n。由此证明群 Im Λ' 构成 f_n 的一个子歌剧；而定义 4.1 中 Im f 的作用歌剧公理方程（1） Λ'则由 Λ'的同一公理立即得出，从而完成第二项断言的证明。

□

例 6.5（纯辫、纯带状辫的作用歌剧）。第 n个纯辫群 PB_n定义为同态 π_n： $B_n \to \Sigma_n$的核；等价地，它是由底层置换为恒等置换的辫组成的第 n个辫群的子群。命题 6.4 给出了一个简明证明，说明纯辫群在群范畴中构成一个拟运算子。类似地，纯带状辫群 PRB_n定义为 π_n： $RB_n \to \Sigma_n$的核，这些群也在群范畴中构成一个拟运算子。

注 6.6（π的核与像）。注意，若（Λ， π）是作用歌剧，则根据命题 6.4，我们可以将其结果应用于 π，这是由命题 4.10得出的。此时，作用歌剧 Ker π_n 将是群中的歌剧集，而作用歌剧 Im π_n 将是 Σ的子作用歌剧。根据命题 4.16，这意味着作用歌剧 Im π_n 要么是 Σ，要么是平凡作用歌剧 T（例 4.5）。

定义 6.7。A *short exact sequence of action operads* 由作用歌剧Λ_1、Λ_2、Λ_3以及作用歌剧的映射 $f\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$, $g\colon \Lambda_2 \to \Lambda_3$组成，满足

- 作用歌剧 $\operatorname{Ker} f$是平凡作用歌剧 T,
- 作用歌剧 $\operatorname{Im} f$是作用歌剧 $\operatorname{Ker} g$，并且
- 作用歌剧 $\operatorname{Im} g$ 是作用歌剧 Λ_3。

我们将这样的短正合列记作

$$T \to \Lambda_1 \xrightarrow{f} \Lambda_2 \xrightarrow{g} \Lambda_3 \to T,$$

并称短正合列展示了 Λ_2 *as an extension of* Λ_3 *by* Λ_1。

下面的推论用短正合列和扩张的语言表述了注 6.6 。

推论 6.8 *Let Λ be an action operad and assume that every homomorphism $(,):()\pi_n \Lambda n \to \Sigma_n$ is surjective. Then there is a short exact sequence of action operads*

$$T \to \operatorname{Ker}\pi \hookrightarrow \Lambda \xrightarrow{\pi} \Sigma \to T.$$

In particular every action operad Λ is either an operad in groups or an extension of Σ, by an operad in groups.

7 作用歌剧集的表示

本节详细介绍如何运用局部有限可呈现（lfp）范畴理论，为作用歌剧给出表示。关于 lfp 范畴的完整论述，请参阅 [1] 。这里的论述与对称歌剧的表示方法略有不同，因为必须从一开始就纳入底层置换映射 $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$。普通歌剧集理论以一个集合族为起点：由自然数索引的集合 $\{P(n)\}$。在对称歌剧理论中，这些集合被扩充为对称集合族：由自然数索引的集合 $\{P(n)\}$，并配备右作用 $P(n) \times \Sigma_n \to P(n)$。与集合族对应的概念（见定义 7.1）现在是由自然数索引的集合 $P(n)$，并配备函数 $\pi_n\colon P(n) \to \Sigma_n$。因此，作用歌剧中元素的元数并非自然数 n，而是一个有序对 (n,σ)，其中 $\sigma \in \Sigma_n$。

定义 7.1（关于 $\mathcal{S}$的集合族）。令 $\mathcal{S}$ 为所有对称群的底层集合的不交并所成的集合。则**集合**/$\mathcal{S}$ 是关于 $\mathcal{S}$的切片范畴，其对象为 $(X,\ f)$，其中 X 是一个集合，且 $f\colon X \to \mathcal{S}$；态射 $(X_1,\ f_1) \to (X_2,\ f_2)$ 是满足 $f_1 = f_2 g$的函数 $g\colon X_1 \to X_2$。我们称对象 $(X,\ f)$ 为一个*collection over* $\mathcal{S}$，并称元素 $x \in X$ 具有 *underlying permutation* σ，如果 $f(x) = \sigma$。

记号 7.2。若 $(X,\ f)$ 是关于 $\mathcal{S}$的集合族，我们用 $X(\sigma)$ 表示 $f^{-1}(\sigma)$。换言之，$X(\sigma)$ 是 X 中具有底层置换 $\sigma \in \Sigma_n \subseteq \mathcal{S}$的元素所成的集合。

定理 7.3 *The category of action operads is a variety of $\mathcal{S}$-sorted finitary algebras and therefore is a finitary monadic category over /$\mathcal{S}$. In particular* **AOp**，**集合**，**AOp** *is locally finitely presentable.*

Proof. 为了证明**AOp**是一个 $\mathcal{S}$分类型的有限元代数簇（以下简称**AOp** *is a variety*），我们必须定义一个运算符号集合 $\mathcal{O}$ 和一个方程集合 E，使得作用歌剧是

- 在 $\mathcal{S}$ 上的集合族 (X, f)，
- 配备有函数

$$X(\theta)\colon X(\sigma_1) \times \cdots \times X(\sigma_n) \to X(\sigma)$$

对于每个类型为 θ 的运算符号 $\theta \in \mathcal{O}$：σ_1，……，$\sigma_n \to \sigma$，

- 满足 E 中的方程。

运算符号集合 $\mathcal{O}$ 定义为包含以下元素。

1. 对于每个 σ，$\tau \in \Sigma_n$，我们定义一个运算符号

$$\star[\sigma, \tau]\colon \sigma, \tau \to \sigma\tau,$$

其中，目标 $\sigma\tau$ 是 Σ_n 中这些置换的乘积。

2. 对每个自然数 n，我们定义一个运算符号

$$U_n\colon \to e_n,$$

其中源是空置换列表，目标是单位元 $e_n \in \Sigma_n$。

3. 对每个 $\sigma \in \Sigma_n$，我们定义一个运算符号

$$i[\sigma]\colon \sigma \to \sigma^{-1}.$$

4. 令 μ 表示对称群拟运算子中的幺半群乘法，Σ，来自例 3.6。对每个 $\sigma \in \Sigma_n$ 和 $\tau_i \in \Sigma_{k_i}$，对于 $i = 1$，…，n，我们定义一个运算符号 $\theta[\sigma;\ \tau_i]$ 类型为

$$\theta[\sigma; \tau_i]\colon \sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n \to \mu(\sigma; \tau_1, \ldots, \tau_n).$$

方程集合 E 定义为包含以下元素。

1. 对于 $\star[\sigma, \tau](x,\ y)$，我们记作 $x \star y$，其中 x 是类型为 σ 的变量，y 是类型为 τ 的变量。对每个三元组 ρ，σ，$\tau \in \Sigma_n$，都有一个方程

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

2. 一个 $\mathcal{O}$-代数 X 对每个 n 都有一个由 U_n 给出的元素 $u_n \in X(e_n)$。对于每个 $\sigma \in \Sigma_n$，都有方程

$$u_n \star x = x,$$
$$x \star u_n = x.$$

3. 我们将 $i[\sigma](x)$ 记作 x^{-1}，其中 x 是类型为 σ 的变量。对于每个 $\sigma \in \Sigma_n$，都有方程

$$x^{-1} \star x = u_n,$$
$$x \star x^{-1} = u_n.$$

4. 对于 $\theta[\sigma$，我们将 $x(y_1$、……、$y_n)$ 记作 $\theta;\ \tau_i](x$、y_1、……、$y_n)$，其中 x 是类型为 $\sigma \in \Sigma_n$ 的变量，并且对于每个 $i = 1$、……、n y_i，n y_i 是类型为 $\tau_i \in \Sigma_{k_i}$ 的变量。于是对于每个

- $\rho \in \Sigma_n$；
- $\sigma_i \in \Sigma_{k_i}$，对于 $i = 1$、……、n；以及
- $\tau_{i,\ j} \in \Sigma_{h_{i,\ j}}$，对于 $i = 1, \ldots, n$ 以及 $j = 1, \ldots, k_i$；

存在一个方程

$$\theta\big(\theta(x;y_1,\dots,y_n);z_{1,1},\dots,z_{1,k_1},\dots,z_{n,k_n}\big)=\\ \theta\big(x;\theta(y_1;z_{1,1},\dots,z_{1,k_1}),\dots,\theta(y_n;z_{n,1},\dots,z_{n,k_n})\big).$$

5. 对于每个 $\sigma\in\Sigma_n$，都有方程

$$\theta(u_1;x)=x,$$
$$\theta(x;u_1,\dots,u_1)=x.$$

6. 设 x 是类型为 $\sigma\in\Sigma_i$的变量， y_i 是类型为 $\tau_i\in\Sigma_{k_i}$ 的变量，其中 $i=1,\dots,n$; x' $\sigma'\in\Sigma_n$ y_i' $\tau_i'\in\Sigma_{\sigma^{-1}\ i}$ 是类型为 的变量，且 是类型为 $()$的变量。那么对于每种这样的置换选择，都有一个方程

$$\theta(x';y_1',\dots,y_n')\star\theta(x;y_1,\dots,y_n)=\theta(x'\star x;y'_{\sigma(1)}\star y_1,\dots,y'_{\sigma(n)}\star y_n).$$

满足 E 中的方程的 $\mathcal{O}$-代数范畴与 **AOp** 同构，具体如下。给定这样的代数 (X,f)，定义一个作用歌剧 (Λ^X,π)，定义方式如下

$$\Lambda^X(n)=\coprod_{\sigma\in\Sigma_n}X(\sigma)$$

并定义 $\pi_n\colon X(n)\to\Sigma_n$ 为将 f 限制到 $\Lambda^X(n)\subseteq X$。每个 $X(n)$ 在以 $\star$ 为乘法、以 u_n 为单位元时都是一个群，而 π_n 是同态，因为根据 $\star$的源和目标的定义，当 $x\in X(\sigma)$ $y\in X(\tau)$ 时， $\pi_n(x\star y)=\sigma\tau$。幺半群乘法由运算符号 $\theta[\sigma;\tau_i]$给出；根据引理 4.12 的第一部分， E 中的方程 4 和 5 是代数结合律和单位公理。额外的作用歌剧公理是 E中的方程 6。容易看出， $\mathcal{O}$-代数的态射定义了一个作用歌剧映射；这些对应关系给出了范畴 AOp 与满足 E中方程的 $\mathcal{O}$-代数范畴之间的同构。由此证明，AOp 是由 $\mathcal{O}$和 E 定义的簇。因此，根据 [1, Thm 3.18] ，它是在 Sets/$\mathcal{S}$上的有限元单子范畴；根据 [1, Cor 3.7]，它还是局部有限可呈现的。

□

对我们而言，定理 7.3 最重要的推论是，我们可以从一个其上方的集合族自由生成一个作用歌剧 $\mathcal{S}$，如下所述。

推论 **7 4** *The underlying collection functor U* → */S has a left adjoint ..* : **AOp 集合**: **集合 AOp** *F* */S* → *the free action operad functor.*

定义 7.5（作用歌剧的表示）。一个 *presentation* 作用歌剧 Λ 的表示由以下部分组成:

- 一对其上方的集合族 $\mathcal{S}$ ，记作 $\mathbf{g}$， $\mathbf{r}$，
- 一对映射 s_1， s_2: $F\mathbf{r}\to F\mathbf{g}$，它们定义在相应的自由作用歌剧之间；以及
- 一个映射 p: $F\mathbf{g}\to\Lambda$（作用歌剧之间），它使 Λ 成为 s_1， s_2 的余等化子。

例 7.6（ Σ的表示）。这里我们明确给出对称群作用歌剧的一个表示。回顾一下，对称群 Σ_n 有一个表示，作为一个 *group*，其生成元为

- 生成元 $\sigma_{1;\ n}$， ....., $\sigma_{n-1;\ n}$ 以及
- 关系 1. $\sigma_{i;\ n}^2=e_n$ 对

所有 i,

2. $\sigma_{i;n}\sigma_{j;n} = \sigma_{j;n}\sigma_{i;n}$ for i, j satisfying $|i-j| \geq 2$, and
3. $\sigma_{i;n}\sigma_{i+1;n}\sigma_{i;n} = \sigma_{i+1;n}\sigma_{i;n}\sigma_{i+1;n}$ for $1 \leq i < n-1$.

请注意，生成元采用了非标准的命名方式，即 $\sigma_{i;n}$ ，而不是仅用 σ_i。我们在生成元中加入了这一额外信息，因为这对于区分 Σ_2 的生成元（传统上记作 σ_1 ）与 Σ_3 的生成元（传统上也用相同的记号表示）是必要的。

利用拟运算子的幺半群结构，我们注意到

$$\sigma_{i;n} = \beta(e_{i-1}, \sigma_{1;2}, e_{n-i-1}).$$

此外，上述第二个关系是以下表达式、 β 为群同态这一事实以及引理4.12的第二部分的结果。因此，作为一个作用歌剧， Σ 由单个元素 $\sigma_{1;2} \in \Sigma_2$生成。

现在我们为这个将 Σ 表示为作用歌剧的表示定义关系。第一个关系是

$$\sigma^2 = e_2. \tag{6}$$

第二个关系是

$$\mu(\sigma; e_1, e_2) = \mu(e_2; e_1, \sigma) \cdot \mu(e_2; \sigma, e_1). \tag{7}$$

因此，我们断言， Σ 的表示为

- $\mathbf{g} = \{\sigma\}$，定义为一个以 $\mathcal{S}$ 为底的集合族，其对应函数将 σ 映射为 (1 2) $\in \Sigma_2$;
- $\mathbf{r} = \{\rho_1, \rho_2\}$，定义为关于 $\mathcal{S}$ 的集合族，其中函数将 ρ_1 发送到 $e_2 \in \Sigma_2$，并将 ρ_2 发送到 (1 3 2) $\in \Sigma_3$;
- s_1： $F\mathbf{r} \to F\mathbf{g}$通过如下要求唯一确定

$$s_1(\rho_1) = \sigma^2,$$
$$s_1(\rho_2) = \mu(\sigma; e_1, e_2);$$

- 和 s_2： $F\mathbf{r} \to F\mathbf{g}$通过如下要求唯一确定

$$s_2(\rho_1) = e_2,$$
$$s_2(\rho_2) = \mu(e_2; e_1, \sigma) \cdot \mu(e_2; \sigma, e_1).$$

我们注意到， s_1， s_2都将 ρ_1映射到 (1 2)(1 2) $= e_2 \in \Sigma_2$，而 s_1， s_2都将 ρ_2映射到 (1 3 2) $=$ (2 3)(1 2)，从而定义了关于 $\mathcal{S}$的集合族映射。

为了证明上述内容是 Σ的一个表示，我们必须定义一个作用歌剧映射 t： $F\mathbf{g} \to \Sigma$，使其展示 Σ 是 s_1， s_2的余等化子。通过要求 $t(\sigma) =$(1 2) 来定义 t。上述计算证明了 $t \circ s_1 = t \circ s_2$，现在我们必须证明 t 是使 s_1， s_2相等化的作用歌剧的泛映射。设 Λ 是一个作用歌剧，且 f： $F\mathbf{g} \to \Lambda$ 是一个满足 $f \circ s_1 = f \circ s_2$的作用歌剧映射。我们构造唯一的作用歌剧映射 $\tilde{f}$： $\Sigma \to \Lambda$，使得 $f = \tilde{f} \circ t$。如果这样的 $\tilde{f}$ 存在，则它必须将对换 $\sigma_{1;2} =$(1 2) $\in \Sigma_2$ 映射到 $f(\sigma)$。由于每个其他生成元（作为 Σ_n 的群） $\sigma_{i;n}$ 都是其像

$$\sigma_{i;n} = \beta(e_{i-1}, \sigma_{1;2}, e_{n-i-1}) = \mu(e_3; e_{i-1}, \sigma_{1;2}, e_{n-i-1}) \tag{8}$$

~ ~关于 $\sigma_{1;2}$ 在幺半群乘法下，任何满足条件的作用歌剧映射 f $f = f \circ t$ 若存在，则必唯一，且 f_n 必须在以下对象的生成元上定义： Σ_n 利用方程（8）通过

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(\sigma_{i;n}) &= \tilde{f}\big(\mu(e_3; e_{i-1}, \sigma_{1;2}, e_{n-i-1})\big) \\ &= \mu\big(\tilde{f}_n(e_3); \tilde{f}_n(e_{i-1}), \tilde{f}_n(\sigma_{1;2}), \tilde{f}_n(e_{n-i-1})\big) \\ &= \mu(e_3; e_{i-1}, f(\sigma), e_{n-i-1}).\end{aligned}$$

为了证明该公式

$$\tilde{f}_n(\sigma_{i;n}) = \mu(e_3; e_{i-1}, f(\sigma), e_{n-i-1})$$

~定义了唯一同态 $f_n\colon \Sigma_n \to \Lambda(n)$，我们必须检查它是否满足上文给出的 Σ_n 表示中的关系。我们只检查第三公理，且只考虑 $i = 1$，$n = 3$ 这一情形；其余部分留作读者的简单练习。为了~验证 f_3 满足这一关系，我们必须证明

$$\tilde{f}_3(\sigma_{1;3})\ \tilde{f}_3(\sigma_{2;3})\ \tilde{f}_3(\sigma_{1;3}) = \tilde{f}_3(\sigma_{2;3})\ \tilde{f}_3(\sigma_{1;3})\ \tilde{f}_3(\sigma_{2;3}). \tag{9}$$

由引理 4.13，上式左边为

$$\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big)\mu\big(e_2; e_1, f(\sigma)\big)\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big) = f\big(\mu(e_2; \sigma, e_1)\mu(e_2; e_1, \sigma)\mu(e_2; \sigma, e_1)\big).$$

由于 f 是作用歌剧映射，且余等化 s_1，s_2，我们得到

$$f\big(\mu(e_2; \sigma, e_1)\mu(e_2; e_1, \sigma)\mu(e_2; \sigma, e_1)\big) = f\big(\mu(e_2; \sigma, e_1)\mu(\sigma; e_1, e_2)\big)$$

根据等式 $fs_1(\rho_2) = fs_2(\rho_2)$。最后，作用歌剧公理表明

$$f\big(\mu(e_2; \sigma, e_1)\mu(\sigma; e_1, e_2)\big) = f\big(\mu(\sigma; e_1, \sigma)\big).$$

类似的论证表明，方程（9）右边等于

$$f\big(\mu(e_2; e_1, \sigma)\mu(e_2; \sigma, e_1)\mu(e_2; e_1, \sigma)\big),$$

并且通过余等化一次 s_1，s_2，因此为 $f\big(\mu(\sigma; e_1, \sigma)\big)$。至此，我们已经验证 ~$f_n$ 满足 Σ_n 表示中的关系，因此定义了唯一群同态 $\tilde{f}_n\colon \Sigma_n \to \Lambda(n)$。

根据定理4.15，要证明这些同态 $\tilde{f}_n$ 由下式定义

$$\tilde{f}_n(\sigma_{i;n}) = \mu(e_3; e_{i-1}, f(\sigma), e_{n-i-1})$$

要给出一个作用歌剧映射，只需检查它们与运算 δ，β 可交换，并保持底层置换。下面我们概述这一证明，将常规细节留给读者。

- 首先，检查等式

  $$\tilde{f}_N\big(\beta(\tau_1, \ldots, \tau_k)\big) = \beta\big(\tilde{f}_{n_1}(\tau_1), \ldots, \tilde{f}_{n_k}(\tau_k)\big)$$

  可由以下特殊情形推出：除一个以外，所有 τ_i 都是单位元，且 τ_i 是 σ；这一化简用到了 β 和$\tilde{f}_{n_k}$都是同态。利用公理（3）检验这一特殊情形。

- 其次，检查等式

  $$\tilde{f}_N\big(\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(\tau)\big) = \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}\big(\tilde{f}_n(\tau)\big)$$

  只需验证在特殊情形下 $\tau = \sigma_{i;n}$ 存在 i；这一化简利用了 $\tilde{f}_n$ 是一个同态，以及公理（6）。然后利用公理（9）证明，只需检验 $\sigma_{1;2}$ 这一种情形。

- 第三，我们通过归纳法进行检验

  $$\tilde{f}_{i+j}\big(\delta_{2;i,j}(\sigma_{1;2})\big) = \delta_{2;i,j}\big(\tilde{f}_2(\sigma_{1;2})\big)$$

通过归纳法。固定 i，并对 j 进行归纳，我们从右侧开始计算

$$
\begin{aligned}
\delta_{2;i,j+1}\tilde{f}_2(\sigma_{1;2}) &= \mu\big(\tilde{f}_2(\sigma_{1;2}); e_i, e_{j+1}\big)\\
&= \mu\big(f(\sigma); e_i, e_{j+1}\big)\\
&= \mu\Big(\mu\big(f(\sigma); e_1, e_2\big); e_i, e_1, e_j\Big)\\
&= \mu\Big(f\big(\mu(\sigma; e_1, e_2)\big); e_i, e_1, e_j\Big)\\
&= \mu\Big(f\big(\mu(e_2; e_1, \sigma)\mu(e_2; \sigma, e_1)\big); e_i, e_1, e_j\Big)\\
&= \mu\Big(\mu\big(e_2; e_1, f(\sigma)\big)\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big); e_i, e_1, e_j\Big)\\
&= \mu\Big(\mu\big(e_2; e_1, f(\sigma)\big); e_1, e_i, e_j\Big)\mu\Big(\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big); e_i, e_1, e_j\Big)\\
&= \mu\Big(e_2; e_1, \mu\big(f(\sigma); e_i, e_j\big)\Big)\mu\Big(e_2; \mu\big(f(\sigma); e_i, e_1\big), e_j\Big)\\
&= \mu\Big(e_2; e_1, \tilde{f}_{i+j}\big(\mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_j)\big)\Big)\mu\Big(e_2; \tilde{f}_{i+1}\big(\mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_1)\big), e_j\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(e_2; e_1, \mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_j)\big)\Big)\tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(e_2; \mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_1), e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(e_2; e_1, \mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_j)\big)\mu\big(e_2; \mu(\sigma_{1;2}; e_i, e_1), e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(e_2; e_1, \mu(t(\sigma); e_i, e_j)\big)\mu\big(e_2; \mu(t(\sigma); e_i, e_1), e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(\mu(e_2; e_1, t(\sigma))\mu(e_2; t(\sigma), e_1); e_i, e_1, e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(t(\mu(\sigma; e_1, e_2)); e_i, e_1, e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\Big(\mu\big(\mu(\sigma_{1;2}; e_1, e_2); e_i, e_1, e_j\big)\Big)\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}(\sigma_{1;2}; e_i, e_{j+1})\\
&= \tilde{f}_{i+j+1}\delta_{2;i,j+1}(\sigma_{1;2}).
\end{aligned}
$$

上述等式依次由以下内容推导得出：

1. δ的定义，2. $\tilde{f}_2$的定义，3. 歌剧代数结合律，4. f 是一个作用歌剧映射，5. f 使 s_1 和 s_2余等化，6. f 是一个作用歌剧映射，7. 作用歌剧公理方程（1），8. 歌剧代数结合律，9. 对 j使用归纳法，10. $\tilde{f}$ 与 β可交换，11. $\tilde{f}$ 是一个群同态，12. 定义 $\sigma_{1;2} = t(\sigma)$，13. 作用歌剧公理方程（1），14. t 是一个使 s_1 和 s_2余等化的作用歌剧映射，15. t 是一个作用歌剧映射且 $\sigma_{1;2} = t(\sigma)$，16. 歌剧代数结合律，以及

17. δ的定义。

固定 j 并对 i 进行归纳的论证类似。

- 第四，我们检验归纳的基础情形。当 $i = j = 0$时，注意到 $\delta_{2;0,\ 0}(\sigma_{1;2}) = e_{0}$。由于 $\tilde{f}_0$ 是群同态，因此我们必须检验元素 $\delta_{2;0,\ 0}\big(\tilde{f}_2(\sigma_{1;2})\big) = \delta_{2;0,\ 0}\big(f(\sigma)\big)$ 是否等于 e_{0}。我们用与上文类似的方法，通过证明 $\delta_{2;0,\ 0}\big(f(\sigma)\big) = \mu\big(f(\sigma);\ e_0,\ \ e_0\big)$ 的平方等于其自身来验证：

$$\begin{aligned}
\mu\big(f(\sigma); e_0, e_0\big) &= \mu\Big(\mu\big(f(\sigma); e_1, e_2\big); e_0, e_0, e_0\Big) \\
&= \mu\Big(\mu\big(e_2; e_1, f(\sigma)\big)\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big); e_0, e_0, e_0\Big) \\
&= \mu\Big(\mu\big(e_2; e_1, f(\sigma)\big); e_0, e_0, e_0\Big)\mu\Big(\mu\big(e_2; f(\sigma), e_1\big); e_0, e_0, e_0\Big) \\
&= \mu\Big(e_2; e_0, \mu\big(f(\sigma); e_0, e_0\big)\Big)\mu\Big(e_2; \mu\big(f(\sigma); e_0, e_0\big), e_0\Big) \\
&= \mu\big(f(\sigma); e_0, e_0\big)\mu\big(f(\sigma); e_0, e_0\big).
\end{aligned}$$

至此归纳论证完成，并表明 f 映射与 δ相交换。因此，$\tilde{f}$组合起来定义了一个拟运算子映射。

- 最后，我们必须检查 $\tilde{f}$ 是关于 Σ 的拟运算子映射，$\pi \circ \tilde{f} = 1_{\Sigma}$ 这意味着 。由于每个生成元 $\sigma_{i;n}$ 都是由 $\sigma_{1;2}$和恒等态射元素通过幺半群复合得到的，并且 f 保持幺半群复合和恒等射，因此只需检验等式

$$\pi \circ \tilde{f}(\sigma_{1;2}) = \sigma_{1;2}.$$

根据定义，$f(\sigma_{1;2}) = f(\sigma)$，且 $f\colon\ F\mathbf{g} \to \Lambda$ 是作用歌剧映射，因此根据$\mathbf{g}$ 作为关于 $\mathcal{S}$的集合族的定义，$\pi\big(f(\sigma)\big) = \sigma_{1;2}$。这一步完成了以下证明：同态 $\tilde{f}_n$ 定义了作用歌剧 $\tilde{f}$的映射：$\Sigma \to \Lambda$。

8 Λ-拟运算子及其代数

本节给出 Λ-拟运算子的定义（定义 8.1），其中 Λ 是一个作用歌剧。该定义将第 3 节中讨论的各种类型（非对称、对称和编织）的拟运算子统一在一个总称之下。不同的群作用源于对 Λ的不同选择。我们还在定义 Λ8.10中定义了关于 -拟运算子的代数，并在定理 8.16中证明了一个作用算子变换结果。

定义 8.1（Λ-算子）。设 Λ 为一个作用歌剧。一个 Λ-*operad* P （在 **集合** 中）由以下数据组成

- 一个在 **集合** 中的非对称歌剧 P，以及
- 对每个 n，$\Lambda(n)$ 在 $P(n)$ 上的一个作用 $P(n) \times \Lambda(n) \to P(n)$

使得以下两个等变公理成立。

- 对于每个 $p \in P(n)$、$q_i \in P(k_i)$，以及当 $i = 1, \ldots, n$ 时的 $g_i \in \Lambda(k_i)$：

$$\mu^P(p; q_1 \cdot g_1, \ldots, q_n \cdot g_n) = \mu^P(p; q_1, \ldots, y_n) \cdot \beta^{\Lambda}(g_1, \ldots, g_n).$$

- 对于每个 $p \in P(n)$、$g \in \Lambda(n)$，以及当 $i = 1,$ 时的 $q_i \in \Lambda(k_i)$ $\ldots$ n：

$$\mu^P(p \cdot g; q_1, \ldots, q_n) = \mu^P\left(p; q_{g^{-1}(1)}, \ldots, q_{g^{-1}(n)}\right) \cdot \delta^{\Lambda}_{n;k_1,\ldots,k_n}(g).$$

注记 8.2。利用定理4.15证明中的方程（3），定义8.1 中的两个等变公理可以合并为一个等式

$$\mu\left(p; p_1, \ldots p_n\right) \mu\left(\tau; \tau_1, \ldots, \tau_n\right) = \mu\left(p \cdot \tau; p_{\tau(1)} \cdot \tau_1, \ldots, p_{\tau(n)} \cdot \tau_n\right).$$

注 8.3。Semidetnov 的拟 operad 交叉单纯群似乎对应于具有平凡 Λ_0的作用歌剧，尽管它们是用 $\circ_i$ 运算而非幺半群复合 μ来定义的。继续比较，他的 G_*移位拟运算子 [60, 定义 3。5] 满足两条公理，这两条公理与定义 Λ中的8.1-拟运算子的公理相同。

定义 8.4 (Λ-*operads*)。设 P 和 Q 是 Λ-拟运算子。A : 由一个 operad 映射（注3.18。）组成，该映射关于 $\Lambda(n)$-作用逐层等变；也就是说，对每个 $n \in$ N，下图表交换。

map $f: P \to Q$。**（Λ-拟运算子的映射）**。

$$\begin{array}{ccc} P(n) \times \Lambda(n) & \xrightarrow{f_n \times 1} & Q(n) \times \Lambda(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(n) & \xrightarrow[f_n]{} & Q(n) \end{array}$$

命题 8.5。 *There is a category with*

- *objects the* Λ*-operads* P *in* **集合**,
- *morphisms the maps of* Λ*-operads between them,*
- *identities* 1_P: $P \to P$ *given by*

$$(1_P)_n = 1_{P(n)} : P(n) \to P(n),$$

and

- *composition given by*

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n.$$

记号 8.6（ Λ-拟运算子的范畴）。命题 3.16 中的范畴称为 *category of* Λ*-operads (in* **集合***)*, 记作 Λ-**Op**。

例 8.7（将非对称、对称和编织拟运算子表示为 Λ-拟运算子）。我们可以将第 3 节中的非对称、对称和编织拟运算子表示为适当选择 Λ后得到的 Λ-拟运算子。

1. 令 T 表示集合范畴中的终对象歌剧，并赋予其唯一的作用歌剧结构。则 T-拟运算子就是集合范畴中的非对称歌剧。2. 令 Σ 表示对称群歌剧，其中 π: $\Sigma \to \Sigma$ 为恒等映射。则 Σ-拟运算子就是集合范畴中的对称歌剧。3. 令 B 表示辫群算子空间，其中 π_n: $B_n \to \Sigma_n$ 为从辫子到其底层置换的典范投影。则 B-拟运算子就是 Fiedorowicz [15] 意义下的编织拟运算子。

底层算子空间 Λ 本身是一个 Λ-拟运算子的另一个例子。

命题 8.8。 *Let* Λ *be an action operad. Then the operad* Λ *is itself a* Λ*-operad.*

Proof. 底层拟运算子 Λ当然是集合中的拟运算子。右群作用 $\Lambda(n) \times \Lambda(n) \to \Lambda(n)$ 由 $\Lambda(n)$ 中的群乘法直接给出。因此，两个等变公理都是 Λ 的作用歌剧公理的特例。 □

拟运算子的意图是抽象描述某一类代数结构，而该结构的具体实例就是该拟运算子的代数。我们先在定义 8.10 中给出一般定义，然后在例 8.12 中重新得到非对称、对称和编织拟运算子上的代数。

注 8.9。为准备定义关于 Λ-拟运算子的代数，我们作如下两点说明。

1. 如果 Λ 是一个作用歌剧，而 X 是一个集合，那么 $\Lambda(n)$ 通过以下方式作用于 X^n：

$$\Lambda(n) \times X^n \overset{\pi_n \times 1}{\to} \Sigma_n \times X^n \overset{\kappa_n}{\to} X^n,$$

其中，κ_n 由以下公式定义：

$$\kappa_n(\sigma; x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

因此，我们将写作

$$g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(n)})$$

使用记号 2.11。

2. 根据上一条，我们按照约定 2.7定义 $P(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n$。关于 P的代数将涉及源对象为 $P(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n$的映射，因此我们提醒读者注意用于保持余等化子的映射的波浪号记号，约定 2.8。

定义 8.10（P-代数）。设 Λ 是一个作用歌剧，P是一个 Λ-拟运算子。对于 P的*algebra*，或称 P-*algebra*，由一个集合 X 以及映射组成

$$\alpha_n \colon P(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n \to X$$

使得映射 $\tilde{\alpha}_n$ 满足以下公理。

1. 元素 $\mathsf{id} \in P(1)$ 是一个单位，具体来说

$$\tilde{\alpha}_1(\mathrm{id}; x) = x$$

对所有 $x \in X$均成立。

2. 映射 $\tilde{\alpha}_n$ 满足结合律，即下图交换。

$$\begin{array}{ccc}
P(n) \times \prod_{i=1}^n \left(P(k_i) \times X^{k_i}\right) & \xrightarrow{1 \times \tilde{\alpha}_{k_1} \times \cdots \times \tilde{\alpha}_{k_n}} & P(n) \times X^n \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\
P(n) \times \left(\prod_{i=1}^n P(k_i)\right) \times \prod_{i=1}^n \left(X^{k_i}\right) & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}_n} \\
\downarrow{\scriptstyle \mu \times 1} & & \\
P(\textstyle\sum k_i) \times X^{\sum k_i} & \xrightarrow[\tilde{\alpha}_{\sum k_i}]{} & X
\end{array}$$

备注 8.11。值得再次强调的是，对一个 P-代数所要求的等变性，已通过要求映射 α_n 定义在余等化子上而内置于上述定义中，尽管代数公理随后只使用映射 $\tilde{\alpha}_n$。由于每个 Λ-拟运算子都有一个底层的非对称拟运算子（见定理 8.16，应用于唯一映射$T \to \Lambda$），这反映出以下事实：对于 Λ-等变版本，其代数总是普通版本的代数，但反之则不然。

例 8.12（非对称、对称和编织拟运算子上的代数作为 Λ-拟运算子）。我们可以将非对称、对称和编织拟运算子上的代数的标准概念，恢复为某个 Λ-拟运算子上的代数。

1. 对于平凡群的作用歌剧 T， T-拟运算子是非对称歌剧。余等化子 $P(n) \otimes_{T(n)} X^n$ 同构于 $P(n) \times X^n$，因此不失一般性，我们可以假设 $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$。这恢复了非对称歌剧上的代数的通常概念，见 [51, 定义 1.20]。2. 对于对称群的作用歌剧 Σ， Σ-拟运算子是对称歌剧。定义 8.10 根据注 8.9 等价于 May 的原始定义 [53, 定义 1.1] 。3. 对于辫群的作用歌剧 B， B-拟运算子是 Fiedorowicz [15]意义下的编织拟运算子。根据注 8.9，定义 8.10 再次等价于 Fiedorow- icz 的定义 [15, 定义 3.2] 。

定义 8.13（ P-代数的映射）。设 P 是一个 Λ-拟运算子，且 (X, α) 和 (Y, β) 是 P-代数。那么，*map of P-algebras* $f\colon (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ 是一个映射 $f\colon X \to Y$，并且对每个 n，以下图表均可交换。

$$\begin{array}{ccc} P(n) \times X^n & \xrightarrow{1 \times f^n} & P(n) \times Y^n \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\beta}_n} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

命题 8.14。 *Let Λ be an action operad and P be a Λ-operad. There is a category with*

- *objects the P-algebras (X, α),*
- *morphisms the maps of P-algebras between them,*
- *identities $1_{(X,\alpha)}\colon (X, \alpha) \to (X, \alpha)$ given by the identities 1_X, and*
- *composition given by composition of the underlying functions.*

记号 8.15（ P-代数的范畴）。命题 8.14 中的范畴称为 *category of P-algebras (in* **集合***)*，记作 P-**Alg**。

本节的最终目标是探讨由作用歌剧映射诱导的伴随。利用这些伴随，我们将使用例 3.7中的自同态算子，重新表述关于 Λ-拟运算子 P 的代数范畴。我们首先证明一个作用算子的变换结果。

定理 8.16。 *Let $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ be a map of action operads.*

1. *The map f induces a functor $f^*\colon \Lambda'$-**Op** $\to \Lambda$-**Op** with the property that $(f_n^* Q)($ $Q\ n$ for every Λ'-operad Q.* $)\ (\ )$

2. *The map f induces a functor $f_!\colon \Lambda$-**Op** $\to \Lambda'$-**Op** where $(f_! P)(n)$ is defined by the coequalizer below,*

$$P(n) \times \Lambda(n) \times \Lambda'(n) \underset{\rho \times 1}{\overset{1 \times (\star \circ f_n \times 1)}{\rightrightarrows}} P(n) \times \Lambda'(n) \xrightarrow{\varepsilon} P(n) \otimes_{\Lambda(n)} \Lambda'(n)$$

where $\star\ \Lambda'\ n\ \times \Lambda'\ n\ \to \Lambda'\ n$ is group multiplication and $\rho\ \ P\ n\ \times \Lambda\ n\ \to : 0\,0\,0 : 0\,0\,0$ $P\ n$ is the right action given by the Λ-operad structure.

3. The functor $f_!$ is left adjoint to f^*.

Proof. $\Lambda(n)$ 在 $(f^*Q)(n) = Q(n)$ 上的右作用由以下复合态射给出

$$Q(n) \times \Lambda(n) \overset{1\times f_n}{\to} Q(n) \times \Lambda'(n) \to Q(n),$$

其中第二个映射是由 Λ'-拟运算子结构在 Q上给出的作用。这个群作用与 Q 作为 Λ'-拟运算子的代数运算乘法映射一起，赋予 f^*Q 一个 Λ-拟运算子结构。给定一个 Λ'-拟运算子之间的映射 $h\colon P \to Q$，我们必须检验映射 $h_n\colon P(n) \to Q(n)$也构成一个 Λ-拟运算子映射 $f^*P \to f^*Q$。根据定义，函数 h_n 给出一个底层拟运算子映射，因此我们只需验证它相对于 $\Lambda(n)$-作用的等变性。由于积的函子性以及 h 作为 Λ'-拟运算子映射的定义，这个等变性图表是交换的。接着，直接检验这些赋值的函子性即可，从而完成第一个断言的证明。

对于第二个断言，我们首先注意到，这个余等化子的元素是等价类 $[p,\tau]$ $p \in P\ n$ $\tau \in \Lambda'\ n$ $[p\cdot\sigma,\tau] =$，其中 $(\,)$、$[p, f\ \sigma\ \tau]$ $\sigma\ \in\ \Lambda\ n$ $f_!P\ \ n$ $\Lambda'\ n$ $(\,)$，且等价关系由 $(\,)$（对 $(\,)$）给出。然后，$(\,)(\,)$ 通过第二个坐标中的乘法继承右侧 $(\,)$-作用。命题陈述中展示的余等化子显然是自反的，其公共截面将一对 $(p,\tau) \in P(n) \times \Lambda'(n)$ 映射为 $(p, e_n, \tau) \in P(n) \times \Lambda(n) \times \Lambda'(n)$。由于自反余等化子的乘积仍是余等化子，我们将拟运算子的乘法定义为

$$m\colon f_!P(n) \times f_!P(k_1) \times \cdots \times f_!P(k_n) \to f_!P\left(\sum k_i\right)$$

由其源作为一对映射的余等化子的泛性质唯一确定

$$\big(P(n)\Lambda(n)\Lambda'(n)\big) \times \prod_{i=1}^{n} \big(P(k_i)\Lambda(n)\Lambda'(k_i)\big) \rightrightarrows \big(P(n) \times \Lambda'(n)\big) \times \prod_{i=1}^{n} \big(P(k_i) \times \Lambda'(k_i)\big). \tag{10}$$

定义一个函数

$$\tilde{m}\colon \big(P(n) \times \Lambda'(n)\big) \times \prod_{i=1}^{n} \big(P(k_i) \times \Lambda'(k_i)\big) \to f_!P\left(\sum k_i\right)$$

by

$$\tilde{m}\big((p,\tau);(p_1,\tau_1),\dots,(p_n,\tau_n)\big) = \Big[\mu^P(p; p_{\tau^{-1}(1)},\dots,p_{\tau^{-1}(n)}), \mu^{\Lambda'}(\tau;\tau_1,\dots,\tau_n)\Big].$$

函数 $\tilde{m}$ 将在 $f_!P$ 上诱导出拟运算子乘法，一旦我们验证它余等化方程（10）中的两个映射。为此，我们必须检查

$$\tilde{m}\big((p\cdot\sigma,\tau);(p_1\cdot\sigma_1,\tau_1),\dots,(p_n\cdot\sigma_n,\tau_n)\big) = \tilde{m}\big((p,f(\sigma)\tau);(p_1,f(\sigma_1)\tau_1),\dots,(p_n,f(\sigma_n)\tau_n)\big).$$

根据定义，左边是

$$\Big[\mu^P(p\cdot\sigma; p_{\tau^{-1}(1)}\cdot\sigma_{\tau^{-1}(1)},\dots,p_{\tau^{-1}(n)}\cdot\sigma_{\tau^{-1}(n)}),\ \mu^{\Lambda'}(\tau;\tau_1,\dots,\tau_n)\Big], \tag{11}$$

而右侧为

$$\Big[\mu^P(p; p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(1)},\dots,p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(n)}),\ \mu^{\Lambda'}\big(f(\sigma)\tau; f(\sigma_1)\tau_1,\dots,f(\sigma_n)\tau_n\big)\Big]. \tag{12}$$

根据作用歌剧公理以及 f 是作用歌剧映射这一事实，我们得到以下等式

$$\begin{aligned}\mu\big(f(\sigma)\tau; f(\sigma_1)\tau_1, \dots, f(\sigma_n)\tau_n\big) &= \mu\big(f(\sigma); f(\sigma_{\tau^{-1}(1)}), \dots, f(\sigma_{\tau^{-1}(n)})\big)\mu\big(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n\big) \\ &= f\left(\mu\big(\sigma; \sigma_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}\big)\right)\mu\big(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n\big).\end{aligned}$$

根据等式 $[p\cdot\sigma, \tau] = [p, f(\sigma)\tau]$，因此我们得出方程（12）等于

$$\left[\mu^P(p; p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(1)}, \dots, p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(n)})\cdot\mu\big(\sigma; \sigma_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}\big), \mu\big(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n\big)\right].$$

根据备注 Λ中的8.2所述的 Λ-拟运算子等变公理的单等式版本，我们得到第一坐标可改写为

$$\begin{aligned}&\mu^P(p; p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(1)}, \dots, p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}(n)})\cdot\mu\big(\sigma; \sigma_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \sigma_{\tau^{-1}(n)}\big) = \\ &\mu^P(p\cdot\sigma; p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}\left(\sigma(1)\right)}\cdot\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \dots, p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}\left(\sigma(n)\right)}\cdot\sigma_{\tau^{-1}(n)}).\end{aligned}$$

项 $p_{(f(\sigma)\tau)^{-1}\left(\sigma(1)\right)}$ 上的指标可以简化，因为 f 是作用歌剧映射，因此保持底层置换不变。于是

$$\begin{aligned}(f(\sigma)\tau)^{-1}\big(\sigma(i)\big) &= \tau^{-1}\left(f(\sigma)^{-1}\left(\sigma(i)\right)\right) \\ &= \tau^{-1}(i)\end{aligned}$$

因为 σ 的底层置换与 $f(\sigma)$的底层置换相同。将这些简化代入上式后，我们得到方程（11），从而完成了$\tilde{m}$ 余等化方程（10）中的两个映射，因此在 $f_!P$上唯一地诱导出一个幺半群乘法。m根据定义，幺半群乘法映射$f_!P\ k_1\ \times\cdots\times f_!P\ k_n\ \to f_!P\ \sum k_i$ ：$f_!P$

$(\,)\,(\,)\,(\,)\,(\,)$ 定义为

$$m\left([p,\tau]; [p_1,\tau_1], \dots, [p_n,\tau_n]\right) = \left[\mu^P(p; p_{\tau^{-1}(1)}, \dots, p_{\tau^{-1}(n)}), \mu^{\Lambda'}(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n)\right]. \quad (13)$$

$f_!P$的单位是 $[\mathrm{id}\ e_1]$，其中 $\mathrm{id}\in P(1)$ 是 P的单位，而 $e_1\in\Lambda'(1)$ 是 Λ'的单位。利用 P和 Λ'的单位公理，可以直接证明 $[\mathrm{id}\ e_1]$ 是 $f_!P$的单位；这些计算留给读者完成。

接下来，我们检验 $f_!P$的结合律公理。为此，我们检验以下函数

$$\widehat{m}\colon \big(P(n)\times\Lambda'(n)\big)\times\prod_{i=1}^{n}\big(P(k_i)\times\Lambda'(k_i)\big)\to P\left(\sum k_i\right)\times\Lambda'\left(\sum k_i\right)$$

由公式

$$\widehat{m}\left((p,\tau); (p_1,\tau_1), \dots, (p_n,\tau_n)\right) = \left(\mu^P(p; p_{\tau^{-1}(1)}, \dots, p_{\tau^{-1}(n)}), \mu^{\Lambda'}(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n)\right)$$

满足关于幺半群复合的结合律。实际的幺半群复合则是由 $\widehat{m}$ 经由方程（10）中的余等化子取等价类得到的，因此 $\widehat{m}$ 的结合律将保证 m的结合律。首先注意，幺半群复合 $\widehat{m}$ $((p,\tau); (p_1,\tau_1)\dots, (p_n,\tau_n))$ 的第二个坐标是$\mu^{\Lambda'}(\tau;\ \tau_1, \dots, \tau_n)$，因此第二个坐标上的结合律直接由 Λ'的结合律推出。

为了检验第一个坐标中的结合律，我们引入以下记号。我们将列表 $a_1, \dots, a_n$ 记作 $a_{i\circ}$ 如果 $\sigma\in\Sigma_n$，我们将列表 $a_{\sigma^{-1}(1)}\dots, a_{\sigma^{-1}(n)}$记作 $\sigma\bullet_i a_{i\circ}$ 。那么，第一个坐标为

$$\widehat{m}\left((p,\tau); \underline{\widehat{m}\left((p_i,\tau_i); \underline{(p_{i,j},\tau_{i,j})}\right)}\right)$$

为 $\mu\left(p;\ \tau \bullet_i \mu(p_i;\ \tau_i \bullet_j p_{i,j})\right)$。根据 P 的结合律，第一个坐标因此等于

$$\mu\left(\mu(p;\tau \bullet_i \underline{p_i});\tau \bullet_i \underline{\tau_i} \bullet_j \underline{\underline{p_{i,j}}}\right). \tag{14}$$

另一方面，第一坐标的

$$\widehat{m}\left(\widehat{m}\left((p,\tau);\underline{(p_i,\tau_i)}\right);\underline{(p_{i,j},\tau_{i,j})}\right)$$

是 $\mu\left(\mu(p;\ \tau \bullet_i p_i);\ \mu(\tau;\ \tau_i) \bullet_{i,\ j} p_{i,\ j}\right)$ 其中 $p_{i,\ j}$ 按字典序排列，并且 $\bullet_{i,\ j}$ 表示 $\mu(\tau;\ \tau_i)$ 作用于此列表。根据定理 3 ~~的~~证明中的~~方~~程（4.15），我们有

$$\begin{aligned}\mu(\tau;\underline{\tau_i}) \bullet_{i,j} \underline{p_{i,j}} &= \delta(\tau)\beta(\underline{\tau_i}) \bullet_{i,j} \underline{p_{i,j}}\\ &= \delta(\tau) \bullet_{i,j} \underline{\tau_i} \bullet_j \underline{\underline{p_{i,j}}}\\ &= \tau \bullet_i \underline{\tau_i} \bullet_j \underline{\underline{p_{i,j}}}.\end{aligned}$$

因此，$\widehat{m}\left(\widehat{m}\left((p,\ \tau);(p_i,\ \tau_i)\right);(p_{i,\ j},\ \tau_{i,\ j})\right)$ 的第一个坐标是

$$\mu\left(\mu(p;\tau \bullet_i \underline{p_i});\mu(\tau;\underline{\tau_i}) \bullet_{i,j} \underline{p_{i,j}}\right) = \mu\left(\mu(p;\tau \bullet_i \underline{p_i});\tau \bullet_i \underline{\tau_i} \bullet_j \underline{\underline{p_{i,j}}}\right),$$

与方程（14）相符，并验证代数结合律。

最后，我们按照注 8.2 的形式检查等变公理。该公理即等式

$$m\left([p,\tau];\underline{[p_i,\tau_i]}\right) \cdot \mu(\omega;\underline{\omega_i}) = m\left([p,\tau]\cdot\omega;[p_{\omega(1)},\tau_{\omega(1)}]\cdot\omega_1,\ldots,[p_{\omega(n)},\tau_{\omega(n)}]\cdot\omega_n\right).$$

利用 m 的公式，可以直接验证两边都等于

$$\left[\mu(p;\tau \bullet_i \underline{p_i}),\mu(\tau\omega;\tau_{\omega(1)}\omega_1,\ldots,\tau_{\omega(n)}\omega_n)\right].$$

因此，Λ'-拟运算子的等变公理对 $f_!P$ 成立，从而完成了 $f_!P$ 是一个 Λ'-拟运算子的证明。

接下来讨论 $f_!$ 的函子性。设 $g\colon P \to Q$ 是一个 Λ-拟运算子之间的映射。定义 $f_!g\colon f_!P \to f_!Q$，其公式为

$$(f_!g)_n([p,\tau]) = [g(p),\tau], \tag{15}$$

对于 $[p,\tau] \in f_!P(n)$。由于 g 是 Λ-拟运算子之间的映射，它保持单位元，因此

$$(f_!g)([\mathrm{id},e_1]) = [g(\mathrm{id}),e_1] = [\mathrm{id},e_1],$$

这表明 $f_!g$ 也保持单位元。显然，$f_!g$ 关于 $\Lambda'(n)$-作用是逐层等变的，因此我们只需验证它保持幺半群乘法。我们将这一计算留给读者，因为只需直接应用以下事实即可：g 是 Λ-拟运算子之间的映射，因而保持幺半群乘法。由此完成了 $f_!$ 在态射上的定义。显然，$f_!$ 保持复合和恒等映射，因此是一个函子

$$f_!\colon \Lambda\text{-}\mathbf{Op} \to \Lambda'\text{-}\mathbf{Op}$$

如所愿，从而完成了陈述中第二个断言的证明。

现在我们证明第三个断言，即 $f_!$ 是 f^* 的左伴随。该伴随的单位在 Λ-拟运算子 P 处的分量由映射 $\eta^P\colon\ P \to f^* f_! P$ 给出，并定义为公式

$$\eta^P_n(p) = [p, e_n]$$

对所有 $p \in P(n)$。映射 η^P 根据定义保持拟运算子的单位元，并且通过简单应用定义 13 中拟运算子乘法的方程 $f_!P$，保持幺半群乘法。此外，η^P 保持右 Λ-作用，因为

$$\begin{aligned}\eta^P(p\cdot\tau) &= [p\cdot\tau, e_n]\\ &= [p, f(\tau)e_n]\\ &= [p, e_n]\cdot\tau\\ &= \eta^P(p)\cdot\tau.\end{aligned}$$

因此，η^P 是 Λ-拟运算子的映射。接下来很容易验证，这些分量定义了一个自然变换 $1 \Rightarrow f^* f_!$。

这个伴随的余单位在 Λ'-拟运算子 Q 处的分量由映射ε^Q: $f_! f^* Q \to Q$给出，并由以下公式定义

$$\varepsilon^Q_n([q,\tau]) = q\cdot\tau.$$

由于 $f_! f^* Q(n)$定义为 $f^*Q(n) \otimes_{\Lambda(n)} \Lambda'(n)$，且 $\Lambda(n)$在 $f^*Q(n)$上的作用由 $q\cdot_{f^*Q}\sigma = q\cdot_Q f(\sigma)$给出，定义 $f_! f^* Q(n)$的等价关系由以下等式生成

$$[q\cdot_Q f(\sigma), \tau] = [q, f(\sigma)\tau]$$

对所有 $\sigma \in \Lambda(n)$ 均成立。特别地，ε^Q_n的公式在等价类上定义良好。显然，ε^Q 保留拟运算子的单位元和右侧的 $\Lambda'(n)$-作用，因此我们只需证明它保留幺半群乘法。于是我们计算得

$$\begin{aligned}\varepsilon^Q\left(m\left([q,\tau];\underline{[q_i,\tau_i]}\right)\right) &= \varepsilon^Q\left([\mu(q;\tau\bullet_i \underline{q_i}), \mu(\tau;\underline{\tau_i})]\right)\\ &= \mu(q;\tau\bullet_i \underline{q_i})\cdot\mu(\tau;\underline{\tau_i})\\ &= \mu(q\cdot\tau;\underline{q_i\cdot\tau_i})\\ &= m\left(\varepsilon^Q[q,\tau];\underline{\varepsilon^Q[q_i,\tau_i]}\right)\end{aligned}$$

根据 m的定义、ε^Q的定义、注 8.2中的方程，以及 ε^Q 的定义。由此，ε^Q 保留幺半群乘法，且是一个 Λ'-拟运算子态射。与 η一样，检查 Q 中的自然性很简单。

对于一个 Λ-拟运算子 P，复合态射 $\varepsilon^{f_!P}\circ f_!\eta^P$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\varepsilon^{f_!P}\circ f_!\eta^P[p,\tau] &= \varepsilon^{f_!P}[[p,e_n],\tau]\\ &= [p, e_n\tau]\\ &= [p,\tau],\end{aligned}$$

因此它是恒等态射。同样，对于一个 Λ'-拟运算子 Q，复合态射 $f^*\varepsilon^Q\circ\eta^{f^*Q}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}f^*\varepsilon^Q\circ\eta^{f^*Q}(q) &= f^*\varepsilon^Q[q,e_n]\\ &= q\cdot e_n\\ &= q,\end{aligned}$$

因此也是恒等态射。这两个计算验证了三角恒等式，从而证明了 $f_! \dashv f^*$。

□

我们将在以下情形中进一步考察定理 8.16 中的伴随：映射 f 是 $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$ 所对应作用歌剧 (Λ, π) 的底层置换映射。

定义 8.17。令 (Λ, π) 为一个作用歌剧。定理 $\pi_!$ 中的左伴随 8.16 称为 *symmetrization functor*。

命题 8.18 *Let Λ π be an action operad. The unit of the adjunction $\pi_! \dashv \pi^*$ 。 。 (,) from Theorem 8.16 is an isomorphism if and only if $\Lambda \cong \Sigma$ via π.*

Proof. 单位在一个 Λ-拟运算子 P 处的分量 $\eta^P\colon P \to \pi^*\pi_! P$ 由以下公式定义

$$\eta_n^P(p) = [p, e_n].$$

将 Λ 视为一个 Λ-拟运算子，我们看到 $\pi^*\pi_!\Lambda$ 可以取为 Σ_n，此时映射 η_n^Λ 就是 π_n。单位 η 只有在每个 η^P 都是同构时才可能是同构，因此必要条件是 $\Lambda \cong \Sigma$ 经由 π。由定义 $f^*, f_!$ 的公式可知，该条件的充分性显而易见；将其应用于同构 f，证明完毕。 □

命题 8.19 *Let Λ π be an action operad. The counit of the adjunction .. (,): $\pi_! \dashv \pi^*$ from Theorem 8.16 is an isomorphism if and only if $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$ is surjective.*

Proof. 对于对称歌剧 Q，余单位 $\varepsilon^Q\colon \pi_!\pi^*Q \to Q$ 在 n元运算上的定义为

$$\varepsilon_n^Q([q, \tau]) = q \cdot \tau,$$

其中 $q \in Q(n)$ 且 $\tau \in \Sigma_n$。对于任意作用歌剧 Λ 和任意 Λ-拟运算子 Q，此函数都是满射，因此我们只需验证单射性。

当 $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$不是满射时，根据命题 4.16，它就是零映射。定义 $\pi_!\pi^*Q\ n$ $\lambda\ \tau]$ $q \in Q\ n$ $\lambda \in ()$ 的等价关系 $\Lambda\ n$ $\tau \in \Sigma_n$ $\pi\ \lambda = e_n \in \Sigma_n$ $q \cdot_{\pi^*Q} \lambda$ 为 $[q \cdot_{\pi^*Q} \lambda, \tau] = [q, \pi(), $ 其中 $()$、$()$ 和 , 但 $()$。此外，作用是在 $\pi^*Q(n)$ 中计算的，因此实际上是

$$q \cdot_{\pi^*Q} \lambda = q \cdot_Q \pi(\lambda) = q.$$

这些计算表明，等价关系退化为 $[q, \tau] = [q, \tau]$，因此$\pi_!\pi^*Q(n) \cong Q(n) \times \Sigma_n$，而余单位映射就是由 Σ_n 在 $Q(n)$上的群作用给出的，因此尤其不是单射。

现在假设 $\pi\colon \Lambda \to \Sigma$ 是满射，并假设 $\varepsilon_n^Q([q_1, \tau_1]) = \varepsilon_n^Q([q_2, \tau_2])$，或者等价地，

$$q_1 \cdot \tau_1 = q_2 \cdot \tau_2.$$

我们必须验证 $[q_1, \tau_1] = [q_2, \tau_2]$。那么，对于任意满足 $\pi(\lambda) = \tau_1\tau_2^{-1}$ 的 $\lambda \in \Lambda(n)$，我们有

$$\begin{aligned}
[q_1, \tau_1] &= [q_1, \pi(\lambda)\pi(\lambda^{-1})\tau_1] \\
&= [q_1\pi(\lambda), \pi(\lambda^{-1})\tau_1] \\
&= [q_1\tau_1\tau_2^{-1}, \tau_2\tau_1^{-1}\tau_1] \\
&= [q_2, \tau_2],
\end{aligned}$$

这证明了 ε_n^Q 是单射，并完成了如下证明：若 π 是满射，则 ε 是同构。

□

以下命题在 [53] 中以引理 1.4 的形式出现。

引理 8.20 *Let P be a symmetric operad and X be a set. P-algebra structures on 。, X $P\ n$ given by $\{\alpha_n \quad \otimes_{\Sigma(n)} X^n \to X\}$ as in Definition 8.10 are in bijection with: (), : maps of symmetric operads $\alpha\ \ P \to \mathcal{E}_X$.*

Proof. 函数 $\tilde{\alpha}_n\colon P(n)\times X^n\to X$ 在同态-张量伴随 $-\times X^n\dashv[X^n,-]$ 下对应于函数 $\hat{\alpha}_n\colon P(n)\to\mathcal{E}_X(n)$。定义 3.15 中关于函数 $\hat{\alpha}_1$ 的单位公理对应于定义 8.10 中关于作为非对称幺半群的 P 的第一条公理。定义 3.15 中关于函数 $\hat{\alpha}_n$ 的结合律公理对应于定义 8.10 中关于作为非对称幺半群的 P 的第二条公理。函数 $\hat{\alpha}_n$ 与右侧的 Σ_n-作用交换，当且仅当函数 $\tilde{\alpha}_n$ 按照约定 2.8 由函数 $\alpha_n\colon P(n)\otimes_{\Sigma(n)}X^n\to X$ 得到，从而完成双射的证明。

□

推论 8.21 *Let Λ be an action operad with underlying permutation map $\pi\colon\Lambda\to\mathbf{\Sigma}$. For any Λ-operad P and any set X P-algebra structures on X are in bijection with*

- *maps of Λ-operads $\alpha\colon P\to\pi^*\mathcal{E}_X$ or*
- *maps of symmetric operads $\alpha'\colon\pi_!P\to\mathcal{E}_X$.*

Proof. 根据 $P(n)$ 和 X^n 上的 $\Lambda(n)$-作用的定义，这些映射

$$P(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n\to X$$

定义 P-代数结构（定义 8.10）的映射与 $\Lambda(n)$-等变映射 $P(n)\to\pi^*\mathcal{E}_X(n)$ 构成双射。定义 8.10 中的公理与 Λ-拟运算子公理（定义 8.4）之间映射的对应关系，与引理 8.20的证明完全类似。根据伴随性定理 Λ-拟运算子版本与对称歌剧版本之间的等价立即可得，定理 8.16。

□

定义 8.22（由 Λ-拟运算子诱导的自函子）。令 P 为一个 Λ-拟运算子。则 P 通过以下公式诱导出一个 **集合** 上的自函子，记作 $\underline{P}$。

$$\underline{P}(X)=\coprod_n P(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$$

现在有以下命题；其证明是标准的（参见 [53]中的构造 2.4 的讨论），这里留给读者。

命题 8.23。*Let P be a Λ-operad.*

1. *The Λ-operad structure on P induces a monad structure on P via the operadic multiplication and operadic identities for P. We denote this monad $(\underline{P},\mu,id)$ or just $\underline{P}$ when μ, id are understood.*
2. *The category of algebras for the Λ-operad P is isomorphic to the category of algebras for the monad $(\underline{P},\mu,id)$.*

如果我们也将拟运算子 P 取为 Λ，那么得到的代数并不比幺半群更有趣。

命题 8.24 *Let Λ be an action operad. The category of algebras for Λ taken as a Λ-operad (Λ-**代数**) is isomorphic to the category of monoids.*

Proof. 幺半群的范畴是 T-**代数**，其中 T 是终端作用歌剧集，因此我们将构造单子的同构 $R\colon T\cong\Lambda$。对于集合 X，

$$\underline{T}(X)=\coprod_n T(n)\otimes_{T(n)}X^n\cong\coprod_n X^n,$$

而

$$\underline{\Lambda}(X)=\coprod_n\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n.$$

余等化子 $\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$ 中的元素是等价类 $[g;\ x_1,\ldots,x_n]$它们满足等价关系

$$(gh;x_1,\ldots,x_n)\sim\big(g;x_{h^{-1}(1)},\ldots,x_{h^{-1}(n)}\big)\,.$$

函数 $R_{X;n}\colon \Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n\to X^n$ 定义如下

$$R_{X;n}\big(\,[g;x_1,\ldots,x_n]\,\big)=\big(x_{g^{-1}(1)},\ldots,x_{g^{-1}(n)}\big)$$

它们是双射，并且很容易看出它们关于 X 是自然的。定义 $R_X=\coprod_n R_{X;n}$。留给读者验证，这些分量也与单子 T、Λ 的乘法和单位相容，因此得到所需的单子同构。单子同构 R 继而诱导出代数范畴之间的同构，从而证明所需的结论。

□

推论 8.21 的单子论体现如下。

推论 8 25 *Let $\Lambda\ \pi$ there exists a.. (,) natural isomorphism of monads between P and $\pi_!P$. In particular be an action operad. For any Λ-operad P,, these monads (and hence operads) have isomorphic categories of algebras.*

Proof. 注意到 $P(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$（即 $P(X)$ 中的第 n 个直和项）和 $\big(P(n)\otimes_{\Lambda(n)}\Sigma_n\big)\otimes_{\Sigma_n}X^n$（即 $\pi_!P(X)$ 中的第 n 个直和项）都满足相同的泛性质，由此余等化子的泛性质诱导出该同构。

□

9 代入积

在本节中，我们将证明， Λ-拟运算子是范畴中带有适当代入积的 Λ集合族所构成的幺半群。这一结果相当标准（参见 [51, 第 1.8]节），并且在对称和非对称情形下都可以直接证明。然而，由于我们处理的是任意作用歌剧，采用使用余端和 Day 卷积的抽象方法会更加简洁。

定义 9.1（Λ-集合族）。令 Λ 为一个作用歌剧。

1. 范畴 $B\Lambda$具有
   - 对象为自然数 $n\in\mathbf{N}$，以及
   - 态射集合 $B\Lambda(m,\ n)$ 在 $m\neq n$ 时为空

     $$B\Lambda(n,n)=\Lambda(n),$$

     复合由群乘法给出，恒等态射由元素 e_n给出。

2. Λ-**集合族**范畴是 Λ-*collections* 的预层范畴

   $$[B\Lambda^{\mathrm{op}},\mathbf{Sets}].$$

注 9.2。 Λ-**集合族**的定义不要求 Λ 是作用歌剧，只要求存在一个自然数索引的群集。

定义 9.3（代入积 $\circ$）。设 Λ 是一个作用歌剧，且X、Y是 Λ-集合族。我们定义 Λ-集合族 $X\circ Y$如下：

$$X\circ Y(k)=\left(\left(\coprod_{k_1+\cdots+k_r=k}X(r)\times Y(k_1)\times\cdots\times Y(k_r)\right)\times\Lambda(k)\right)/\sim$$

其中，等价关系由以下内容生成。

1. 对于 $x \in X(r)$、 $h \in \Lambda(r)$、 $y_i \in Y(k_i)$，其中 $i = 1, \ldots, r$，以及 $g \in \Lambda(k)$，我们有

$$(xh; y_1, \ldots, y_r; g) \sim \left(x; y_{h^{-1}(1)}, \ldots, y_{h^{-1}(r)}; \delta_{r;k_1,\ldots,k_r}(h)g\right).$$

2. 对于 $x \in X(r)$、 $y_i \in Y(k_i)$（$i = 1, \ldots, r$）和 $g_i \in \Lambda(k_i)$（$i = 1, \ldots, r$），以及 $g \in \Lambda(k)$，我们有

$$(x; y_1 g_1, \ldots, y_r g_r; g) \sim (x; y_1, \ldots, y_r; \beta(g_1, \ldots, g_r)g).$$

群 $\Lambda(k)$ 通过乘法在右侧作用，

$$[x; y_1, \ldots, y_r; g] \cdot h = [x; y_1, \ldots, y_r; gh],$$

并且此作用与上述等价关系相容，因此定义了一个从 $X \circ Y$ 到 $B\Lambda$ 的预层。

现在我们将发展一些工具，以证明范畴 Λ-**Coll** 具有由 $\circ$ 给出的幺半结构，并且拟运算子是关于此幺半结构的幺半群。下面给出定理陈述。

定理 9.4。 *Let Λ be an action operad.*

1. *The category Λ-**Coll** has a monoidal structure with tensor product given by $\circ$ and unit given by the collection I with $I\ n = \emptyset$ when $n \neq 1$ and $I\ 1 = \Lambda\ 1$.* () () ()
2. *The category* **Mon**(Λ-*operads*) *of monoids in Λ-***Coll** *is equivalent to the category of* **Coll**Λ-*algebras.*

虽然可以利用上述等价关系通过直接计算证明这一命题，但这样的证明并无启发性。此外，我们希望考虑集合以外的范畴中的 Λ-拟运算子，因此逐元素证明可能不适用。为此，我们将构建一般工具，使其适用于任意余完备对称幺半范畴中的 Λ-拟运算子。所谓余完备对称幺半范畴，是指一个余完备的范畴，配备了对称幺半结构，并且函子 $X \otimes -$, $- \otimes X$ 对每个对象 X 都保持余极限（闭的幺半结构便满足这一条件）。我们构造 Λ-集合族范畴上的幺半结构时需要用到 Day 卷积积 [10], ，因此先证明 $B\Lambda$ 具有幺半结构。

命题 9.5 *The action operad structure of Λ gives $B\Lambda$ a strict monoidal structure.*

Proof. $B\Lambda$ 上的张量积由对象上的加法给出，单位对象为 0；我们用 $+$ 表示张量积。在态射上， $+$ 必须由一个群同态给出

$$+ \colon \Lambda(n) \times \Lambda(m) \to \Lambda(n + m),$$

并由公式定义

$$+(g, h) = \beta(g, h).$$

根据定理 4.15， β 是所需的同态，现在我们将 $+(g, h)$ 记作 $g + h$。

对象的加法严格满足结合律和单位律。态射层面的严格结合律由公理（3）推出，态射层面的严格单位律则由公理（3）和引理 4.13推出。因此 $B\Lambda$ 是所需的严格幺半范畴，证明至此完成。 □

既然 $B\Lambda$ 具有幺结构，利用 Day 卷积， $B\Lambda$-集合族范畴上也有一个幺结构，记作 $\star$。

定义 9.6（Day 卷积， [10]）。给定集合族 X，Y，它们的 *convolutionproduct* $X \star Y$ 由余端公式给出

$$X \star Y(k) = \int^{m,n \in B\Lambda} X(m) \times Y(n) \times B\Lambda(k, m+n).$$

注 9.7。鉴于 $B\Lambda(k, m+n)$ 除非 $k = m+n$，定义 9.6 中的余端可以改写为

$$X \star Y(k) = \int^{m+n=k} X(m) \times Y(n) \times \Lambda(k).$$

在这种表述中，$\Lambda(m) \times \Lambda(n)$ 通过各自作用的乘积作用于 $X(m) \times Y(n)$，并通过 $(g,\ h) \cdot t = \beta(g,\ h)t$ 作用于 $\Lambda(k)$。

注 9.8（n重 Day 卷积）。一个 Λ-集合族 Y 与自身的 n 重 Day 卷积积由以下余端公式给出。

$$Y^{\star n}(k) = \int^{k_1+\cdots+k_n=k} Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k)$$

Day 卷积的计算必然会大量用到余端演算；对于不熟悉这方面内容的读者，我们推荐阅读 [49] 或 [47]。我们的目标是像在 [32]，中那样，将代入张量积表示为一个余端；为此，我们还需要关于 Day 卷积积的最后一个结果。

引理

9 9 *Let* Λ *be an action operad* Y *be a* Λ*-collection and* k *be a fixed natural* .. ,, *number. Then the assignment* $n \mapsto Y^{\star n}(k)$ *can be given the structure of a functor* $B\Lambda \to$ **集合。**

由于卷积积由余端给出，因此它是带有映射的泛对象

$$\theta_{k_1,\ldots,k_n;k} \colon Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) \to Y^{\star n}(k),$$

对于 $k = k_1 + \cdots + k_n$，使得对每个 $g_1 \in$ $\Lambda\ k_1\ \ldots\ g_n \in \Lambda\ k_n$ ( )，( )，下图都交换。

$$\begin{array}{ccc} Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) & \xrightarrow{(-\cdot g_1,\ldots,-\cdot g_n)\times 1} & Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\times\left((g_1+\cdots+g_n)\cdot -\right)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_{k_1,\ldots,k_n;k}} \\ Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) & \xrightarrow[\theta_{k_1,\ldots,k_n;k}]{} & Y^{\star n}(k) \end{array}$$

令 $f \in \Lambda(n)$，将其视为 $n \to n$ 在 $B\Lambda$ 中的态射。我们导出一个映射

$$f \bullet - \colon Y^{\star n}(k) \to Y^{\star n}(k)$$

利用余端的泛性质。对于每个 k k_1 k_n $k =$ 和，.....，使得，定义 $k_1 + \cdots + k_n$

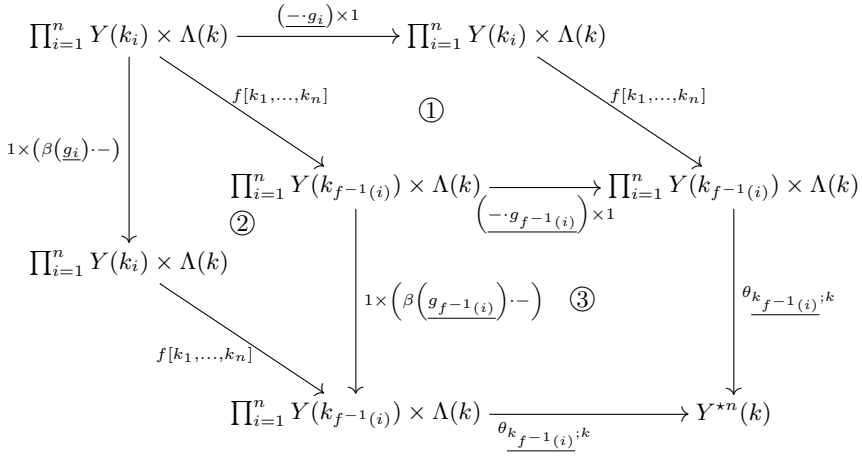
$$f[k_1, \ldots, k_n] \colon Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) \to Y(k_{f^{-1}(1)}) \times \cdots \times Y(k_{f^{-1}(n)}) \times \Lambda(k)$$

by

$$f[k_1, \ldots, k_n](y_1, \ldots, y_n; g) = \left(y_{f^{-1}(1)}, \ldots, y_{f^{-1}(n)}; \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(f)g\right).$$

现在我们检查下图是交换的，其中带下划线的元素表示由从 1 到 n 编号的相应元素组成的列表，例如，

$$\beta(\underline{g_i}) = \beta(g_1, \cdots, g_n) = g_1 + \cdots + g_n.$$



方框 1◯ 由对称性的自然性可交换，方框 2◯ 由定理 8 中的公理 (4.15) 可交换，方框 3◯ 由余端的定义可交换。因此，根据泛性质，存在唯一的映射 $f \bullet -\colon Y^{\star n}(k) \to Y^{\star n}(k)$，使得

$$\theta_{k_{f^{-1}(1)},\ldots,k_{f^{-1}(n)};k} \circ f[k_1, \ldots, k_n] = (f \bullet -) \circ \theta_{k_1,\ldots,k_n;k} \tag{16}$$

对于所有满足 $k = k_1 + \cdots + k_n$ 的 k 和 $k_1, \ldots, k_n$。给定 $f_1, f_2 \in \Lambda(n)$，我们有

$$\begin{aligned}
(f_2 \bullet -) \circ (f_1 \bullet -) \circ \theta_{\underline{k_i};k} &= (f_2 \bullet -) \circ \theta_{\underline{k_{f_1^{-1}(i)}};k} \circ f_1\left[\underline{k_i}\right] \\
&= \theta_{\underline{k_{f_1^{-1}(f_2^{-1}(i))}};k} \circ f_2\left[k_{f_1^{-1}(1)}, \ldots, k_{f_1^{-1}(n)}\right] \circ f_1\left[\underline{k_i}\right] \\
&= \theta_{\underline{k_{(f_2 f_1)^{-1}(i)}};k} \circ (f_2 f_1)\left[\underline{k_i}\right] \\
&= ((f_2 f_1) \bullet -) \circ \theta_{\underline{k_i};k}
\end{aligned}$$

由方程 (16 两次、 在 n-元组上的左作用（如注 2.12 所述），以及定理 6 中的公理 (4.15) 可知。根据余端的泛性质，我们得出 $(f_2 \bullet -) \circ (f_1 \bullet -) = ((f_2 f_1) \bullet -)$，由此验证函子性并完成证明。

□

注 9.10（通过余端得到米田引理）。我们大量运用了米田引理的以下推论：给定任意函子 $F\colon B\Lambda \to$ **集合** 以及一个固定对象$a \in B\Lambda$，存在自然同构

$$\int^{n \in B\Lambda} B\Lambda(n, a) \times F(n) \cong F(a)$$

该同构将对 (g, x) 发送到 $F(g)(x)$，其中 $g \in B\Lambda(n, a)$，且 $x \in F(n)$。对于 $F\colon B\Lambda^{\mathrm{op}} \to$ **集合**，也有相应的结果，只需改用形如 $B\Lambda(a, n)$ 的可表函子即可。

现在我们可以对代入张量积作抽象描述了。

引理 9.11。 *Let X, Y be Λ-collections. Then there is a natural isomorphism*

$$X \circ Y \cong \int^n X(n) \times Y^{\star n},$$

induced by the colimit structures.

Proof. 余端 $\int^n X(n) \times Y^{\star n}(k)$ 可按如下方式展开：利用注记 9.8、 $A \times -$ 对任意 A都保持余极限这一事实，以及余端的富比尼定理（[47, 定理 1.3）。1]。

$$\begin{aligned}\int^n X(n) \times Y^{\star n}(k) &\cong \int^n X(n) \times \left(\int^{k_1+\cdots+k_n=k} Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k) \right) \\ &\cong \int^{n,k_1+\cdots+k_n=k} X(n) \times Y(k_1) \times \cdots \times Y(k_n) \times \Lambda(k).\end{aligned}$$

将最后这个余端写成余等化子的形式，就得到定义 9.3中的公式。根据所涉及余极限的泛性质，上述两个同构关于两个变量都是自然的。

□

推论 9.12. *Let Y be a Λ-collection.*

1. *The functor $- \circ Y \colon$ Λ-**群胚** $\to$ Λ-**群胚** has a right adjoint $[Y, -]$*
2. *For any other Λ-collection X, there is a natural isomorphism*

$$X^{\star n} \circ Y \cong (X \circ Y)^{\star n},$$

induced by the colimit structures.

Proof. 我们将 Λ-集合族 $[Y, Z]$ 定义为

$$[Y, Z](k) = \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}(Y^{\star k}, Z)$$

在对象上，以及引理9.9 通过前复合在态射上定义。于是

$$\begin{aligned}\Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\left(X \circ Y, Z\right) &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\left(\int^n X(n) \times Y^{\star n}, Z \right) \\ &\cong \int_n \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X(n) \times Y^{\star n}, Z\big) \\ &\cong \int_n \mathbf{Sets}\big(X(n), \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}(Y^{\star n}, Z)\big) \\ &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X, [Y, Z]\big)\end{aligned}$$

根据引理 9.11，可表函子 $\Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\left(-, Z\right)$ 将余端映为端、集合上的集合族余幂，并将自然变换集合识别为一个端。这些同构显然都对全部三个变量自然，因此 $[Y, -]$ 是 $- \circ Y$ 的右伴随，从而完成了第一个断言的证明。

第二个断言由第一个立即得出，因为 $X \mapsto X^{\star n}$ 是一个余极限，因此被 $- \circ Y$保留。

□

引理 9.13. *Let I be the Λ-collection defined by*

$$I(k) = \begin{cases} \emptyset & k \neq 1, \\ \Lambda(1) & k = 1. \end{cases}$$

Then $I^{\star n}(k)$ is empty unless $k = n$, and then is isomorphic to $\Lambda(n)$。

Proof. 根据定义，我们有

$$I^{\star n}(k) = \int^{k_1+\cdots+k_n=k} I(k_1) \times \cdots \times I(k_n) \times \Lambda(k).$$

只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ 时，非空项才会出现，由此我们得出 $k = n$。因此，余端就是余等化子 $\Lambda(1)^n \otimes_{\Lambda(1)^n} \Lambda(n)$，其中 $\Lambda(1)^n$ 通过右乘作用于自身，并通过……作用于 $\Lambda(n)$

$$(g_1, \ldots, g_n) \cdot h = \beta(g_1, \ldots, g_n)h.$$

通过上面的映射，这个余等化子仍为 $\Lambda(n)$，证明完毕。 □

最后，我们可以证明定理 9.4。

Proof of Theorem 9.4. 首先，我们必须证明 Λ-**Coll** 具有由 $\circ$ 给出的幺半结构。为此，我们必须给出单位同构和结合律同构，然后验证幺半范畴公理。定义单位对象为 $I = B\Lambda(-, 1)$。于是，对于左单位同构，我们有

$$\begin{aligned} I \circ Y(k) &= \int^n B\Lambda(n, 1) \times Y^{\star n}(k) \\ &\cong Y^{\star 1}(k) \\ &\cong Y(k), \end{aligned}$$

其中两个同构均由余端的泛性质诱导。对于右单位同构，我们有

$$\begin{aligned} X \circ I(k) &= \int^n X(n) \times I^{\star n}(k) \\ &\cong X(k) \end{aligned}$$

由引理9.13。

接下来我们转而构造结合律同构。首先计算得

$$\begin{aligned} \big[Y, [Z, W]\big](k) &= \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(Y^{\star k}, [Z, W]\big) \\ &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}(Y^{\star k} \circ Z, W) \\ &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big((Y \circ Z)^{\star k}, W\big) \\ &= \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big[Y \circ Z, W\big](k) \end{aligned}$$

由推论 9.12 第一部分给出的内 Hom 定义，以及推论 9.12第二部分给出的余极限保持性。这些同构与右 $\Lambda(k)$-作用相容，因此构成一个同构，我们记作

$$\overline{a} \colon \big[Y, [Z, W]\big] \cong \big[Y \circ Z, W\big].$$

结合律同构定义为由米田引理从下方的复合态射诱导出的同构，其中每个未标记的同构都由形如 $- \circ A \dashv [A, -]$ 的伴随得到。

$$\begin{aligned} \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big((X \circ Y) \circ Z, W\big) &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X \circ Y, [Z, W]\big) \\ &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X, \big[Y, [Z, W]\big]\big) \\ &\overset{\overline{a}}{\cong} \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X, \big[Y \circ Z, W\big]\big) \\ &\cong \Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\big(X \circ (Y \circ Z), W\big) \end{aligned}$$

为了完成证明：配备上述单位同构和结合律同构的 $(\Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\ \circ, I)$ 是一个幺半范畴，我们必须验证两个公理。这两个公理可直接由以下事实推出：所有单位同构和结合律同构，都是由构造其定义域的余极限的泛性质诱导出来的。

现在我们必须证明，$(\Lambda\text{-}\mathbf{Coll}\ \circ, I)$中的幺半群就是拟运算子。根据米田引理，$\Lambda$-集合族的映射 $\eta\colon I \to X$对应于一个元素 $\mathrm{id} \in X(1)$，因为$I = B\Lambda(-, 1)$。映射 $\mu\colon X \circ X \to X$由对每个 k给出的一个 $\Lambda(k)$-等变映射$(X \circ X)(k) \to X(k)$确定。根据余端的泛性质，这等价于给出满足以下条件的映射

$$\mu_{n;k_1,\dots,k_n;k}\colon X(n) \times X(k_1) \times \cdots \times X(k_n) \times \Lambda(k) \to X(k)$$

这些映射与以下指定的群作用相容

- $\Lambda(\Lambda\ k \qquad \delta \qquad \cdot \quad \times)$通过给定的作用在右侧作用于 $X(\ )$，并通过置换和 $\cdot$ 在左侧作用于 $X(k_1) \times \cdots \times X(k_n)\ (\ )$。映射 μ必须使这些映射相等。
- 群 $\Lambda(k_i)$通过给定的作用在右侧作用于因子 $X(k_i)$，并通过群乘法和 β在 $\Lambda(k)$的左侧作用。映射 μ 必须使这些映射相等。
- $\Lambda(k)$通过群乘法在 $\Lambda(k)$上从右侧作用，并通过给定的作用在 $X(k)$上从右侧作用。映射 μ 必须保持此作用。

给定这样的幺半群结构，我们在 Λ-集合族X 上定义幺半群乘法如下：

$$\mu(x; y_1, \dots, y_n) = \mu_{n;k_1,\dots,k_n;k}(x; y_1, \dots, y_n; e_k).$$

反过来，给定一个拟运算子 P，我们通过如下定义，使其底层 Λ-集合族在 $\circ$ 下成为幺半群：

$$\mu_{n;k_1,\dots,k_n;k}(x; y_1, \dots, y_n; g) = \mu(x; y_1, \dots, y_n) \cdot g.$$

其余细节留给读者验证。 □

第二部分：范畴中的拟运算子

10 背景：群作用与 2-极限

我们假设读者熟悉基本的 2-范畴论 [26, 33], ，但在此回顾一下$\mathbf{Cat}$ 本身的一些 1 维和 2 维方面的内容。

约定 10.1（集合与离散范畴）。滥用记号，将任意集合 S 视为对象集为 S的离散小范畴 dS 。这样，我们也将任意作用歌剧 Λ 视为$\mathbf{Cat}$中的拟运算子，并将任意群 G 视为离散严格幺半范畴。

约定 10.2（范畴上的群作用）。这里所说的范畴上的群作用是严格意义上的，而非同构意义上的。因此，如果 G 作用于C，则方程

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x,$$
$$e \cdot x = x$$

对所有 x均成立，其中 x 可以是 C的对象或态射。此外，范畴上的群作用具有函子性，因此

$$g \cdot \mathrm{id}_c = \mathrm{id}_{g \cdot c},$$
$$(g \cdot p) \circ (g \cdot q) = g \cdot (p \circ q)$$

对所有对象 c 和可复合的态射对 $p,\ q$均成立。

定义 10.3（自由作用）。设群 G 作用于范畴 C，并令 x 表示 C的一个对象或一个态射。若对任意 $x,\ g\cdot x = x$ 蕴含 g 为单位元 $e\in G$，则称该作用是 *free* 的。这等价于如下条件：对所有 $x,\ y$，至多存在一个 $g\in G$ 使得 $g\cdot x = y$。

引理 10.4. *Let G be a group, C a category, and $\cdot : G\times \mathrm{Ob}(C)\to \mathrm{Ob}(C)$ an action of G on the set of objects of C. Then the action of G on C is free if and only if the induced action of G on C is free.*

Proof. 若 G 在 C 上的作用不是自由的，则存在元素 $g\in G$ 以及一个对象 c 或一个态射 f，使得分别有 $g\cdot c = c$ 或 $g\cdot f = f$。若存在这样的对象 c，则 G 在 C 的对象上的作用不是自由的；若存在这样的 $f\colon\ c\to d$，则 $g\cdot f = f$ 蕴含 $g\cdot c = c$，于是 G 在 C 的对象上的作用同样不是自由的。最后，若 G 在 C 上的作用是自由的，则显然 G 在 C 的对象上的作用也是自由的，从而完成证明。 □

引理

10 5 *Let G be a group C be a category and μ $G\times C\to C$ be an action of .. ,,: G on C. Suppose that the action of G on C is free.*

1. *Then there is a category C/G with*
   - *objects $[c]$, where c is an object of C and $[c]$ denotes its orbit under the G-action; and*
   - *morphisms $[p]$ $[c]\to[d]$ where p $c_1\to d_1$ $c_1\in[c]$ $d_1\in[d]$ and $[p]$ denotes: , : , , , the orbit of p under the G-action.*
2. *The category C/G is the coequalizer*

$$G\times C \underset{\pi_2}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{\ \varepsilon\ } C/G$$

where the top map is the action of G on C, the bottom map is the projection onto C and the coequalizing functor ε is defined by sending an object or morphism to , its orbit in C/G.

Proof. 为了证明引理的第一部分，我们必须定义恒等态射和复合，并检验范畴公理。将恒等态射 $\mathrm{id}_{[c]}\colon\ [c]\to[c]$ 定义为 $[\mathrm{id}_c]$。对于由 $p\colon\ a_1\to b_1$和 $q\colon\ b_2\to c_2$表示的态射 $[p]\colon\ [a]\to[b]$ 和 $[q]\colon\ [b]\to[c]$，由于作用是自由的，令 $g\in G$ 为满足下列条件的唯一元素

$$g\cdot b_2 = b_1.$$

定义 $[q]\circ[p] = [g\cdot q\ \circ\ p]$。现在我们来检查这些公理。

- 对于 $[p]$: 由 p表示的 $[a]\to[b]\colon\ a_1\to b_1$，复合态射 $[p]\circ\mathrm{id}_{[a]}$是 $[g\cdot p\circ\mathrm{id}_a]$，其中 g是满足 $g\cdot a_1 = a$的唯一元素。由于 $g\cdot p\ \circ\mathrm{id}_a = g\cdot p$，复合态射 $[p]\circ\mathrm{id}_{[a]}$等于 $[g\cdot p] = [p]$，正如所期望的那样。
- 对于 $[p]$: 由 p表示的 $[a]\to[b]\colon\ a_1\to b_1$，复合态射 $\mathrm{id}_{[b]}\circ[p]$是 $[g\cdot\mathrm{id}_b\ \circ\ p]$，其中 g是满足 $g\cdot b_1 = b$的唯一元素。由于 G在 C上的作用具有函子性，$g\cdot\mathrm{id}_b = \mathrm{id}_{g\cdot b} = \mathrm{id}_{b_1}$，因此 $[g\cdot\mathrm{id}_b\ \circ\ p] = [\mathrm{id}_{b_1}\circ p] = [p]$，正如所期望的那样。
- 对于 $[p]\colon\ [a]\to[b]$由 p 表示: $a_1\to b_1$，$[q]\colon\ [b]\to[c]$由 q 表示: $b_2\to c_2$，以及 $[r]\colon\ [c]\to[d]$由 r 表示: $c_3\to d_3$，我们计算

$$[r]\circ\big([q]\circ[p]\big) = [h\cdot r\ \circ\ g\cdot q\ \circ\ p],$$

其中 $g \cdot b_2 = b_1$ 和 $h \cdot c_3 = g \cdot c_2$，以及

$$\big([r] \circ [q]\big) \circ [p] = [g \cdot \big(j \cdot r \ \circ \ q\big) \ \circ p],$$

其中 $g \cdot b_2 = b_1$ $j \cdot c_3 = c_2$ G $g \cdot \big(j \cdot r \circ q\big) =$ 以 $gj \cdot r \ \circ g \cdot q$ $gj \ = \ h$ 及。由 -作用的函子性可知，因此要证明结合律，我们只需验证。这由作用是自由的这一假设以及方程 $h \cdot c_3 = g \cdot c_2$ 和 $j \cdot c_3 = c_2$得出。

因此， C/G是一个范畴。

对于该引理的第二个断言，首先注意到 ε，其定义为：对于 x 中的对象或态射，由 $\varepsilon(x) = [x]$ 给出，是一个函子。此外，我们看到

$$\varepsilon\pi_2(g, x) = \varepsilon(x) = [x] = [g \cdot x] = \varepsilon\mu(g, x),$$

因此 ε 确实余等化 μ 和 π_2。为了验证泛性质，令 $F\colon C \to D$ 为任意其他将其余等化的函子。我们必须验证存在唯一的函子 $F\colon C/G \to D$，使得 $F \circ \varepsilon = F$。任何这样的 F 在对象上都必须定义为 $F\big([c]\big) = F(c)$，并且由于 F 余等化 μ， π_2 这个函数是良定义的。对于态射，同样的论证也适用，因此 $F\big([p]\big) = F(p)$。至于对象，这个函数是良定义的，同时也保证了 F 的唯一性。我们只需验证函子性即可完成证明。根据构造， F 保持恒等态射。对于复合，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left([q] \circ [p]\right) &= \overline{F}\left([g \cdot q \ \circ \ p]\right) \\
&= F(g \cdot q \ \circ \ p) \\
&= F(g \cdot q) \circ F(p) \\
&\overset{c}{=} F(q) \circ F(p) \\
&\overline{F}\left([q]\right) \circ \overline{F}\left([p]\right),
\end{aligned}$$

其中，标记为 c 的等式是 F 将 μ 取余等化子的结果；π_2。这一计算表明， F 是一个函子，因此 C/G 是 μ 的余等化子； π_2。 □

备注 10.6（自由作用与非自由作用）。我们注意到，如果 G 在 C 上的作用不是自由的，那么余等化子

$$G \times C \underset{\pi_2}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \operatorname{coeq}(\mu, \pi_2)$$

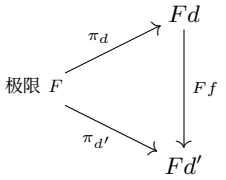
一般而言不具有简单的描述，尽管 $\operatorname{coeq}(\mu, \pi_2)$ 的对象集仍由 G 在 C 的对象上的作用所得到的轨道集给出，因为 $\mathrm{ob}\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$ 是一个左伴随。特别地，如果 P 是 $\mathbf{Cat}$ 中的一个 Λ-拟运算子，并且 $\Lambda(n)$ 在 $P(n)$ 上的作用不是自由的，那么 $P(n)$ 的对象集 $\otimes_{\Lambda(n)} A^n$ 由将该集合 $\mathrm{ob}P(n) \times \mathrm{ob}A^n$ 按 $\Lambda(n)$ 的作用取商得到。

定义 10.7（2-极限）。设 $F\colon \mathsf{D} \to \mathcal{K}$ 是一个 2-函子。 F 的（严格）2-极限由以下部分组成：

- 一个对象 $\lim F$ 在 $\mathcal{K}$,
- 对于每个对象 $d \in \mathsf{D}$，一个 1-胞腔 $\pi_d\colon \lim F \to Fd$,

使得：

1. 对于任意 1-胞腔 $f\colon\ d \to d'$ in D，下图表交换。

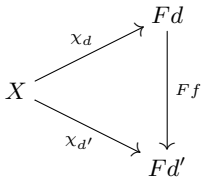


2. 对任意 1-态射 f，$g\colon d \to d'$ 以及任意 2-胞腔 $\alpha\colon f \Rightarrow g$（位于 D 中），

$$F\alpha * \mathrm{id}_{\pi_d} = \mathrm{id}_{\pi_{d'}}.$$

这些数据满足以下泛性质：

1. 对任意对象 X 以及满足以下条件的 1-态射 $\chi_d\colon X \to Fd$

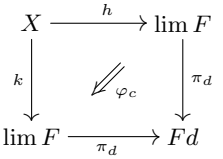


以及方程

$$F\alpha * \mathrm{id}_{\chi_d} = \mathrm{id}_{\chi_{d'}}$$

对于所有 $\alpha\colon f \Rightarrow g$，存在唯一的 1-胞腔 $h\colon X \to$，使得 $\pi_d \circ h = \chi_d$ 成立，其中该胞腔是 $\mathcal{K}$ 中的极限 F。

2. 对于任意 1-态射 h、$k\colon X \to \lim F$ 以及 2-胞



存在唯一的 2-胞腔 $\gamma\colon h \to k$ 使得

$$\mathrm{id}_{\pi_d} * \gamma = \varphi_d.$$

注记 10.8（极限与 2-极限）。设 C是一个小范畴，且 $F\colon C \to \mathbf{Cat}$ 是一个函子。我们可以将 C视为局部离散2-范畴，于是 F成为一个 2-函子。按照丰范畴论中的标准方法，第 3 节8]指出，作为函子的 F的极限也就是作为 2-函子的 F的 2-极限 [29,。特别地，此类图表的每个极限（或余极限）都会自动在其泛性质中继承二维方面。

约定 10.9（2-极限的命名）。对于积、终对象、拉回和等化子等常见极限，我们在名称前加上 2-，分别称为 2-积、2-终对象、2-拉回和 2-等化子。

定义 10.10（2-极限的保持）。设 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ 是具有所有 D 型 2-极限的 2-范畴，且 $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ 是它们之间的 2-函子。那么，如果对每个 $P\colon \mathrm{D} \to \mathcal{K}$，态射 F *preserves 2-limitsof shape* D

$$F(\lim P) \to \lim FP$$

由泛性质诱导的同构。

11 背景：2-单子及其代数

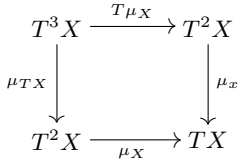
为了研究**Cat** 中的算子，我们将使用 2-单子及其代数，具体而言，是 2-单子的伪代数这一概念。我们在此回顾所需的定义以及与 2-单子相关的理论。更多参考资料，请参阅 [5] 和 [57]。

定义 11.1（2-单子）。设 $\mathcal{K}$ 是一个 2-范畴。$\mathcal{K}$ 上的 *2-monad* 由以下部分组成：

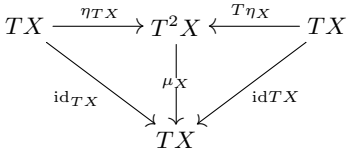
- 一个严格 2-函子 $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$,
- 一个 2-自然变换 $\mu\colon T^2 \Rightarrow T$,
- 一个 2-自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{K}} \Rightarrow T$,

满足以下公理。

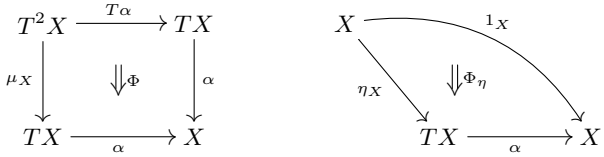
- 以下图表交换。



- 以下图表交换。

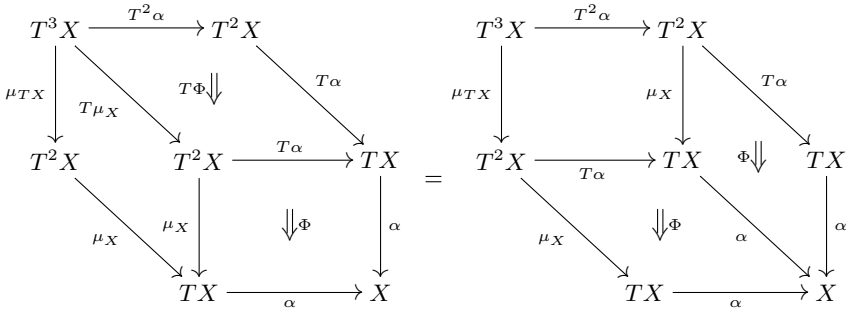


定义 11.2（伪代数，2-单子版本）。令 $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 为一个 2-单子。一个 *T-pseudoalgebra* 由一个对象 X、一个 1-胞腔 $\alpha\colon TX \to X$（位于 $\mathcal{K}$中），以及以下可逆 2-胞 $\mathcal{K}$组成：

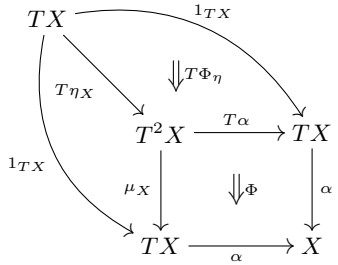


满足以下公理。

- 以下粘贴图的等式成立。



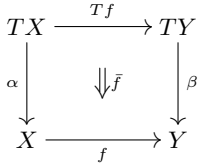
- 以下粘贴图是一个恒等态射。



注释 11.3（省略的第三公理）。Power 对伪代数的定义包含第三公理，该公理涉及 2-单子 [57, 定义 2.4，公理 2.1] 的单位。然而，依照 Marmolejo [52, 引理 9.1] 中的论证，这条额外公理是冗余的，因此此处省略。

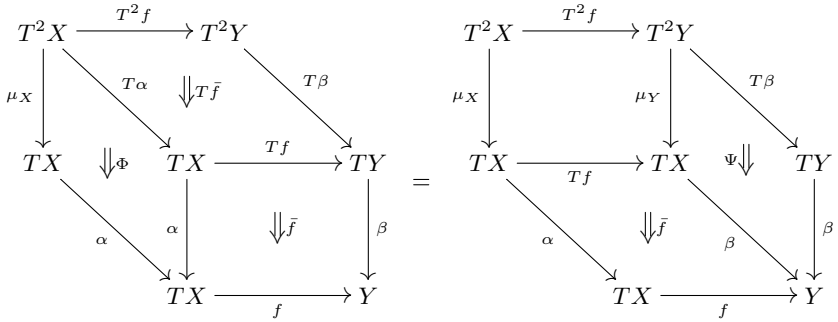
定义 11.4（严格代数，2-单子版本）。设 $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是一个 2-单子。严格代数 *strict T-algebra* 是一个伪代数，其中所有同构 Φ 都是恒等态射。

定义 11.5（伪态射，2-单子版本）。设 T 是一个 2-单子，且 $(X,\ \alpha,\ \Phi,\ \Phi_\eta)$、$(Y,\ \beta,\ \Psi,\ \Psi_\eta)$ 是 T- 伪代数。一个伪态射 *pseudomorphism* $(f,\ \bar{f})$，从这些伪代数之一到另一个，由一个 1- 胞腔 $f\colon X \to Y$ 以及一个可逆 2-胞组成

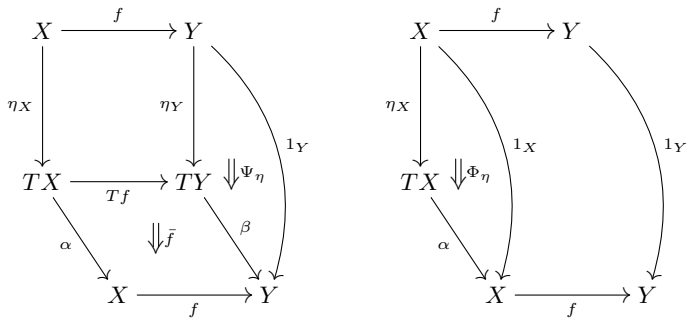


满足以下公理。

- 以下粘贴图的等式成立。



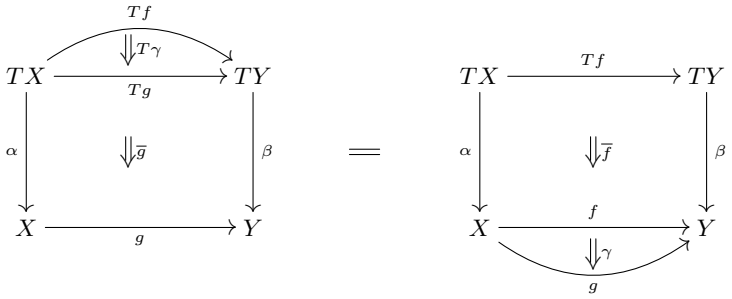
- 以下粘贴图的等式成立。



定义 11.6（严格态射，2-单子版本）。设 T 是一个 2-单子，并设 $(X,\ \alpha,\ \Phi,\ \Phi_\eta)$ 和 $(Y,\ \beta,\ \Psi,\ \Psi_\eta)$ 是 T-伪代数。一个 *strict morphism* $(f,\ \bar{f})$ 是一个伪态射，其中 $\bar{f}$ 是恒等态射。

注 11.7。严格代数和严格态射，恰好就是底层范畴 $\mathcal{K}$ 上底层单子的代数和态射。

定义 11.8（T-变换，2-单子版本）。设 $(f,\ f)$，$(g,\ g)$：$X \to Y$ 是 $\overline{T}$-代数的伪态射。一个 *T-transformation* 由一个 2-胞腔 γ：$f \Rightarrow g$ 组成，并满足以下粘贴图的等式。



在 2-范畴中，对象是某个 2-单子 T 上的某种代数，这样的 2-范畴有许多不同的选择。以下是其中对我们最重要的两个。

定义 11.9（代数的 2-范畴，2-单子版本）。令 T 为一个 2-单子。

- 2-范畴 T-$\mathbf{Alg}_s$ 由严格的 T-代数、严格态射和 T变换组成。
- 2-范畴 $\mathbf{Ps}$-T-$\mathbf{Alg}$ 由 T伪代数、伪态射和 T变换组成。

12 Λ-Cat 中的拟运算子作为2-单子

本节开始研究 Cat 中的 Λ-拟运算子 P 上的代数。该理论融合了 2-单子理论 [41, 5] 和拟 operad 理论 [53]中的标准结果。

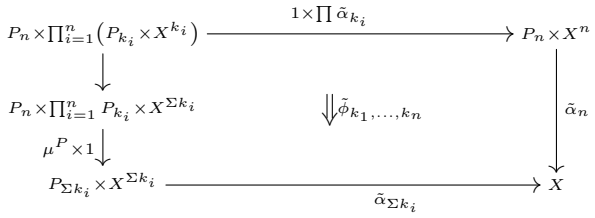
注 12.1（Λ-Cat 中的拟运算子）。这里我们明确描述 Λ-拟运算子 P 在 **Cat** 中的结构，遵循注 3.5。一个 Λ-拟运算子 P 在 **Cat** 中由以下部分组成：

- 一个范畴，对于每个自然数 n，都有 $P(n)$，
- 对每个 n，一个右 $\Lambda(n)$-作用于 $P(n)$，按照约定 10.2，
- 一个对象 $\mathsf{id} \in P(1)$，以及
- 函子μ: $P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n) \to P(k_1 + \cdots + k_n)$，

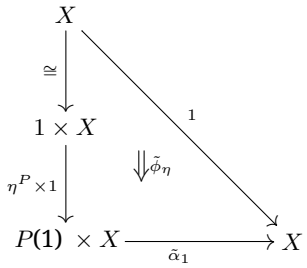
满足定义 3.1 中的前两个公理，以及定义 8.1中的两个等变公理。

定义 12.2（伪代数，Λ-拟运算子版本）。设 P是一个 Λ-拟运算子，取值于 **Cat**。一个 *pseudoalgebra* 对于 P 由以下部分组成：

- 一个范畴 X，
- 一族函子
$$\left(\alpha_n \colon P(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n \to X\right)_{n \in \mathbb{N}},$$
- 对于每个 n，k_1，……，$k_n \in \mathbb{N}$，一个自然同构 $\phi_{k_1,\ \ldots\ldots,\ k_n}$（根据约定 2.8 和备注 10.8）对应于一个自然同构

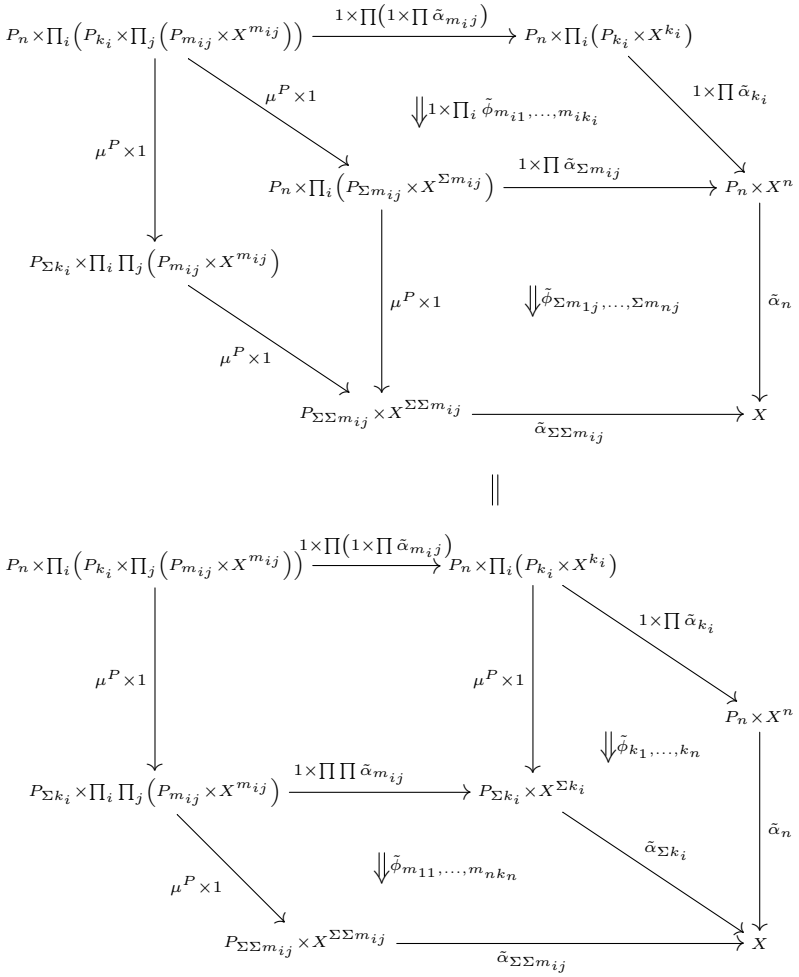


- 以及一个自然同构 ϕ_η，对应于一个自然同构

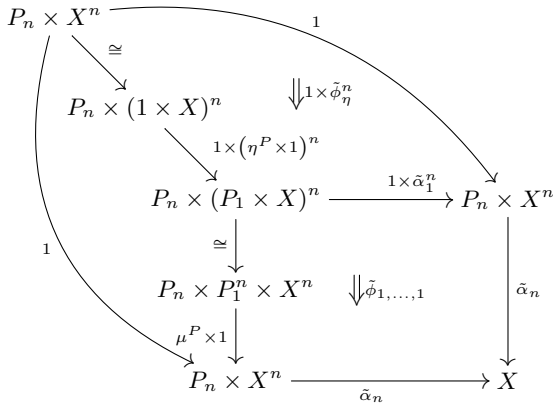


满足以下公理。

- 对于所有 $n,\ k_i,\ m_{ij} \in \mathbf{N}$，以下粘贴图相等。



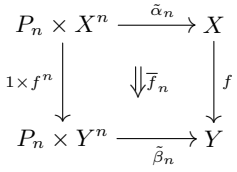
- 以下形式的每个粘贴图都是恒等态射。



定义 12.3（严格代数，　Λ-拟运算子版本）。设　P 是一个　Λ-拟运算子。对于　P，*strict algebra* 由一个伪代数组成，其中所有同构 ϕ 都是恒等态射。

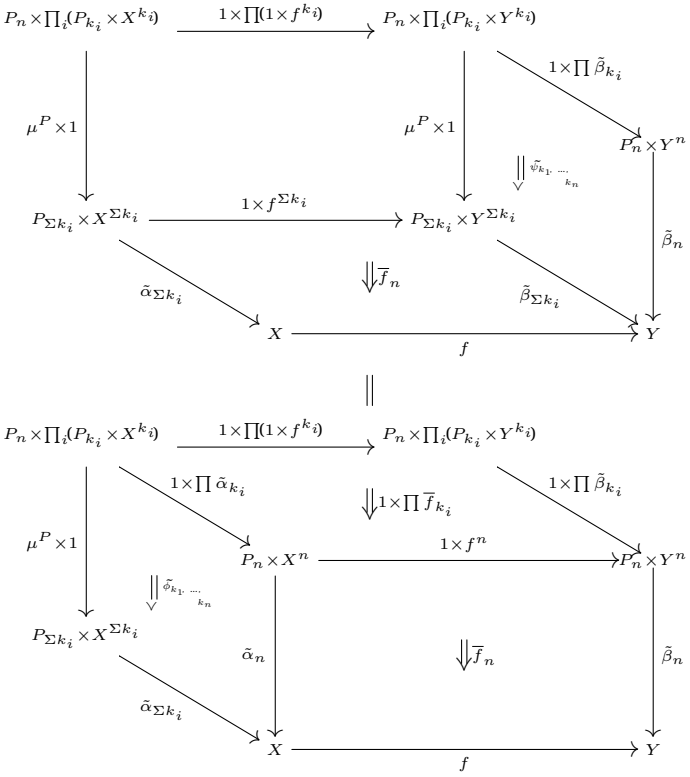
定义 12.4（伪态射，　Λ-拟运算子版本）。设 $(X, \alpha_n, \phi, \phi_\eta)$ 和 $(Y, \beta_n, \psi, \psi_\eta)$ 是　Λ-拟运算子　P 的伪代数。一个　*P-pseudomorphism* 由以下部分组成

- 一个函子　$f\colon\ X \to Y$
- 对每个　$n \in \mathbb{N}$，一个自然同构　f_n　（根据约定 2.8 和注释 10.8，对应于一个自然同构）

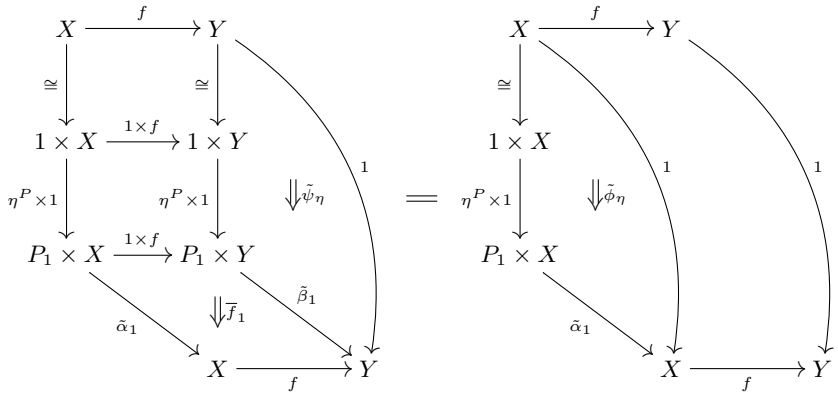


满足以下公理。

- 以下粘贴图的等式成立。



- 以下粘贴图等式成立。



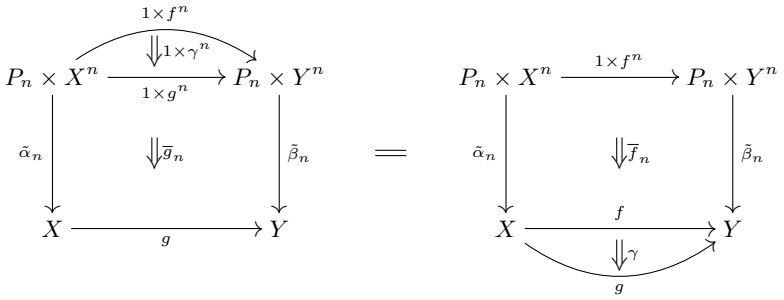
定义 12.5（严格态射，Λ-拟运算子版本）。设 $(X,\ \alpha_n,\ \phi,\ \phi_\eta)$ 和 $(Y,\ \beta_n,\ \psi,\ \psi_\eta)$ 是 Λ-拟运算子的伪代数 P。*strict morphism*是这样一种伪态射，其中所有同构 f_n 都是恒等态射。

注 12.6。在 **Cat** 中的一个 Λ-拟运算子 P 的严格代数，恰好等同于将 P 视为小范畴及其函子范畴中的一个拟运算子时的代数。严格代数之间的严格态射，就是标准意义上的 P-代数映射。我们也可以考虑拟运算子的松代数，或代数之间的松态射，只需在定义中用自然变换代替同构即可。

注记 12.7（等变公理，或其缺失）。在原始预印本 [9, 中出现的定义 12.4 版本（定义 2.4], ）里，我们没有明确说明同构 f_n 应满足等变条件。Rubin 的学位论文 [58]中的注记 2.22 指出了这一点。同样，这一遗漏也在 [18], 的定义 2.23 中被明确指出，如 [19]所述。这些等变公理是约定 2.8 和注记 10.8 的推论。在定义 12.4 中，我们要求存在自然同构 f_n，以诱导相应的自然同构 f_n。f_n 由 f_n 诱导这一点，对应于 f_n 满足等变条件这一事实；具体而言，对于 $(\sigma, g, x_1, \ldots, x_n) \in P(n)\times\Lambda(n)\times X^n$，我们有

$$(\overline{f}_n)_{(\sigma\cdot g, x_1,\ldots,x_n)} = (\overline{f}_n)_{\left(\sigma, x_{g^{-1}(1)},\ldots,x_{g^{-1}(n)}\right)}.$$

定义 12.8（P-变换，Λ-拟运算子版本）。令 P 为一个 Λ-拟运算子，并令 $f,\ g\colon (X,\ \alpha,\ \phi,\ \phi_\eta) \to (Y,\ \beta,\ \psi,\ \psi_\eta)$ 为 P-伪代数之间的伪态射。此时，*P-transformation* 是一个自然变换 $\gamma\colon\ f \Rightarrow g$，使得对于所有 n，以下粘贴图的等式成立。



我们可以利用这些胞构造各种 2-范畴。

定义 12.9（代数的 2-范畴，Λ-拟运算子版本）。令 P 为一个 Λ-拟运算子。

- 2-范畴 P-**代数**$_s$ 由严格的 P-代数、严格态射和 P-变换组成。
- 2-范畴 **伪**-P-**代数** 由 P-伪代数、伪态射和 P-变换组成。

本节的第一个主要结果如下，它表明，对于 Λ-拟运算子 P，无论采用其拟运算子体现还是 2-单子体现，都可以在严格或伪的意义下考察代数及其高阶胞。此定理将命题 8.23 推广到了二维情形。

定理 12.10 *Let P be a Λ-operad in* **Cat** *and let P denote the monad on the category of small categories from Definition 8.22.*

- *The monad P is the underlying monad of a 2-monad on the 2-category* **Cat** *that we also denote P.*
- *There is an isomorphism of 2-categories*

$$P\text{-}\mathbf{Alg}_s \cong \underline{P}\text{-}\mathbf{Alg}_s.$$

- *There is an isomorphism of 2-categories*

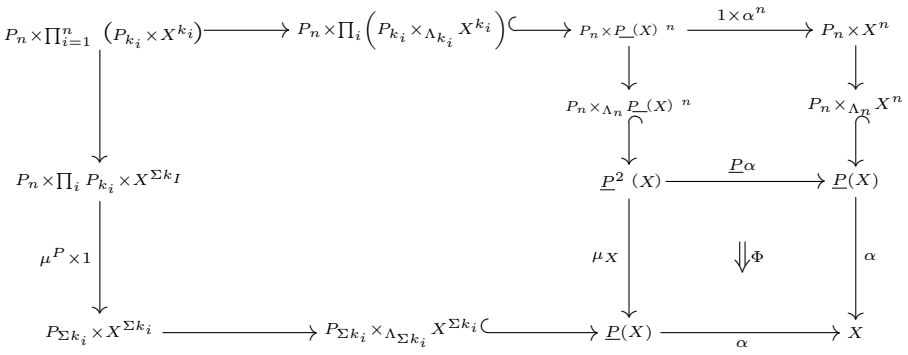
$$\mathbf{Ps}\text{-}P\text{-}\mathbf{Alg} \cong \mathbf{Ps}\text{-}\underline{P}\text{-}\mathbf{Alg}$$

extending the one above.

Proof. 首先要指出，我们将不再区分 2-胞腔 Γ 与相应的 2-胞腔 $\tilde{\Gamma}$，这是通过将备注 10.8 的二维部分应用于约定 2.8实现的。将适当的恒等态射插入其中，即可由第二个陈述的证明推出第一个陈述的证明。因此，我们首先构造一个 2-函子 $R\colon$ **伪**-P-**代数** $\to$ **伪**-P-**代数**。我们将一个 P-伪代数 $(X,\ \alpha,\ \Phi,\ \Phi_\eta)$ 映射为同一范畴 P 上的以下 X-伪代数结构。首先，我们将函子 α_n 定义为以下复合态射

$$P(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n \hookrightarrow \underline{P}(X) \xrightarrow{\alpha} X.$$

同构 $\phi_{k_1,\ldots,k_n}$ 是利用 Φ定义的，如下图所示



而 ϕ_η 定义为 Φ_η，因为 α 与从 $P(1)\times X$ 到 $P(X)$ 的余等化子和包含映射的复合态射相复合，恰好就是 $\tilde{\alpha_1}$。根据分量上的 P-伪代数，可以直接验证 P-伪代数公理；这部分留给读者。

对于一个 1-胞腔 $(f,\ f)\colon (X,\ \alpha)\to(Y,\ \beta)$，我们将 f 发送到其自身，同时将 f 发送到显然的同构族，如下所示。

$$\begin{array}{ccccccc}
P(n)\times X^n & \longrightarrow & P(n)\otimes_{\Lambda(n)} X^n & \hookrightarrow & \underline{P}(X) & \xrightarrow{\alpha} & X \\
\downarrow{\scriptstyle 1\times f^n} & & \downarrow{\scriptstyle 1\times f^n} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{P}f} & \Downarrow\bar{f} & \downarrow{\scriptstyle f} \\
P(n)\times Y^n & \longrightarrow & P(n)\otimes_{\Lambda(n)} Y^n & \hookrightarrow & \underline{P}(Y) & \xrightarrow[\beta]{} & Y
\end{array}$$

容易检查出，上述数据满足成为 P-伪代数的伪态射的公理；这由 $(f,\ f)$ 成为 P-伪代数的伪态射的公理推出。一个 P-变换 $\gamma\colon (f,\ \bar{f})\Rightarrow(g,\ \bar{g})$ 立即给出我们先前定义的同构族之间的一个 P-变换 $\bar{\gamma}$，其中 $\bar{\gamma}$ 的分量恰好就是 γ 的分量。随后很容易证明 R 是一个 2- 函子。

要使 2-范畴同构，我们需要 R 的逆，即一个 2-函子 $S\colon \mathbf{Ps}\text{-}P\text{-}\mathbf{Alg}\to\mathbf{Ps}\text{-}P\text{-}\mathbf{Alg}$。现在假设 $(X,\ \alpha_n,\ \phi_{k_i},\ \phi_\eta)$ 是一个 P-伪代数。我们将在同一对象 X 上赋予一个 P-伪代数结构。利用余积的泛性质，我们可以诱导出一个函子 $\alpha\colon\ P(X)\to X$。

$$\begin{array}{ccccc}
P(n)\times X^n & \longrightarrow & P(n)\otimes_{\Lambda(n)} X^n & \hookrightarrow & \underline{P}(X) \\
& \searrow^{\tilde{\alpha}_n} & & \overset{\alpha_n}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \exists!\alpha} \\
& & & & X
\end{array}$$

这可以用 α_n 或 $\tilde{\alpha}_n$ 来诱导，两者因唯一性而给出相同的函子 α。同构 $\Phi\colon\ \alpha\circ P(\alpha)\Rightarrow\alpha\circ\mu_X$ 的分量可如下给出。令 $|x_i|$ 表示列表 $\underline{x_i}$ 中对象的数量。然后定义 Φ 在对象

$$\left[p;\left[q_1;\underline{x}_1\right],\ldots,\left[q_n;\underline{x}_n\right]\right]$$

为同一对象处 $\phi_{|x_1|,\ldots,|x_n|}$ 的分量。将同构 Φ_η 定义为 ϕ_η。

现在，给定一个 1-胞腔 f 及其结构 2-胞 f_n，我们定义一个 1-胞腔 (F,F)，其底层 1-胞腔为 f，结构 2-胞为 F，其分量为

$$\overline{F}_{[p;x_1,\ldots,x_n]}:=\left(\overline{f}_n\right)_{(p;x_1,\ldots,x_n)}.$$

2-胞的映射按之前的方式将 γ 映射到 γ。现在很容易验证，S 是 R的逆，从而完成了该同构的证明。□

注 12.11。每个范畴 C 都通过如下定义，在 **Cat** 中确定一个自同态算子 $\mathcal{E}_C$

$$\mathcal{E}_C(n)=[C^n,C],$$

其中方括号表示函子范畴。虽然 $\mathcal{E}_C$ 自然是一个对称拟运算子，但利用定理 Λ，可以将其赋予任意作用歌剧（Λ，π）的 π^*-拟运算子结构。读者可以验证，严格的 P-代数结构与 Λ-拟运算子的严格映射 $P\to\pi^*\mathcal{E}_C$一一对应，而伪 P-代数结构与 Λ-拟运算子的伪态射 $P\to\pi^*\mathcal{E}_C$一一对应。我们也可以发展引理 8.20 和推论 8.21的类似结果，但这里不再探讨这一研究方向。

我们通过研究 **Cat** 中的一个特殊情形来结束本节： Λ-拟运算子上的代数，我们将其称为 Λ-幺半范畴。这些范畴将各种类型的幺半范畴（普通、对称和编织）推广到任意作用歌剧 Λ。为了定义Λ-幺半范畴，我们必须先构造它们所对应的代数拟运算子。

定义 12.12（E **和** B）。我们定义如下构造： E 和 B 。

1. 设 X 是一个集合。我们定义 *translation category* EX ，其对象为 X 的元素，态射则由任意两个对象之间唯一的同构构成。2. 设 G 是一个群。范畴 BG 只有一个对象 $*$，其同态集为 $BG(*, *) = G$；复合和恒等态射分别由群中的乘法和单位元给出。

下面的引理很容易验证。

引理 12.13 *The functor* $E \to$ *is right adjoint to the set of objects* **..** : **集合** *functor. Therefore* E *preserves all limits* **Cat** , *and in particular is a symmetric monoidal functor when both categories are equipped with their cartesian monoidal structures.*

推论 12.14 $n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is a* Λ*-operad* **..**

Let Λ *be an action operad. Then* $E\Lambda = \{E\Lambda()$**Cat**

Proof. 我们已经定义了范畴 $E\Lambda(n)$，而 $E\Lambda(n)$ 上的右 $\Lambda(n)$-作用由群 $\Lambda(n)$ 在对象上的乘法给出，并在态射上唯一确定。对象 $\mathrm{id} \in E\Lambda(1)$ 是 $e_1 \in \Lambda(1)$。拟运算子的乘

$$\mu\colon E\Lambda(n) \times E\Lambda(k_1) \times \cdots \times E\Lambda(k_n) \to E\Lambda(k_1 + \cdots + k_n)$$

通过伴随性对应于一个函数

$$\mu'\colon \mathrm{ob}\big(E\Lambda(n) \times E\Lambda(k_1) \times \cdots \times E\Lambda(k_n)\big) \to \Lambda(k_1 + \cdots + k_n).$$

由于对象集函子本身保持积，并且我们有等式 $\mathrm{ob}ES = S$，我们定义 μ' 为 Λ的拟运算子乘法。公理均由命题 8.8推出。

□

定义 12.15（Λ**-幺半范畴、函子与变换**）。设 Λ 是一个作用歌剧。

- A Λ-*monoidal category* 是 $E\Lambda$ 上的 Λ-拟运算子的严格代数。
- A Λ-*monoidal functor* 是 $E\Lambda$ 上的 Λ-拟运算子的严格态射。
- A Λ-*transformation* 是一个 $E\Lambda$-变换。

注 12.16（$E\Lambda$**-代数是** $E\Lambda$**-代数**）。在上述每一项中，我们都可以根据定理 $E\Lambda$ 12.10, 用 2-单子 Λ替代 $E\Lambda$ -拟运算子来表达相同的概念。我们可以在全文中作同样的替换，而不改变任何结果。我们只是选择用拟运算子而非 2-单子来陈述定义和结果。

注 12.17（ Λ**-幺半范畴的严格性**）。请注意，我们对 Λ-幺半范畴的定义涉及严格底层幺半结构。我们将在第 13 节简要探讨适用于一般幺半范畴的一个版本，并在定理 13.15 中证明一个严格化结果。

定义 12.18（ Λ-幺半范畴的 2-范畴）。2-范畴Λ-**MonCat** 是由关于 $E\Lambda$ 的严格代数、严格态射和代数 2-胞腔构成的 2-范畴 $E\Lambda$-$\mathbf{Alg}_s$。

我们以计算由范畴 Λ生成的自由 X-幺半范畴及自由代数 $E\Lambda(X)$ 结束本节。最终，我们将在定理 15.12 和例 15.13 中证明， Λ-幺半范畴可以用更熟悉的术语来描述，如 [66] 第 19 章所示。

注记 12.19。回想一下，任意右作用 $\mu\colon C\times G\to C$ 都可以视为左作用 $\mu'\colon G\times C\to C$，通过

$$\mu'(g,c)=\mu(c,g^{-1}).$$

设 P 是 Cat 中的一个 Λ-拟运算子，使得 $\Lambda(n)$ 在 $P(n)$ 上的作用 $\times X^n$ 由下式给出：

$$\lambda\cdot(p,\underline{x_i})=(p\cdot\lambda^{-1},\underline{x_{\lambda^{-1}(i)}}),$$

对每个范畴 X都是自由的；当 $\Lambda(n)$ 在 $P(n)$ 上的作用本身是自由的时，这个假设很容易验证，例如 $P=E\Lambda$。那么余等化子 $P(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$ 与引理 10.5第二部分中的余等化子一致，因此可以计算为 $(P(n)\times X^n)/\Lambda(n)$。

命题 12.20. *Let Λ be an action operad and X be a category. The free Λ-monoidal category generated by X, $E\Lambda(X)$ is isomorphic to a category with*

- *object set $\coprod_{n\in\mathbb{N}}(obX)^n$ and*
- *morphism sets*

$$E\Lambda(X)\left((x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_n)\right)=\begin{cases}\emptyset, & m\neq n\\ \coprod_{g\in\Lambda(n)}\prod_{i=1}^n X\left(x_i,y_{g(i)}\right), & m=n.\end{cases}$$

Proof. 2-单子 $E\Lambda$ 的底层 2-函子由下式给出

$$X\mapsto E\Lambda(X)=\coprod_{n\geq 0}E\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n.$$

余等化子 $E\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$ 可通过商集 $E\Lambda(n)\times X^n)/\Lambda(n)$ 计算，依据引理 10.5 并采用注记 12.19中的方法。因此，$E\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$ 的对象集与 $\Lambda(n)$ 对 $E\Lambda(n)\times X^n$作用的轨道集之间存在双射。我们有如下轨道等式

$$[g;x_1,\dots,x_n]=[e_n;x_{g^{-1}(1)},\dots,x_{g^{-1}(n)}]$$

对任意 $g\in\Lambda(n)$。此外，由于该作用是自由的，存在如下轨道等式

$$[e_n;x_1,\dots,x_n]=[e_n;y_1,\dots,y_n]$$

当且仅当 $x_i=y_i$ 对所有 i成立。因此，将每个轨道映射到其唯一代表元（其中群元素为恒等态射）的函数 e_n 是一个同构，它将 $E\Lambda(n)\otimes_{\Lambda(n)}X^n$ 的对象集映射到 X^n的对象集。引理 10.5 中给出的态射公式于是化简为上面的公式。 □

推论 12.21。 *Let Λ be an action operad. The free Λ-monoidal category on one object $E\Lambda\ 1$ has its underlying strict monoidal category given by $B\Lambda$ with the monoidal $,()$ structure from Proposition 9.5.*

13 相干性

本节讨论由 **Cat** 中的 Λ-拟运算子所诱导的 2-单子的相干性问题。相干定理有多种形式，我们主要关注严格化型相干性定理。这里的典型例子是幺半范畴的相干定理。在幺半范畴中，我们要求结合子同构

$$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$$

对于范畴中的所有对象。相干性定理告诉我们，对于任意幺半范畴 M，都存在一个与 M 等价的严格幺半范畴。换言之，我们可以将 M 中的结合子视为恒等态射，单位同构态射也同样如此。

根据定理 12.10，我们可以直接研究 Λ-拟运算子 P的代数，也可以通过研究相应 2-单子 P的代数来进行。首先注意到，利用标准论证，由 Λ-拟运算子诱导的 2-单子是有限元的。其次，我们证明 Lack 对 Power 相干性定理推广版本的 [41, 定理 4。10] [57, 定理 3。4] 适用于所有这类 2-单子，并且使我们能够证明，每个伪 P-代数都等价于一个严格 P-代数。

命题 13.1。 *Let P be a Λ-operad. Then P is finitary.*

Proof. 其论证与 [41]第 4.1 节中针对编织拟运算子的论证相同。 □

现在，我们按照 John Power 的方法，并结合 Lack 的推广结果，为 **Cat** 中的 Λ-拟运算子 P 上的代数给出一个抽象相干定理。为此，我们回顾增强分解系统的概念以及 Power 的相干性结果。

定义 13.2（增强分解系统）。设 K 为一个 2-范畴。其上的一个 *enhanced factorization system* K 由两类 1-态射 $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ 组成，并满足以下性质。

1. 给定一个由 1-态射构成的交换方格

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

其中 $l \in \mathcal{L}$ 且 $r \in R$，存在唯一的 1-态射 $m\colon B \to C$，使得 $rm = g$ 且 $ml = f$。

2. 给定如上所述由 1-态射构成的两个交换方格，$rf_1 = g_1 l$ 且 $rf_2 = g_2 l$，其中$l \in \mathcal{L}$ 且 $r \in R$；再给定 2-胞腔 $\delta\colon f_1 \Rightarrow f_2$和 $\gamma\colon g_1 \Rightarrow g_2$，满足$\gamma * l = r * \delta$，则存在唯一的 2-胞腔 $\mu\colon m_1 \Rightarrow m_2$，其中 m_1和 m_2 由 1-胞提升性质诱导，并且满足 $\mu * l = \delta$和 $r * \mu = \gamma$。

3. 给定映射 $l \in \mathcal{L}$、 $r \in \mathcal{R}$ 和一个可逆 2-胞 $\alpha\colon rf \Rightarrow gl$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \swarrow\!\!\!\swarrow{\scriptstyle \alpha} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B & \xrightarrow[g]{} & D \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{m}{\nearrow}\ \swarrow\!\!\!\swarrow{\scriptstyle \beta} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

存在唯一的二元组（m, β），其中 $m\colon B \to C$ 是一个 1-胞腔，且 $\beta\colon rm \Rightarrow g$ 是一个可逆 2-胞，使得 $ml = f$ 和 $\beta * l = \alpha$。

定理 13 3 3 4 [57], 4 6 [41] *Let K be a 2-category and T。(定理。定理。)。，，be a 2-monad on K. If K has an enhanced factorization system $\mathcal{L}$ $\mathcal{R}$ such that*

1. *for every $r\colon C \to D$ in $\mathcal{R}$, 1-cell $s\colon D \to C$, and isomorphism $\alpha\colon rs \cong 1_D$, thereexists an isomorphism $\beta\colon sr \cong 1_C$; and2. for every $l \in \mathcal{L}$, the 1-cell Tl is also in $\mathcal{L}$;*

then the inclusion 2-functor

$$U\colon T\text{-}\mathbf{Alg}_s \to \mathbf{Ps}\text{-}T\text{-}\mathbf{Alg}$$

*has a left 2-adjoint and the components of the unit of the adjunction are equivalences，**Ps 代数**, in -T- . In particular every pseudo-T-algebra is equivalent to a strict one.*

引理 13.4 (引理3.3 [57]). *The 2-category* **Cat** *has an enhanced factorization system in which the class $\mathcal{L}$ consists of the functors that are bijective on objects and the class $\mathcal{R}$ consists of the functors that are full and faithful.*

命题

—

13 5 *For any Λ-operad P the 2-monad P preserves bijective-on-objects . . , functors.*

Proof. 这直接由命题 $E\Lambda$中的描述12.20得出。 □

推论 13.6. *Every pseudo-P-algebra is equivalent to a strict P-algebra.*

Proof. 我们采用引理 13.4中的增强分解系统，并检验定理 13.3的假设。若函子 r 是忠实且满的，且存在函子s以及一个同构 $\alpha\colon rs \cong 1$，那么 α的分量 r表明 r本质满。因此 β 是范畴等价，故存在同构 $sr \cong 1\colon l$，如所需。对于任意对象上双射函子，命题 13.5表明 Pl也在对象上双射。因此，定理 13.3的两个假设均已满足，证明完成。

—

□

注记 13.7（伪$E\Lambda$代数是弱的、无偏的）。伪代数与传统的非严格幺半范畴概念之间并非直接对应。伪$E\Lambda$代数是 *weak* 且 *unbiased* 的 Λ幺半范畴形式。

- 这里的 *weak* 是指，对象层面的等式公理被相干同构所取代。单看这句话，读者或许会认为，这意味着伪$E\Lambda$代数具有幺半结构，而不是严格幺半结构。事实并非如此。

- 这些伪代数也是 *unbiased*的，也就是说，它们具有给定的 n元张量积运算 $\otimes_n$：对每个 $n \in \mathbf{N}$，均有 $X^n \to X$；这些运算通过幺半群复合，与前一点中的同构相关联。因此，这里不是结合律同构 $(x \otimes y) \otimes z \cong x \otimes (y \otimes z)$，而是一个同构

$$\otimes_2 (\otimes_2(x, y), z) \cong \otimes_3(x, y, z).$$

关于严格结构与无偏弱结构之间关系的进一步讨论，请参阅 [45] 第 3.1 节。

我们以探讨一种 Λ-幺半范畴的变体来结束本节：其底层幺半结构是弱的，但张量积不像上文那样是无偏的。

记号 13.8（标准结合）。设 $(M,\otimes,I,a,l,r)$ 是一个幺半范畴。对象元组 $x_1,\ldots,x_n$ 的 *standard association* 按如下方式归纳定义。

1. 空元组的标准结合，记作 $\emptyset$，是单位对象 I。2. 单个对象 x 的标准结合，记作 x，就是 x 它本身。3. 假设对象 n $x_1,\ldots,x_n$ 的标准结合已定义为 $x_1\cdots x_n$。对象 $n+1$ $x_1,\ldots,x_{n+1}$ 的标准结合由以下公式定义

$$\underline{x_1\cdots x_{n+1}} = x_1\otimes\underline{x_2\cdots x_{n+1}}.$$

定义 13.9（弱 Λ-幺半范畴）。一个 *weak Λ-monoidal category* 由以下部分构成

- 一个幺半范畴 $(M,\otimes,I,a,l,r)$，以及
- 一个自然同构

$$[g]\colon \underline{x_1\ldots x_n}\cong\underline{x_{g^{-1}(1)}\cdots x_{g^{-1}(n)}}$$

对于每个 $g\in\Lambda(n)$

满足以下三条公理。

1. 令 $g,h\in\Lambda(n)$。下方所示的复合态射 $[h]\circ[g]$

$$\underline{x_1\ldots x_n}\overset{[g]}{\to}\underline{x_{g^{-1}(1)}\cdots x_{g^{-1}(n)}}\overset{[h]}{\to}\underline{x_{g^{-1}(h^{-1}(1))}\cdots x_{g^{-1}(h^{-1}(n))}}$$

等于 $[hg]$，其中 $hg\in\Lambda(n)$ 是通过群结构中的乘法给出的。

2. 对于 $i=1,\ldots,n$，令 $h_i\in\Lambda(k_i)$，并令 x_{ij} 为 $i=1,\ldots,n$ 的 M 中的对象，且有双指标 ij 满足 $1\le j\le k_i$。那么该同构

$$[\beta(h_1,\ldots,h_n)]\colon\underline{x_{ij}}\to\underline{x_{ih_i^{-1}(j)}}$$

等于以下复合态射

$$\underline{x_{ij}}\cong\underline{\underline{x_{1j}}\cdots\underline{x_{nj}}}\overset{[h_i]}{\to}\underline{\underline{x_{1h_1^{-1}(j)}}\cdots\underline{x_{nh_n^{-1}(j)}}}\cong\underline{x_{ih_i^{-1}(j)}},$$

其中，两个未标记的同构是由幺半范畴的相干性给出的唯一重新结合。

3. 令 $g\in\Lambda(n)$，并令 x_{ij} 为 $i=1,\ldots,n$ 的 M 中的对象，且有双指标 ij 满足 $1\le j\le k_i$。那么该同构

$$[\delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(g)]\colon\underline{x_{ij}}\to\underline{x_{g^{-1}(1)1}x_{g^{-1}(1)2}\cdots x_{g^{-1}(1)k_{g^{-1}(1)}}\cdots x_{g^{-1}(n)k_{g^{-1}(n)}}}$$

等于复合态射

$$\underline{x_{ij}}\cong\underline{y_i}\overset{[g]}{\to}\underline{y_{g^{-1}(i)}}\cong\underline{x_{g^{-1}(1)1}x_{g^{-1}(1)2}\cdots x_{g^{-1}(1)k_{g^{-1}(1)}}\cdots x_{g^{-1}(n)k_{g^{-1}(n)}}},$$

其中 $y_i=\underline{x_{i1}\cdots x_{ik_i}}$，以及两个未标记的同构，都是由幺半范畴的相干性唯一确定的重新结合。

记号 13.10。根据幺半函子的相干性，其形式为 [22], ，每个幺半函子 (F,F_2,F_0) 都诱导出一个唯一的同构

$$F_n\colon\underline{Fx_1\cdots Fx_n}\cong F(\underline{x_1\cdots x_n}).$$

在 $n=0$、2 的情形下，这些同构与定义 F 为幺半函子的资料中的同构 F_0、F_2 一致。

定义 13.11（弱 Λ-幺半函子）。设 M、N 为弱 Λ-幺半范畴。一个 *weak Λ-monoidal functor* F：$M \to N$ 由底层幺半范畴的幺半函子（F、F_0、F_2）：$M \to N$ 组成，并且对所有 $g \in \Lambda(n)$ 以及所有对象元组 x_1、……、$x_n \in M$，下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \underline{Fx_1 \cdots Fx_n} & \xrightarrow{[g]} & \underline{Fx_{g^{-1}(1)} \cdots Fx_{g^{-1}(n)}} \\ \downarrow{\scriptstyle F_n} & & \downarrow{\scriptstyle F_n} \\ F\underline{x_1 \cdots x_n} & \xrightarrow[F[g]]{} & \underline{Fx_{g^{-1}(1)} \cdots x_{g^{-1}(n)}} \end{array}$$

以下命题的证明留给读者，因为细节很容易补充，并且与编织或对称幺半范畴中类似证明的思路相仿。

命题 13.12. *There is a 2-category with*

- *objects the weak Λ-monoidal category,*
- *1-cells the weak Λ-monoidal functors,*
- *2-cells the monoidal transformations,*
- *1-cell identities* 1_M：$M \to M$ *given by the identity functor equipped with* $F_0 = id_I$ *and* $(F_2)_{x,\,y} = id_{x \otimes y}$，*and*
- *composition of 1-cells given by composition of the underlying monoidal functors.*

记号 13.13（弱 Λ-幺半范畴的 2-范畴）。命题 13.12 中的 2-范畴称为 *2-category of weak Λ-monoidal categories*，记作 **Wk-Λ-MonCat**。

注记 13.14。**Wk-Λ-MonCat** 中的内部等价，按定义是指弱 Λ-幺半函子 F：$M \to N$，使得存在一个弱 Λ-幺半函子 G：$N \to M$ 以及可逆幺半自然变换 $GF \cong 1_M$，$FG \cong 1_N$。通过对普通幺半函子的标准论证作推广可知，弱 Λ-幺半函子 F 是内部等价，当且仅当 F 的底层函子是范畴等价，例如参见 [43, 命题 3.4]或 [26, 推论 7.4。2]，

定理 13.15。 *Let* Λ *be an action operad.*

1. *There is an inclusion 2-functor*

$$i\colon \Lambda\text{-}\mathbf{MonCat} \to \textit{Wk-}\Lambda\text{-}\mathbf{MonCat},$$

   the image of which consists of those weak Λ-monoidal categories for which the underlying monoidal category is strict.

2. *Every weak Λ-monoidal category is equivalent in Wk-Λ- to one in the image of* i*.* , **MonCat**

Proof. 设 X 是由函子 μ_n：$E\Lambda(n) \otimes_{\Lambda(n)} X^n \to X$ 给出的一个 $E\Lambda$-代数，或者等价地说，是一个函子 μ：$E\Lambda(X) \to X$。我们将为 X 赋予严格幺半结构，然后将其扩展为弱 Λ-幺半范畴结构。令 T 为平凡作用歌剧，并令 $T \to \Lambda$ 为唯一的作用歌剧映射（见例 4.5）。容易看出，ET 是 Cat 上的自由幺半群 2-单子，而命题 12.20 中对 $E\Lambda$ 的描述表明，$ET(X)$ 嵌入 $E\Lambda(X)$ 的子范畴中；该子范畴包含所有对象，但在每个与 $e_n \in \Lambda(n)$ 对应的直和项中，只包含其中的态射。因此，X 通过复合获得一个 ET-代数结构：

$$\underline{ET}(X) \hookrightarrow \underline{E\Lambda}(X) \xrightarrow{\mu} X.$$

这个 ET-代数结构正是所需的严格幺半结构。

设 $g \in \Lambda(n)$ 和 $x_1,\ldots,x_n$ 是 X 的对象。在 $E\Lambda(n)$ 中存在唯一的同构 $\tilde{g}\colon e_n \cong g$，将 μ_n 应用于

$$[e_n; x_1, \ldots, x_n] \overset{[\tilde{g};\mathrm{id},\ldots,\mathrm{id}]}{\longrightarrow} [g; x_1, \ldots, x_n] = [e_n; x_{g^{-1}(1)}, \ldots, x_{g^{-1}(n)}]$$

会得到一个同构

$$[\tilde{g}; \underline{\mathrm{id}}]\colon x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \cong x_{g^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{g^{-1}(n)}.$$

将定义 $[g]$ 13.9 中的同构 定义为 $[\tilde{g};\ \mathrm{id}]$。定义 13.9 中的三条公理由作用歌剧公理立即推出，从而完成了对象上的 2-函子 i 的构造。类似论证也适用于严格的 $E\Lambda$-态射和 $E\Lambda$-变换，这些论证留给读者。上述论证结合命题 12.20 表明，所得 2-函子 i 的像是那些具有严格底层幺半结构的弱Λ-幺半范畴，从而完成了第一个结论的证明。

现在设 M 是一个弱 Λ-幺半范畴，并令 M_u 表示其底层幺半范畴。根据幺半范畴的相干性，[27, 20]，存在一个严格幺半范畴 $\mathrm{st}M_u$，以及一个幺半等价 $e\colon \mathrm{st}M_u \to M_u$，其定义如下。

- $\mathrm{st}M_u$ 的对象由一个自然数 n 以及 M_u中的一个对象有序列表 $x_1,\ldots,x_n$ 构成。当 $n=0$ 时，这样的对象唯一。
- 函子 e 将 $(n;\ x_1,\ldots,x_n)$ 映射为标准结合（记号 13.8）$x_1\cdots x_n$。
- 在 $\mathrm{st}M_u$ 中，从 $(m;\ x_1,\ldots,x_m)$ 到 $(n; y_1,\ldots,y_n)$ 的态射集合，定义为从 $x_1\cdots x_m$ 到 $y_1\cdots y_n$ 在 M_u中的态射集合。

幺半结构在对象上由自然数相加和列表连接给出，在态射上则由以下方式给出

$$\underline{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_n} \cong \underline{x_1\cdots x_m} \otimes \underline{y_1\cdots y_n} \overset{f\otimes g}{\to} \underline{u_1\cdots u_k} \otimes \underline{v_1\cdots v_j} \cong \underline{u_1\cdots u_k v_1\cdots v_j}.$$

我们将赋予 $\mathrm{st}M_u$ 一个 Λ-幺半范畴结构，使得 e 在它与 M之间诱导一个等价。

设 $y_i = (n_i;\ x_{i1},\ldots,x_{in_i})$ 是 $\mathrm{st}M_u$ 的对象，其中 $i = 1,\ldots,m$。对于一个元素 $g \in \Lambda(k)$，定义 $[g]$ 为定义 13.9 中的同构 $[\delta_{m;k_1,\ldots,k_m}(g)]$。现在，我们必须使用 $\mathrm{st}M_u$ 中 $[g]$ 的这个定义，验证定义 13.9 中的三个公理。根据定理 4.15 中对作用歌剧的刻画，每个公理都成立。第一公理由公理（6）推出，第二公理由公理（9）推出，第三公理由公理（7）推出。我们用 $\mathrm{st}^{\Lambda}M$ 表示 $\mathrm{st}M_u$上的这个 Λ-幺半结构。由于 $\mathrm{st}M_u$ 按构造是严格幺半的，并且已知$e\colon \mathrm{st}M_u \to M$ 是一个幺半等价，因此只需证明 e 是一个 Λ-幺半函子，即可证明 e 实际上是一个 Λ-幺半等价 $\mathrm{st}^{\Lambda}M \to M$。定义 13.11 中的唯一公理要求下面的图表可交换，

$$\begin{array}{ccc}
\underline{ey_1\cdots ey_m} & \xrightarrow{\quad[g]\quad} & \underline{ey_{g^{-1}(1)}\cdots ey_{g^{-1}(m)}} \\
\downarrow{\scriptstyle e_m} & & \downarrow{\scriptstyle e_m} \\
e\big(\underline{y_1\cdots y_m}\big) & \xrightarrow[e[g]]{} & \underline{e\big(y_{g^{-1}(1)}\cdots y_{g^{-1}(m)}\big)}
\end{array}$$

而这可直接由定义 13.9 中的第三公理得出。根据注 13.14，这一观察完成了证明： e是弱 Λ-幺半范畴的 2-范畴中的一个等价。

□

备注 13.16（伪$E\Lambda$代数与弱 Λ幺半范畴）。虽然推论13.6 以简洁著称，令人满意，但在实践中，人们可能会发现它不如定理13.15的第二部分有用；对于普通幺半范畴，情况也是如此。

14 群作用与笛卡尔的 2-单子

这是两个探讨拟运算子与拉回之间相互作用的章节中的第一章。非对称歌剧所产生的单子总是笛卡尔的，如 [45, 附录 C] 所述。然而，对称歌剧所产生的单子并不总是笛卡尔的；一个反例是其代数为交换幺半群的对称歌剧。转到 2-范畴上的 2-单子的语境，我们可以考察那些 2-笛卡尔的 2-单子（定义 14.1）。本节的目标是刻画那些 Λ-拟运算子 P，使其诱导的 2-单子 P 为 2-笛卡尔的。我们在推论 14.7 和定理 14.9 中证明，P 为 2-笛卡尔，等价于具有自由群作用（对称情形），或具有对自由群作用稍作弱化的性质（一般的 Λ- 拟运算子情形）。

定义 14.1（2-笛卡尔 2-单子）。称一个 2-单子 $T\colon\ \mathcal{K}\to\mathcal{K}$ 是 *2-cartesian*，如果

- 该 2-范畴 $\mathcal{K}$ 具有 2-拉回，
- 该函子 T 保持 2-拉回（在同构意义下），并且
- 该 2-单子的单位和乘法的自然性方块是 2-拉回。

注 14.2。正如注 10.8所述，图表的 2-拉回实际上与 **Cat**中的普通拉回相同。因此，我们将省略前缀 2-，并将「笛卡尔的」解释为「2-笛卡尔」。

我们首先在对称歌剧的语境下研究笛卡尔性质。我们将分别考察 P 的单位何时是笛卡尔的、P 的乘法何时是笛卡尔的，以及 P 何时是笛卡尔 2-函子。

命题 14.3 *associated monad is a cartesian transformation. Let P be a symmetric operad. Then the unit η: $id \Rightarrow P$ for the ..*

Proof. 为了证明 η 是笛卡尔的，我们必须证明：对于函子 $f\colon X\to Y$，下方图表的拉回是范畴 X。

$$\begin{array}{ccc} \coprod P(n)\otimes_{\Sigma_n} X^n & \xrightarrow[\underline{P}(f)]{} & \coprod P(n)\otimes_{\Sigma_n} Y^n \\ & & \uparrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ & & Y \end{array}$$

该图表的拉回同构于以下形式图表的拉回的余积；左侧无需余等化子，因为 Σ_1 是平凡群。

$$\begin{array}{ccc} P(1)\times X & \xrightarrow[1\times f]{} & P(1)\times Y \\ & & \uparrow \\ & & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P(n)\otimes_{\Sigma_n} X^n & \xrightarrow[1\times f^n]{} & P(n)\otimes_{\Sigma_n} Y^n \\ & & \uparrow \\ & & \emptyset \end{array} \quad n\neq 1$$

因此很容易看出， X 是余跨度 $n=1$ 的拉回，而空范畴是其他每个余跨度的拉回，由此可知 X 是原图表的拉回，并验证了 η 是笛卡尔的。

□

命题 **14 4** *then..*

the multiplication μ $P^2 \Rightarrow P$ of the associated monad is a cartesian transformation.
Let P be a symmetric operad. If the Σ_n-actions are all free, :

Proof. 注意，如果所有图表

$$\begin{array}{ccc} \underline{P}^2(X) & \xrightarrow{\underline{P}^2(!)} & \underline{P}^2(1) \\ {\scriptstyle \mu_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\ \underline{P}(X) & \xrightarrow[\underline{P}(!)]{} & \underline{P}(1) \end{array}$$

都是拉回，那么图表外围

$$\begin{array}{ccccc} \underline{P}^2(X) & \xrightarrow{\underline{P}^2(f)} & \underline{P}^2(Y) & \xrightarrow{\underline{P}^2(!)} & \underline{P}^2(1) \\ {\scriptstyle \mu_X}\downarrow & & {\scriptstyle \mu_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\ \underline{P}(X) & \xrightarrow[\underline{P}(f)]{} & \underline{P}(Y) & \xrightarrow[\underline{P}(!)]{} & \underline{P}(1) \end{array}$$

也会是拉回，因此 μ的每个自然性方块都必然是拉回。

现在，我们可以像处理 η时那样，把上面的方块拆分开来，并证明下面的每个方块都是拉回。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_m P(m) \otimes_{\Sigma_m} \prod_{k_1+\cdots+k_m=n} \left(P(k_i) \otimes_{\Sigma_{k_i}} X^{k_i} \right) & \to & \coprod P(m) \otimes_{\Sigma_m} \prod_i \left(P(k_i)/\Sigma_{k_i} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(n) \otimes_{\Sigma_n} X^n & \longrightarrow & P(n)/\Sigma_n \end{array}$$

底部的映射是显而易见的，它将 $[p;\, x_1,\ \ldots,\ x_n]$ 直接映到等价类 $[p]$。右侧的映射由拟运算子的复合诱导，将 $[q;\, [p_1],\ \ldots,\ [p_m]]$ 映到 $[\mu^P(q;\, p_1,\ \ldots,\ p_n)]$。这些映射的拉回将是由有序对构成的范畴

$$\left([p; x_1, \ldots, x_n], [q; [p_1], \ldots, [p_m]]\right),$$

其中 $q \in P\ m$ $p_i \in P\ k_i$ $p \in P\ n$ $[p] =$ ( )、( )、$[\mu^P\ q\ p_1\ \ldots\ p_n]$ $k_1 + \cdots + k_m = n$、( )，且满足 (; 、 、) ; 我们将用 $\overset{U}{}$ 表示该拉回。图表左上角的范畴记作 Q，其对象为

$$[q; [p_1; \underline{x}_1], \ldots, [p_m; \underline{x}_m]].$$

唯一诱导出的函子 $F\colon\ Q \to U$ 在对象上的定义由公式

$$F\Big(\big[q; [p_1; \underline{x}_1], \ldots, [p_m; \underline{x}_m]\big]\Big) = \Big(\Big[\mu^P(q; p_1, \ldots, p_m); \underline{x}\Big], [q; [p_1], \ldots, [p_m]]\Big),$$

其中，列表 x 是拼接 x_1，……，x_m。我们如下定义逆 $G\colon\ U \to Q$。令

$$([p; x_1, \dots, x_n], [q; [p_1], \dots, [p_m]])$$

是 U 的一个对象，其中 $p_i \in P(k_i)$ 如上。由于 Σ_n 在 $P(n)$ 上的作用是自由的，因此存在唯一的 $g \in \Sigma_n$ 使得 $p = \mu^P(q;\ p_1,\ \dots\dots,\ p_m) \cdot g$。于是

$$\begin{aligned}[p; x_1, \dots, x_n] &= \left[\mu^P(q; p_1, \dots, p_m) \cdot g; x_1, \dots, x_n\right] \\ &= \left[\mu^P(q; p_1, \dots, p_m); x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(n)}\right],\end{aligned}$$

因此，如有必要，通过对 x_i 重新编号，我们可以假设 $p = \mu^P(q;\ p_1,\ \dots\dots,\ p_m)$。然后定义

$$G\Big([p; x_1, \dots, x_n], [q; [p_1], \dots, [p_m]]\Big) = \left[q; [p_1; \underline{y}_1], \dots, [p_m; \underline{y}_m]\right],$$

其中

$$\underline{y_j} = x_{k_1+\cdots+k_{j-1}+1}, \dots, x_{k_1+\cdots+k_{j-1}+k_j}.$$

读者可以验证这一定义良好，并且在对象上是 F 的逆。对于态射也有类似的公式。函子 G 是 F 的逆，因此所需的方形是一个拉回，从而证明完毕。

□

注 14.5（拉回消去）。我们将前一个证明的第一段中所使用的技巧称为 *pullback cancellation*。

命题 14 6 *Let P be a symmetric operad. Then the 2-monad P preserves …… ( ) pullbacks if and only if Σ_n acts freely on $P\ n$ for all n.*

Proof. 考虑以下离散范畴的拉回。

$$\begin{array}{ccc} \{(x,y),(x,y'),(x',y),(x',y')\} & \longrightarrow & \{y,y'\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{x,x'\} & \longrightarrow & \{z\} \end{array}$$

令 **4** 表示该拉回，并类似地记作 $\mathbf{2}_X = \{x, x'\}$ 和 $\mathbf{2}_Y = \{y, y'\}$，则以下图表是此拉回方形在 P 作用下的像。

$$\begin{array}{ccc} \coprod P(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbf{4}^n & \longrightarrow & \coprod P(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbf{2}_Y^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod P(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbf{2}_X^n & \longrightarrow & \coprod P(n)/\Sigma_n \end{array}$$

投影映射 $\pi_Y\colon\ P(\mathbf{4}) \to \underline{P}(\mathbf{2}_Y)$ 定义为

$$\pi_Y\left(\ [p; (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)]\ \right) = [p; y_1, \dots, y_n],$$

同理，投影 π_X 到 $P(\mathbf{2}_X)$。

现在假设，对于某个 n，Σ_n 在 $P(n)$ 上的作用不是自由的。那么存在 $p \in P(n)$ 和一个非恒等元 $g \in \Sigma_n$，使得 $p \cdot g = p$。我们将证明，g 的存在说明 P 不是笛卡尔的。由于 $g \neq e$，因此存在一个 $i \in \{1, \dots, n\}$，使得 $g(i) \neq i$；不失一般性，我们可以取 $i = 1$，并假设 $g(1) = 2$。考虑这两个不同的元素

$$a_1 = \left[p; (x', y), (x, y'), (x, y), \dots, (x, y)\right]$$

and

$$a_2 = [p; (x, y), (x', y'), (x, y), \ldots, (x, y)]$$

在 $P(\mathbf{4})$ 中，其中这些列表的所有元素均由 $(x,\ y)$ 给出，除非另有说明。这两个元素都映射到 $P(\mathbf{2}_X)$ 中的同一个元素：

$$\begin{aligned}
\pi_X(a_1) &= [p; x', x, \ldots, x] \\
&= [p \cdot g; x', x, \ldots, x] \\
&= [p; g \cdot (x', x, \ldots, x)] \\
&= [p; x, x', x, \ldots, x] \\
&= \pi_X(a_2).
\end{aligned}$$

同理，

$$\pi_Y(a_1) = [p; y, y', y, \ldots, y] = \pi_Y(a_2).$$

然而，这个图表的拉回只有一个元素，它投影到我们已考察的那些元素上，因此 $P(\mathbf{4})$ 不是上方所示方块的拉回。这就完成了证明：如果对于某个 n，Σ_n 对 $P(n)$ 的作用不是自由的，那么 P 不保持拉回。

现在假设每个 Σ_n 都在 $P(n)$ 上自由作用。给定一个拉回

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{F} & B \\
{\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\
C & \xrightarrow[H]{} & D
\end{array}$$

我们必须证明，图表在 P 下的像也是一个拉回。当且仅当每个单独的图表

$$\begin{array}{ccc}
P(n) \otimes_{\Sigma_n} A^n & \xrightarrow{1 \otimes_{\Sigma_n} F^n} & P(n) \otimes_{\Sigma_n} B^n \\
{\scriptstyle 1 \otimes_{\Sigma_n} R^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes_{\Sigma_n} S^n} \\
P(n) \otimes_{\Sigma_n} C^n & \xrightarrow[1 \otimes_{\Sigma_n} H^n]{} & P(n) \otimes_{\Sigma_n} D^n
\end{array}$$

也是一个拉回。

假设

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{K} & P(n) \otimes_{\Sigma_n} B^n \\
{\scriptstyle L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes_{\Sigma_n} S^n} \\
P(n) \otimes_{\Sigma_n} C^n & \xrightarrow[1 \otimes_{\Sigma_n} H^n]{} & P(n) \otimes_{\Sigma_n} D^n
\end{array}$$

可交换。对于对象 $x \in X$，记作

$$\begin{aligned}
K(x) &= [u; x_1, \ldots, x_n], \\
L(x) &= [v; x'_1, \ldots, x'_n].
\end{aligned}$$

由于 Σ_n 在 $P(n)$ 上的作用是自由的，引理 10.5 和注 12.19 表明，方程 $1 \otimes_{\Sigma_n} S^n \circ K(x) = 1 \otimes_{\Sigma_n} H^n \circ L(x)$ 等价于存在唯一的$g \in \Sigma_n$ 使得

- $u \cdot g = v$ 和
- 对每个 i, $Sx_i = Hx'_{g^{-1}(i)}$。

由于 A 是原方块的拉回，存在唯一的 a_i，使得 $F(a_i) = x_i$ 且 $R(a_i) = x'_{g^{-1}(i)}$。按对象定义 J: $X \to P(n) \otimes_{\Sigma_n} A^n$，如下:

$$J(x) = [u; a_1, \ldots, a_n].$$

我们计算

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{\Sigma_n} F^n \circ J(x) &= 1 \otimes_{\Sigma_n} F^n[u; a_1, \ldots, a_n] \\
&= [u; Fa_1, \ldots, Fa_n] \\
&= [u; x_1, \ldots, x_n] \\
&= K(x), \\
1 \otimes_{\Sigma_n} R^n \circ J(x) &= 1 \otimes_{\Sigma_n} R^n[u; a_1, \ldots, a_n] \\
&= [u; Ra_1, \ldots, Ra_n] \\
&= [u; x'_{g^{-1}(1)}, \ldots, x'_{g^{-1}(n)}] \\
&= [u; g \cdot (x'_1, \ldots, x'_n)] \\
&= [u \cdot g; x'_1, \ldots, x'_n] \\
&= [v; x'_1, \ldots, x'_n] \\
&= L(x).
\end{aligned}$$

同样的唯一性论证，利用引理 10.5 和备注12.19，表明这是使 $1 \otimes_{\Sigma_n} F^n \circ J = K$ 和 $1 \otimes_{\Sigma_n} R^n \circ J = L$ 在对象层面成立的唯一对象赋值。上述论证同样适用于态射，而且很容易证明，由此得到的 J 是满足 $X \to P(n) \otimes_{\Sigma_n} A^n$ 和 $1 \otimes_{\Sigma_n} F^n \circ J = K$ 的唯一函子 $1 \otimes_{\Sigma_n} R^n \circ J = L$。因此 $P(n) \otimes_{\Sigma_n} A^n$ 是所需的拉回，证明完毕。

□

汇集命题 14.3、14.4和14.6 可得以下推论。

推论

14 7 *The 2-monad associated to a symmetric operad P is cartesian if and* **..** *() only if the action of Σ_n is free on each P.*

在给出诱导由下示 2-单子的 Λ-拟运算子的完整刻画之前，我们需要一个简单的技术性引理。

引理 **14 8** *Let C be a category with a right action of some group Λ via μ $C \times \Lambda \to$* **..** *: C and let π $\Lambda \to \Sigma$ be a group homomorphism to any other group Σ. Then the right ,: Σ-action on the category $C \otimes_\Lambda \Sigma$, defined as the coequalizer below*

$$C \times \Lambda \times \Sigma \underset{\mu \times 1}{\overset{m \circ 1 \times \pi}{\rightrightarrows}} C \times \Sigma \xrightarrow{\varepsilon} C \otimes_\Lambda \Sigma$$

where m $\Sigma \times \Sigma \to \Sigma$ is the group multiplication is free if and only if the kernel of π : , contains all the elements of Λ that fix any object of C.

Proof. 根据引理 10.4，我们只需检查该作用在对象上是自由的。由于对象集函子保余极限，$C \otimes_\Lambda \Sigma$ 的对象是等价类 $[c;\ g]$ 其中 $c \in C$ 且 $g \in \Sigma$，其中 $[c \cdot r;\ g] = [c;\ \pi(r)g]$。这些等价类也可以描述为: $[c_1;\ \sigma_1] = [c_2;\ \sigma_2]$ 当且仅当存在一个 $r \in \Lambda$ 使得 $c_1 \cdot r = c_2$ 且 $\sigma_1 = \pi(r^{-1})\sigma_2$。

首先，假设 Σ-作用是自由的。注意到 $[c;\ e]\cdot g = [c;\ g]$，可知若 $[c;\ g] = [c;\ e]$，则 $g = e$。设 $r \in \Lambda$ 是一个满足 $c \cdot r = c$的元素。那么

$$[c; e] = [c \cdot r; e] = [c; \pi(r)],$$

所以 $\pi(r) = e$。

现在假设 Λ 中每个固定某个对象的元素都属于 π 的核。令 $\tau \in \Sigma$，并假设它固定 $[p;\ \sigma]$，使得 $[p;\ \sigma] = [p;\ \sigma\tau]$。那么存在一个元素 $r \in \Lambda$，使得 $p \cdot r = p$ 且 $\sigma = \pi(r^{-1})\sigma\tau$。于是 r 固定 p，因此属于 π 的核，而第二个方程化简为 $\sigma = \sigma\tau$，这立即推出 $\tau = e$。因此，Σ 在 $C \otimes_\Lambda \Sigma$ 上的作用是自由的。 □

定理 14 9 *The 2-monad P associated to a Λ-operad P is cartesian if and only.. ()() if whenever $p \cdot g = p$ for an object $p \in P\ n\quad g \in Ker\pi\ n$.*

Proof. 根据推论 8.25，单子 P 同构于 $\pi_! P$，我们只需验证 $\pi_! P$ 是 2-笛卡尔的。因此，该定理直接由引理 14.8 和推论 14.7得出。

□

推论 14 10 *Let Λ be an action operad in . Then the 2-monad $E\Lambda$ is .. 集合 cartesian.*

Proof. 对 $\Lambda(n)$ 在 $E\Lambda(n$上的作用对所有 n都是自由的，因此特别满足定理 14.9中的条件。

□

15 作为俱乐部的作用运算子

这是第二节，我们将借助 Kelly [28, 30, 31]的俱乐部理论，研究作用歌剧与拉回之间的相互作用。Kelly 的俱乐部理论旨在简化并阐释如何从关于特定自由对象 T 的信息中，推导出关于 2-单子 $T1$的相干性结果，其中 1 表示终对象范畴。我们将看到，Λ-单子结构在 $E\Lambda(1)$ 上恢复了 Λ的完整作用歌剧结构。此外，第 7 节中的作用歌剧表示与 [28, 第 3] 节中的俱乐部表示相吻合。这一事实为例 7.6 中的计算提供了概念上的解释。

我们先提醒读者什么是俱乐部，或者更具体地说，Kelly [28, 31] 所称的以**P**为底的俱乐部。我们只关注以**P**为底的俱乐部，因此从此处起将其简称为俱乐部。我们借用 Leinster 的术语“广义运算子” [45]，简洁地定义俱乐部。

定义 15.1（T-集合族，T-拟运算子）。设 C 是一个具有有限极限的范畴。

1. 单子 $T\colon C \to C$ 是 *cartesian* 的，当函子 T 保留拉回，且关于 T 的单位 η 和乘法 μ 的自然性方块都是拉回时。2. *T-collections, T-***Coll** 的范畴是切片范畴 $C/T1$，其中 1 表示终对象。3. 给定一对 T-集合族 $X \xrightarrow{x} T1, Y \xrightarrow{y} T1$，它们的 *composition product* $X \circ Y$由下方的拉回以及沿顶部的态射给出。

$$\begin{array}{ccccccc} X \circ Y & \longrightarrow & TY & \xrightarrow{Ty} & T^2 1 & \xrightarrow{\mu} & T1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T!} & & & & \\ X & \xrightarrow[x]{} & T1 & & & & \end{array}$$

4. 复合积与伴随 $\eta\colon 1 \to T1$的单位共同赋予 T-**Coll**一个幺半结构。 T-*operad*是 T-**Coll**中的幺半群。

注15.2。上述定义中的一切内容都可以在**Cat**中作富集处理，而无需进行任何实质性的修改。因此，我们要求底层二范畴在富集意义下具有有限极限，并且切片与拉回采用二范畴的（而非双范畴的）版本。若取该二范畴为**Cat**，则在每种情况下，二范畴构造的底层范畴都由相应的一范畴版本给出。从这里开始，我们将不再区分一维理论与二维理论。

令 Σ 为对称群歌剧。这是作用歌剧范畴的终对象，其中每个 π_n 都是恒等映射。于是 $E\Sigma$ 是**Cat**上的一个2-单子，并且由推论14.10 可知它是笛卡尔的。

定义15.3（俱乐部）。一个 *club* 是 T-歌剧在**Cat**中的 $T = E\Sigma$。 ___

注15.4（$\mathbf{P} = B\Sigma = E\Sigma(1)$）。Kelly 的记号中的范畴**P** （定义于 [30, 第 2]节）是定义 $B\Sigma$ 9.1中的范畴，或者等价地说，是由推论$E\Sigma$ 12.21将1应用于1所得的结果。

___

注记 15.5（俱乐部的显式描述）。将俱乐部的定义分解开来很有帮助。一个俱乐部由以下部分组成:

1. 一个范畴 K 以及一个函子 $k\colon K \to B\Sigma$；2. 一个乘法映射 $K \circ K \to K$；以及 3. 一个单位映射 $1 \to K$,

满足成为 $E\Sigma$-集合族的幺半范畴中的幺半群所需的公理。 $K \circ K$ 的对象是 K中的对象元组，写作（x； y_1，.....， y_n），其中 k（x）。为了描述 $K \circ K$的态射，回顾命题 $E\Sigma$（K）中对 $E\Sigma$的同态集的描述12.20。一个态射

$$(x; y_1, \dots, y_n) \to (z; w_1, \dots, w_m)$$

仅当 $n = m$ 时才存在（因为 $B\Sigma$ 只有自态射），并且由一个态射 $f\colon x \to z$ 中的态射 K 以及态射 $g_i\colon y_i \to w_{f(i)}$ 中的态射 K组成；这里我们按照记号 f（i）将 k（f）写作置换，并将其应用于元素 i，遵循记号 2.11。

记号 15.6。对于一个俱乐部 K 以及 $K \circ K$ 中的一个态射（f； g_1，.....， g_n），我们将该态射在函子 $K \circ K \to K$ 下的像记作 f（g_1，.....， g_n）。

我们通常只通过其底层范畴来指称一个俱乐部 K。

定义 15.7。设 K 为一个俱乐部。**Cat** 上的 2-单子 K^{m} 定义如下。

- K_{m} 的底层 2-函子由 $K_{\mathrm{m}}(X) = K \circ X$给出，其中范畴$X$ 配备了 $E\Sigma$-集合族结构 $X \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\eta} E\Sigma(1)$。 ___

  K的乘法和单位作为一个俱乐部，利用其乘法和单位诱导出乘法和单位。

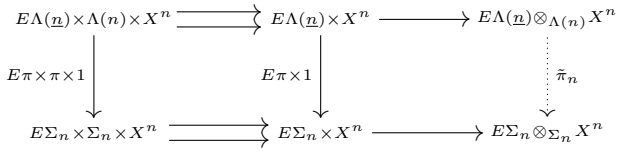
定理 15 8 $\Lambda \to \Sigma$ *gives*..

the category $B\Lambda = \coprod B\Lambda\ n$ *from Definition 9.1 the structure of a club. Let* Λ *be an action operad. Then the map of operads* $\pi\colon ()$

Proof. 要赋予函子 $B\pi\colon B\Lambda \to B\Sigma$ 俱乐部结构，只需（参见 [45, 第6节。2]）证明

- 我们将证明该诱导单子是 $E\Lambda$，并且它是 **Cat** 上的笛卡尔单子，
- 函子 $E\pi$ 诱导的变换 $\tilde{\pi}\colon E\Lambda \Rightarrow E\Sigma$ 是笛卡尔的，并且
- $\tilde{\pi}$ 与单子结构相容。

单子 $E\Lambda$根据推论 14.10总是笛卡尔的。变换 $\tilde{\pi}$ 是映射 $\tilde{\pi}_n$ 的余积，这些映射由下方所示的余等化子的泛性质诱导。



自然性显然成立，并且由于 π 是一个拟运算子映射，$\tilde{\pi}$ 也与单子结构相容。

只需证明 $\tilde{\pi}$ 是笛卡尔的，并且诱导单子实际上是 $E\Lambda$。根据拉回消去（注 14.5），若能证明$E\Lambda(X) \cong B\Lambda \circ X$，或者等价地，若

$$\begin{array}{ccc} E\Lambda(X) & \longrightarrow & E\Sigma(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\Lambda & \longrightarrow & B\Sigma \end{array} \tag{17}$$

是一个拉回。这一事实直接由命题 12.20 中对自由对象的描述得出。

□

设 $(\Lambda,\ \pi)$ 是一个作用歌剧，并设 $B\Lambda$ 为定理 15.8 中的俱乐部。上面的证明表明，2-单子 $E\Lambda$ 与定义 $B\Lambda^{\mathrm{m}}$ 中的 2-单子 15.7同构。俱乐部 $B\Lambda$ 具有以下性质。首先，范畴 $B\Lambda$ 是一个群胚。其次，函子 $B\pi\colon\ B\Lambda \to B\Sigma$ 在对象上双射。我们断言，这些性质刻画了那些由作用歌剧产生的俱乐部。因此，由作用歌剧产生的俱乐部是 PROPs [48, 50]中的一个特殊类别。

定理 15.9。 *Let* $(K,\ k)$ *be a club such that*

- *the map* $k\colon\ K \to B\Sigma$ *is bijective on objects and*
- K *is a groupoid.*

Then $(K,\ k) \cong (B\Lambda,\ B\pi)$ *for some action operad* Λ*. The assignment* $\Lambda \mapsto (B\Lambda,\ B\pi)$ *is a full and faithful embedding of the category of action operads into the category* **AOp** *of clubs.*

Proof. 设 (K, k) 是这样的俱乐部。我们的假设立即推出，K 是一个群胚，其对象与自然数双射；现在我们假设函子 $K \to B\Sigma$ 在对象上是恒等态射。此外，我们可以得出结论：当且仅当 $m = n$时，K中存在同构 $m \cong n$。令 $\Lambda(n) = K(n, n)$，于是 $K = \coprod B\Lambda(n)$ 是群胚。定义 $B\pi = k$，或者等价地，定义同态$\pi_n\colon\ \Lambda(n) \to \Sigma_n$ 到复合态射的态射部分

$$B\Lambda(n) \hookrightarrow K \xrightarrow{k} B\Sigma.$$

我们声称 K 上的俱乐部结构使群的集合族 $\{\Lambda(n)\}$成为一个作用歌剧。为此，我们将使用定理 4.15。

首先，我们利用注记 15.5 和记号 15.6来给出群同态 β 。定义

$$\beta(g_1,\dots,g_n)=e_n(g_1,\dots,g_n)$$

其中 e_n 是 $K(n,\ n)$ 中的恒等态射 $n\to n$ 。club 乘法映射的函子性立即表明这是一个群同态。其次，我们以类似的方式定义函数 δ：

$$\delta_{n;k_1,\dots,k_n}(f)=f(e_{k_1},\dots,e_{k_n}),$$

其中，此处 e_{k_i} 是 K 中 k_i 的恒等态射。

现在需要验证定理 4.15 中的九条公理。club 乘法函子是集合族之间的映射，因此是一个在 $B\Sigma$ 上方的映射；这一事实立即说明公理 (1)（使用 $K\circ K$ 中仅含 g_i 部分的态射）和公理 (4)（使用 $K\circ K$ 中仅含 f 部分的态射）成立。仅凭乘法是一个函子这一事实，也可推出公理 (6)（再次使用仅含 f 部分的态射）和公理 (8)（考察一个仅含 f 的态射与一个仅含 g_i 的态射的复合态射）。公理 (2) 即方程 $e_1(g)=g$，这直接由俱乐部 K 的单位公理得出；公理 (5) 也同样如此。公理 (3)、(7) 和 (9) 均由 club 乘法的结合律推出。因此，(Λ,π) 是一个作用歌剧，并且利用拉回方形方程 (17)，我们看到 $(K,k)\cong(B\Lambda,B\pi)$ 作为俱乐部。

最后，我们将证明上述构造给出了一个全忠实嵌入

$$B\colon \mathbf{AOp}\to\mathbf{Club} \tag{18}$$

将作用歌剧范畴嵌入俱乐部范畴。设 f、$f'\colon \Lambda\to\Lambda'$ 是作用歌剧之间的映射。若它们作为俱乐部之间的映射满足 $Bf=Bf'$，那么作为函子 $B\Lambda\to B\Lambda'$，它们必定相等。但这些函子不过是以下函子的余积

$$B(f_n),B(f'_n)\colon B\Lambda(n)\to B\Lambda'(n),$$

，而函子 B <style id='4'}从群到范畴是忠实的，因此方程（18）也是忠实的。现在设 $f\colon B\Lambda\to B\Lambda'$ 是一个俱乐部映射。显然，我们得到群同态 $f_n\colon \Lambda(n)\to\Lambda'(n)$，使得 $\pi_n^{\Lambda}=\pi_n^{\Lambda'}f_n$，因此我们只需证明这些 f_n 也构成一个 operad 映射。根据上面对俱乐部结构的描述，它由映射 β、δ给出。由此可知，与俱乐部乘法相容意味着与这两个映射都相容，而这又等价于与算子乘法相容。因此，方程（18）也是满的。

□

注记 15.10（放宽定理 15.9 中的假设）。首先应注意，如果 K 是 $B\Sigma$上的一个俱乐部，那么每个 K-代数都有一个底层严格幺半结构。其次，要求 $K\to B\Sigma$ 对象上双射，可确保 K 除了 $\otimes$之外不含有可用来构造新类型对象的其他运算，例如对偶或内部同对象。最后， K 是一个群胚，这确保了 K 的代数中存在的所有“约束态射”都是可逆的。

这些假设可以适当放宽。我们不必取定义在 $B\Sigma$ 上的俱乐部，也可以取定义在单个对象上的自由对称幺半范畴上的俱乐部（注意，$\mathbf{Cat}$ 上的自由对称幺半范畴单子仍是笛卡尔的）。这样得到的 K-代数，其底层幺半结构不一定是严格的。这一改变对理论的展开方式影响应该相对较小。将 K 改为范畴而非群胚，则可能造成更大的影响，因为由此得到的作用歌剧在每一层都将具有幺半群而非群。我们在作用歌剧基本理论的证明中反复用到了逆元；如果在作用歌剧的定义中以幺半群取代群，就必须重新审视这些证明。

在 [28, 第 3], 节中，Kelly 讨论了由生成元与关系给出的俱乐部，其类型与我们研究作用歌剧所需的类型相关；我们特别请读者注意他的定理 3.1。他的生成元包含比我们在此感兴趣的更一般的函子运算，而且自然变换不要求可逆。在我们的情形中，所需的生成运算只有单位和张量积，因为 $E\Lambda$ 的代数总是带有附加结构的严格幺半范畴。

记号 15.11。 假设 M 通过 $\otimes$, I成为一个幺半范畴。将 $\otimes_n$ 记作由 $M^n \to M$ 归纳定义的函子

- $\otimes_0$ 是函子 $1 \to M$，它将终对象范畴 1 的唯一对象映到单位 $I \in M$，并且
- 给定 $\otimes_k$，定义

$$\otimes_{k+1}(m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}) = \otimes_2\big(m_1, \otimes_k(m_2, \ldots, m_{k+1})\big).$$

注意到，由于 **Cat** 在笛卡尔积下是一个对称幺半范畴，对于任意 $\sigma \in \Sigma_n$，都有一个同构 σ: $M^n \to M^n$，其在对象上的明确表达式为

$$\sigma(m_1, \ldots, m_n) = \big(m_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, m_{\sigma^{-1}(n)}\big).$$

沿着 Kelly 关于俱乐部的生成元与关系的论述推导，可得以下定理。

定理 15.12。 *Let Λ be an action operad with presentation given by $(\mathbf{g}, \mathbf{r}\ s_i,\ p)$。Then the club $E\Lambda$ is generated by*

- *functors giving the unit object and tensor product, and*
- *natural transformations given by the set $\mathbf{g}$: each element x of $\mathbf{g}$ with $\pi(x) = \sigma_x \in \Sigma_{|x|}$ gives a natural transformation α_x: $\otimes_{|x|} \Rightarrow \otimes_{|x|} \circ \sigma$,*

subject to relations enforcing the following axioms.

- *The monoidal structure given by the unit and tensor product is strict.*
- *The transformations given by the elements of $\mathbf{g}$ are all natural isomorphisms.*
- *For each element $y \in \mathbf{r}$ the equation $s_1(y) = s_2(y)$ holds.*

例 15.13。我们可以使用定理 15.12 通过构造相应作用歌剧的表示，来表达给定类型的幺半结构。

1. 严格幺半范畴是具有$\mathbf{g} = \emptyset$的俱乐部的代数。因此，它们是 $E\Lambda$ 关于 Λ 初始作用算子的代数。作用歌剧范畴是有基点的，因此 $\Lambda = T$。

2. 对称严格幺半范畴是由一个生成自然同构 β with $\pi(\beta) = (1\ 2) \in \Sigma_2$ 的俱乐部所对应的代数。所需的唯一公理是

   - $\beta_{y,x} \circ \beta_{x,y} = 1_{x\otimes y}$,
   - $\beta_{x,\ yz} = (1_y \otimes \beta_{x,\ z}) \circ (\beta_{x,\ y} \otimes 1_z)$,

   恢复示例 Σ 中作为作用歌剧的表示：7.6。

3. 辫编严格幺半范畴是具有一个生成自然同构 β with $\pi(\beta) = (1\ 2) \in \Sigma_2$ 的俱乐部的代数。所需的唯一公理是

   - $\beta_{x,yz} = (1_y \otimes \beta_{x,z}) \circ (\beta_{x,y} \otimes 1_z)$,

- $\beta_{xy,z} = (\beta_{x,z} \otimes 1_y) \circ (1_x \otimes \beta_{y,z})$.

这些公理给出了辫作用歌剧集 B 的表示。

注记15.14（群表示与俱乐部表示）。以上例子表明，著名作用歌剧的表示通常相当简洁，但例子 7.6 中的计算表明，要在各个群 $\Lambda(n)$ 的一组表示与将 Λ 作为作用歌剧的单个表示之间进行转换，并非易事。

16 扩展例子：余边界范畴

现在我们来讨论一个在范畴论文献中不那么广为人知的例子，即余边界范畴 [12]。这类范畴出现在量子群表示论和晶体理论中 [23, 24]。本文的目标是利用作用歌剧的表示，进一步阐明余边界范畴与 [23] 中由 n 个果实仙人掌群构成的拟运算子之间的关系。我们先回顾余边界范畴的定义。

定义16.1。 *coboundary category* 是一个幺半范畴 C，配备了一个自然同构 $\sigma_{x,\,y}$: $x \otimes y \to y \otimes x$（称为 *commutor*），满足

- $\sigma_{y,\,x} \circ \sigma_{x,\,y} = 1_{x \otimes y}$ 以及
- 下面的图表称为 *cactus relation*，它是交换的（其中未标记的态射是一个结合子和一个逆结合子）。

$$\begin{array}{ccccc} (x \otimes y) \otimes z & \longrightarrow & x \otimes (y \otimes z) & \xrightarrow{1\sigma_{y,z}} & x \otimes (z \otimes y) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_{x,y}1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{x,zy}} \\ (y \otimes x) \otimes z & \xrightarrow[\sigma_{yx,z}]{} & z \otimes (y \otimes x) & \longrightarrow & (z \otimes y) \otimes x \end{array}$$

E例 16.2。 1. 正如 Savage 所指出的， [59], 任意编织都会自动满足仙人掌关系（定义 16.1中的图表）。然而，由于编织不一定是对合的，这并不意味着任意辫编幺半范畴都是余边界范畴。不过，此时应该可以清楚看出，任意对称幺半范畴也都是余边界范畴。2. “余边界范畴”这一名称源自 Drinfeld [12] 的早期工作；他在其中证明，余边界 Hopf代数的表示范畴具有余边界范畴的结构。3. Henriques 和 Kamnitzer [23] 证明了有限维复约化李代数的晶体范畴具有余边界范畴的结构。

注 16.3。根据定理 13.15，我们仅考虑底层幺半结构为严格的情形。

现在我们转向余边界范畴的拟运算子描述。

定义 **16 4** $n > 1$ $1 \le p < q \le n$ $1 \le k < $。**（包含、互不相交）**。固定，并令，$l \le n$ 。

1. $p < q$ *contains* $k < l$ 若 $p \le k < l \le q$。

2. $p<q$ 是 $k<l$ 的 *disjoint*，当且仅当 $q<k$ 或 $l<p$。

定义 16.5。设 $1\le p<q\le n$，并定义 $\widehat{s}_{p,q}\in\Sigma_n$ 为下文定义的置换。

i	1	2	$\cdots$	$p-1$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$q-1$	q	$q+1$	$\cdots$	n
$\widehat{s}_{p,q}(i)$	1	2	$\cdots$	$p-1$	q	$q-1$	$q-2$	$\cdots$	$p+1$	p	$q+1$	$\cdots$	n

n-果仙人掌群定义如下。

定义 16.6。令 J_n 为由符号 $s_{p,q}$ 生成的群，其中 $1\le p<q\le n$ 满足以下关系。

1. 对所有 $p<q$, $s_{p,q}^2=e$。 2. 若 $p<q$ 与 $k<l$ 不相交，则 $s_{p,q}s_{k,l}=s_{k,l}s_{p,q}$。 3. 若 $p<q$ 包含 $k<l$，则 $s_{p,q}s_{k,l}=s_{m,n}s_{p,q}$，其中

- $m=\widehat{s}_{p,q}(l)$ 和
- $n=\widehat{s}_{p,q}(k)$。

容易验证，元素 $\widehat{s}_{p,q}\in\Sigma_n$ 满足定义 16.6 中的三个关系，因此 $s_{p,q}\mapsto\widehat{s}_{p,q}$ 可扩张为群同态 $\pi_n\colon J_n\to\Sigma_n$。这是证明下述结论的第一步。

定理 16.7. *The collection of groups $J=\{J_n\}$ form an action operad.*

Proof. 我们将利用定理 4.15 来确定作用歌剧结构的其余部分。因此，对于任意一族自然数 n、k_1、……、k_n 以及 $K=\sum k_i$，我们必须给出群同态 $\beta\colon J_{k_1}\times\cdots\times J_{k_n}\to J_K$ 和函数 $\delta\colon J_n\to J_K$，使其满足九条公理。我们从生成元入手定义这两者，首先从 β 开始。

设 $s_{p_i,q_i}\in J_{k_i}$。令 $r_i=k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}$，其中 $i>1$。定义 β 如下：

$$\beta(s_{p_1,q_1},\dots,s_{p_n,q_n})=s_{p_1,q_1}s_{p_2+r_2,q_2+r_2}\cdots s_{p_n+r_n,q_n+r_n}.$$

注意到 $s_{p_i+r_i,q_i+r_i}$ 和 $s_{p_j+r_j,q_j+r_j}$ 在 $i\neq j$ 时不相交。容易验证，这一不相交性质确保 β 给出了一个良定义的群同态

$$J_{k_1}\times\cdots\times J_{k_n}\to J_K.$$

为定义 $\delta\ J_n\to J_K$ $n\ k_1$ k_n $K=\sum k_i$ $t_k=:$ 对于自然数 $s_{1\ k}\in J_k$、……、和，令。然后我们首先定义

$$\delta(t_n)=t_K\cdot\beta(t_{k_1},t_{k_2},\dots,t_{k_n}).$$

根据定义16.6中的第三公理，这等于

$$\beta(t_{k_n},t_{k_{n-1}},\dots,t_{k_1})\cdot t_K.$$

现在，根据 t_i 和 β的定义，$s_{p,q}\in J_n$ 等于 β(e_{p-1}, t_{q-p+1}, e_{n-q})（这里 e_i 是 J_i中的单位元），因此我们可以在任意生成元$s_{p,q}$ 上定义 δ，其定义为

$$\delta(s_{p,q})=\beta(e_A,M,e_B)$$

with

- $A=k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}$,
- $M=t_{k_p+\cdots+k_q}\cdot\beta$（$t_{k_p}$、$t_{k_{p+1}}$、……、$t_{k_q}$），并且
- $B=k_{q+1}+k_{q+2}+\cdots+k_n$。

展开后可得以下公式：

$$\delta(s_{p,q}) = s_{k_1+\cdots+k_{p-1}+1,k_1+\cdots+k_q} \cdot \beta(e_{k_1+\cdots+k_{p-1}}, t_{k_p}, \ldots, t_{k_q}, e_{k_{q+1}+\cdots+k_n}).$$

我们利用定理 δ 将 J_n 扩展到任意元素。现在 δ 不是群同态，但它确实满足公理（6）中的一个扭曲版本。定义

$$\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}(gh) = \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(g)\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}(h)$$

其中 $k_i = j_{h^{-1}(i)}$。为了验证相容性，我们必须检查三个关系。

- 我们必须证明 $\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}\left(s_{p,q}^2\right) = e$。根据定义，我们有

$$\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}\left(s_{p,q}^2\right) = \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}\left(s_{p,q}\right)\delta_{n;j_1,\ldots,j_n}\left(s_{p,q}\right)$$

也就是

$$t_{j_1+\cdots+j_n}\beta(t_{j_n},\ldots,t_{j_1})t_{\underline{j}}\beta(t_{j_1},\ldots,t_{j_n}).$$

根据 δ 的定义以及 $s_{p,q}^2 = e$这一事实，很容易看出上面的元素就是恒等态射。

- 我们必须证明，当 (p,q) 与 (k,l) 不相交时，$\delta(s_{p,q}s_{k,l}) = \delta(s_{k,l}s_{p,q})$。根据 δ 的定义以及所涉及项两两不相交这一事实，这又是一个简单的计算。

- 我们必须证明 $\delta(s_{p,\,q}s_{k,\,l}) = \delta(s_{a,\,b}s_{p,\,q})$，其中 $a = \widehat{s}_{p,\,q}(l)b = \widehat{s}_{p,\,q}(k)$，若 $p < k < l < q$。在这种情况下，我们使用仙人掌群中的所有关系，证明两边都等于

$$\beta\left(\underline{e}, t_{j_p+\cdots+j_q} \cdot \beta\left(t_{j_p}, \ldots t_{j_{k-1}}, t_{j_k+\cdots+j_l}, t_{j_{l+1}}, \ldots, t_{j_q}\right), t_{j_{q+1}}, \ldots, t_{j_n}\right)$$

其中 $e = e_{j_1}, \ldots\ldots, e_{j_{p-1}}$。

为了证明这在三个或更多生成元的积上给出了良定义的函数，直接应用归纳论证可得，使用上面的公式有 $\delta((fg)h) = \delta(f(gh))$。至此，函数族 $\delta_{n;j_i}$ 的定义完成。

现在需要检验定理 4.15中的九条公理。公理（1）至（3）都涉及 β，由定义公式可立即推出。公理（4）对元素 t_k显然成立，由此根据定义 δ 的公式可推广到一般情形。对于公理（5），可以很容易地验证

$$\delta_{n;1,\ldots,1}(t_n) = t_n, \quad \delta_{n;k_1,\ldots,k_n}(e_n) = e_{k_1+\cdots+k_n}$$

按照 δ 的描述，上述结论成立；一般情形也再次由此得出。公理（6）由 δ的构造保证。公理（8）只需验证至多一个h_i 非平凡的情形，此时它是 J_n的第二和第三个关系的直接推论。

利用定义公式，很容易验证公理（9）在只有一个 g_i 是生成元、其余都是恒等态射时成立；一般情形则由公理（6）得出。利用公理（9），我们可以如下证明公理（7）；为清晰起见，我们省略不同 δ的下标。我们需要证明

$$\delta_{m_1+\cdots+m_n;p_{11},\ldots,p_{1m_1},p_{21},\ldots,p_{nm_m}}\left(\delta_{n;m_1,\ldots,m_n}(f)\right) = \delta_{n;P_1,\ldots,P_n}(f),$$

我们也对 t_n进行同样的操作。根据定义，有

$$\delta\left(\delta(t_n)\right) = \delta\left(t_K\beta(t_{k_1},\ldots,t_{k_n})\right),$$

根据公理（6）可得

$$t_{P_1+\cdots+P_n}\cdot\beta(t_{p_{11}},\ldots,t_{p_{n,m_n}})\cdot\delta\left(\beta(t_{k_1},\ldots,t_{k_n})\right).$$

现在，最后这一项等于 $\beta\left(\delta(t_{k_1})\ldots,\delta(t_{k_n})\right)$，根据公理 (9，这又等于

$$\beta\left(t_{P_1}\cdot\beta(t_{p_{11}},\ldots,t_{p_{1,m_1}}),\ldots,t_{P_n}\cdot\beta(t_{p_{n1}},\ldots,t_{p_{1,m_n}})\right).$$

综上，公理 (9) 的左边为

$$t_{P_1+\cdots+P_n}\cdot\beta(t_{p_{11}},\ldots,t_{p_{n,m_n}})\cdot\beta\left(t_{P_1}\cdot\beta(\underline{t_{p_1}}),\ldots,t_{P_n}\cdot\beta(\underline{t_{p_n}})\right).$$

其中 $t_{p_i}=t_{p_{i,1}},\ldots,t_{i,m_i}$ 所有来自一个 $t_{p_{ij}}$ 的项都可以合并在一起；由于对于所有 p,q，都有 $\overline{s^2_{p,q}}=e$，这些项相互抵消。于是剩下

$$t_{P_1+\cdots+P_n}\cdot\beta\left(t_{P_1},\ldots,t_{P_n}\right)$$

这正是公理 (9) 的右边，证毕。 □

引理 16.8. *The 2-monad C for strict coboundary categories is a club.*

Proof. 由定理15.12可显然得出。 □

定理

16 9 *The free coboundary category on one element $C1$ is isomorphic to .. ,, $BJ=\coprod BJ_n$*

Proof. 我们必须赋予 BJ 严格余边界范畴的结构，然后证明：对于任意严格余边界范畴 X，严格余边界函子 $F\colon BJ\to X$ 与 X的对象之间存在自然同构。这里需要指出，严格余边界函子是严格幺半函子，并且将其源范畴的交换子映射为目标范畴的交换子。

范畴 BJ 的对象为自然数，张量积为加法。两个态射的张量积由 β 给出，如定理16.7所示；不难验证，这是一个严格幺半结构。交换子 $\sigma_{m,n}$ 定义为乘积 $s_{1,m+n}s_{1,m}s_{m+1,m+n}$。利用 J_n中的关系，显然 $\sigma_{m,n}\sigma_{n,m}$是恒等态射，因此，为了赋予其余边界结构，我们只需再验证一条公理。根据定义，这条公理等价于方程

$$\sigma_{m,p+n}\cdot\beta(e_m,\sigma_{n,p})=\sigma_{n+m,p}\cdot\beta(\sigma_{m,n},e_p)$$

对所有 m、n、p 均成立。根据 σ 和 β 的定义展开后，每边各有六项；利用 $s^2_{p,\,q}=e$ 和不相交关系，两边各有两项相消，其余四项在利用不相交关系后彼此相等。由此便在 BJ 上建立了余边界结构；注意，$\sigma_{1,\,1}=s_{1,\,2}$ 是 $J(2)$ 的非平凡元素。

每个严格余边界函子 $F\colon BJ\to X$ 都通过在 1 处取值确定 X 的一个对象。反过来，给定严格余边界范畴 X 的一个对象 x，根据 [23] 的定理 7，存在一个从 $J_n\to X$ 到 x^n 的群同态 x^n，。[23] 中的证明表明，这些群同态与态射 $\beta\colon J_n\times J_m\to J_{n+m}$ 相容，因此定义了一个严格幺半函子 $x\colon BJ\to X$，且 $x(1)$ 为 $=x$。根据构造，这个严格幺半函子实际上是一个严格余边界函子，因为它将 BJ 中的交换子 $\sigma_{1,\,1}$ 映到 X 中的 $\sigma_{x,\,x}$。事实上，[23] 中推导定理 7 的计算表明，J_n 的每个元素都可表示为由 σ's 进行的幺半群复合，因此，要求 x 是满足 $x(1)$ 为 $=x$ 的严格余边界函子，便能唯一确定该函子的其余部分。这一观察确立了严格余边界函子 $F\colon BJ\to X$ 与 X 的对象之间的双射。自然性由构造立即可知，因此 BJ 是由一个对象自由生成的严格余边界范畴。

□

推论

16 10 *The 2-monad C for coboundary categories corresponds using The- .. , , orem 15.9 to the action operad J.*

注记 16.11（表示的比较）。与对称群一样，我们有两种不同的表示：一种是分别给出每个单独的群的表示，但采用统一的方式；另一种则是针对整个作用歌剧的单一表示。例 7.6 中的计算统一了 Σ的这两种表示，而定理 16.7 和 [23] 则通过推论 16.10 和定理 15.9 结合起来，对 J也做到了同样的事。

17 拟交换性

本节给出一些充分条件，使得可以为由 **Cat** 中的 Λ-拟运算子 $\underline{P}$所诱导的 2-单子 P 赋予 [25] 意义下的伪交换结构。这样的伪交换性继而会为 2- 范畴 **Ps**-P-**Alg** 赋予闭单体结构，并构造出一种多范畴的二维类比，使 **Ps**-P-**Alg** 成为其底层 2-范畴。这一理论的一维版本是交换单子的理论，由 Kock [36, 37, 38]发展而来。

定义 17.1。具有积和终对象 1 的 2-范畴上，自 2-函子 $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 的 *left strength* 由一个 2-自然变换 d 及其分量组成

$$d_{A,B}\colon A \times TB \to T(A \times B)$$

满足以下单位公理和结合律公理 [37]。

$$\begin{array}{ccc} 1 \times TA & \xrightarrow{d_{1,A}} & T(1 \times A) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ & & TA \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{1\times\eta} & A \times TB \\ & \searrow^{\eta} & \downarrow{\scriptstyle d_{A,B}} \\ & & T(A \times B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (A \times B) \times TC & & \xrightarrow{d_{AB,C}} & & T((A \times B) \times C) \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & & & \downarrow{\scriptstyle Ta} \\ A \times (B \times TC) & \xrightarrow[1\times d_{B,C}]{} & A \times T(B \times C) & \xrightarrow[d_{A,BC}]{} & T(A \times (B \times C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A \times T^2B & \xrightarrow{d_{A,TB}} & T(A \times TB) & \xrightarrow{Td_{A,B}} & T^2(A \times B) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\mu} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A \times TB & & \xrightarrow[d_{A,B}]{} & & T(A \times B) \end{array}$$

T 的 *right strength* 类似地由一个 2-自然变换 d^* 及其分量组成

$$d^*_{A,B}\colon TA \times B \to T(A \times B)$$

同样满足单位公理和结合律公理。

相关 2-单子 P 的强度定义起来相当简单。我们将 P 的左强度 d 定义如下。分量 $d_{A,\,B}$ 是一个函子

$$d_{A,B}\colon A \times \left(\amalg P(n) \times_{\Lambda(n)} B^n\right) \to \amalg P(n) \times_{\Lambda(n)} (A \times B)^n$$

它将对象 $(a,\ [p; b_1,\ \ldots,\ b_n])$ 映射为对象 $[p; (a,\ b_1)\ldots,\ (a,\ b_n)]$。我们也以类似方式定义右强度，将对象 $([p; a_1,\ \ldots,\ a_n],\ b)$ 映射为一个等价类 $[p; (a_1,\ b)\ldots,\ (a_n,\ b)]$。左强度和右强度在态射上的定义都显而易见。

备注 17.2（术语调整：余强度）。稍微调整一下术语，我们在定义 *right* 17.1 中所说的强度 在 [25, 第 3 节中1] 称为强度，而我们的 *left* 强度则对应于余强度。我们强调这一区别，以符合当下更普遍的用法 [54, 定义 3。3], 这样也可避免混淆，因为前缀"余"通常表示方向反转。

备注 17.3（强度以非等变方式产生）。需要特别注意的是，左强度 d 和右强度 d^* 并不依赖于 Λ-作用，具体来说： Λ-拟运算子 P 具有一个底层的非对称拟运算子，我们也记作P，并且它具有一个左强度

$$d_{A,B}\colon A\times(\amalg P(n)\times B^n)\to\amalg P(n)\times(A\times B)^n$$

其定义基本上由同一个公式给出:

$$(a;(p;b_1,\ldots,b_n))\mapsto(p;(a,b_1),\ldots,(a,b_n))\,.$$

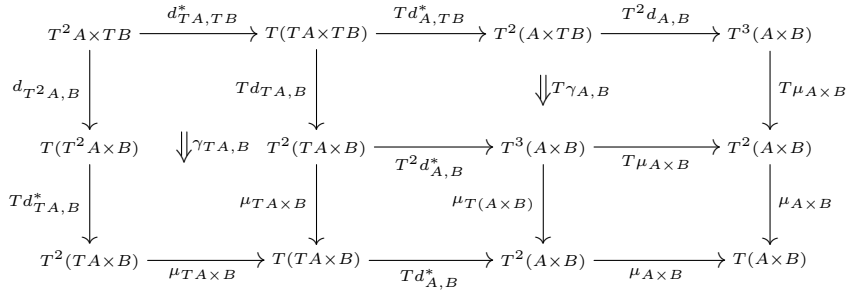
Λ-等变 P 的左强度，只是余等化子之间诱导出的函子。

定义 17.4（伪交换结构）。给定一个 2-单子 $T\colon\mathcal{K}\to\mathcal{K}$，它具有左强度 d和右强度 d^*，一个 *pseudo-commutative structure* 由一个可逆修正 γ 构成，其分量为

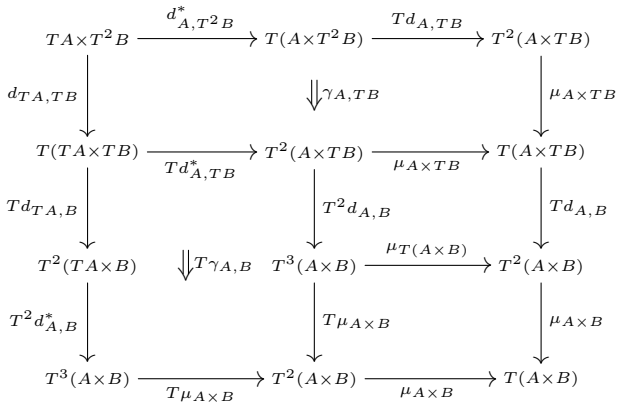
$$\begin{array}{ccccc}
TA\times TB & \xrightarrow{d^*_{A,TB}} & T(A\times TB) & \xrightarrow{Td_{A,B}} & T^2(A\times B)\\
\downarrow{\scriptstyle d_{TA,B}} & & \Downarrow\gamma_{A,B} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{A\times B}}\\
T(TA\times B) & \xrightarrow[Td^*_{A,B}]{} & T^2(A\times B) & \xrightarrow[\mu_{A\times B}]{} & T(A\times B)
\end{array}$$

满足以下三个强度公理、两个单位（或 η）公理，以及两个乘法（或 μ）公理，适用于所有 A、 B 和 C。

1. $\gamma_{A\times B,C}*(d_{A,B}\times 1_{TC})=d_{A,B\times C}*(1_A\times\gamma_{B,C})$。
2. $\gamma_{A,B\times C}*(1_{TA}\times d_{B,C})=\gamma_{A\times B,C}*(d^*_{A,B}\times 1_{TC})$。
3. $\gamma_{A,B\times C}*(1_{TA}\times d^*_{B,C})=d^*_{A\times B,C}*(\gamma_{A,B}\times 1_C)$。
4. $\gamma_{A,B}*(\eta_A\times 1_{TB})$ 是 d 上的恒等态射。5. $\gamma_{A,B}*(1_{TA}\times\eta_B)$ 是 d^* 上的恒等态射。6. $\gamma_{A,B}*(\mu_A\times 1_{TB})$ 等于下方的粘贴。



7. $\gamma_{A,B} *(1_{TA} \times \mu_B)$ 等于下方的粘贴。



评注 17.5（冗余公理）。 [25, 命题 1] 指出，这一定义存在一些冗余，并声称强度公理（公理 1–3）中任意两个都能立即推出第三个。此外，当 η 和 μ 公理（公理 4–6）以及以下结合律公理成立时，三个强度公理彼此等价：

$$\gamma_{A,B\times C} \circ (1_{TA} \times \gamma_{B,C}) = \gamma_{A\times B,C} \times (\gamma_{A,B} \times 1_{TC}).$$

我们还需要一些补充记号，然后陈述主要定理。

记号 17.6（字典序与反字典序）。设给定两个有限有序列表，$a = a_1, \ldots, a_m$ 和 $b = b_1, \ldots, b_n$。对于集合 $a \times b = \{(a_i, b_j)\}$ 上的字典序和反字典序，我们采用以下记号。

1. *lexicographic ordering* 记作 (a, b)，其顺序定义如下：

$$(a_p, b_q) < (a_r, b_s) \text{ if } \begin{cases} p < r, \text{ or} \\ p = r \text{ and } q < s. \end{cases}$$

2. *colexicographic ordering* 记作 (a, b)，其顺序由下式给出

$$(a_p, b_q) < (a_r, b_s) \text{ if } \begin{cases} q < s, \text{ or} \\ q = s \text{ and } p < r. \end{cases}$$

评注 17.7（下划线约定的直观解释）。记号 (a, b) 旨在表示只有一个 a，但有一个 b 列表，因此 (a, b) 将表示一个列表，而该列表本身由这种形式的列表组成。

记号 17.8（常值列表）。当 x 是单个元素且 n 是给定的自然数时，我们将 x 写作由 x、x、……、x 组成的长度为 n 的列表。

定义 17.9（转置置换，τ）。设 $a = a_1, \ldots, a_m$ 和 $b = b_1, \ldots, b_n$ 是两个有限有序列表。置换 $\tau_{m,n} \in \Sigma_{mn}$ 唯一地由以下性质定义：若有序集合 (a, b) 中的第 i 个元素等于有序集合 (a, b) 中的第 j 个元素，则 $\tau_{m,n}(i)$。

我们通过几个例子来说明这些置换。



注 17.10。关于对换 $\tau_{m,\ n}$，我们作如下初等说明。

- 根据构造，我们有 $\tau_{m,n} = \tau_n^{-1},_m$。
- 我们称这些为转置置换，其中 $\tau_{m,n}$ 是通过对一个以 (a_i, b_j) 为元素的矩阵进行转置所得到的置换，矩阵元素按字典序排列。换言之，置换 $\tau_{m,n}$ 的作用是将 m 组、每组 n 个元素重新排列为 n 组、每组 m 个元素。
- 转置置换 $\tau_{m,n}$ 满足一个额外的自然性类型关系。对于 $\alpha \in \Sigma_n$ 和 $\beta \in \Sigma_m$，我们有如下等式

$$\mu(\alpha; \underline{\beta})\tau_{m,n} = \tau_{m,n}\mu(\beta; \underline{\alpha}).$$

这个方程是 [19] 中的 3.9。

记号 17.11。令 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集合。

定义 17.12（拟运算子的拟交换算子结构）。令 P 为一个 Λ- 拟运算子，取值于 **Cat**。一个 *pseudo-commutative structure* 在 P 由以下数据组成。

- 对于每一对 $(m, n) \in \mathbf{N}_+^2$，都有一个元素 $t_{m,n} \in \Lambda(mn)$，使得 $\pi(t_{m,n}) = \tau_{m,n}$。
- 对于每个对象 $p \in P(n)$ 和对象 $q \in P(m)$，都有一个自然同构

$$\lambda_{p,q} \colon \mu(p; q, \dots, q) \cdot t_{m,n} \cong \mu(q; p, \dots, p).$$

$\lambda_{p,q}$ 的自然性意味着，对于所有 $f \colon p \to p'$ 属于 $P(n)$，以及 $g \colon q \to q'$ 属于 $P(m)$，以下交换图成立。

$$\begin{array}{ccc} \mu(p; q, \dots, q) \cdot t_{m,n} & \xrightarrow{\lambda_{p,q}} & \mu(q; p, \dots, p) \\ {\scriptstyle \mu(f;g,\dots,g)\cdot t_{m,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu(g;f,\dots,f)} \\ \mu(p'; q', \dots, q') \cdot t_{m,n} & \xrightarrow[\lambda_{p',q'}]{} & \mu(q'; p', \dots, p') \end{array}$$

使用记号 17.8，我们将其写作 $\lambda_{p,q} \colon \mu(p; q) \cdot t_{m,\underline{n}} \cong \mu(q; p)$。

要求这些数据满足以下公理。

1. 对所有 $m, n \in \mathbf{N}_+$，

$$t_{1,n} = e_n = t_{m,1}.$$

对于所有 $p \in P(n)$，同构 $\lambda_{p,\mathrm{id}} \colon p \cdot t_{1,n} \cong p$ 是恒等映射。对于所有 $q \in P(m)$，同构 $\lambda_{\mathrm{id},q} \colon q \cdot t_{m,1} \cong q$ 是恒等映射。

2. 对于所有 $g \in \Lambda(n)$ 和 $h \in \Lambda(m)$，等式

$$\mu^\Lambda(g; \underline{h})t_{m,n} = t_{m,n}\mu^\Lambda(h; \underline{g})$$

在 $\Lambda(mn)$ 中成立。

3. 对于所有 $p \in P(n)$、$g \in \Lambda(n)$、$q \in P(m)$ 和 $h \in \Lambda(m)$，态射等式

$$\lambda_{p,q} \cdot \mu^\Lambda(h; \underline{g}) = \lambda_{p\cdot g, q\cdot h}$$

成立。左侧态射的源是 $\mu(p; q) \cdot t_{m,n} \cdot \mu^\Lambda(h;\ g)$，右侧态射的源是 $\mu(p \cdot g;\ q \cdot h) \cdot t_{m,n}$；根据公理 (2) 和 Λ-拟运算子的算子公理，两者相等。左侧态射的目标是 $\mu(q;\ p) \cdot \mu^\Lambda(h;\ g)$，右侧态射的目标是 $\mu(q \cdot h;\ p \cdot g)$；根据 Λ- 拟运算子的算子公理，两者相等。 □

4. 对所有 $l, m_1, \ldots, m_l, n \in \mathbf{N}_+$，其中 $M = \sum m_i$，

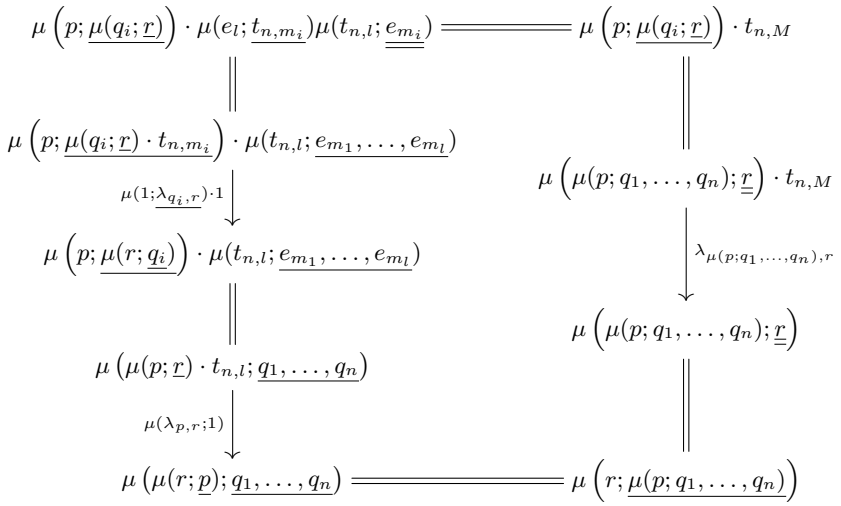
$$\beta(t_{n,m_1}, \ldots, t_{n,m_l}) \cdot \delta_{M,\ldots,M}(t_{n,l}) = t_{n,M}.$$

5. 对所有 l，m，n_1，……，$n_m \in \mathbf{N}_+$，其中 $N = \sum n_i$，

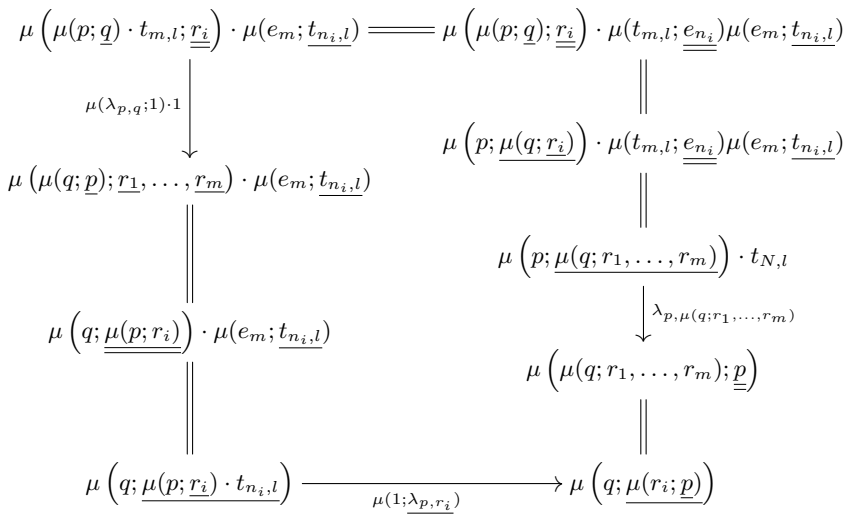
$$\delta_{\underline{n_1},\ldots,\underline{n_m}}(t_{m,l}) \cdot \beta(t_{n_1,l}, \ldots, t_{n_m,l}) = t_{N,l}.$$

这里 $\underline{n_i}$ 表示每个下标 n_i 重复 l 次。

6. 对任意 l，m_i，$n \in \mathbf{N}_+$，其中 $1 \leq i \leq n$，以及 $p \in P(l)$、$q_i \in P(m_i)$ 和 $r \in P(n)$，以下图表交换。请注意，我们沿用这样的约定：任何带下划线的内容都表示一个列表，双下划线表示列表的列表。每种情况的含义都应根据上下文以及上面出现的方程明显确定。



7. 对于任意的 $l, m, n_i \in \mathbf{N}_+$，满足 $1 \leq i \leq m$，且 $p \in P(l)$、$q \in P(m)$ 和 $r_i \in P(n_i)$，以下图表可交换。



注释17.13（更新后的公理）。公理（2）和（3并未出现在我们在预印本 [9] 中给出的原始定义里。公理（2）的必要性已在 [18] 中指出，并作为 [19, 第11节公理（iii）出现。1]。由于 [19] 的作者只研究了可缩歌剧，因此没有纳入公理（3）。

定理 17 14 *Let P be a Λ-operad in equipped with a pseudo-commutative* **.. Cat** *structure. Then the 2-monad $\underline{P}$ has a pseudo-commutative structure.*

Proof. 我们在下文中将用到定义 17.12 中的公理。证明从定义伪交换性的一个可逆修正 γ开始，其分量是自然变换 $\gamma_{A,\ B}$。设 $[p;\ a_1,\ldots,a_n]$ 是 $P(n)\otimes_{\Lambda(n)}A^n$ 中的一个对象，且 $[q;\ b_1,\ldots,b_m]$ 是 $P(m)\otimes_{\Lambda(m)}B^m$中的一个对象。所需的变换 $\gamma_{A,\ B}$ 在这一对 $([p;\ a_1,\ldots,a_n],\ [q;\ b_1,\ldots,b_m])$ 处的分量，其源为

$$\left[\mu\left(p;\underline{q}\right);\underline{(a,\underline{b})}\right]$$

和目标为

$$\left[\mu\left(q;\underline{p}\right);\underline{(\underline{a},b)}\right].$$

现在 $\lambda_{p,\ q}$：$\mu(p;\ q,\ldots,q)\cdot t_{m,\ n}\cong\mu(q;\ p,\ldots,p)$通过右乘 $t^{-1}_{m,\ n}$，导出另一个映射

$$\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n}:\mu(p;q,\ldots,q)\cong\mu(q;p,\ldots,p)\cdot t^{-1}_{m,n},$$

于是我们将映射$\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n}$,1 下 $(\gamma_{A,B})_{[p;a_1,\ldots,a_n],[q;b_1,\ldots,b_m]}$ 的像定义为该态射

$$P(nm)\times(A\times B)^{nm}\to P(nm)\otimes_{\Lambda(nm)}(A\times B)^{nm}.$$

我们将这个态射记作 $[\lambda_{p,q}t^{-1}_{m,n},1]$。

我们首先必须验证 $[\lambda_{p,q}t^{-1}_{m,n},1]$ 定义良好。令 $g\in\Lambda(n)$ 和 $h\in\Lambda(m)$，并考虑对象 $[p\cdot g;\ a]=[p;\ g\cdot a]$ 在 $P(n)\otimes_{\Lambda(n)}A^n$ 以及 $[q\cdot h;\ b]=[q;\ h\cdot b]$ 在 $P(m)\otimes_{\Lambda(m)}B^m$ (见注 10.6)。我们将验证这些态射

$$[\lambda_{p\cdot g,q\cdot h}\cdot t^{-1}_{m,n},1]:\ \left[\mu\left(p\cdot g;\underline{q\cdot h}\right);\underline{(a,\underline{b})}\right]\to\left[\mu\left(q\cdot h;\underline{p\cdot g}\right);\underline{(\underline{a},b)}\right]$$

and

$$[\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n},1]:\ \left[\mu\left(p;\underline{q}\right);g\cdot\underline{(a,h\cdot\underline{b})}\right]\to\left[\mu\left(q;\underline{p}\right);h\cdot\underline{(g\cdot\underline{a},b)}\right]$$

相等。利用公理 (2)，通过直接计算可得它们具有相同的源和目标。由公理 (3) 接着应用公理 (2)，得到

$$\begin{aligned}\lambda_{p\cdot g,q\cdot h}\cdot t^{-1}_{m,n}&=\lambda_{p,q}\cdot\mu^{\Lambda}(h;\underline{g})\cdot t^{-1}_{m,n}\\&=\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n}\cdot\mu^{\Lambda}(g;\underline{h}).\end{aligned}$$

因此，我们得出上述态射 $[\lambda_{p\cdot g,q\cdot h}\cdot t^{-1}_{m,n},1]$ $[\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n}\cdot$等 $\mu^{\Lambda}\ g\ h\ ,1]$, $[f\cdot\sigma,g]=[f,\sigma\cdot g]$ $P\ nm\ \otimes_{\Lambda(nm)}\ A\times B^{\ nm}$ 于（;)¯，并利用（）（）中的等式，它因此等于

$$\begin{aligned}\left[\mu\left(p;\underline{q}\right);\mu^{\Lambda}(g;\underline{h})\cdot\underline{(a,\underline{b})}\right]&\xrightarrow{[\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n},1]}\left[\mu\left(q;\underline{p}\right)\cdot t^{-1}_{m,n};\mu^{\Lambda}(g;\underline{h})\cdot\underline{(\underline{a},b)}\right]\\&=\left[\mu\left(q;\underline{p}\right);t^{-1}_{m,n}\cdot\mu^{\Lambda}(g;\underline{h})\cdot\underline{(\underline{a},b)}\right]\\&=\left[\mu\left(q;\underline{p}\right);\mu^{\Lambda}(h;\underline{g})\cdot\underline{(a,\underline{b})}\right].\end{aligned}$$

读者可以验证，此计算中的源与靶与 $[\lambda_{p,q}\cdot t^{-1}_{m,n},1]$ 的源与靶相匹配，从而证明所需的等式。因此，$\gamma_{A,B}$ 的分量是良定义的。对象 $[p;\ a_1,\ldots,a_n],[q;\ b_1,\ldots,b_m]$ 中 $\gamma_{A,B}$ 的分量的自然性由每个 $\lambda_{p,q}$的自然性推出。

我们通过注意到它不依赖于列表 $a_1,\ \ldots,\ a_n$ 或 $b_1,\ \ldots,\ b_m$ 中的对象，而只依赖于它们的长度以及运算 p 和 q，来说明这是一项修正。因此，若有函子 $f\colon A\to A'$ 和 $g\colon B\to B'$，则显然

$$(\underline{P}(f\times g)\circ\gamma_{A,B})_{[p;\underline{a}],[q;\underline{b}]}=[\lambda_{p,q},\underline{1}]=(\gamma_{A',B'}\circ(\underline{P}f\times\underline{P}g))_{[p;\underline{a}],[q;\underline{b}]}.$$

因此，我们可以简记 $(\gamma_{A,\ B})_{[p;a],\ [q;b]}$ 为 $\gamma_{p,\_\ q}$。

现在需要检验伪交换性的七条公理：三条强度公理、两条单位公理以及两条乘法公理。对于第一条强度公理，我们必须验证形如

$$A\times TB\times TC\quad\Downarrow\quad T(A\times B\times C)$$

的两个不同 2-胞相等。其中第一个是 γ 与 $d\times 1$ 的预复合，因此是在某个对象处 γ 的分量

$$([p;(a,b_1),\ldots,(a,b_n)],[q;c_1,\ldots,c_m])\,.$$

其中第二个是将 d 作用于 $1\times\gamma$ 在下述对象处的分量

$$(a,([p;b_1,\ldots,b_n],[q;c_1,\ldots,c_m]))\,.$$

容易计算出，这些映射中的每一个都是 $(\lambda_{p,\ q}\cdot t^{-1}_{m,\ n},\ 1)$ 在函子下的像

$$\coprod P(n)\times(A\times B)^n\to\coprod P(n)\otimes_{\Lambda(n)}A\times B^n.$$

另外两个强度公理可通过对 γ 与 d 或 d^* 的其他胡须运算进行类似计算得出。

对于单位公理，我们必须计算 γ与 $\eta\times 1$ 复合后在第一条公理中的分量，以及 $1\times\eta$ 复合后在第二条公理中的分量。因此，对于第一条单位公理，我们必须计算 γ在 $([\mathrm{id};\,a],[q;\,b_1,\ldots,b_m])$ 处的分量。根据定义，这就是 $(\lambda_{\mathrm{id},q}\cdot t^{-1}_{m,1},1)$ 的像；根据定义 17.12 的公理 (1)，它是恒等态射。第二条单位公理的证明类似，因为 $\lambda_{p,\mathrm{id}}$ 和 $t^{-1}_{1,n}$ 都是恒等态射。

对于乘法公理，首先注意，必须有公理 (4)，才能确保伪交换结构的公理 (6) 图表中存在顶部的水平等式；公理 (5) 和 (7) 也同样如此。现在说明伪交换结构的公理 (4) 和 (6) 如何确保第一乘法公理成立；同理，公理 (5) 和 (7) 蕴含第二乘法公理。

我们首先研究第一乘法公理中的粘贴图，但使用 underlying P 的非对称歌剧的强度来计算其值；这意味着我们在形如（$p;\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n$）的对象上进行求值，而不是在它们的等价类上进行求值。令 $p\in P(l)$ $q_i\in P(m_i)$ 对于 $1\le i\le l$，且 $r\in P(n)$。沿粘贴图计算顶部和右侧路径，得到对象上的函数，该函数将

$$\big((p;(q_1;\underline{a_1}),\ldots,(q_l;\underline{a_l})),(r;\underline{b})\big)$$

to

$$\Big(\mu(p;\mu(q_1;\underline{r}),\ldots,\mu(q_l;\underline{r}));(\underline{(a_{1\bullet},b)}),\ldots,(\underline{(a_{l\bullet},b)})\Big)\,,$$

其中（ $\underline{(a_{i\bullet},\_\ b)}$ ）是有序对列表

$$(a_{i1},b_1),\ldots,(a_{i1},b_m),(a_{i2},b_1),\ldots,(a_{in_i},b_m).$$

那么，$\underline{\ P\gamma}$ 是如下态射的像：该态射在各个（a_{ij}，b_k）上为恒等态射，并且是如下态射

$$\mu\left(1;\lambda_{q_1,r}t^{-1}_{n,m_1},\ldots,\lambda_{q_l,r}t^{-1}_{n,m_l}\right)$$

其第一分量的定义域和值域如下所示。

$$\mu\left(p;\mu\left(q_1;\underline{r}\right),\ldots,\mu\left(q_n;\underline{r}\right)\right)\longrightarrow\mu\left(p;\mu\left(r;\underline{q_1}\right)t^{-1}_{n,m_1},\ldots,\mu\left(r;\underline{q_l}\right)t^{-1}_{n,m_l}\right)$$

根据 Λ-算子公理，该态射的靶对象等于

$$\mu\left(p;\mu\left(r;\underline{q_1}\right),\ldots,\mu\left(r;\underline{q_l}\right)\right)\mu\left(e_l;t^{-1}_{n,m_1},\ldots,t^{-1}_{n,m_l}\right).$$

请注意，这与使用 P 的底层非对称歌剧来计算 $T\mu\circ T^2d^*\circ Td\circ d^*$ 所得到的对象并不相同，因为我们必须使用 Λ-等变性，以确保 γ 的靶对象是正确的。

接下来，我们计算（$\mu\circ Td^*$）$*\gamma$ 的源对象；它是第一乘法公理中出现的粘贴里的另一个 2-胞腔。我们再次使用底层非对称歌剧的强度来进行计算，并再次注意到，这不会与我们先前的计算完全一致，而只是在施加 Λ-等变性后才一致。该函子在对象上的映射由下式给出：

$$\left((p;(q_1;\underline{a_1}),\ldots,(q_l;\underline{a_l})),(r;\underline{b})\right)\mapsto\left(\mu(\mu(p;\underline{r});\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l});\underline{(a_1,b_\bullet)},\ldots,\underline{(a_l,b_\bullet)}\right).$$

注意，若应用 Λ等变性，这与上面计算出的目标一致。再一次，γ 的分量是某个态射的像，该态射在这些（a_{ij}，b_k）上是恒等态射，而其第一分量为

$$\mu\left(\mu(p;\underline{r});\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l}\right)\xrightarrow{\mu\left(\lambda_{p,r}\cdot t^{-1}_{n,l};1,\ldots,1\right)}\mu\left(\mu(r;\underline{p})\cdot t^{-1}_{n,l};\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l}\right).$$

我们无法在 $\coprod P(n)\times(A\times B)^n$ 中复合这些态射，因为它们的源与目标不匹配；但在 $\coprod P(n)\otimes_\Lambda(A\times B)^n$中可以。所得态射的第一分量由以下对象的像给出：

$$\mu(p;\mu(q_1;\underline{r}),\ldots,\mu(q_n;\underline{r}))\xrightarrow{\mu\left(1;\lambda_{q_1,r}t^{-1}_{n,m_1},\ldots,\lambda_{q_1,r}t^{-1}_{n,m_l}\right)}\mu\left(p;\mu\left(r;\underline{q_1}\right)t^{-1}_{n,m_1},\ldots,\mu\left(r;\underline{q_l}\right)t^{-1}_{n,m_l}\right)$$

$$\xrightarrow{\mu\left(\lambda_{p,r}\cdot t^{-1}_{n,l};1,\ldots,1\right)\cdot\mu\left(e_l;t^{-1}_{n,m_1},\ldots,t^{-1}_{n,m_l}\right)}\mu\left(\mu\left(r;\underline{p}\right)\cdot t^{-1}_{n,l};\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l}\right)\cdot\mu\left(e_l;t^{-1}_{n,m_1},\ldots,t^{-1}_{n,m_l}\right),$$

这里我们利用了算子公理，将第一个映射的目标识别为第二个映射的源。再次在目标上应用 Λ-算子公理，可得

$$\mu\left(\mu(r;\underline{p})\cdot t^{-1}_{n,l};\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l}\right)\cdot\mu(e_l;t^{-1}_{n,m_1},\ldots,t^{-1}_{n,m_l})$$

等于

$$\mu\left(\mu(r;\underline{p});\underline{q_1},\ldots,\underline{q_l}\right)\cdot\mu(t^{-1}_{n,l};\underline{e})\cdot\mu(e_l;t^{-1}_{n,m_1},\ldots,t^{-1}_{n,m_l}).$$

这两个态射的复合，加上拟运算子公理所给出的必要恒等态射，恰好就是公理（6）中图表的左边和底边。用同样的方法，可以验证 $\gamma*(\mu\times 1)$ 的第一个分量是公理（6）图表中沿上边和右边出现的态射的像。这些态射的第二个分量全都是由 Λ-等变性导出的恒等态射，因此，伪交换结构的公理（4）和（6）蕴含第一乘法公理。第二乘法公理的计算留给读者完成，因为它们性质相同，只需使用公理（5）和（7）。

□

推论

17 15 *Let P be a non-symmetric operad ie a Λ-operad over the terminal 。 ,, action operad T. Then the induced monad P is never pseudo-commutative.*

Proof. 在非对称情形中，2-单子只需通过余积和积来定义，也就是说，不需要余等化子。因此，为了定义 γ，我们需要一个同构

$$\Big(\mu(p;\underline{q});\underline{(a,b)}\Big) \cong \Big(\mu(q;\underline{p});\underline{(a,b)}\Big).$$

当 A, B 是离散的时，不存在同构 $(a,\ b) \cong (a,\ b)$，因此这样的 γ 也不可能存在。

□

Hyland 和 Power 还为 2-单子 T 上的伪交换结构定义了一种对称性。这种对称性随后体现在代数 2-范畴上的幺半结构中，因此该范畴也将具有对称张量积（在适当的 2-范畴意义下）[25, 定理 13]。

定义 17.16。设 $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是对称幺半 2-范畴 $\mathcal{K}$ 上的一个 2-单子，其对称性为 c。若伪交换性 γ 满足以下条件（对所有 $A, B \in \mathcal{K}$），则称 T 具有 *symmetric*：

$$Tc_{A,B} \circ \gamma_{A,B} \circ c_{TB,TA} = \gamma_{B,A}.$$

有了对称性的概念，我们便能够扩展上述定理，说明 P 何时是对称的。

定理 **17 17** *The pseudo-commutativity of P given by Theorem 17.14 is symmet- .. , ℕ ric if for all $m\ n \in {}_{+}$ the two conditions below hold.*

1. $t_{m,n} = t_n^{-1},_m$.
2. *The following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} \mu\left(p;\underline{q}\right)\cdot t_{m,n}t_{n,m} & = & \mu\left(p;\underline{q}\right)\cdot e_{mn} \\ {\scriptstyle \lambda_{p,q}\cdot 1}\downarrow & & \| \\ \mu\left(q;\underline{p}\right)\cdot t_{n,m} & \xrightarrow[\lambda_{q,p}]{} & \mu\left(p;\underline{q}\right) \end{array}$$

Proof. 上方图表的交换性保证了对称性公理的第一个分量在取余等化子中的等价类之前，于 $P(n)$ 中交换，这与定理 17.14 的证明相同。

□

定义 17.18. 设 P 是 Cat 中的一个 Λ-拟运算子。若每个范畴 $P(n)$ 都等价于终对象范畴，则称 P 是 *contractible*。

推论 **17 19** *If P is contractible and there exist t_m then .. . P acquires a pseudo-commutative structure. Furthermore it is symmetric if t_n $_m$ = $_n$ as in Definition 17.12,,. $t_m^{-1}{}_n$.*

Proof. 唯一剩下需要定义的是自然同构的集合族 $\lambda_{p,\ q}$。不过，由于每个 $P(n)$ 都是可缩的，$\lambda_{p,\ q}$ 必定是其源与目标之间唯一的同构；此外，最后两个公理也成立，因为在可缩范畴中，任何一对平行箭头都相等。

□

推论

17 20 *If P is a contractible symmetric operad then the operad P has .. a unique pseudo-commutative structure. The 2-monad P then obtains a symmetric pseudo-commutativity.*

Proof. 元素 $t_{m,n}$ 的唯一可能取值是 $t_{m,n} = \tau_{m,n}$。 □

注释17.21（对称化与可缩性）。如果一个 Λ-拟运算子 P是可缩的，那么其对称化 $\pi_! P$（见定义 8.17）并不一定也是可缩的。例如，考虑辫子模运算 B 以及 Cat 中相应的 B-拟运算子 EB。于是， $\pi_! EB(2)$ 有两个对象 $[0,\mathrm{id}]$、$[0,\sigma]$，它们对应于对称群 Σ_2 的两个元素，这是通过按照引理 10.5 中的方式取商 $(\mathbb{Z} \times \Sigma_2)/\mathbb{Z}$ 得到的。对象 $[0,\mathrm{id}]$ 的自同构群是纯辫子所成的子群 $PB_2 = \ker(\pi) \leq B_2$，如下所示。群 B_2 同构于整数，因此 EB_2 对每个整数都有一个对象，并且对每一对 k、$j \in \mathbb{Z}$ 都有唯一的同构 $k \cong j$。特别地，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，都存在唯一的同构 $0 \cong 2k$。利用引理 10.5 中的描述，我们可以验证，除非 $k = j$，否则 $[0 \cong 2k, 1_{\mathrm{id}}]$ 和$[0 \cong 2j, 1_{\mathrm{id}}]$ 不在同一个轨道中，因此给出不同的同构 $[0,\mathrm{id}] \cong [2k,\mathrm{id}] = [0,\mathrm{id}]$, $[0,\mathrm{id}] \cong [2j,\mathrm{id}] = [0,\mathrm{id}]$。由此可见，给定的 Λ-拟运算子 P可能满足推论 17.19 的假设，但其对称化 $S(P)$却不满足推论 17.20 的假设。

注释17.22。本文的早期版本 [9] 为 EB 构造了一个伪交换结构，将其视为 B-拟运算子，但该版本存在错误，现已撤回。

参考文献

[1] Ji˘r´ı Ad´amek 和 Ji˘r´ı Rosick´y。局部可呈示范畴与可达范畴。第 189 卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥：剑桥大学出版社，1994 年，第 xiv+316 页。[2] Javier Aramayona、Federico Cantero、V´ıctorCarmona 和 Javier Guti´errez。“克隆系统与作用算子”。载于：数学出版物 `（2025年）

，

即将出版。[3] Michael Batanin 和 Martin Markl：《交叉区间群与霍赫希尔德上同调上的运算》。载于：《非交换几何杂志》8.3（2014年），第 655–693 页。[4] A. J. Berrick 和 E. Hanbury：《映射类群与辫群的单纯结构和标准形》。载于：《代数与几何拓扑》14.6（2014年1月）。出版商：MSP，第 3259–3280 页。[5] R. Blackwell、G. M. Kelly 和 A. J. Power：《二维单子理论》。载于：《纯粹与应用代数杂志》59.1（1989年），第 1–41 页。[6] J. M. Boardman 和 R. M. Vogt。拓扑空间上的同伦不变代数结构。英文。第 347 卷。数学讲义丛书。施普林格，Cham，1973年。[7] Eugenia Cheng：《比较 n-范畴的模运算理论》。载于：《同调、同伦与应用》12.2（2010年），第 1–32 页。[8] Eugenia Cheng 和 Nick Gurski：《迈向配边的 n-范畴》。载于：范畴理论与应用18.10（2007年），第 274–302 页。[9] Alexander S. Corner 和 Nick Gurski。具有一般等变群的算子，以及 *Cat* 中算子的若干 *2*-范畴方面。2014年。arXiv：1312.5910。

[10] Brian Day。《双闭范畴的构造》。博士学位论文——新南威尔士大学。1970年。[11] Jean Dou cot、Gabriele Rembado 和 Matteo Tamiozzo。《局部野映射类群与缆编辫》。2025年。arXiv：2204.08188v3。[12] V. G. Drinfeld：《拟霍普夫代数》。载于：Algebra i Analiz 1.6（1989年），第 114–148 页。[13] Beno Eckmann 和 Peter J Hilton：《一般范畴中的群状结构》。载于：Mathematische Annalen 145.3（1962年），第 227–255 页。[14] Beno Eckmann 和 Myles Tierney。《三元组研讨会与范畴同调理论》。英文。重印本。Theory Appl. Categ. 2008，第 18 期，1–303 页（2008年）。2008年。[15] Zbigniew Fiedorowicz。《对称 bar 构造》。预印本。[16] Zbigniew Fiedorowicz 和 Jean-Louis Loday：《交叉单纯群及其相关同调》。载于：美国数学会汇刊 326.1（1991年），第 57–87 页。[17] F. A. Garside：《辫群及其他群》。英文。载于：《数学季刊》20.1（1969年1月）。出版商：牛津学术，第 235–254 页。[18] Bertrand J Guillou、J Peter May、Mona Merling 和 Ang´elica M Os-orno：《对称幺半 G-范畴及其严格化》。载于：《数学季刊》71.1（2020年3月），第 207–246 页。[19] Bertrand J. Guillou、J. Peter May、Mona Merling 和 Ang´elica M. Os-orno：《乘法等变 K-理论与 Barratt-Priddy-Quillen 定理》。英文。载于：《数学进展》414（2023年2月），第 108865 页。[20] Nick Gurski。《三维范畴论中的相干性》。剑桥数学论著丛书。剑桥大学出版社，2013年。[21] Nick Gurski。《算子、张量积与范畴 Borel 构造》。预印本，arXiv：1508.04050 [math.CT]（2015年）。2015年。[22] Nick Gurski 和 Niles Johnson：《泛伪态射及其在编织与对称幺半函子的图示相干性中的应用》。载于：Compositionality 第 7 卷（2025年），第 3 篇（2025年6月）。[23] A. Henriques 和 J. Kamnitzer：《晶体与余边界范畴》。载于：Duke Math. J. 132.2（2006年），第 191–216 页。[24] J. Hong 和 S.-J. Kang。《量子群与晶体基导论》。第 42 卷。数学研究生教材。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年，第 xviii+307。[25] Martin Hyland 和 John Power：《伪交换单子与伪闭 2-范畴》。载于：J. Pure Appl. Algebra 175.1-3（2002年）。纪念 Max Kelly 教授 70 岁诞辰特刊，第 141–185 页。[26] Niles Johnson 和 Donald Yau。《二维范畴》。牛津大学出版社（英国），2021年。[27] Andr´e Joyal 和 Ross Street：《辫带张量范畴》。载于：Adv. Math. 102.1（1993年），第 20–78 页。

[28] G. M. Kelly. “关于相干性的抽象方法”。载于：范畴中的相干性。Springer Berlin，1972，106–147。数学讲义，第281卷。[29] G. M. Kelly. “丰范畴论的基本概念”。载于：*Repr. Theory Appl. Categ.* 10 (2005)。重印1982年原版， [剑桥大学出版社，剑桥；MR0651714], 第vi页+137。[30] G. M. Kelly. “多变量函子演算 I”。载于：范畴中的相干性。Springer Berlin，1972，66–105。数学讲义，第281卷。[31] G. M. Kelly. “关于俱乐部与教条”。载于：范畴研讨会（研讨会论文集，悉尼，*1972/1973*）。Springer Berlin，1974，181–256。数学讲义，第420卷。[32] G. M. Kelly. “关于 J. P. May 的算子”。载于：*Repr. Theory Appl. Categ.*13.1 (2005)，第1–13页。[33] G. M. Kelly 和 Ross Street. “2-范畴要素述评”。载于：范畴研讨会（研讨会论文集，悉尼，*1972/1973*）。Springer Berlin，1974，75–103。数学讲义，第420卷。[34] Ki-Hyoung Ko 和 Lawrence Smolinsky. “框架辫群及其表示”。载于：*Knots 90*。1992，第289–297页。[35] Ki Hyoung Ko 和 Lawrence Smolinsky. “框架辫群与3-流形”。载于：美国数学会会刊 115.2 (1992)，第541–551页。[36] Anders Kock. “由交换单子生成的闭范畴”。载于：*J. Austral. Math. Soc.* 12 (1971)，第405–424页。[37] Anders Kock. “对称幺半闭范畴上的单子”。载于：*Arch. Math. (Basel)* 21 (1970)，第1–10页。[38] Anders Kock. “强函子与幺半单子”。载于：*Arch. Math.(Basel)* 23 (1972)，第113–120页。[39] R Krasauskas. “带框辫的交叉单纯群与曲面的映射类群”。载于：立陶宛数学杂志 36.3 (1996)，第263–281页。[40] R. Krasauskas. “斜单纯群”。英文。载于：立陶宛数学杂志 27.1（1987年1月），第47–54页。[41] Stephen Lack. “余下降对象与相干性”。载于：《纯粹与应用代数杂志》175.1-3 (2002)。纪念 Max Kelly 教授70岁生日专辑，第223–241页。[42] F. William Lawvere. 代数理论的函子语义。博士学位论文——哥伦比亚大学。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1963年。[43] I. J. Le Creurer、F. Marmolejo 和 E. M. Vitale. “伪幺半群的 Beck 定理”。载于：《纯粹与应用代数杂志》173.3（2002年9月），第293–313页。[44] Tom Leinster. “n-范畴定义综述”。载于：范畴理论与应用 10.1 (2002)，第1–70页。

[45] Tom Leinster.《高阶算子与高阶范畴》。第298卷。伦敦数学学会讲义丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2004年，第xiv页+433。[46] Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette.《代数歌剧》。英文。第346卷。数学科学基础丛书。柏林：施普林格，2012年。[47] Fosco Loregian.《（余）端演算》。第468卷。剑桥大学出版社，2021年。[48] Saunders Mac Lane. “范畴代数”。载于：Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965)，第40–106页。[49] Saunders MacLane.《工作数学家的范畴论》。数学研究生教材，第5卷。纽约：Springer-Verlag，1971年，第ix页+262。[50] M. Markl. “歌剧与 PROPs”。载于：《代数手册》第5卷。第5卷。Handb. Algebr. 爱思唯尔/诺斯-荷兰，阿姆斯特丹，2008年，第87–140页。[51] M. Markl、S. Shnider 和 J. Stasheff.《代数、拓扑学与物理学中的歌剧》。第96卷。数学调查与专著。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2002年，第x页+349。[52] Francisco Marmolejo. “结构形成充满忠实伴随串的教条”。载于：范畴理论与应用 3.2 (1997)，第24–44页。[53] J. P. May.《迭代环空间的几何》。数学讲义，第271卷。Springer Berlin，1972年，第viii页+175。[54] Dylan McDermott 和 Tarmo Uustalu. “什么造就了强单子？”载于：第九届数学结构函数式编程研讨会（MSFP 2022）论文集，德国慕尼黑。第360卷。EPTCS，2022年，第113–133页。[55] Paul Melvin 和 NB Tufillaro. “模板与带框辫”。载于：《物理评论 A》44.6 (1991)，R3419。[56] Miguel A. M´endez.《组合学与计算机科学中的集合歌剧》。英文。SpringerBriefs Math. Cham：施普林格，2015年。[57] A. J. Power. “一般相干性结果”。载于：J. Pure Appl. Algebra 57.2 (1989)，第165–173页。[58] JonathanRubin.《等变范畴相干理论》。博士学位论文——芝加哥大学。2018年。[59] Alistair Savage. “编织与余边界幺半范畴”。载于：Algebras, representations and applications 483 (2009)，第229–251页。[60] Artem Semidetnov.《与交叉单纯群相关联的歌剧》。2025年。arXiv：2512.14498。[61] James Dillon Stasheff. “ H-空间的同伦结合性 I、II”。英文。载于：Trans. Am. Math. Soc. 108 (1963)，第275–292、293–312页。[62] Werner Thumann. “歌剧群及其有限性性质”。载于：《数学进展》307 (2017)，第417–487页。[63] NathalieWahl.《带状辫与相关歌剧》。博士学位论文——牛津大学。2001年。

[64] 阿尔弗雷德·诺思·怀特海。《普遍代数论》。附应用。英文。1898年原版重印。剑桥图书馆典藏，数学。剑桥：剑桥大学出版社，2009年。[65] Stefan Witzel 和 Matthew CB Zaremsky。“群系统的汤普森群及其有限性性质”。载于：群、几何与动力学 12.1（2018年），第289–358页。[66] Donald Yau。具有群等变性的无穷运算子与幺半范畴。世界科学出版社，2021年。[67] Jun Yoshida。 作为交叉区间群的群运算子。2014年。arXiv：1806.03012。[68] MatthewCB Zaremsky。“克隆系统用户指南”。载于：*TopologyProceedings*。第50卷。2017年，第13–33页。[69] Wenbin Zhang。 群运算子与同伦论。2012年。arXiv：1111.7090v2。