arXiv:2603.19917v1 [math.RT] 20 Mar 2026

派对-赫克代数

´DIEGO ARCIS 和 JESUS JUYUMAYA

Abstract. 派对-赫克代数作为派对代数的双参数变形被引入，其中一个参数对 party 生成元进行变形，另一个参数对初等换位进行变形。我们为该代数构造了一组基，并证明它可以实现为辫子与纽结代数的一个商。此外，我们研究了派对幺半群及其与带纽结的对称幺半群之间的关系，以及它们各自关联的代数。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 派对幺半群与代数 9 4. Party-Hecke 代数 16 5. 派对-赫克代数作为bt代数的商及相关商 22 6. 后续工作 25 参考文献 26

1. Introduction

形变代数是代数结构分类的核心，也在量子物理、结理论等领域发挥着重要作用。一类形变代数是通过形变表示的中心化子代数得到的，例如 Hecke 代数和 BMW 代数，它们分别导出 HOMFLYPT 多项式和 Kauffman多项式。这些中心化子是所谓 Schur–Weyl对偶的基石；本文研究的形变代数也源自这一框架。Schur–Weyl对偶是不变量理论中的核心课题，其起源是一般线性群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 与对称群$\mathfrak{S}_d$ 在张量空间 $V^{\otimes d}$上的对偶作用，其中 $V = \mathbb{C}^n$。在这一情形下，前者以对角方式作用，后者则通过置换张量因子来作用。这些作用彼此可交换，而 Schur–Weyl对偶定理（例如参见 [16, 定理 3.4]）揭示了 G的不可约表示与对称群表示论之间的深刻联系。特别地，对于$n \geqslant d$，中心化子 $\mathrm{End}_G(V^{\otimes d})$ 就是群代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$。后来， [14], Brauer研究了类似的情形，其中 G 被正交子群 O_n取代。具体而言，当 $n \geqslant d$时，中心化子 $\mathrm{End}_{O_n}(V^{\otimes d})$记作 $\mathfrak{Br}_n(d)$ ，称为 Brauer代数，它完全由换位和某些元描述；用图形语言来说，这些元如今称为缠结。在 [26], Jones研究了中心化子 $\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_n}(V^{\otimes d})$，其中 $\mathfrak{S}_n$ 被视为G的子群，并引入了分拆代数。Martin也在 [35]独立引入了这一代数。将 $\mathfrak{S}_n$ 视为复反射群 $G(1,\ 1,\ n)$后，自然会想到研究

2020 *Mathematics Subject Classification.* 15A72, 20C08, 20M05, 20M20；47A67。第一作者感谢 DIDULS/ULS 通过项目 PR2553853 提供的资助。

复反射群 $G(d,\ r,\ n)$的中心化子。Tanabe研究了该中心化子并给出了它的一个表示，其中生成元由初等换位和某些 party 元构成（参见 [45, 定理 3.1]）。随后，基于Tanabe的上述工作，Kosuda针对任意 $\delta \in \mathbb{C}^{\times}$，在 [29, 定义 1.1], 中引入了 party 代数 $\mathcal{P}_k(\delta)$，并通过生成元与关系给出其表示。此外，他证明了对于 $n \geqslant k$ 和 $d > k$，$\mathcal{P}_k(\delta)$ 可实现为中心化子 $\mathrm{End}_{G(d,\ 1,\ n)}(V^{\otimes k})$；参见 [29, 命题 1.2 和 1.3]。事实上，$\mathcal{P}_k(1) = \mathbb{C}[\mathcal{P}_k]$，其中 $\mathcal{P}_k$ 表示 party 幺半群，也称为均匀分块对换幺半群。回顾一下，$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 和 $\mathfrak{Br}_n(d)$ 的形变分别得到 Hecke 代数和 BMW 代数。这些形变的关键在于，两个代数中初等换位都经过了形变。例如，在 Hecke 代数中，关系 $s^2 = 1$ 经 u形变后成为 $s^2 = u + (u-1)s$，由此得到非平凡的辫群表示，并用于构造纽结不变量。本文引入并研究 party 代数的双参数形变，并将其称为***Party-Hecke*** 代数。简言之，Party-Hecke 代数是一种双参数形变，其中一个参数使 party生成元发生形变，另一个参数则使初等置换生成元发生形变。下文将概述本文的结构和主要结果。

第 2 节介绍本文所用的工具。具体而言，2.1–2.3 小节涵盖本文所用幺半群的标准背景知识，即：集合划分幺半群 P_n、分拆代数 $\mathfrak{C}_n$、对称群 $\mathfrak{S}_n$和辫群 B_n。在 2.4 小节中，我们给出分歧幺半群 [3, Section 4] [4], 的定义，并回顾群 $\mathfrak{S}_n$ 的分歧幺半群 $T\mathfrak{S}_n = P_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ 的通常表示（2.4.1 小小节）。随后，我们回顾所谓的带系辫幺半群 TB_n 的定义（2.4.2 小小节） [5, Section3]。最后，我们回顾布劳尔幺半群 $\mathfrak{Br}_n$ 及其分歧版本 $\mathcal{R}\mathfrak{Br}_n$的定义（2.4.3–2.4.4 小小节）。2.5 小节聚焦于扭曲幺半群代数 [47, Section 3]，并指出分拆代数可视为一种扭曲幺半群代数 [47, Section 7]。最后，在 2.6 小节中，我们回顾辫与系的二参数代数[7]的定义。

第 3 节首先回顾 party 幺半群的定义 $\mathcal{P}_n$ （第 3.1.1 小小节），并特别建立两个关键结果：命题 3.1 刻画了 $\mathcal{P}_n$ 是带纽结的对称幺半群 $T\mathfrak{S}_n$的一个商，而命题3.2则给出了 $\mathcal{P}_n$中元素的标准形。在第 3.1.2 小小节中，我们回顾 party 代数 $\mathcal{P}_n(\delta)$的定义，其中$\delta \in \mathbb{C}^{\times}$ （[28, 定理 1.1]）。接下来，在第 3.1.3 小小节中，我们说明 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 如何被视为 $\mathcal{P}_n$的扭曲幺半群代数，并展示定理 2.3 如何导出其定义表示。第 3.2 小节回顾 $\mathcal{P}_n$ 的极大子群（子小节3.2.1），并计算 $T\mathfrak{S}_n$ 的极大子群（命题 3.7），同时证明 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 的胞腔性（定理3.11）。这一胞腔性最初在 [30], 中得到证明，而此处我们以不同方式得到这一结果。更具体地说，我们利用 party 代数是扭曲幺半群代数这一事实，以及 [47, 推论 6]。本节最后介绍两个附加小节，其中阐述了前文讨论中出现的两种自然代数结构：辫子与系结的扭曲幺半群代数（第 3.3 小节）和类Party–Brauer幺半群（第 3.4 小节）。

第4节由四个小节组成。在第4.1小节中，我们引入 party 辫群幺半群$\mathcal{BP}_n$，它是辫群的一种自然的“派对扩展”。我们以类似于将 Iwahori–Hecke 代数定义为群代数$\mathbb{C}[B_n]$的商的方式，定义 Party-Hecke 代数。具体而言，给定 $p, q \in \mathbb{C}^{\times}$，Party-Hecke 代数 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 定义为$\mathbb{C}[\mathcal{BP}_n]$ 对由以下元素生成的理想取商

$$\sigma_i^2 - pq^2 - p(p-1)\bar{f}_i, \qquad \sigma_i\bar{f}_i - pq\bar{f}_i, \qquad \bar{f}_i^2 - q^2\bar{f}_i,$$

¯其中 σ_i 是初等辫， f_i 是初等派对生成元（定义4.2）。请注意，对生成元进行简单的缩放后，代数 $\mathrm{P}_n(1,q)$ 与 $\mathcal{P}_n(q)$重合。在第4.2小节中，我们证明 Party-Hecke 代数可以实现为带系辫幺半群的扭曲幺半群代数的商（命题4.4）。第4.3小节专门用于证明定理 4.14，该定理给出了 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 的一个线性基，其元素由$\mathcal{P}_n$参数化。此外，该线性基的元素可以分解为 $F_I G_s$的形式，其中 $(I,s)\in P_n\times\mathfrak{S}_n$ 是一个互素对（命题3.2）。定理 4.14 的证明依赖于命题3.2，以及 $\mathrm{P}_n(p,q)$的一个 Jimbo型张量表示。最后，在第4.4小节中，我们证明 Party-Hecke 代数在一般情形下是半单的。

在第5节中，我们证明 Party-Hecke 代数可以实现为辫与系带代数的一个商（命题 5.3）。这一实现通过第5.1小节开头引入的一种替代表示来获得。第5.2小节为 Party-Hecke 代数引入了一种新表示，其中辫子生成元被幂等元取代。受 Temperley–Lieb 代数作为 Iwahori–Hecke 代数之商这一经典实现的启发，我们进而考虑了两个 Temperley–Lieb 型的商，详见命题5.5和5.6。此外，我们还定义了第三个 Temperley–Lieb 型 Party-Hecke 代数的商，其含义是 $[27,\,42],$ ，它似乎是一种新颖的代数结构。

最后，在第6节中，我们讨论两个方向上的进行中工作：$T\mathfrak{S}_n$ 的表示论（第6.1小节），以及虚结的一个 Jones 型不变量的研究（第 6.2 小节）。

2. Preliminaries

本文中， d 和 n 表示两个正整数。我们用 $[\![a,\ b]\!]$ 表示满足 $a\leqslant x\leqslant b$的整数集合 x 。此外，如果省略了生成元的下标，则默认该下标可以取该生成元适用的任意值。本节余下部分介绍预备知识，内容分为第2.1至2.6小节。

2.1. 集合划分。 回顾一下，集合 A 的集合划分是由若干两两不相交的非空子集组成的集合，这些子集称为块，且它们的并为 A。 A 的集合划分全体记为 $P(A)$。对于每个非空的 $B\subset A$ ，我们用 f_B 表示其唯一可能非平凡的块为 B的集合划分。

给定 $I,\ J\in P(A)$，若 J 的每个块都是 I中若干块的并，则称 J比 I更粗，或称 I比 J更细，记作 $I\preceq J$。这个关系赋予 $P(A)$ 格结构，其并运算为 $\vee$。因此，二元组 $(P(A),\ \vee)$ 构成一个以 $(\{a\}\mid a\in A)$为单位元的幂等交换幺半群，称为 A的集合分划幺半群。对于 $I,\ J\in P(A)$，通常用 IJ 代替 $I\vee J$。

对于子集 $B\subset A$ 和集合划分 $I\in P(A)$，我们用 $I|_B$ 表示由 I 的各个块与 B的非空交集构成的 B的集合划分。反过来，如果 $I\in P(B)$，则可通过将由 $A\backslash B$中的元素构成的单元素块补入 I ，从而将其视为 A 的集合划分。因此，若 $A,\ B$ 是任意两个集合，且 $(I,\ J)\in P(A)\times P(B)$，我们简记 $I\vee J$，表示将 J 视为集合划分后与 I 的并。

如 $[19,$定理 $2],$所示，集合划分幺半群 $P_n:=P([\![1,\ n]\!])$ 由生成元 $f_{i,\ j}:=f_{\{i,\ j\}}$ 给出，其满足 $i<j$，并受以下关系约束：

$$f_{i,j}^2=f_{i,j},\qquad f_{i,j}f_{h,k}=f_{h,k}f_{i,j},\qquad f_{i,j}f_{i,k}=f_{i,j}f_{j,k}=f_{i,k}f_{j,k}. \tag{1}$$

已知 $|P_n|$ 是第 n 个贝尔数 $[38,$ A000110$]$。此外， P_n 中的元素具有如下标准形。

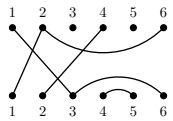
命题 2.1 ([11, 第 3 节。1])。 设 $I = (I_1, \ldots, I_k)$ 是 $[\![1, n]\!]$的一个集合划分。那么 $I = f_{I_1} \cdots f_{I_k}$。更具体地，对于满足 $k = |B| > 1$的 $B = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subseteq [\![1, n]\!]$，有：

$$f_B = f_{i_1,i_2} \cdots f_{i_{k-1},i_k}.$$

由元素 $f_i := f_{i,\ i+1}$（对所有 $i \in [\![1,\ n-1]\!]$）生成的 P_n 的子幺半群 C_n，称为组合幺半群 [9,（第 2.1], 小节），它与秩为 $n-1$ 的自由幂等交换幺半群同构，也就是说， C_n 由生成元 f_1，....., f_{n-1}生成，并满足以下关系：

$$f_i^2 = f_i, \qquad f_i f_j = f_j f_i. \tag{2}$$

2.2. **划分幺半群**。 记 $\mathfrak{C}_n := P([\![1,\ 2n]\!])$，并设 $X = \{x_1, \ldots..., x_n\}$ 是一个基数为 n 的集合，且与 $[\![1,\ 2n]\!]$不相交。集合划分 $I \in \mathfrak{C}_n$ 通常用所谓的弦图表示。该图通过放置 n 个顶点来构成，这些顶点表示 $[\![1,\ n]\!]$的元素；再放置 n 个底部顶点，表示 $[\![n+1,\ 2n]\!]$的元素。为方便起见，这些顶点也按从 1 到 n 的顺序标记。根据 I 的块，将这些点传递地连接起来。参见图 1。



({1,9,12},{2,6,7},{3},{4,8},{5},{10,11})

FIGURE 1. 一个集合划分的线股图。

两个集合划分的串接 $I, J \in \mathfrak{C}_n$ 是集合划分

$$I * J := (I_X \vee J^X)|_{[\![1,2n]\!]},$$

其中， I_X 是将 I 中的每个 $i \in [\![1, n]\!]$ 替换为 x_i后得到的集合划分，而 J^X 是将 J 中的每个 $n + i \in [\![n + 1, 2n]\!]$ 替换为 x_i后得到的集合划分。就图示而言，这种串接是通过将 I 的底部点与 J 的顶部点相识别得到的。该乘积赋予 $\mathfrak{C}_n$ 幺半群结构，其单位元为 $(\{i, n + i\} \mid i \in [\![1, n]\!])$，称为划分幺半群 [35, 26]。

通过将每个$f_{i,j}$ 与其块为 $\{i, j, n + i, n + j\}$ 和 $\{k, n + k\}$ 的集合划分相对应，幺半群 P_n 可视为 $\mathfrak{C}_n$ 的子幺半群，其中所有 $k \neq i, j$均如此。参见图2。

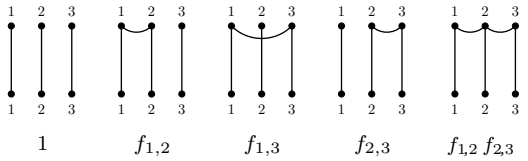


FIGURE 2. P_3 的 5 个元素。

2.3. **对称群与辫群**。

2.3.1. 如 [37], 所示， $[\![1$的对称群 $\mathfrak{S}_n$，由置换构成， $n]\!]$, s_1，其生成元为 $s_1, \dots, s_{n-1}$，满足以下关系：

$$s_i^2 = 1, \qquad s_i s_j s_i = s_j s_j s_i \quad \text{if } |i-j| = 1, \qquad s_i s_j = s_j s_i \quad \text{if } |i-j| > 1. \tag{3}$$

在此，每个 s_i 都对应于初等换位 $(i\ i+1)$。众所周知，通过将每个 s_i 与其块为$\{i$、 $n+i+1\}$、$\{i+1$、 $n+i\}$和 $\{k$、 $n+k\}$（对所有 $k \neq i$、 $i+1$）的集合划分对应起来，可以将 $\mathfrak{S}_n$ 视为 $\mathfrak{C}_n$ 的子幺半群。此外， $\mathfrak{S}_n$ 是划分幺半群 $\mathfrak{C}_n$的单位群。参见图3。

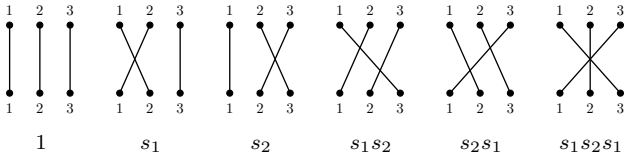


FIGURE 3. $\mathfrak{S}_3$的6个元素。

通过应用 *Tietze* 变换 [43, 第 3], 章中的方法，我们注意到，对称群 $\mathfrak{S}_n$也可以由生成元 $s_{i,}$ $_j$表示，并满足 i、 $j \in [\![1$、 $n]\!]$和 $i < j$，且满足以下关系：

$$s_{i,j}^2 = 1, \qquad s_{i,j}s_{j,k} = s_{j,k}s_{i,k} = s_{i,k}s_{i,j}. \tag{4}$$

在此，每个生成元 $s_{i,\ j}$ 表示交换 i 与 j的换位，定义为

$$s_{i,j} = s_{j-1} \cdots s_{i+1} s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}$$

对所有 $i < j$。由 **(4)** 可推出以下多余关系：

$$s_{i,j}s_{i,k} = s_{j,k}s_{i,j} = s_{i,k}s_{j,k}, \qquad s_{i,j}s_{r,s} = s_{r,s}s_{i,j} \quad \text{if } \{i,j\} \cap \{r,s\} = \varnothing. \tag{5}$$

2.3.2. 通常，我们将由 B_n 个辫组成的辫群 记作 B_n ；也就是说，该群由生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ 表示，并满足辫关系：

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \quad \text{if } |i-j| = 1, \qquad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{if } |i-j| > 1. \tag{6}$$

注意， $\mathfrak{S}_n$ 是 B_n 关于关系 $\sigma_i^2 = 1$ 的商。如 [13], 所示，辫群也可以由以下生成元表示

$$\sigma_{i,j} := \sigma_i \cdots \sigma_{j-2}\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \quad \text{for all} \quad i,j \in [\![1,n]\!] \quad \text{with} \quad i < j, \tag{7}$$

满足 对偶辫关系：

$$\sigma_{i,j}\sigma_{j,k} = \sigma_{j,k}\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k}\sigma_{i,j} \quad \text{if } i < j < k, \tag{8}$$

$$\sigma_{i,j}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,s}\sigma_{i,j} \quad \text{if } i < j < r < s \text{ or } i < r < s < j. \tag{9}$$

n 条辫上的辫幺半群是由 σ_1、.....、σ_{n-1}生成的 B_n 的子幺半群 B_n^+，它也由（6）中的辫子关系给出。

2.4. **分歧幺半群**。给定 $\mathfrak{C}_n$的一个子幺半群 M， M [3, 4] 的分歧幺半群 $\mathcal{R}M$ 定义为 $M \times \mathfrak{C}_n$的子幺半群，由满足 $I \preceq J$的有序对 $(I,\ J)$组成。每个元素$(I,\ J) \in \mathcal{R}M$都可表示为一幅线股图：在 I 的图中， I 的各块之间添加波浪线，这些波浪线起始于 I 的各块，并形成 J的各块。

注意，幺半群 P_n 也可以视为 $\mathcal{R}\mathfrak{C}_n$的子幺半群。事实上， P_n 通过映射 $f_{i,j} \mapsto e_{i,j}$ 对所有 $i < j$ 而言，与 $\mathcal{R}\{1\}$ 同构，其中每个 $e_{i,j}$ 都是分歧集合划分$(1, f_{i,j})$ [4, 命题 2]。见图4。因此，对于任意子幺半群 $M \subseteq \mathfrak{C}_n$， P_n 都是 $\mathcal{R}M$的子幺半群。

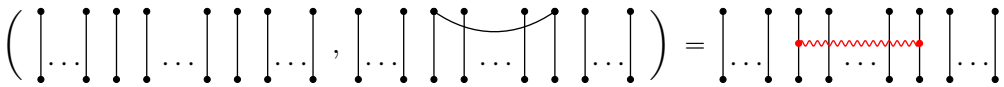


FIGURE 4. 生成元 $(1,f_{i,j}) = e_{i,j}$.

2.4.1. 已知分歧幺半群 $\mathcal{R}\mathfrak{S}_n$ 与所谓的带纽结的对称幺半群 $T\mathfrak{S}_n$ [3, 同构。定理 1]。如 [3, 第5.1]小节所示，$T\mathfrak{S}_n$可由生成元 $s_1, \dots, s_{n-1}$和生成元 $e_1, \dots, e_{n-1}$表示，其中前者满足关系 (3)，后者满足以下关系：

$$e_i^2 = e_i, \qquad e_i e_j = e_j e_i, \tag{10}$$

$$s_i s_j e_i = e_j s_i s_j \quad \text{and} \quad s_i e_j e_i = e_j s_i e_j = e_i e_j s_i \quad \text{若} \ |i-j| = 1, \quad s_i e_j = e_j s_i \quad \text{if } |i-j| \neq 1. \tag{11}$$

注意，(3) 中的关系构成了 s_i 之间的一个封闭关系集；事实上，它们定义了 $T\mathfrak{S}_n$ 的子群——对称群 $\mathfrak{S}_n$ 。类似地，(10) 中的关系构成了一个封闭关系集，并定义了组合幺半群 C_n 作为 $T\mathfrak{S}_n$ 的子幺半群。已知$T\mathfrak{S}_n = P_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ [4, 注记 5], 其中 $\mathfrak{S}_n$ 通过 $s(I)$ 作用于 P_n : $= (s(I_1),\ \dots\dots,\ s(I_k))$。这里，$P_n$ 通过映射 $f_{i,\ j} \mapsto e_{i,\ j}$嵌入在 $T\mathfrak{S}_n$ 中，对所有 $i,\ j \in [\![1,\ n]\!]$ （其中 $i < j$）成立，其中：

$$e_{i,j} = s_i \cdots s_{j-2} e_{j-1} s_{j-2} \cdots s_i = s_{j-1} \cdots s_{i+1} e_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}.$$

事实上，应用 [34, 推论 2], 可知，幺半群 $T\mathfrak{S}_n$ 也可以由生成元 s_1, ..., s_{n-1}（满足 (3)）以及生成元 $e_{i,\ j}$ （其中 $i < j$）表示，并满足以下关系：

$$e_{i,j}^2 = e_{i,j}, \qquad e_{i,j} e_{r,s} = e_{r,s} e_{i,j}, \qquad e_{i,j} e_{i,k} = e_{i,j} e_{j,k} = e_{i,k} e_{j,k}, \tag{12}$$

$$s_i e_{j,k} = e_{s_i(j), s_i(k)} s_i, \quad \text{where} \quad e_{j,i} = e_{i,j}. \tag{13}$$

2.4.2. 带系辫幺半群 [5, 节 3] 是由生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$（满足 (6)）、生成元 $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$以及生成元 $e_1, \dots, e_{n-1}$ （满足 (10)）所呈现的幺半群 TB_n，并满足以下关系：

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, \tag{14}$$

$$\sigma_i e_j = e_j \sigma_i \quad \text{if } |i-j| = 1, \qquad \sigma_i \sigma_j^{\pm 1} e_i = e_j \sigma_i \sigma_j^{\pm 1} \quad \text{if } |i-j| = 1, \tag{15}$$

$$\sigma_i e_j e_i = e_j \sigma_i e_j = e_i e_j \sigma_i \quad \text{if } |i-j| = 1. \tag{16}$$

注意， $T\mathfrak{S}_n$是 TB_n对关系 $\sigma_i^2 = 1$取商所得。已知 $TB_n = P_n \rtimes B_n$[8, 定理 3]。这意味着 TB_n 中的每个元素都可以唯一地写成乘积 $e\beta$，其中 $e \in P_n$ 且 $\beta \in B_n$。在此背景下， P_n 通过映射$f_{i,\ j} \mapsto e_{i,j}$嵌入 TB_n 中，对所有 $i, j \in [\![1, n]\!]$均成立，其中

$$e_{i,j} = \sigma_i \cdots \sigma_{j-2} e_{j-1} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} = \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} e_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}. \tag{17}$$

更多细节请参见 [8, 第 3.2] 小节。事实上，应用 [34, 推论 2], 可知，幺半群 TB_n也可以由生成元 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$（满足 (6)）、生成元 $\sigma_1^{-1},\dots,\sigma_{n-1}^{-1}$（满足 (14)）以及生成元$e_{i,j}$（其中 $i<j$ 满足 (12)）表示，并受以下关系约束：

$$\sigma_i e_{j,k} = e_{s_i(j),s_i(k)}\sigma_i, \quad \text{where} \quad e_{j,i} = e_{i,j}. \tag{18}$$

2.4.3. 布劳尔幺半群 $\mathfrak{Br}_n$ 是由满足块恰有两个元素 [14]的集合划分组成的 $\mathfrak{C}_n$ 的子幺半群。根据 [31, 定理 3.1], ，幺半群 $\mathfrak{Br}_n$ 有一个由生成元 $s_1,\dots,s_{n-1}$, $t_1,\dots,t_{n-1}$给出的表示，它们满足 (3) 以及以下关系：

$$t_i^2 = t_i, \qquad t_it_jt_i = t_i \quad \text{if } |i-j|=1, \qquad t_it_j = t_jt_i \quad \text{if } |i-j|>1, \tag{19}$$

$$s_it_i = t_i, \qquad s_jt_i = t_is_j \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \qquad s_it_jt_i = s_jt_i \quad \text{and} \quad t_it_js_i = t_is_j \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{20}$$

在此语境中，每个 t_i都对应于这样一个集合划分：其块为 $\{i,i+1\}$, $\{n+i,n+i+1\}$和 $\{k,n+k\}$，其中对所有 $k\neq i,i+1$均成立。参见图 5。

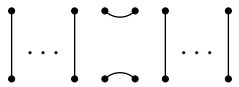


FIGURE 5. 生成元 t_i。

由 $t_1,\dots,t_{n-1}$生成且满足 (19) 中关系的 $\mathfrak{Br}_n$的子幺半群，是著名的*Jones* 幺半群 $\mathfrak{J}_n$ [46, 25]。

2.4.4. 定理 42] 表明，分歧幺半群 $\mathcal{R}\mathfrak{Br}_n$ 由生成元 $s_1,\dots,s_{n-1}$, $e_1,\dots,e_{n-1}$, $t_1,\dots,t_{n-1}$和 $d_1,\dots,d_{n-1}$表示，并满足 (3)、(19)–(20)、(10)–(11) 以及以下关系：

$$d_i^2 = d_i, \qquad d_id_j = d_jd_i \quad \text{if } |i-j|>1, \tag{21}$$

$$e_id_i = d_i, \qquad e_id_j = d_je_i, \qquad e_jd_ie_j = d_id_jd_i \quad \text{if } |i-j|=1, \tag{22}$$

$$s_id_i = d_i, \qquad s_id_j = d_js_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \qquad s_is_jd_i = d_js_is_j \quad \text{if } |i-j|=1, \tag{23}$$

$$t_ie_i = t_i, \qquad t_ie_j = e_jt_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \qquad t_id_i = t_i, \qquad t_id_j = d_jt_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \tag{24}$$

$$e_jt_ie_j = e_jd_i \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{25}$$

这里，每个 d_i 都对应于分歧集合划分 (t_i,f_i)。参见图 6。

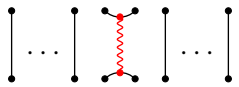


FIGURE 6. 生成元 d_i。

注 2.2. 分歧幺半群 $\mathcal{R}\mathfrak{J}_n$ 的表示尚不为人所知，寻找这样的表示仍是一个开放问题。

2.5. **扭曲幺半群代数与分拆代数**。

2.5.1. 从幺半群 M到 $\mathbb{C}$的扭曲是一个映射 $\tau\colon M\times M\to\mathbb{C}$，满足 $\tau(x、\ y)\tau(xy、\ z)=\tau(x、\ yz)\tau(y、\ z)$，对所有 $x、\ y、\ z$均成立。M的扭曲幺半群代数记作 $\mathbb{C}^\tau[M]$，它是由 M张成的 $\mathbb{C}$向量空间，并配备乘积 $x\cdot y:=\tau(x、\ y)xy$，对所有 $x、\ y\in M$ [47, 均成立。参见第 3]节。如 [47], 中所述，若 $N\subset M$是子幺半群，则将 τ限制在 $N\times N$上，便得到从 N到$\mathbb{C}$的扭曲；关于此扭曲的 N 的扭曲幺半群代数，恰好是由 N张成的 $\mathbb{C}^\tau[M]$的子代数，我们将其简记为 $\mathbb{C}^\tau[N]$。

ˆ定理 2.3 ([17, 定理 44]). 假设 $M=\langle X\mid R\rangle$。则 $\mathbb{C}^\tau[M]=\langle X\mid R\rangle$，其中ˆ$R=\{(\tau([v])u, \tau([u])v)\mid(u, v)\in R\}$。

2.5.2. 设 $\delta\in\mathbb{C}^\times$。分拆代数 $\mathfrak{C}_n(\delta)$ [26, 35] 是关于扭曲 τ_α(I 的幺半群 $\mathfrak{C}_n$ 的扭曲幺半群代数, $J):=\delta^{\alpha(I,J)}$，其中 $\alpha(I,J)$是 $I_X\vee J^X$ 中包含于 X [47, 第 7] 节的块数。

2.5.3. *Temperley–Lieb* 代数 $TL_n(\delta)$ [46, 25] 定义为与 Jones 幺半群 $\mathfrak{J}_n$ 相关联、关于 τ_α 的扭曲幺半群代数。根据定理 2.3, $TL_n(\delta)$ 是由生成元 $t_1,\dots,t_{n-1}$给出的 $\mathfrak{C}_n(\delta)$ 的子代数，这些生成元称为缠结，并满足以下关系:

$$t_i^2=\delta t_i,\qquad t_it_jt_i=t_i\quad\text{if } |i-j|=1,\qquad t_it_j=t_jt_i\quad\text{if } |i-j|>1. \tag{26}$$

回想一下，每个 t_i 都对应于图 5 所示的集合划分。

2.6. **Iwahori–Hecke 代数与辫子与纽结代数**。令 $u,\ v$ 为 $\mathbb{C}^\times$.中的两个不定元

2.6.1. *Iwahori–Hecke* 代数 $\mathcal{H}_n(u)$ [24] 定义为群代数 $\mathbb{C}[B_n]$对由以下元素生成的双边理想取商所得的代数:

$$\sigma_i^2-u-(u-1)\sigma_i. \tag{27}$$

若令 g_i 为生成元 σ_i 在该商下的像，则代数 $\mathcal{H}_n(u)$ 可由生成元 $g_1,\dots,g_{n-1}$及以下关系表示:

$$g_ig_jg_i=g_jg_ig_j\quad\text{for } |i-j|=1,\quad g_ig_j=g_jg_i\quad\text{for } |i-j|>1, \tag{28}$$

$$g_i^2=u+(u-1)g_i \tag{29}$$

已知, $TL_n(\delta)$ 连同 $\delta^2=(u+1)^2u^{-1}$ 可实现为 $\mathcal{H}_n(u)$的一个商。事实上，通过定义 $h_i=(u+1)^{-1}(g_i+1)$，代数 $\mathcal{H}_n(u)$ 可由生成元 $h_1,\dots,h_{n-1}$及以下关系表示:

$$h_i^2=h_i,\quad h_ih_j=h_jh_i\quad\text{for } |i-j|>1, \tag{30}$$

$$h_ih_jh_i-\delta^{-1}h_i=h_jh_ih_j-\delta^{-1}h_j\quad\text{for } |i-j|=1. \tag{31}$$

对由元素 $h_ih_jh_i-\delta^{-1}h_i$ 生成的双边理想取商，并定义 $t_i=\delta h_i$，即可得到 Temperley–Lieb 代数 $TL_n(\delta)$。

2.6.2. 辫子与纽结代数 $\mathcal{E}_n(u,\ v)$ [7, 第 1], 节，或简称*bt*代数，定义为幺半群代数 $\mathbb{C}[TB_n]$ 关于由下列元素生成的双边理想的商:

$$\sigma_i^2-1-(u-1)e_i-(v-1)e_i\sigma_i. \tag{32}$$

因此，若将生成元 σ_i 在此商映射下的像记为 g_i ，则代数 $\mathcal{E}_n(u,\ v)$ 有如下生成元表示：生成元 g_1，…， g_{n-1} 满足 (28)，生成元 e_1，…， e_{n-1} 满足 (10)，并受以下关系约束：

$$g_i e_i = e_i g_i, \quad g_i e_j = e_j g_i \quad \text{for } |i-j|>1, \tag{33}$$

$$g_i g_j e_i = e_j g_i g_j \quad \text{and} \quad g_i e_j e_i = e_j g_i e_j = e_i e_j g_i, \quad \text{for } |i-j|=1, \tag{34}$$

$$g_i^2 = 1 + (u-1)e_i + (v-1)e_i g_i. \tag{35}$$

我们用 $\mathcal{E}_n(u)$ 表示代数 $\mathcal{E}_n(u,\ u)$，并用 $\mathcal{E}'_n(v)$ 表示代数 $\mathcal{E}_n(u,\ v)$，其中 $v^2=u$。注意，Iwahori–Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(u)$ 是代数 $\mathcal{E}_n(u)$ 关于由所有 e_i-1 生成的双边理想的商，其中 $i\in[\![1,\ n-1]\!]$。

3. Party monoids and algebras

这里，我们回顾 party 幺半群和 party 代数的定义。随后，我们运用 Wilcox [47] 的一项结果，为 party 代数的胞腔性给出新的证明。这种方法将 party 代数视为扭曲幺半群代数，并对其极大子群进行分析。最后，我们介绍两种新的结构：带系辫幺半群的扭曲幺半群代数，以及类 Party–Brauer幺半群。

3.1. **party 幺半群与 party 代数**。

3.1.1. ***party*** 幺半群 [1] $\mathcal{P}_n$ [28, 定理 1.1] 是由生成元$s_1,\dots,s_{n-1}$和生成元 $f_1,\dots,f_{n-1}$生成的 $\mathfrak{C}_n$ 的子幺半群；前者满足关系 (3)，后者满足关系 (2)，并且两者都满足以下关系：

$$s_i f_i = f_i s_i = f_i, \quad s_i f_j = f_j s_i \quad \text{if } |i-j|>1, \tag{36}$$

$$s_i s_j f_i = f_j s_i s_j \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{37}$$

与 $T\mathfrak{S}_n$ 一样，party 幺半群 $\mathcal{P}_n$ 包含一个对称群的副本，它是由 $s_1,\dots,s_{n-1}$生成的子幺半群。此外，已知 $\mathcal{P}_n = P_n\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n P_n$ [1, 第 4.2] [40,小节第 2.5], 节，其中 P_n 与 $\mathcal{P}_n$的幂等元子幺半群相同。在此背景下，P_n 被视为由 $f_{i,j} := s_{i+1,j} f_i s_{i+1,j}$ 生成的子幺半群，且 $i<j$。更准确地说，对于每个 $g\in\mathcal{P}_n$，都存在唯一的集合划分 $f,f'\in P_n$，使得 $g=fs=sf'$，其中某个 $s\in\mathfrak{S}_n$[40, 第 2.5.3]小节。 $\mathcal{P}_n$ 的基数对应数列 [38, A023998]。例如，当 $n=2,3,4$ 和 5 时，它分别等于 3、16、131 和 1496。更多细节请参见 [40, 第 2.3]节。参见图7和图8。

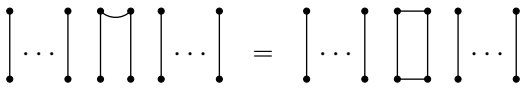


Figure 7. f_i 的两种等价图示表示。

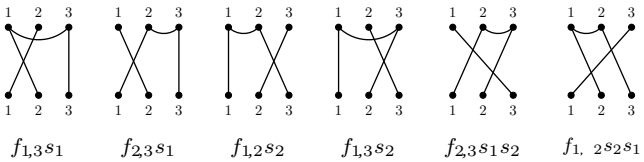


Figure 8. 这些元素与图3和图2中的元素共同构成 $\mathcal{P}_3$.

[1]也称为 *monoid of uniform block permutations* [1, 第 2 节。2]。

命题 3.1。 $\mathcal{P}_n$ 是商 $T\mathfrak{S}_n/R,$，其中 R 是由关系$s_ie_i = e_i$ 生成的同余，对所有 i均成立。

证明。 注意，对于所有满足 $|i-j|=1$的 $i,\ j$， $s_if_if_j = f_if_js_i = f_js_if_j$在 $\mathcal{P}_n$ 中成立。事实上，应用 (2) 和 (36)，对于每个 $|i-j|=1$，我们得到

$$s_if_jf_i = s_if_if_j = f_if_j = f_jf_i = f_jf_is_i = f_if_js_i.$$

现在，根据 (37) 和上面的等式，我们得到

$$f_js_if_j = f_js_jf_is_js_i = f_jf_is_js_i = f_if_js_js_i = f_if_js_i = f_if_j.$$

这表明 $\mathcal{P}_n$ 是 $T\mathfrak{S}_n/R$。 □

通过简单的 Tietze 变换， [43, 第 3], 章，我们还可以用生成元 $s_{i,\ j}$（满足 $i,\ j \in [\![1,\ n-1]\!]$ 和 $i<j$, 并满足关系 (4)）以及生成元 $f_{i,\ j}$（满足 $i<j$，并满足关系 (1)）来表示 party 幺半群$\mathcal{P}_n$，其生成元满足以下关系：

$$s_{i,j}f_{h,k} = f_{s_{i,j}(h),s_{i,j}(k)}s_{i,j}, \quad \text{where} \quad f_{j,i} = f_{i,j}, \tag{38}$$

$$f_{i,j}s_{i,j} = f_{i,j}. \tag{39}$$

由于 $T\mathfrak{S}_n = P_n \rtimes \mathfrak{S}_n$， $T\mathfrak{S}_n$ 的每个元素都可以唯一地写成乘积 es，其中$e \in P_n$ 且 $s \in \mathfrak{S}_n$。然而，由于对于所有 $i \in [\![1,\ n-1]\!]$， $f_i = f_is_i$，所以这对于 $\mathcal{P}_n$ 并不成立，即使 $\mathcal{P}_n = P_n\mathfrak{S}_n$。尽管如此，我们仍希望为 $T\mathfrak{S}_n$ 得到类似于上文所述的标准形。

回忆一下，对于 $s, s' \in \mathfrak{S}_n$，当 $s' = st$ 且存在某个 $t \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $\ell(s') = \ell(s)+\ell(t)$ 时，我们称 s 是 s' 的 左因子 。类似地，对于 $f, f' \in P_n$，如果 $f' = f'f$，我们称 f 是 f' 的 因子 。若不存在 s 这样的左因子，使其是 s' 的左因子且满足 $fs = f$，则称一对 $(f, s') \in P_n \times \mathfrak{S}_n$ 互素 。

命题3.2 (标准形). 对于每个 $g \in \mathcal{P}_n$，都存在唯一的互素对 $(f, s') \in P_n \times \mathfrak{S}_n$，使得 $fs' = g$。

证明。 由命题 3.1 和 (39)，存在唯一的 $f \in P_n$，以及一个置换$s' \in \mathfrak{S}_n$，使得 $fs' = g$，其中 $(f,\ s')$ 互素。现在，假设存在 $s \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $g = fs$，且 (f, s) 互素，那么 $fs = fs'$。因此，我们得到 $f = fs's^{-1}$，于是，要么 $s's^{-1} = 1$，要么 $s's^{-1} = s_{i_1,j_1}\cdots s_{i_k,j_k}$，其中 $f_{i_1,j_1}, \ldots, f_{i_k,j_k}$ 都是 f 的因子。这意味着 $s' = s_{i_1,j_1}\cdots s_{i_k,j_k}s$，这与 (f, s) 互素矛盾。因此 $s = s'$。□

注 3.3. 回顾一下，置换 s 的长度等于其逆序的数量。因此，若 $(i,\ j)$ 是 s的一个逆序，则 $\ell(s_{i,\ j}s) < \ell(s)$。详情见 [33, 第5.8] 小节。因此，$(i,\ j)$ 是 s 的一个逆序，当且仅当 $s_{i,\ j}$是 s的真左因子。若 $g = fs \in \mathcal{P}_n$对于某个$f \in P_n$成立，则可反复应用 (39) 得到 g 的标准形。见图 9。

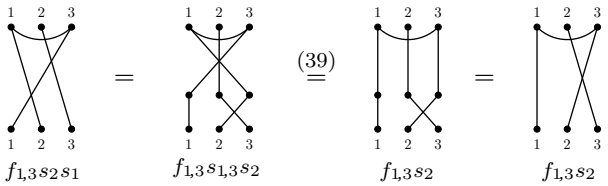


FIGURE 9. f_1的标准形$_{,3}s_2s_1$。

3.1.2. 给定 $\delta \in \mathbb{C}^\times$，*party* 代数 $\mathcal{P}_n(\delta)$ [28] 是由生成元$S_1, \dots, S_{n-1}$和 $F_1, \dots, F_{n-1}$生成、满足以下关系的 $\mathbb{C}$-代数:

$$S_i^2 = 1, \qquad S_iS_jS_i = S_jS_jS_i \quad \text{if } |i-j| = 1, \qquad S_iS_j = S_jS_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \tag{40}$$

$$F_i^2 = \delta F_i, \qquad F_iF_j = F_jF_i, \tag{41}$$

$$S_iF_i = F_iS_i = F_i, \qquad S_iF_j = F_jS_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \tag{42}$$

$$S_iS_jF_i = F_jS_iS_j \quad \text{if } |i-j| = 1. \tag{43}$$

如 [28, 第 1]节 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 所述， $\mathcal{P}_n(\delta)$ 可以视为由 party 幺半群张成的代数，其中乘积用集合划分来描述。为明确说明这一点，我们先引入一些术语。沿用 [10, 第 3], 节的定义，有限子集 ˆ $B = \{q_1 < \cdots < q_k\} \subseteq [n]$ 的弧分解 是由弧 $\{q_i、\ q_{i+1}\}$（对所有 $i \in [k-1]$）组成的集合 B。ˆ ˆ ˆ ˆ 对于集合划分 $I = (I_1、\ \ldots\ldots、\ I_k) \in P_n$，我们定义 $I = I_1 \cup \cdots \cup I_k$，并将 I中的元素称为 I的ˆ标准弧 。注意， $|B| = |B| - 1$，因此

$$|\hat{I}| = \sum_{B \in I} \hat{B} = \sum_{B \in I} (|B| - 1) = \sum_{B \in I} |B| - |I| = n - |I|.$$

此外，若 $i < j$ ，则一对 $\{i,\ j\}$ 是集合划分 I 的标准弧，当且仅当 $e_{i,\ j}$ 是命题 2.1中给出的 I 的标准形中出现的生成元。

3.1.3. 现在，设 $g, g' \in \mathcal{P}_n$ 是 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 的两个基元素。如子小节 3.1.1 中所述，存在置换 s, $s' \in \mathfrak{S}_n$ 和唯一的集合划分 $f, f' \in P_n$，使得 $g = sf$ 和 $g' = f's'$。接着，如 [28, 第 1], 节所述，它们在 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 中的乘积 gg' 为 $\delta^{\beta(f,f')}gg'$，其中 ˆ ˆ$\beta(f, f')$ 表示 f 和 f' 的公共标准弧数量，即 $\beta(f, f') = |f \cap f'|$。等价地， $\beta(f, f')$ 是 f 和 f' 的标准形中出现的公共生成元数量。注意，对所有 $f, f' \in P_n$，都有 $\beta(f, f') = \beta(f', f)$。

由于 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 中的乘法是结合的，映射τ_β: $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{C}$，定义为 $\tau_\beta(g,\ g) =_{\delta^{\beta(f,\ f')}}$，给出了从 $\mathcal{P}_n$ 到 $\mathbb{C}$的一个扭曲。因此，party 代数恰好是关于τ_β的 party 幺半群的扭曲幺半群代数。应用定理 2.3，并利用对所有 $i \in [n-1]$都有 $\beta(f_i,\ f_i) = 1$ 这一事实，我们便可恢复上文用 party 幺半群的生成元给出的 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 的表示。

注 3.4。 注意，对于任意置换 s, $s' \in \mathfrak{S}_n \subset \mathcal{P}_n(\delta)$，其集合划分分量都化简为恒等划分，而恒等划分仅由单元素块构成。因此，它们没有标准弧，从而有 $\beta(1,\ 1) = 0$。因此，该扭曲限制为 $\tau_\beta(s,\ s') = 1$，这意味着由 $\mathfrak{S}_n$ 张成的 $\mathcal{P}_n(\delta)$的子代数恰好是群代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$。

3.2. **极大子群与细胞结构**。 本小节的主要目标是证明 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 是胞腔的（定理3.11）。为此，我们首先回顾 party 幺半群 $\mathcal{P}_n$ [40, 第 3.1] 小节的极大子群结构，并说明如何将这些结果推广，以确定 $T\mathfrak{S}_n$的极大子群。最后，借助这一刻画，并运用 Wilcox 为扭曲幺半群代数 [47, 第 5], 节构建的框架，我们证明 party 代数 $\mathcal{P}_n(\delta)$具有胞腔性。

回顾一下，逆幺半群 是一个幺半群 M ，其中对每个 $g \in M$，都存在唯一的元素 $g^* \in M$，称为 g的逆映射 ，满足

$$gg^*g = g \quad \text{and} \quad g^*gg^* = g^*.$$

如果 e是 M中的幂等元，那么子半群 eMe构成一个以 e为单位元的幺半群。单位群 G_e: $= (eMe)^\times$ 称为 M 在 e处的极大子群 。如 [44, 推论所示

3.6], 当 M 是逆幺半群时，有

$$G_e = \{g \in M \mid gg^* = e = g^*g\}.$$

3.2.1. ***party*** **幺半群的极大子群。** [1, 小节 4.2]和 [40, 命题 2.8(1)] 表明， $\mathcal{P}_n$ 是一个逆幺半群。具体而言，若 $g = fs = sf' \in \mathcal{P}_n$，则其逆映射由 $g^* = s^{-1}f = f's^{-1}$ 给出。映射 $g \mapsto g^*$ 在 $\mathcal{P}_n$ 上定义了一个反对合；事实上，对于 $\mathcal{P}_n$ 中任意的$g = fs$和 $h = f's'$，我们有 $(gh)^* = (fs(f')ss')^* = s'^{-1}s^{-1}fs(f') = s'^{-1}f's^{-1}f = h^*g^*$。这与 [47, 节 7], 中的反对合一致，因此我们有 $g^* = (\{k^* \mid k \in B\} \mid B \in g)$，其中，当 $k \leqslant n$ 时 $k^* := k + n$，当 $k > n$ 时 $k^* := k - n$，对所有 $k \in [\![1,\ 2n]\!]$均成立。见图10。

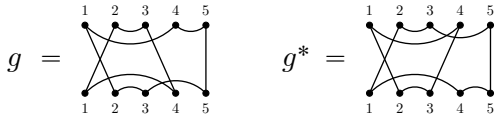


FIGURE 10. $\mathcal{P}_5$ 中的一个元素及其逆映射。

给定互不相交的子集 $A,\ B \subset [\![1,\ n]\!]$，满足 $|A| = |B|$，我们用 $s_{A,\ B}$ 表示 $\mathfrak{S}_n$ 中唯一一个在 A 和 B上均保持顺序且满足以下条件的置换

$$s_{A,B}(A) = B, \quad \text{and} \quad s_{A,B}(x) = x \quad \text{for all} \quad x \notin A \cup B. \tag{44}$$

注意，根据定义，$s_{A,\ B}(B) = A$。见图11。

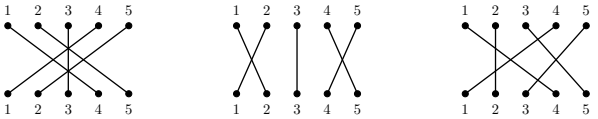


FIGURE 11. 三个置换 $s_{A,\ B} \in \mathfrak{S}_5$，满足 $|A| = |B| = 2$。

回想一下， n 的一个分拆是任意一个按非递增顺序排列的正整数有限数列，且这些数的和为 n。 n的分拆集合记作 Par_n。

对于一个集合划分 $I \in P_n$，定义 $\|I\|$ 为按非递增顺序排列的块大小分拆，定义 $\{\!\{I\}\!\}$ 为不同块大小组成的集合。对每个 $m \in \{\!\{I\}\!\}$，令 $I_{[m]} = \{B \in I \mid |B| = m\}$，并定义 $\mathfrak{S}_{[m]}$ 为由满足 $\min(A) < \min(B)$ 的置换 $s_{A,\ B}$ （其中 $A,\ B \in I_{[m]}$ ）生成的 $\mathfrak{S}_n$ 的子群。

注释 3.5. 两个集合划分 $I,\ J \in P_n$ 在 $\mathfrak{S}_n$(小节 2.4.1) 的作用下属于同一轨道，当且仅当 $\|I\| = \|J\|$。

根据 [40, 命题 3.2(1) 和推论 3.3], ， $\mathcal{P}_n$ 在幂等元 $f \in P_n$ 处的极大子群是子群 $f\mathfrak{S}_{[f]} \simeq \mathfrak{S}_{[f]}$，其中

$$\mathfrak{S}_{[f]} := \mathfrak{S}_{[m_1]} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{[m_q]} \simeq \mathfrak{S}_{|I_{[m_1]}|} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{|I_{[m_q]}|}, \quad \text{with} \quad \{\!\{f\}\!\} = \{m_1 < \cdots < m_q\}. \tag{45}$$

此外，根据 [40,推论 3.4],，只要 $\|f\| = \|f'\|$，子群 $\mathfrak{S}_{[f]}$ 和 $\mathfrak{S}_{[f']}$ 就同构；也就是说，存在一个置换 $s \in \mathfrak{S}_n$，使得 $\mathfrak{S}_{[f]}s = s\mathfrak{S}_{[f']}$。

例如，如果 $f = (\{1, 5\}, \{2, 6, 11\}, \{3, 4\}, \{7, 9, 12\}, \{8, 10\}) \in P_{12}$，那么 $\{\!\{I\}\!\} = \{2, 3\}$。因此 $f_{[2]} = \{\{1, 5\}, \{3, 4\}, \{8, 10\}\}$ 和 $f_{[3]} = \{\{2, 6, 11\}, \{7, 9, 12\}\}$，所以 $\mathfrak{S}_{[f]} \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$。

3.2.2. 带纽结的对称幺半群的极大子群。 文献 [4, 推论 1] 证明了 $T\mathfrak{S}_n$是一个逆幺半群。具体而言，若 $g = es$ 对某个 $(e,\ s) \in P_n \times \mathfrak{S}_n$成立，则其逆映射由 $g^* = s^{-1}e$给出。参见图 12。此结果与命题 3.1 及 [44, 推论 3.5],共同提供了另一种证明，说明 $\mathcal{P}_n$ 是一个逆幺半群。

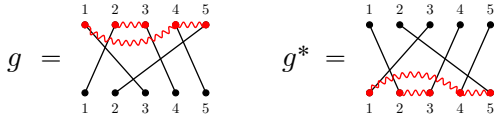


FIGURE 12. $T\mathfrak{S}_5$ 中的一个元素及其逆映射。

引理 3.6。 对于每个 $e \in P_n \subset T\mathfrak{S}_n$，都有

$$G_e = \{es \mid s \in \mathfrak{S}_n \ \textit{and}\ se = es\} = eC_{\mathfrak{S}_n}(e),$$

其中，$C_{\mathfrak{S}_n}(e)$ 是 $T\mathfrak{S}_n$的子群 $\mathfrak{S}_n$ 中 e 的中心化子。

证明。设 $g \in T\mathfrak{S}_n$满足 $gg^* = e = g^*g$，并将 $g = e's$写作某个 $(e',\ s) \in P_n \times \mathfrak{S}_n$。于是$g^* = s^{-1}e'$，由此可得 $e = gg^* = e'ss^{-1}e' = e'$。此外，$e = g^*g = s^{-1}ees = s^{-1}es$，因此$se = es$。所以 $G_e = eC_{\mathfrak{S}_n}(e)$。
□

根据引理 3.6，对于任意 $e \in P_n$，e 处的极大子群为 $G_e = \{es \mid s \in \mathfrak{S}_n,\ ses^{-1} = e\}$，也就是说，$G_e$ 由形如 es的元素构成，其中 s 属于 $\mathfrak{S}_n$对 e的共轭作用下的稳定子。此作用将 $T\mathfrak{S}_n$ 表示为半直积 $P_n \rtimes \mathfrak{S}_n$。

对于一个子集 $X \subseteq [\![1,\ n]\!]$，我们用 $\mathfrak{S}_X$ 表示由对换$s_{i,\ j}$ 生成的 $\mathfrak{S}_n$ 的子群，其中 $i,\ j \in X$ 且 $i < j$。注意 $\mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_{|X|}$。更一般地，给定一个集合划分$I = (I_1,\ \ldots\ldots,\ I_k) \in P_n$，定义子群

$$\mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_{I_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{I_k} \simeq \mathfrak{S}_{|I_1|} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{|I_k|}.$$

式 (45) 中的子群 $\mathfrak{S}_{[I]}$ 按如下方式自然地作用于子群 $\mathfrak{S}_I$：

$$s \cdot s_{i,j} = s_{s(i),s(j)} \quad \text{for all} \quad s \in \mathfrak{S}_{[I]}.$$

更准确地，令 $A,\ B,\ X \in I$，其中 $|A| = |B|$ 且 $\min(A) < \min(B)$，并令 $g\colon A \to B$为 A 与 B 之间唯一的保序双射。则对于任意的 $i,\ j \in X$，其中 $i < j$，

$$s_{A,B} \cdot s_{i,j} = \begin{cases} s_{g(i),g(j)} & \text{if } X = A \\ s_{g^{-1}(i),g^{-1}(j)} & \text{if } X = B \\ s_{i,j} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，$s_{A,\ B}$ 在 A 上的限制为 g，而其在 B 上的限制为 g^{-1}。见图 13。

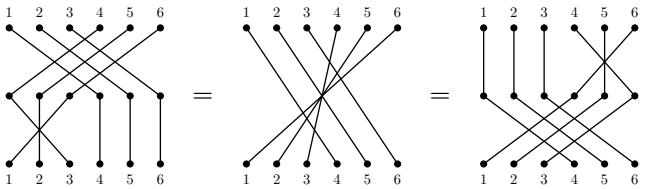


FIGURE 13. $s_{123|456} \cdot s_{1,\ 3} = s_{4,\ 6} \cdot s_{123|456}$.

命题 3.7. $T\mathfrak{S}_n$ 在幂等元 $e \in P_n$ 处的极大子群为 $e(\mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]})$。

证明。 根据定义，群 $\mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]}$ 由两类元素生成。第一类是换位 $s_{i,j}$ ，其中 i, j 属于 e 的同一块，且满足 $i < j$；这些换位与 e可交换。第二类是元素 $s_{A,B}$ ，它们对应于每一对块 $A, B \in I$；根据定义，这些元素稳定 e的各块，即 $s_{A,B}e = es_{A,B}$。因此，由引理 3.6 可得包含关系 $e(\mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]}) \subset G_e$。反过来，在共轭作用下，集合划分 e 被一个置换稳定，当且仅当该置换要么在各块内部作用，要么整体置换各块，也就是说，该置换属于$\mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]}$。因此 $G_e = e(\mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]})$。□

命题 3.7 与引理 3.6 表明，对于任意 $e \in P_n$，我们有 $C_{\mathfrak{S}_n}(e) = \mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]}$和 $G_e \simeq \mathfrak{S}_e \rtimes \mathfrak{S}_{[e]}$。例如，如子小节3.2.1所示，如果 $e = (\{1、 5\}、 \{2、 6、 11\}、 \{3、 4\}、\{7、 9、 12\}、 \{8、 10\})$，那么 $\mathfrak{S}_{[e]} \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$。因此 $G_e \simeq (\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2) \rtimes (\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2)$。特别地，如果 $a_1、 a_2、 a_3 \in \mathfrak{S}_2$和 $b_1、 b_2 \in \mathfrak{S}_3$，那么 $(s_2s_1、 s_1)(a_1、 b_1、 a_2、 b_2、 a_3) = (a_3、 b_2、 a_1、 b_1、 a_2)(s_2s_1、 s_1)$。

3.2.3. *party* 代数的细胞性。party 代数的胞腔性最初由 [30]确立。然而，我们在此利用第 3.1.3 小小节中所述的 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 作为扭曲幺半群代数的结构，并结合对 $\mathcal{P}_n$的极大子群的刻画，给出一种替代且精简的证明。

回顾一下，对于 $g = fs$和 $g' = f's'$， $\tau_\beta(g, g') = \delta^{\beta(f, f')}$，其中 $\beta(f, f')$表示公共标准弧的数量。我们的方法基于 Wilcox [47, 定理5], 所建立的框架：他证明，若扭曲取可逆值，则扭曲幺半群代数在满足五个条件时具有胞腔性；他将这五个条件称为假设 1–5。然而，根据 [47, 推论 6],，假设 4 可以省略。

现在我们来考察假设1和假设2。这两个假设要求幺半群配备一个反对合，并且扭曲与该反对合相容。为此，回顾子小节3.2.1中的内容：幺半群 $\mathcal{P}_n$ 可以配备反对合 $*: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ ，其定义为对所有 $s \in \mathfrak{S}_n$ 和 $f \in P_n$， $(fs)^* = s^{-1}f$。以下引理验证了这种相容性。

引理3.8。 对每个 $g、 h \in \mathcal{P}_n$，都有 $\tau_\beta(g、 h) = \tau_\beta(h^*、 g^*)$。

证明。 设 $g = se$和 $h = ft$满足 $s, t \in \mathfrak{S}_n$和 $e, f \in P_n$。于是，乘积 $h^*g^* = t^{-1}fes^{-1}$满足 $\tau_\beta(h^*, g^*) = \beta(f, e)$。由于 $\beta(f, e) = \beta(e, f)$，我们得出 $\tau_\beta(h^*, g^*) = \beta(e, f) = \tau_\beta(g, h)$。□

继续之前，我们需要回顾一些关于 Green关系的事实。幺半群 M 中的两个元素 g, h 称为 $\mathcal{L}$-等价（分别称为 $\mathcal{R}$-等价、 $\mathcal{J}$-等价），记作 $g \equiv_\mathcal{L} h$（分别记作 $g \equiv_\mathcal{R} h$、 $g \equiv_\mathcal{J} h$），当且仅当 $Mg = Mh$（分别当且仅当 $gM = hM$、 $MgM = MhM$）。相对于这些关系的等价类称为 $\mathcal{L}$-类、 $\mathcal{R}$-类和 $\mathcal{J}$-类；对于 $g \in M$，相应的等价类分别记作 L_g、 R_g 和 J_g。由并集 $\equiv_\mathcal{L} \cup \equiv_\mathcal{R}$ 生成的等价关系记作 $\equiv_\mathcal{D}$，其等价类称为 $\mathcal{D}$-类，已知它们是 $\mathcal{L}$-类的并集，也是 $\mathcal{R}$-类的并集 [32,第 2 节1]。

由于 $\mathcal{P}_n$ 是有限逆幺半群，因此可以进行若干结构上的简化。首先，关系$\equiv_\mathcal{D}$ 和 $\equiv_\mathcal{J}$ 重合 [32, 命题 2.1.4]。此外， $\mathcal{P}_n$ 中每个 $\mathcal{L}$-类和每个 $\mathcal{R}$-类都包含唯一的幂等元 [32, 定理 5.1.1], ，因此每个 $\mathcal{D}$-类至少包含一个幂等元 [32, 命题 2.3.2]。

对于 $g = fs \in \mathcal{P}_n$、 $f \in P_n$ 和 $s \in \mathfrak{S}_n$，我们定义 $\|g\| = \|f\|$。 $\mathcal{P}_n$ 的 $\mathcal{J}$-类由此值完全刻画。

命题 3.9 ([40, 命题 3.5，以及命题 3.9])。 $g、 h \in \mathcal{P}_n$ 属于同一个 $\mathcal{J}$-类，当且仅当 $\|g\| = \|h\|$。此外，$\mathcal{P}_n$ 的 $\mathcal{J}$-类与

n 的分拆构成双射；具体而言，对于每个 $\lambda \in$ 分拆$_n$，对应的 $\mathcal{J}$-类为 $J_\lambda := \{g \in \mathcal{P}_n \mid \|g\| = \lambda\}$。此外，$\mathcal{P}_n$ 的 $\mathcal{L}$-类与 $[\![1, n]\!]$ 的集合划分构成双射，其中对于每个 $f \in P_n$，对应的 $\mathcal{L}$-类为 $L_f = \{sf \mid s \in \mathfrak{S}_n\}$。

如果集合划分的每个块都是区间 $[\![a,$ 则称该集合划分为凸的 $b]\!]$。对于任意 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathrm{Par}_n$，我们用 λ 表示满足以下条件的唯一凸集合划分 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in P_n$：对所有 $i \in [\![1, k]\!]$ 都有 $|\lambda_i| = \lambda_i$。根据构造，$\|\lambda\| = \lambda$，因此 $J_{\bar{\lambda}} = J_\lambda$。由此，$\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Par}_n\}$ 构成了 $\mathcal{P}_n$的 $\mathcal{J}$-等价类的一组幂等代表元。

对于假设 3，我们要求每个 $\mathcal{D}$-等价类都包含一个被反-对合固定的幂等元。根据命题 3.9，这一条件很容易满足，因为对于所有 $\lambda \in \mathrm{Par}_n$，都有 $\lambda^* = \lambda$。注意，由于 $\mathcal{P}_n$ 配备了反对合 $*$，一个 $\mathcal{L}$-等价类的像是一个 $\mathcal{R}$-等价类；具体而言，对于任意 $g \in \mathcal{P}_n$，都有 $L_g^* = R_{g^*}$。对于我们的典范代表元，当 $\lambda \in \mathrm{Par}_n$ 时，凸集合划分 λ 满足 $\lambda^* = \lambda$，这意味着 $L_{\bar{\lambda}}^* = R_{\bar{\lambda}}$。因此，$\mathcal{P}_n$ 在 λ 处的极大子群由交集 $\mathfrak{S}_{[\bar{\lambda}]} = L_{\bar{\lambda}} \cap L_{\bar{\lambda}}^*$ [44, 给出。练习 1.19]

对于要求这些极大子群的扭曲群代数为胞腔代数的假设 5，我们有如下命题。

命题 3.10. 设 $f \in P_n \subseteq \mathcal{P}_n$，并设 $\mathfrak{S}_{[f]} \simeq \mathfrak{S}_{k_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{k_q}$满足对所有 $i \in [\![1, q]\!]$都有 $\{\!\{f\}\!\} = \{m_1 < \cdots < m_q\}$和 $k_i = |I_{[m_i]}|$，它是 $\mathcal{P}_n$ 在 f 处的极大子群，如(45)所示。则

$$\mathbb{C}^{\tau_\beta}[\mathfrak{S}_{[f]}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k_q}].$$

因此，扭曲代数 $\mathbb{C}^{\tau_\beta}[\mathfrak{S}_{[f]}]$ 是胞腔的。

证明。根据定义，任意一对元素 $g, h \in \mathfrak{S}_{[f]}$ 都具有相同的底层集合划分，即对于某些 $s, s' \in \mathfrak{S}_n$，有 $g = fs$和 $h = fs'$。因此，对所有 $g, h \in \mathfrak{S}_{[f]}$，扭曲项的取值都是常数标量$C := \tau_\beta(g, h) = \delta^{\beta(f,f)}$。考虑线性同构 $\phi\colon \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{[f]}] \to \mathbb{C}^{\tau_\beta}[\mathfrak{S}_{[f]}]$，其定义为对所有 $g \in \mathfrak{S}_{[f]}$都有 $\phi(g) = C^{-1}g$。对于任意 $g, h \in \mathfrak{S}_{[f]}$，有 $\phi(g)\cdot\phi(h) = (C^{-1}g)\cdot(C^{-1}h) = C^{-2}\tau_\beta(g,h)gh = C^{-1}gh = \phi(gh)$。因此，$\phi$是代数同构，这意味着 $\mathbb{C}^{\tau_\beta}[\mathfrak{S}_{[f]}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{[f]}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k_q}]$。由于对称群的群代数是胞腔的，并且胞腔代数的张量积也是胞腔的 [23, 例 (1.2)] [21, 第 3.2], 小节，结论得证。□

最后，由于扭曲τ_β 的取值在 $\mathbb{C}^\times$中，框架的所有要求都得到了满足。因此，根据 [47, 推论 6]，我们得到以下定理。

定理3.11. *party* 代数 $\mathcal{P}_n(\delta)$ 是胞腔的。

3.3. 带系辫幺半群的一个扭曲幺半群代数。

3.3.1. 将 $\mathcal{P}_n$ 的扭曲限制后，可得到一个从 P_n 到 $\mathbb{C}$的扭曲，我们仍将其记作τ_β。这便导出了扭曲幺半群代数 $P_n(\delta) := \mathbb{C}^{\tau_\beta}[P_n]$，我们称之为集合划分的扭曲幺半群代数。显然，$P_n(\delta)$ 与由 $\mathcal{P}_n(\delta)$中的 F_1、……、F_{n-1}生成的子代数一致，并满足关系（41）。

3.3.2. 上文所述从 P_n 出发的扭曲诱导出一个从 TB_n 到 $\mathbb{C}$的扭曲，我们仍将其记作τ_β。由于 $TB_n = P_n \rtimes B_n$，对于每一对元素 g、$g' \in TB_n$，都存在唯一的置换 s、$s' \in \mathfrak{S}_n$ 以及唯一的集合划分 e、$e' \in P_n$，使得 $g = se$ 且 $g' = e's'$。对于$\delta \in \mathbb{C}^\times$，我们于是定义 $\tau_\beta(g, g') = \delta^{\beta(e, e')}$，其中 $\beta(e, e')$ 的定义见子子节3.3.1。

代数 $TB_n(\delta) := \mathbb{C}^{\tau_\beta}[TB_n]$ 将称为系结辫的扭曲幺半群代数。应用定理 2.3 可得，$\mathbb{C}^{\tau_\beta}[TB_n]$ 由生成元 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$表示，并满足

式 (6) 中的辫关系、满足式 (14) 的生成元 $\sigma_1^{-1},\dots,\sigma_{n-1}^{-1}$，以及生成元 $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{n-1}$，并受以下关系约束：

$$\bar{e}_i^2=\delta\bar{e}_i,\qquad \bar{e}_i\bar{e}_j=\bar{e}_j\bar{e}_i, \tag{46}$$

$$\sigma_i\bar{e}_j=\bar{e}_j\sigma_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1,\qquad \sigma_i\sigma_j^{\pm 1}\bar{e}_i=\bar{e}_j\sigma_i\sigma_j^{\pm 1} \quad \text{if } |i-j|=1, \tag{47}$$

$$\sigma_i\bar{e}_j\bar{e}_i=\bar{e}_j\sigma_i\bar{e}_j=\bar{e}_i\bar{e}_j\sigma_i \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{48}$$

3.4. 类 Party-Brauer 幺半群。

3.4.1. 2-模 *party* 幺半群或 2-调划分幺半群是由$\mathcal{P}_n^{(2)}$ $\mathfrak{C}_n$中的 s_1、……、s_{n-1}、 t_1、……、t_{n-1} 以及 f_1、……、f_{n-1} [45]生成的子幺半群。其基数$|\mathcal{P}_n^{(2)}|$ 由数列 [38, A005046] [2, 第6小节2]给出。利用这些生成元，幺半群$\mathcal{P}_n^{(2)}$可由关系（3）、（19）、（20）、（2）、（36）、（37）以及以下附加关系[39,第3小节3]表示：

$$t_if_i=t_i,\qquad t_if_j=f_jt_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1,\qquad f_it_jf_i=f_jf_i \quad \text{if } |i-j|=1, \tag{49}$$

$$t_if_jt_i=t_i \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{50}$$

命题 3.12。 幺半群 $\mathcal{P}_n^{(2)}$是由关系 $e_i=d_i$ （对所有 i）将分歧 *Brauer* 幺半群 $\mathcal{RB}\mathfrak{r}_n$ 取商得到的。

证明。 首先注意到，(50) 是多余的。事实上，分别应用 (19)、(49) 和 (50)，我们得到

$$t_i=t_it_jt_i=t_if_it_jf_it_i=t_if_jf_it_i=t_if_jt_i.$$

现在，将 $e_i=d_i=f_i$ 代入第 2.4.3 小小节中给出的 $\mathcal{RB}\mathfrak{r}_n$ 的表示，我们立即得到：$\mathcal{P}_n^{(2)}$由生成元 s_1、…、s_{n-1}、 t_1、…、t_{n-1}、 f_1、…、f_{n-1}生成，并满足 (3)、(19)、(20)、(2)、(36)、(37)、(49) 以及以下关系

$$s_if_jf_i=f_js_if_j=f_if_js_i \quad \text{if } |i-j|=1.$$

然而，如命题 3.1 的证明所示，这一关系可由 (2)、(36) 和 (37) 推出。证明至此完成。□

注 3.13。 命题 3.1 促使我们研究这样一个幺半群：在第 2.4.3 小小节给出的 $\mathcal{RB}\mathfrak{r}_n$ 表示中加入关系 $s_ie_i=e_i$ 后得到的幺半群。

4. Party-Hecke algebras

本节介绍 Party-Hecke 代数（定义4.2），并证明它可以实现为带结辫群的扭曲幺半群代数的一个商。在定理 4.13 中，我们构造了该代数的一个张量表示，并用它建立一组线性基。最后，定理 4.15 表明 Party-Hecke 代数在一般情形下是半单的。

4.1. Party-Hecke 代数。

接下来，我们设定 p， $q\in\mathbb{C}^\times$。

4.1.1. 我们通过引入一个新的幺半群来开始构造 Party-Hecke 代数，并将其称为*party* 辫群幺半群。

定义4.1。 *party* 辫群幺半群 $\mathcal{BP}_n$ 是由生成元 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ 和 $\bar{}$ 给出的幺半群，它们满足式（6）中的辫关系，且生成元 $f_1,\dots,f_{n-1}$ 彼此交换，并满足以下混合关系：

$$\sigma_i\bar{f}_j=\bar{f}_j\sigma_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \qquad \sigma_i\sigma_j\bar{f}_i=\bar{f}_j\sigma_i\sigma_j \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{51}$$

注意， $\mathcal{BP}_n$ 包含辫幺半群 B_n^+ 的一个副本。此外，注意到 party 幺半群 $\mathcal{P}_n$ 是 party 辫群幺半群 $\mathcal{BP}_n$ 的一个商。

4.1.2. 我们将 Party-Hecke 代数引入为 party 辫群幺半群的幺半群代数的一个商。

定义4.2。 *Party-Hecke* 代数 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 定义为幺半群代数 $\mathbb{C}[\mathcal{BP}_n]$ 对由以下元素生成的双边理想取商：

$$\sigma_i^2-pq^2-p(p-1)\bar{f}_i, \qquad \sigma_i\bar{f}_i-pq\bar{f}_i, \qquad \bar{f}_i^2-q^2\bar{f}_i \tag{52}$$

我们将 σ_i 在商中的像记为 G_i ，并将 f_i 的像记为 F_i 。因此， $\mathrm{P}_n(p,q)$ 是由生成元 $G_1,\dots,G_{n-1}$ 和 $F_1,\dots,F_{n-1}$ 给出的 $\mathbb{C}$-代数，满足以下关系：

$$G_i^2=pq^2+p(p-1)F_i, \qquad G_iF_i=F_iG_i=pqF_i, \tag{53}$$

$$G_iG_j=G_jG_i \quad \text{if } |i-j|>1, \qquad G_iG_jG_i=G_jG_jG_i \quad \text{if } |i-j|=1, \tag{54}$$

$$F_i^2=q^2F_i, \qquad F_iF_j=F_jF_i, \tag{55}$$

$$G_iF_j=F_jG_i \quad \text{if } |i-j|\neq 1, \qquad G_iG_jF_i=F_jG_iG_j, \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{56}$$

关系 (53) 表明，每个 G_i 都是可逆的，其逆映射为

$$G_i^{-1}=p^{-1}q^{-2}G_i+q^{-3}(p^{-1}-1)F_i. \tag{57}$$

注意， $\mathrm{P}_n(1,\ 1)=\mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$ 是 party 幺半群的幺半群代数。

4.2. **作为 的商的 Party-Hecke 代数** $TB_n(q^2)$。 现在我们证明代数 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$ 是 $TB_n(q^2)$ 的商。为此，我们首先需要以下引理。

引理 4.3。 对于满足 $|i-j|=1$ 的每个 i、 $j\in[\![1、\ n-1]\!]$，有：

(1) $G_iF_jF_i=F_jG_iF_j=F_iF_jG_i$。

(2) $G_iG_j^{-1}F_i=F_jG_iG_j^{-1}$。

证明。 首先，我们如下证明 (1)：

$$\begin{aligned} F_jG_iF_j &\overset{(56)}{=} G_iG_jF_iG_j^{-1}F_j \\ &\overset{(53)}{=} w^{-1}G_iG_jF_iF_j \overset{(53)}{=} G_iF_jF_i \overset{(53)}{=} wF_iF_j \overset{(53)}{=} F_iF_jG_i. \end{aligned}$$

然后，应用 (1)，得到 (2)：

$$\begin{aligned} G_iG_j^{-1}F_i &\overset{(57)}{=} G_i(p^{-1}q^{-2}G_j+q^{-3}(p^{-1}-1)F_j)F_i \\ &= p^{-1}q^{-2}G_iG_jF_i+q^{-3}(p^{-1}-1)G_iF_jF_i \\ &\overset{(56)}{=} p^{-1}q^{-2}F_jG_iG_j+q^{-3}(p^{-1}-1)F_jG_iF_j \\ &= F_jG_i(p^{-1}q^{-2}G_j+q^{-3}(p^{-1}-1)F_j) \\ &\overset{(57)}{=} F_jG_iG_j^{-1}. \end{aligned}$$

□

命题4.4. 将 $\sigma_i \mapsto G_i$ 和 $\bar{e}_i \mapsto F_i$ 映射到相应元素的映射定义了代数同态$TB_n(q^2) \to \mathrm{P}_n(p,q)$。更确切地说，*Party-Hecke* 代数 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 是扭曲幺半群代数 $TB_n(q^2)$ 对由元素 $\sigma_i^2 - pq^2 - p(p-1)\bar{e}_i$和$\sigma_i\bar{e}_i - pq\bar{e}_i$ （对所有 $i \in [\![1, n-1]\!]$）生成的双边理想取商所得的代数。

证明。这直接由等式 (57)、引理 4.3 以及小小节 3.3.2 中给出的$TB_n(q^2)$ 表示得出。□

4.3. **线性基**。本小节旨在给出 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 的一个线性基 $\mathcal{G}_n$ 。T o 为了说明 $\mathcal{G}_n$ 的元素，我们需要以下记号。

给定 $s \in \mathfrak{S}_n$，定义 $G_s := G_{i_1} \cdots G_{i_k} \in \mathrm{P}_n(p,q)$，其中 $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ 是 s 的一个约化表达式。特别地， $G_{s_j} = G_j$。现在，关系 (54) 和 Matsumoto 定理 [36] 蕴含 G_s 不依赖于约化表达式的选取。现在，对于每一对指标 $i, j \in [\![1, n-1]\!]$，满足 $i < j$，定义

$$F_{i,j} = F_{j,i} = G_i \cdots G_{j-2} F_{j-1} G_{j-2}^{-1} \cdots G_i^{-1}.$$

推论 4.5. 将 $f_{i,j} \mapsto F_{i,j}$ 映射至 P_n ，从而定义了一个到 $\mathrm{P}_n(p,q)$的幺半群同态。因此，每个 $F_{i,j}$ 都是可交换幂等元，并满足 $G_i F_{j,k} = F_{s_i(j),s_i(k)} G_i$ ，其中 $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ 满足 $j < k$。

证明。 这直接由命题4.4、公式 (17)以及 P_n 通过映射 $f_{i,j} \mapsto e_{i,j}$嵌入 TB_n 这一事实得出。□

与 [41, 第 3], 节一样，对于每个非空子集 $B \subseteq [\![1, n]\!]$ 以及 $[\![1, n]\!]$的每个集合划分 $I = \{I_1, \ldots, I_k\}$，我们定义

$$F_B = \prod_{i,j \in B,\, i<j} F_{i,j} \quad \text{and} \quad F_I = F_{I_1} \cdots F_{I_k},$$

其中，当且仅当 $|B| = 1$时， $F_B = 1$ 。

Pro命题 4.6. 乘积集合 $F_I G_s$（其中 $I \in P_n$ 且 $s \in \mathfrak{S}_n$）张成 $\mathrm{P}_n(p,q$).

证明。 这是由（53）中的二次关系、命题4.4，以及TB_n 是 $P_n \rtimes B_n$的半直积这一事实得出的。□

定义

$$\mathcal{G}_n := \{F_I G_s \mid I \in P_n \text{ and } s \in \mathfrak{S}_n \text{ with } (I,s) \text{ coprime}\}.$$

注意 根据命题3.2， $\mathcal{G}_n$ 中的元素由 $\mathcal{P}_n$参数化 .

为了证明 $\mathcal{G}_n$ 张成 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$，我们首先需要引入一些额外的记号和三个技术引理。

对于每个 $i,\ j \in [\![1,\ n]\!]$满足 $i < j$，我们定义

$$G_{i,j} = G_{j,i} = G_i \cdots G_{j-2} G_{j-1} G_{j-2}^{-1} \cdots G_i^{-1}.$$

注意到，作为生成元， G_i 满足辫关系，因此根据（7），映射$\sigma_{i,\ j} \mapsto G_{i,\ j}$定义了一个从 B_n 到 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$的群同态。

引理 4.7。 对于每个 i、 j、 k、 l， 我们有 :

(1) $G_{i,j}^2 = pq^2 + p(p-1)F_{i,j}.$

(2) $G_{i,j} F_{k,l} = F_{s_{i,j}(k),s_{i,j}(l)} G_{i,j}.$

(3) $G_{i,j}F_{i,j} = F_{i,j}G_{i,j} = pqF_{i,j}$.
(4) $G_{i,j}^{-1} = p^{-1}q^{-2}G_{i,j} + q^{-3}(p^{-1}-1)F_{i,j}$.

证明。 我们证明如下 (1)

$$\begin{aligned} G_{i,j}^2 &= G_i \cdots G_{j-2}G_{j-1}^2G_{j-2}^{-1}\cdots G_i^{-1} \\ &\overset{(53)}{=} G_i \cdots G_{j-2}(pq^2 + p(p-1)F_{j-1})G_{j-2}^{-1}\cdots G_i^{-1} = pq^2 + p(p-1)F_{i,j}. \end{aligned}$$

由 (53) 和推论 4.5 可直接得到 (2) 和 (3)。(4) 是由断言 (1) 和 (3) 直接推出的。□

引理 4.8。 令 $i, j, k \in [\![1, n]\!]$，并令 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $s_{i,\ j} = \tau s_k \tau^{-1}$。则 $F_{i,\ j}G_\tau G_k G_\tau^{-1} = pqF_{i,\ j}$。

证明。由于 $\tau^{-1}s_i{}_j\tau = s_k$，那么根据引理 4.7(2) 和引理 4.7(3)，可得结果如下：

$$\begin{aligned} F_{i,j}G_\tau G_k G_\tau^{-1} &= G_\tau(G_\tau^{-1}F_{i,j}G_\tau)G_kG_\tau^{-1} \\ &= G_\tau F_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(j)}G_kG_\tau^{-1} \\ &= G_\tau F_k G_k G_\tau^{-1} \\ &= pqG_\tau F_k G_\tau^{-1} = pqF_{i,j}. \end{aligned}$$

□

引理 4.9。 令 $\nu \in \mathfrak{S}_n$，并令 (i, j) 是 ν 的一个逆序。那么，存在 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ 和 $k \in [\![1, n-1]\!]$，使得 $G_\nu = G_\tau G_k G_\tau^{-1}G_{s_{i,\ j}\nu}$，且 $s_{i,\ j} = \tau s_k \tau^{-1}$。

证明。 令 $r = \ell(\nu)$，即 $\nu = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$，其中某个约化表达式成立。于是，根据强交换条件 [33, 第 5.8] 小节，存在 $m \in [\![1,\ r]\!]$ 使得 $s_{i,\ j}\nu = s_{i_1}\cdots s_{i_{m-1}}s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_r}$。令 $\tau = s_{i_1}\cdots s_{i_{m-1}}$、$k = i_m$ 和 $\epsilon = s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_r}$。因此，我们得到

$$\nu = \tau s_k \epsilon, \qquad s_{i,j}\nu = \tau\epsilon, \qquad s_{i,j} = (s_{i,j}\nu)\nu^{-1} = \tau\epsilon(\tau s_k\epsilon)^{-1} = \tau s_k \tau^{-1}.$$

因此 $G_\nu = G_\tau G_k G_\epsilon = G_\tau G_k G_\tau^{-1}G_\tau G_\epsilon = G_\tau G_k G_\tau^{-1}G_{s_{i,\ j}\nu}$。 □

命题 4.10. 集合 $\mathcal{G}_n$ 张成 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$。

证明。 根据命题 4.6，只需证明每个乘积 $F_I G_\nu$ 都可写成 $\alpha F_I G_{\nu'}$，其中 $\alpha \in \mathbb{C}$，且这一对 $(I,\ \nu')$ 互素。

设 $(i,\ j)$ 是 ν 的一个逆序，且满足 $I = If_{i,\ j}$。由推论 4.5 和引理 4.9，可得 $F_I G_\nu = F_I F_{i,\ j}G_\tau G_k G_\tau^{-1}G_{s_{i,\ j}\nu}$，其中存在某个 $k \in [\![1,\ n-1]\!]$ 和 $\tau \in \mathfrak{S}_n$，使得 $s_{i,\ j} = \tau s_k \tau^{-1}$。然后，应用引理 4.8，可得 $F_I G_\nu = wF_I F_{i,\ j}G_{s_{i,\ j}\nu} = wF_I G_{s_{i,\ j}\nu}$。由于 $\ell(s_{i,\ j}\nu) < \ell(\nu)$，我们可以对 I 中出现的 ν 的所有逆序重复这一过程，直到所得置换的长度达到最小。这就证明了该命题。□

注释 4.11. 由命题3.2可知，若 $(I,\ v)$ 和 $(J,\ w)$ 是两个不同的互素对，则乘积 $G_v F_I$ 和 $G_w F_J$ 必然不同。换言之，互素条件保证 $\mathcal{G}_n$ 中的每个元素都对应唯一的互素对，因此不同的互素对不会产生相同的乘积。这保证了 $\mathcal{G}_n$ 由互不相同的元素组成。

接下来，我们介绍 party 代数的 Tanabe 张量表示的一种变形。参见[45, 第 2.1]小节，并与 [1, 命题 3.1]比较。我们将利用这一表示证明 $\mathcal{G}_n$ 线性无关。

设 m 是一个正整数，并设 V 是由 $B = \{v_i^r \mid i、\ r \in [\![1、\ m]\!]\}$ 张成的 $\mathbb{C}$-向量空间。通常，我们将与 B 对应的 $V^{\otimes n}$ 的标准基记为 $B^{\otimes n}$，其向量为：

$$v_I^R := v_{i_1}^{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{r_n},$$

其中 $I=(i_1,\ldots,i_n)$，且 $R=(r_1,\ldots,r_n)\in[\![1,m]\!]^n$。若不致混淆，我们就用 $v_{i_1\ldots i_n}^{r_1\cdots r_n}$ 代替 $v^{(r_1,\ldots,(i_1\ldots i_n)^{r_n})}$,。

定义 $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}\in\mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ 为

$$\widetilde{F}(v_i^r\otimes v_j^s)=\begin{cases}q^2v_i^r\otimes v_j^s & \text{if } r=s\\ 0 & \text{if } r\neq s,\end{cases}\qquad \widetilde{G}(v_i^r\otimes v_j^s)=\begin{cases}pq\,v_j^s\otimes v_i^r & \text{if } r=s\\ pq\,v_j^s\otimes v_i^r & \text{if } r\neq s,\ i>j\\ q\sqrt{p}\,v_j^s\otimes v_i^r & \text{if } r\neq s,\ i=j\\ qv_j^s\otimes v_i^r & \text{if } r\neq s,\ i<j.\end{cases}$$

这些算子满足以下 Party-Hecke 关系：

$$\widetilde{F}^{\,2}=q^2\widetilde{F},\qquad \widetilde{G}\widetilde{F}=\widetilde{F}\widetilde{G}=pq\widetilde{F},\qquad \widetilde{G}^{\,2}=pq^2+p(p-1)\widetilde{F}. \tag{58}$$

对于 $i\in[\![1,\ n-1]\!]$，将 $\widetilde{F}_i$（分别将 $\widetilde{G}_i$）定义为 $V^{\otimes n}$ 上的自同态：它在位置 $(i,\ i+1)$ 的张量因子上分别作用为 $\widetilde{F}$（分别为 $\widetilde{G}$），在其他位置上作用为单位元。显然，我们有：

$$\widetilde{F}_k\widetilde{F}_l=\widetilde{F}_l\widetilde{F}_k,\quad \widetilde{F}_i\widetilde{G}_j=\widetilde{G}_j\widetilde{F}_i\quad\text{and}\quad \widetilde{G}_i\widetilde{G}_j=\widetilde{G}_j\widetilde{G}_i\quad\text{for } |i-j|>1. \tag{59}$$

注 4.12。由于每个 G_i 在相差一个标量的意义下都作为初等换位 s_i作用，因此存在标量 $\lambda_{I,R}\in\mathbb{C}$ 使得

$$(\widetilde{G}_{i_1}\cdots\widetilde{G}_{i_j})(v_I^R)=\lambda_{I,R}v_{s(I)}^{s(R)},\quad\text{where}\quad s:=s_{i_1}\cdots s_{i_j}.$$

定理 4.13。映射 $G_i\mapsto\widetilde{G}_i$, $F_i\mapsto\widetilde{F}_i$ 定义了 $\mathrm{P}_n(p,q)$ 在 $V^{\otimes n}$中的一个表示 $\psi_{p,\ q}$。特别地，$\psi_{1,\ q}$ 是 *Tanabe* 表示。

证明。不失一般性，我们可以假设 $n=3$。只需证明该赋值满足 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$ 的定义关系，即 (53)–(56)。

由 (58) 可得，关系 (53) 和 (55) 对算子 G_i's 和 F_i's 成立。结合 (59)，这表明尚待验证的关系只有 (54) 中的辫子关系和 (56) 中的第二个关系。

我们先考察 (56) 中的第二个关系。只需证明，对于 $V^{\otimes 3}$ 的每个基元素v_{ijk}^{rst}，都有：

$$\big(\widetilde{F}_1\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\big)(v_{ijk}^{rst})=\big(\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\widetilde{F}_2\big)(v_{ijk}^{rst}). \tag{60}$$

若 v_{ijk}^{rst} 的所有上指标都相等，即 $r=s=t$，则 $\widetilde{F}_1$ 和 $\widetilde{F}_2$ 都按 q^2 进行标量乘法，因此 (60) 显然成立。若所有上指标互不相同，则 F_1 和 F_2 都作用为零，因此 (60) 仍然成立。于是，我们只需考虑剩下的三种情形：$r=s\neq t$、$r\neq s=t$ 和 $r=t\neq s$。

在第一种情况下，我们计算得

$$\big(\widetilde{F}_1\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\big)(v_{ijk}^{rrt})=\big(\widetilde{F}_1\widetilde{G}_2\big)(pqv_{jik}^{rrt})=pq\widetilde{F}_1\big(\widetilde{G}_2(v_{jik}^{rrt})\big)=0,$$

因为 $\widetilde{G}_2(v_{jik}^{rrt})$具有类型为 rtr的上指标，而 $\widetilde{F}_1$ 作用于这些指标时为零。另一方面，

$$\big(\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\widetilde{F}_2\big)(v_{ijk}^{rrt})=\big(\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\big)(0)=0.$$

因此，在这种情况下，(60)成立。其余两种情况类似。由此可知，(56)中的第二个关系成立。

接下来需要验证（54）中的辫子关系，即

$$\big(\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\big)(v_{ijk}^{rst})=\big(\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2\big)(v_{ijk}^{rst}).$$

我们根据上指标 $(r、\ s、\ t)$ 的情况进行分类讨论：(i) $r = s = t$,$r = s \neq t$，(iii) $r \neq s = t$，(iv) $r = t \neq s$，以及 (v) r、s、t 均互不相同。

Ca情形 (i)。直接计算可得 $(G_1G_2G_1)(v_{ijk}^{rrr}) = (G_2G_1G_2)(v_{ijk}^{rrr}) = p^3q^3\, v_{kji}^{rrr}$.

情形 (ii)。我们将下指标细分为以下五种类型：$(i,\ j,\ k)$：$i = j = k$、(b) $i \neq j \neq k \neq i$、(c) $i = j \neq k$、(a) $(d)\ i \neq j = k$ 和 $(e)\ i = k \neq j$。

对于类型 (a)，可得

$$(G_1G_2G_1)(v_{iii}^{rrt}) = (G_1G_2)(pq\, v_{iii}^{rrt}) = pq^2\sqrt{p}\, G_1(v_{iii}^{rtr}) = q^3p^2\, v_{iii}^{trr},$$
$$(G_2G_1G_2)(v_{iii}^{rrt}) = (G_2G_1)(q\sqrt{p}\, v_{iii}^{rtr}) = q^2pG_2(v_{iii}^{trr}) = q^3p^2v_{iii}^{trr}.$$

对于类型 (b)，我们只分析最具代表性的情形，即 $i < j,\ j > k$ 和 $i < k$ ：

$$(G_1G_2G_1)(v_{ijk}^{rrt}) = (G_1G_2)(pq\, v_{jik}^{rrt}) = p\sqrt{p}q^2\, G_1(v_{jki}^{rtr}) = p^2q^3\, v_{kji}^{trr},$$
$$(G_2G_1G_2)(v_{ijk}^{rrt}) = (G_2G_1)(q\sqrt{p}\, v_{ikj}^{rtr}) = pq^2G_2(v_{kij}^{trr}) = p^2q^3v_{kji}^{trr}.$$

对于类型 (c)，我们首先分析以下可能性 $i = j < k$:

$$(G_1G_2G_1)(v_{iik}^{rrt}) = pq\,(G_1G_2)(v_{iik}^{rrt}) = pq^2\, G_1(v_{iki}^{rtr}) = pq^3\, v_{kii}^{trr},$$
$$(G_2G_1G_2)(v_{iik}^{rrt}) = q(G_2G_1)(v_{iki}^{rtr}) = q^2G_2(v_{kii}^{trr}) = pq^3v_{kii}^{trr}.$$

另一种可能性 $i = j > k$ 同样可以通过直接计算得出。

情形 (iii) 和 (iv) 都与情形 (ii) 类似。

情形（v）。这里下指标的 (a) 到 (e) 五种类型均会出现。除 (b) 中的子情形 $i < j > k < i$ 之外，其余情况都很直接，我们将对该子情形进行详细计算：

$$(G_1G_2G_1)(v_{ijk}^{rst}) = q(G_1G_2)(v_{jik}^{srt}) = pq^2\, G_1(v_{jki}^{str}) = p^2q^3\, v_{kji}^{tsr},$$
$$(G_2G_1G_2)(v_{ijk}^{rst}) = pq\,(G_2G_1)(v_{ikj}^{rts}) = p^2q^2\, G_2(v_{kij}^{trs}) = p^2q^3v_{kji}^{tsr}.$$

因此，在最棘手的情形下，该关系成立，进而在所有其他情形下也成立 。 .

因此，赋值 $G_i \mapsto G_i$, $F_i \mapsto F_i$ 定义了 $\mathrm{P}_n(p,q$的一个表示). □

定理 4.14. 对于 $n \leqslant m^2$，表示 $\psi_{p,q}$ 是忠实的。因此， $\mathcal{G}_n$ 是 $\mathrm{P}_n(p,q)$的一组线性基，从而 $\dim \mathrm{P}_n(p, q) = |\mathcal{P}_n|$。

证明. 证明方法是证明 $\mathcal{G}_n$ 是一组线性基，且其在 $\psi_{p,q}$下的像仍然线性无关。根据命题 4.10，要证明 $\mathcal{G}_n$ 是一组基，只需证明 $\mathcal{G}_n$ 线性无关。令 V为以 $B = \{v_i^r \mid i, r \in [\![1, m]\!]\}$为基的 $\mathbb{C}$-向量空间，其中 $n \leqslant m^2$。则 $V^{\otimes n}$ 有一组基 $B^{\otimes n}$，由以下形式的向量组成：

$$v_I^R := v_{i_1}^{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{r_n}.$$

假设我们有如下线性组合：

$$\sum_{\substack{(I,w)\\ \text{coprime}}} \lambda_{(I,w)} G_w F_I = 0.$$

然后，应用$\psi_{p,\ q}$，我们得到

$$\sum_{\substack{(I,w)\\ \text{coprime}}} \lambda_{(I,w)} \widetilde{G}_w \widetilde{F}_I = 0. \tag{61}$$

令 $v := v' \otimes v''$，其中 $v' = v_1^1 \otimes \cdots \otimes v_n^1$, $v'' = v_m^m \otimes \cdots \otimes v_m^m$ 具有 $m^2 - n$ 因子。在 v处计算线性组合 (61)，并注意到$\psi_{p,\ q}$ 在 v''上作用平凡，我们得到：

$$0 = \sum_{\substack{(I,w)\\ \text{coprime}}} \lambda_{(I,w)} \widetilde{G}_w \widetilde{F}_I(v) \otimes v'' = \sum_{\substack{(I,w)\\ \text{coprime}}} \lambda_{(I,w)} a_I \widetilde{G}_w(v) \otimes v'',$$

~其中每个 a_I 都是某个正整数。注意，向量 $G_w(v) \otimes v''$ 都是基 $B^{\otimes n}$的元素。因此，由注释 4.11 和注 4.12 可知，所有系数 $\lambda_{(I,\ w)} a_I$都必须为 0。由于每个 a_I 都是正的，我们得出，对所有 $(I,\ w)$，均有 $\lambda_{(I,\ w)} = 0$ 。□

4.4. **一般表示**。如 [40, 第 3.5], 小节中的 [44, 推论 9.4], 所述，代数 $\mathbb{C}[\mathcal{P}_n] = \mathrm{P}_n(1,\ 1)$ 是半单的。此外，由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，应用 Wedderburn–Artin 定理（参见 [18, 第 5]章）可得，$\mathrm{P}_n(1,\ 1)$ 是分裂半单的。

定理 4.15。 *Party-Hecke* 代数 $\mathrm{P}_n(p, q)$ 一般地是半单的；也就是说，存在 $\mathbb{C}^2$ 的一个非空 *Zariski* 开集，使得 $\mathrm{P}_n(p, q)$ 是半单的。

证明。 根据 [15, 引理 1，6], 分裂半单这一性质是泛性的；也就是说，它在参数空间的一个非空 Zariski 开子集上成立。正如 [15, 第 1], 节中所解释的，由于 $\mathrm{P}_n(p, q)$ 是 $\mathbb{C}[p, q]$ 上的有限秩自由模（定理 4.14），且特化 $\mathrm{P}_n(1, 1)$ 是分裂半单的，因此存在 U 的一个非空 Zariski 开子集 $\mathbb{C}^2$, 使得对所有 $(p, q) \in U$，$\mathrm{P}_n(p, q)$ 都是分裂半单的。特别地，由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭的，因此 $\mathrm{P}_n(p, q)$ 是泛半单的。□

5. The Party-Hecke algebra as a quotient of the bt-algebra and related quotients

本节中，我们证明 Party-Hecke 代数是 bt代数的一个商（第5.1小节）。此外，我们确定两个自然的 Temperley–Lieb 型商（第5.2小节），并引入一个分划 Temperley–Lieb 型商（第5.3小节）。

5.1. $\mathrm{P}'_n(p,\ q)$ **作为** $\mathcal{E}_n(\sqrt{p})$**的商**。重新缩放 $H_i = (q\sqrt{p})^{-1} G_i$ 给出了 Party-Hecke 代数的另一种表示。具体而言，考虑满足（55）的生成元 F_1，……，F_{n-1}，以及满足与 $\mathrm{P}_n(p,\ q)$ 中相同定义关系的生成元 H_1，……，H_{n-1}，但将（53）中的关系替换为，即

$$H_i^2 = 1 + q^{-2}(p-1)F_i, \quad H_i F_i = F_i H_i = \sqrt{p} F_i, \tag{62}$$

$$H_i H_j = H_j H_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \quad H_i H_j H_i = H_j H_j H_i \quad \text{if } |i-j| = 1, \tag{63}$$

$$H_i F_j = F_j H_i \quad \text{if } |i-j| \neq 1, \quad H_i H_j F_i = F_j H_i H_j, \quad \text{if } |i-j| = 1. \tag{64}$$

我们将具有上述表示的 Party-Hecke 代数记为 $\mathrm{P}'_n(p,\ q)$ 。注意：

$$H_i^{-1} = H_i - q^{-2}(\sqrt{p} - \sqrt{p}^{-1}) F_i. \tag{65}$$

根据命题 3.1，理想的做法是将 $\mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$ 定义为 $\mathcal{E}_n(u,\ v)$ 的变形商。由于同余 R 的定义，这样的变形可以通过对 R 的定义生成元进行变形来获得。因此，我们考虑由 $g_i e_i = x e_i$ 给出的 x- 变形，其中对所有 i 均成立。将 (35) 乘以 e_i，得到 $x^2 e_i = e_i + (u-1)e_i + (v-1)x e_i$。因此，参数 x 必须满足二次方程 $x^2 - (v-1)x - u = 0$。特别地，一个解为 $x = u = v$，于是我们作出如下定义。

定义 5.1。令 $\mathcal{E}_n^P(\sqrt{p}) := \mathcal{E}_n(\sqrt{p})/I, ,^-$其中 I 是由对所有 i 的 $g_ie_i - \sqrt{p}e_i$ 生成的双边理想。只要不会引起混淆，我们将不区分 g_i （分别为 e_i）及其在 $\mathcal{E}_n^P(\sqrt{p})$ 中的像。

注记 5.2. 注意 $e_2g_2 = (g_1g_2e_1g_2^{-1}g_1^{-1})g_2 = g_1g_2e_1g_1g_2^{-1}g_1^{-1} = g_1g_2e_1g_2^{-1}g_1^{-1} = e_2$。因此，利用归纳论证可知，$I$ 由 $g_1e_1 - \sqrt{p}e_1$生成。

命题 5.3。 映射 $g_i \mapsto H_i, e_i \mapsto q^{-2}F_i$ 定义了一个从 $\mathcal{E}_n^P(\sqrt{p})$ 到$\mathrm{P}'_n(p,q)$的同构 .

证明。要证明该映射定义了一个代数同态，只需检验 H_i和 F_i满足 $\mathcal{E}_n(u)$ 的定义关系以及对所有 i 成立的 $e_ig_i = ue_i$。除了关系 (34) 和 (35) 外，这些验证都可直接得出。由于 $u = v = \sqrt{p}$，关系 (35) 变为 $g_i^2 = 1 + (\sqrt{p}-1)e_i(1+g_i)$。在我们的映射下，左边映到 $H_i^2 = 1 + q^{-2}(p-1)F_i$，而右边映到

$$1 + (\sqrt{p}-1)q^{-2}F_i(1+H_i) \overset{(62)}{=} 1 + q^{-2}(p-1)F_i.$$

因此，关系（35）得以保持。

对于（34）中的第一个关系，我们需要证明 $H_iH_jF_i = F_jH_iH_j$对于 $|i-j|>1$，或者等价地，$H_jF_iH_j^{-1} = H_i^{-1}F_jH_i$。事实上，

$$\begin{aligned} H_jF_iH_j^{-1} &\overset{(65)}{=} H_jF_i(H_j - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_j) \\ &\overset{(51)}{=} H_iF_jH_i - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})H_jF_jF_i \\ &\overset{(62)}{=} H_iF_jH_i - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})\sqrt{p}F_jF_i. \end{aligned}$$

由于 $\sqrt{p}F_jF_i = F_j\sqrt{p}F_i \overset{(62)}{=} F_jF_iH_i = F_iF_jH_i$，因此

$$\begin{aligned} H_jF_iH_j^{-1} &\overset{(65)}{=} H_iF_jH_i - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_iF_jH_i \\ &= (H_i - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_i)F_jH_i \overset{(65)}{=} H_i^{-1}F_jH_i. \end{aligned}$$

因此，（34）中的第一个关系得以保持。

对于（34）中的第二个关系，我们首先指出，要证明这一关系，只需先证明当 $|i-j|=1$时有 $H_iF_iF_j = F_jH_iF_j$，或者等价地，$F_iF_j = H_i^{-1}F_jH_iF_j$。事实上，

$$\begin{aligned} H_i^{-1}F_jH_iF_j &\overset{(65)}{=} (H_i - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_i)F_jH_iF_j \\ &= H_iF_jH_iF_j - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_iF_jH_iF_j \\ &\overset{(51),(2)}{=} H_jF_iH_jF_j - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})F_jF_iH_iF_j \\ &\overset{(62)}{=} \sqrt{p}H_jF_iF_j - q^{-2}(\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})\sqrt{p}F_jF_iF_j. \end{aligned}$$

由于 $\sqrt{p}H_jF_iF_j = \sqrt{p}H_jF_jF_i \overset{(62)}{=} pF_iF_j$ 且 $F_jF_iF_j = q^2F_iF_j$，我们得到

$$H_i^{-1}F_jH_iF_j = pF_iF_j - (\sqrt{p}-\sqrt{p}^{-1})\sqrt{p}F_iF_j = F_iF_j.$$

类似地，可以证明 $F_iF_jH_i = F_jH_iF_j$。因此，(34) 中的第二个关系得以保留。

总之，该映射是一个代数同态。此外，它是双射，其逆映射由 $H_i \mapsto g_i$ 和 $F_i \mapsto q^2e_i$ 给出。因此，证明得以完成。□

5.2. **两个 Temperley–Lieb 型商**。在本小节中，我们使用 Party-Hecke 代数的表示 $\mathrm{P}'_n(p,\ q)$。定义

$$T_i = \frac{1}{2}\Big(H_i + q^{-2}(1-\sqrt{p})F_i + 1\Big) \in \mathrm{P}'_n(p,q). \tag{66}$$

一个直 截了当地计算表明 $T_i^2 = T_i$。现在我们得到以下结果。

命题 5.4。 幂等元 T_1、...、T_{n-1} 与 F_1、...、F_{n-1} 共同给出了 ***Party-Hecke*** 代数的表示$\mathrm{P}(q)$，其定义关系如下：

$$T_i^2 = T_i\,, \quad T_iT_j = T_jT_i \quad \textit{for } |i-j|>1, \tag{67}$$

$$4T_iT_jT_i - T_i = 4T_jT_iT_j - T_j \quad \textit{for } |i-j|=1, \tag{68}$$

$$F_i^2 = q^2F_i\,, \quad F_iF_j = F_jF_i\,, \tag{69}$$

$$T_iF_i = F_iT_i = F_i, \quad T_iF_j = F_jT_i \quad \textit{for } |i-j|>1, \tag{70}$$

$$4T_iT_jF_i - 2T_jF_i - F_i = 4F_jT_iT_j - 2F_jT_i - F_j \quad \textit{for } |i-j|=1. \tag{71}$$

证明。 由于每个 T_i 都是 **1**、 H_i 和 F_i 的线性组合，因此 Party-Hecke 代数由 T_i 和 F_i 线性生成。此外，容易验证，$\mathrm{P}'_n(p,q)$ 的定义关系用 T_i 和 F_i 表示时，恰好对应于关系 **(67)–(71)**。证明完毕。□

命题 5.4 中的表示类似于 Iwahori–Hecke 代数的一种表示，后者产生的 Temperley–Lieb 代数是一个商 [46, 25]。因此，自然可以通过命题 5.4 的表示定义 Party-Hecke 代数的 Temperley–Lieb 商。由此得到两个商，即

$$\mathrm{P}_n(q)/I \qquad \text{and} \qquad \mathrm{P}_n(q)/J,$$

其中， I （分别）表示由以下元素生成的双边理想

$$4T_iT_jF_i - 2T_jF_i - F_i \quad (\text{resp. } 4T_iT_jT_i - T_i) \quad \text{if} \quad |i-j|=1. \tag{72}$$

命题 5.5. 商 $\mathrm{P}_n(q)/I$ 是代数 $\mathcal{H}_n(u)$，其中 $u = 7 \pm 4\sqrt{3}$。

证明。 将等式 $4T_iT_jF_i = 2T_jF_i + F_i$ 左乘 T_i，并利用 **(67)** 和 **(70)**，得到 $4T_iT_jF_i = 2T_iT_jF_i + F_i$。因此， $2T_iT_jF_i = F_i$。将这一结果代入原等式 $4T_iT_jF_i = 2T_jF_i + F_i$，可得 $2T_jF_i = F_i$。在等式两边左乘T_j，得到 $T_jF_i = 0$，因此 $F_i = 0$。由 **(30)** 和 **(31)** 可知，$\mathcal{H}_n(u)$ 由$16 = (u+1)^2u^{-1}$得到，也就是说， $u = 7 \pm 4\sqrt{3}$。□

命题 5.6. 商 $\mathrm{P}_n(q)/J$ 是 ***Temperley–Lieb*** 代数 $TL_n(4)$，也就是说，它是由生成元 T_1、. . .、T_{n-1} 生成并满足 (67) 以及以下关系的代数：

$$4T_iT_jT_i = T_i \quad \textit{for } |i-j|=1. \tag{73}$$

证明。 将等式 $4T_iT_jT_i = T_i$ （分别将 $4T_jT_iT_j = T_j$）右乘 F_i （分别右乘 F_j），并利用 **(70)**，得到 $4T_iT_jF_i = F_i$ （分别得到 $4T_jT_iF_j = F_j$）。将这两个关系代入 **(71)**，得到

$$T_jF_i = F_jT_i, \quad \text{for } |i-j|=1. \tag{74}$$

另一方面，再将 $4T_iT_jT_i = T_i$ （分别）在右侧（分别）或左侧乘以 F_i （分别为 F_j），得到 $4T_iT_jF_i = F_i$ （分别为 $4F_jT_iT_j = F_j$）。现在利用 **(74)**，我们推出$4T_iF_jT_i = F_i$ （分别为 $4T_jF_iT_j = F_j$）。将这些最后得到的等式分别在右侧和左侧乘以 F_i（分别为 F_j），得到 $4F_iF_j = F_i$ （分别为 $4F_iF_j = F_j$）。因此，根据 **(69)**，有 $16F_iF_j = F_iF_j$。于是 $F_iF_j = 0$,

因此，对于所有 i，都有 $F_i = 0$。由此，商由 T_i's 给出，其定义关系为 (67) 和 (73)。因此，根据 (30) 和 (31)，证明得证。□

5.3. **一种分划 Temperley–Lieb 型商**。受分划 Temperley–Lieb 代数 [27]（参见 [42]）的定义和命题 5.3 启发，对于 $n \geqslant 3$，自然会考虑商 $\mathrm{P}_n(p,q)/\mathrm{F}$，其中 F 是由满足 $|i-j|=1$ 的元素 F_iF_j 生成的双边理想。根据引理 4.3(2)，F 是主理想，且由任意一个 F_iF_{i+1} 生成；因此我们可以令 $\mathrm{F} = \langle F_1F_2 \rangle$。

回忆一下，$H_i = (q\sqrt{p})^{-1}G_i$。(66) 中定义的元素 T_i 可以写成 1、G_i 和 F_i 的线性组合。因此，映射 $G_i \mapsto T_i$ 和 $F_i \mapsto F_i$ 定义了 Party-Hecke 代数的一个自同构，并保持理想 F 不变。我们定义

$$\mathrm{PP}_n(q) := \mathrm{P}_n(q)/\mathrm{F} = \mathrm{P}_n(p,q)/\mathrm{F}.$$

使用 MAGMA 计算机代数系统，我们发现，当 $n = 3$、4、5 和 6 时，$\mathrm{PP}_n(q)$ 的维数分别为 15、114、1170 和 15570。这表明 $\mathrm{PP}_n(q)$的维数对应于数列 A346224。

6. Future work

本文确立的结构性结果为后续研究方向奠定了基础。本节简要概述其中两个方向：相关幺半群 $T\mathfrak{S}_n$的表示论，以及使用 Party-Hecke 代数为虚结定义 Jones 型不变量的潜在可能性。

6.1. **的不可约表示** $T\mathfrak{S}_n$。正如 $T\mathfrak{S}_n$ 的极大子群由 $\mathcal{P}_n$的极大子群决定一样，我们自然会预期，$T\mathfrak{S}_n$ 的不可约表示可以通过应用 [40, 第 3]节中的方法得到。作为第一步，我们注意到，与 party 幺半群 [40, 命题 3.5], 类似，$T\mathfrak{S}_n$的 J-类也由 n的分拆标记。事实上，对于 $e,\ e' \in P_n$，当且仅当$Te'T = T\mathfrak{S}_nses^{-1}T\mathfrak{S}_n = T\mathfrak{S}_neT\mathfrak{S}_n$时，$e' = s(e) = ses^{-1}$ 对某个 $s \in \mathfrak{S}_n$ 成立，因为 s可逆。因此，根据注释 3.5,

$$e \equiv_J e' \quad \text{if and only if} \quad \|e\| = \|e'\|.$$

另一方面，若 $g = es \in T\mathfrak{S}_n$且 $e \in P_n$和 $s \in \mathfrak{S}_n$，则 $g \equiv_J e$，因为 $T\mathfrak{S}_ngT\mathfrak{S}_n = T\mathfrak{S}_nesT\mathfrak{S}_n = T\mathfrak{S}_neT\mathfrak{S}_n$。因此，若 $g = es$且 $h = e's'$满足 $\|e\| = \|e'\|$，则 $g \equiv_J h$；反之，若 $g \equiv_J h$，则 $\|e\| = \|e'\|$，因为 $e \equiv_J g \equiv_J h \equiv_J e'$。所以，

$$g \equiv_J h \quad \text{if and only if} \quad \|e\| = \|e'\|.$$

这就证明了所声称的双射。

根据这一观察，对于 n 的每个分拆 λ，我们将任意满足 $\|e\| = \lambda$ 的 $es \in T\mathfrak{S}_n$ 的 J-等价类记为 J_λ。因此，

$$T\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} J_\lambda,$$

其中，Par_n 表示 n 的分拆集合。

此外，对于 $e \in P_n$ 且满足 $\|e\| = \lambda$ 的情形，可以很容易地验证 $J_\lambda = \{ses' \mid s,\ s' \in \mathfrak{S}_n\}$。为此，注意到对于 $s,\ s' \in \mathfrak{S}_n$，有 $T\mathfrak{S}_nses'T\mathfrak{S}_n = T\mathfrak{S}_neT\mathfrak{S}_n$，因此 $ses' \equiv_J e$属于 J_λ。反过来，若 $e's' \in J_\lambda$ 满足 $e' \in P_n$ 且 $s' \in \mathfrak{S}_n$，则存在 $s \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $e' = ses^{-1}$，由此可得 $e's' = se(s^{-1}s')$。图14展示了这一结构。

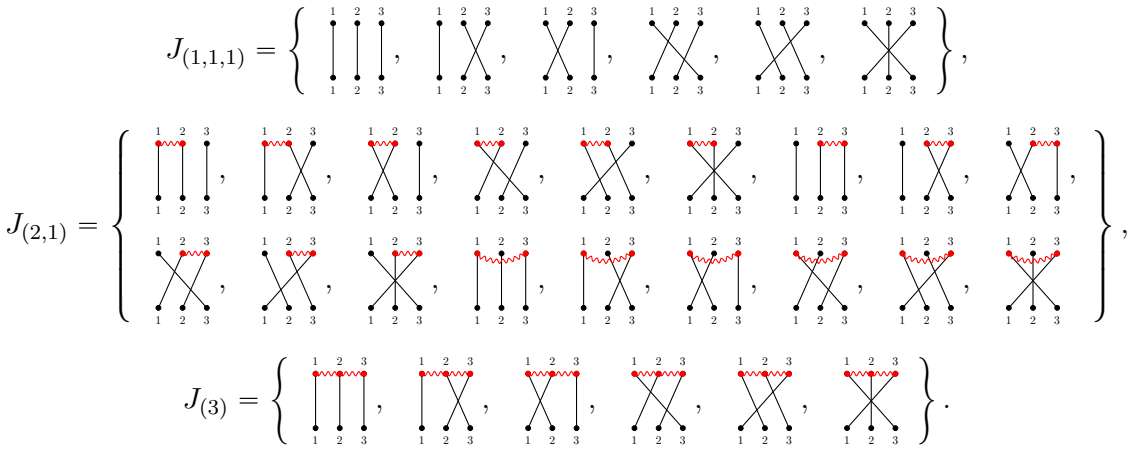


FIGURE 14. J 的 $T\mathfrak{S}_3$-类。

6.2. 虚结的琼斯型不变量。 由于 Party-Hecke 代数是 bt代数的一个商（命题4.4），而 bt代数确实是结代数，因此可能会有人想知道 Party-Hecke 代数是否也是结代数。事实上，我们认为 Party-Hecke 代数可能是结代数，因为它可以为虚结定义一种 Jones 型不变量。这基于这样一个事实：可以证明，bt代数支持的迹能够传递到 Party-Hecke 代数上（参见 [27, 定理 7.7], [22, 第 5] 节）。这一性质与下文介绍的虚辫群表示相结合，或许能够实现此类不变量的构造。

对于 a, $b \in \mathbb{C}$，定义 $V_i = aH_i + bF_i$。直接计算表明，以下关系在 $\mathbf{P}'_n(p,\ q)$ 中成立。

（1） $V_i^2 = q^{-2}(pa^2 + 2\sqrt{p}q^2ab + q^4b^2 - a^2)F_i + a^2$。
（2）对于 $|i-j|=1$，有 $V_iV_jV_i = V_jV_iV_j$。（3）对于 $|i-j|=1$，有 $V_iV_jH_i = H_jV_iV_j$。

回顾一下，虚辫群 VB_n 由生成元 σ_1, .. ., σ_{n-1} 定义，它们满足辫关系（6）；以及生成元 s_1, .. ., s_{n-1}，它们满足对称群关系（3）；此外还满足以下混合关系：

$$\sigma_i s_j = s_j \sigma_i \quad \text{if } |i-j|>1, \quad \text{and} \quad s_i s_j \sigma_i = \sigma_j s_i s_j \quad \text{if } |i-j|=1. \tag{75}$$

可以证明，映射 $\sigma_i \mapsto H_i$, $s_i \mapsto V_i$ 若满足以下条件，则在 $\mathbf{P}'_n(p,\ q)$ 中定义了 VB_n 的一个表示：

$$a=1 \quad \text{and} \quad b=\frac{1\pm\sqrt{p}}{q^2}, \quad \text{or} \quad a=-1 \quad \text{and} \quad b=-\frac{1\pm\sqrt{p}}{q^2}.$$

REFERENCES

[1] M. Aguiar 和 R. Orellana。一致分块置换的霍普夫代数。
J Algebr Comb 28 115 138, 1 , : – .[2] C. Ahmed、P. Martin 和 V.
2008
Mazorchuk。关于 *d* *Ann* 音划分幺半群中主理
Comb 25 79 113, 3 2021
想的数量。, : –。[3] F. Aicardi、D. Arcis 和 J. Juyumaya。Brauer 代数与琼斯系带幺半群。
J Pure Appl Algebra 227 1 107161, 1 , ( ): .[4] F. Aicardi、D. Arcis 和 J.
2023
Juyumaya。分支逆映射与平面幺半群。 *Mosc Math J* 24 3 321 355, 9 ,
2024
( ): – .[5] F. Aicardi 和 J. Juyumaya。系带链环。 *J Knot Theor Ramif*, 25(9):1641001, 2016年。

[6] F. Aicardi 和 J. Juyumaya。辫子与系带代数上的马尔可夫迹。 *Mosc Math J*, 16(3):397–431, 2016年。[7] F. Aicardi 和 J. Juyumaya。双参数 bt 代数及其纽结与带系纽结不变量。 *Arnold Math J* 6 131 148, 4 2020 , : –.[8] F. Aicardi 和 J. Juyumaya。系带链环与奇异纽结不变量。 *Adv Math*, 381:107629, 4 2021年。[9] D. Arcis 和 J. Espinoza。带系盒代数。 *J Algebra*, 685:112–159, 1 2026年。[10] D. Arcis、J. Espinoza 和 M. Flores。关于框架 rook 代数。预印本, 2025年。[11] D. Arcis 和 J. Juyumaya。带系幺半群。 *Semigroup Forum*, 103(1–2):356–394, 10 2021年。[12] E. Artin。Z¨opfe 理论。 *Abh Math Sem Hamburg*, 4(1):47–72, 12 2021年。[13] J. Birman、K. Ko 和 S. Lee。解决辫群中字问题与共轭问题的新方法。 *Adv Math* 139 2 322 353, 11 1998 , ( ): –.[14] R. Brauer，关于与半单连续群相关的代数， *Ann Math* 38 4 857 872, , ( ): –.[15] 10 1937 E. Cline、B. Parshall 和 L. Scott。一般的与 q 有理表示论。 *Publ Res Inst Math Sci*, 35 1 31 90, 2 1999 ( ): –.[16] C. De Concini 和 C. Procesi。 *The Invariant Theory of Matrices*，U*niversity Lecture Series*第69卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。[17] J. East。划分幺半群与代数的生成元与关系。 *J Algebra*, 339(1):1–26, 8 2011年。[18] K. Erdmann 和 T. Holm。 *Algebras and Representation Theory*。施普林格本科数学丛书。施普林格，瑞士，第1版，9 2018年。[19] D. FitzGerald。一致分块置换幺半群的表示。 *B Aust Math Soc* 68 2 317 324, , ( ): –.[20] 10 2003 F. Garside。辫群及其他群。 *Q J Math*, 20(1):235–254, 1 1969年。[21] T. Geetha 和 F. Goodman。wreath 积代数与 A-Brauer 代数的胞腔性。 *J Algebra*, 389:151– 190, 9 2013年。[22] D. Goundaroulis、J. Juyumaya、A. Kontogeorgis 和 S. Lambropoulou。Temperley–Lieb 代数的框架化。 *Math Res Lett*, 24(2):299–345, 7 2017年。[23] J. Graham 和 G. Lehrer。胞腔代数。 *Invent Math*, 123:1–34, 12 1996年。[24] N. Iwahori。关于有限域上切瓦莱群的赫克环结构。 *J Fac Sci U Tokyo 1*, 10 2 215( ): –236, 3 1964年。[25] V. Jones。子因子的指标。 *Invent Math*, 72:1–25, 1983年。[26] V. Jones。波茨模型与对称群。第259–267页。世界科学出版公司，9 1994年。子因子：谷口算子代数研讨会论文集，久世曾，1993年。[27] J. Juyumaya。分划 Temperley–Lieb 代数。预印本，4 2013年。[28] M. Kosuda。party 代数的刻画。 *Ryukyu Math J*, 13(2):7–22, 12 2000年。[29] M. Kosuda，party 代数的不可约表示。 *Osaka J Math*, 43(2):431–474, 6 2006年。[30] M. Kosuda。模派对代数的刻画。 *J Knot Theor Ramif*, 17(8):939–960, 8 2008年。[31] G. Kudryavtseva 和 V. Mazorchuk。关于 Brauer 型幺半群的表示。 *Cent Eur J Math* 4 3 403 434, , ( ): –.[32] 9 2006 J. Howie。 *Fundamentals of Semigroup Theory* 12 *London Mathematical Society Monographs New Series*，第 卷，。牛津大学出版社，牛津，。[33] J. Humphreys。 *Reflection Groups and Coxeter Groups* 29 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*，第 卷，。剑桥大学出版社，剑桥，。[34] T. Lavers。幺半群广义积的表示。 *J Algebra*, 204(2):733–741, 6 1998年。[35] P. Martin。用于非平面统计力学的 Temperley–Lieb 代数——分拆代数构造。 *J Knot Theor Ramif* 3 1 51 82, 1994 , ( ): –.[36] H. Matsumoto。广义魏尔群的生成元与关系。 *C R Acad Sci Paris Ser I*, 258:3419– 3422, 1964年。[37] E. Moore。关于阶为 $k!$ 和 $\frac{1}{2}k!$、分别与对称置换群和交错置换群全纯同构的抽象群，其中置换作用于 k 个字母。 *P Lond Math Soc*, 28(1):357–367, 11 1896年。[38] OEIS基金会。在线整数数列百科全书，2025年。由 N. Sloane 于 1964年创立。网址: https://oeis.org/。[39] R. Orellana。关于超八面体群中心化子代数的代数分解。载于 *Algebraic Structures and Their Representations* 376 *Contemp Math* 345 358, 2005 ，第 卷，，第 – 页。罗得岛州普罗维登斯，。美国数学会。第十五届拉丁美洲代数讨论会，科科约克，莫雷洛斯州，墨西哥，2003年7月20日至26日。

[40] R. Orellana、F. Saliola、A. Schilling 和 M. Zabrocki。复合运算与一致分块置换代数。*Algebraic Combinatorics*，5(5):1165–1203，2022年。[41] S. Ryom-Hansen。关于辫与系带代数的表示论。 *J Algebr Comb* 33 1 57 79, 2 , ( ): – 。[42] S. Ryom-Hansen。关于张量空间 bt代数中的湮灭子理想。 *J Pure Appl Algebra* 226 8 107028, , ( ): 。[43] N. Ruškuc。 *Semigroup Presentations*。博士论文，圣安德鲁斯大学，苏格兰，1995年4月。[44] B. Steinberg。 *Representation Theory of Finite Monoids*。Universitext。Springer Cham，瑞士，第1版，2016年12月。[45] K. Tanabe。关于酉反射群 $G(m\ p\ n)$ *Nagoya Math J* 148 113 126, , 的中心化子代数。 , : – 。[46] H. Temperley 和 E. Lieb。‘渗流’与‘着色’问题之间的关系，以及与规则平面格相关的其他图论问题：关于‘渗流’问题的一些精确结果。 *Proc R Soc Lon Ser-A* 322 1549 251 280, 4 1971 , ( ): – 。[47] S. Wilcox。图表代数作为扭曲半群代数的胞腔性。 *J Algebra*，309(1):10–31，2007年3月。

Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena, Cisternas 1200, 1700000 La Serena,Chile*Email address*: diego.arcis@userena.clInstituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso, Gran Bretaña 1111, 2340000 Valparaíso,Chile*Email address*: juyumaya@gmail.com