arXiv:2603.19946v1 [math.LO] 20 Mar 2026

从图灵度到 Arthur–Nimue–Merlin 度的反序嵌入

Jean Abou Samra* & David Alexander Madore †

2026年3月23日

摘要

Arthur–Nimue–Merlin 度是 Kihara 提出的一种图灵度推广，它为有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑（等价地，有效拓扑斯的子拓扑斯）这一偏序集提供了直观描述。其定义基于一种三人博弈，该博弈在预言机查询中同时引入天使式和恶魔式非确定性。我们构造了一个将图灵度反转顺序后嵌入 Arthur–Nimue–Merlin 度的序嵌入，并将其像称为“余图灵度”；随后，我们研究了这些余图灵度与 Arthur–Nimue–Merlin 度中（自然嵌入的）图灵度之间的序关系。

（2020）数学主题分类：03D30, 03G30, 03F65

1 引言

¶1.1. 我们从一个谜题开始。亚瑟王迫切想知道圣杯是否在某座特定的法国城堡里。他可以向无所不知的法师 Merlin 随意提问，而 Merlin 承诺如实作答，但回答方式别有玄机。狡黠的 Merlin 不用通俗英语简单回答“是”或“否”，而是提供一台图灵机：当且仅当答案为“是”时，这台机器才会 halt。亚瑟王不过是受丘奇–图灵论题限制的凡人，他能否在末日来临前找到圣杯所在之处?

他确实做得到，只需一个简单的技巧：先问 Merlin 圣杯是否在城堡里，再问它不 在城堡里。由此得到的两台图灵机中恰有一台会 halt，而他可以同时运行它们，从而判断哪一台会 halt，并揭晓答案。

让我们为规则增添一些变化。Merlin 的每个回答现在都由两台图灵机构成；对于“是”的回答，两台都停机或都不停机，而对于“否”的回答，恰好有一台停机。[1] 事实证明，在这些规则下，没有任何策略能够确保 Arthur 在有限时间内获知任意布尔值问题的答案。这一事实的证明（见¶4.18）似乎需要本文的主要技术成果；该成果表明，在一个精确的意义下，先提出问题再提出其否定，基本上是唯一有用的技巧。

*匈牙利布达佩斯罗兰大学。由欧盟通过 HOTT资助项目（ERC 101170308）资助。

†法国帕莱索的 Télécom Paris（LTCI）和巴黎综合理工学院。[1]我们感谢 Will Sawin 提出了这个格外优雅的谜题变体。

¶1.2. 背景。 我们的研究对象是图灵度的一种扩展，其中预言机可以包含某些形式的非确定性，正如这个谜题中所展示的那样。我们的动机和思想源于对可实现性的研究，这种扩展正是自然产生于其中的。不过，除第 7 节外，本文旨在让没有可实现性背景的经典可计算性理论学家也能读懂；在第 7 节中，我们将解释如何用拓扑斯论术语理解主要结果的证明。不过，让我们先简要回顾一下这一概念是如何产生的。

由 Hyland 定义的有效拓扑斯是构造性数学的一个模型——更准确地说，它是一个带有自然数对象的（初等）拓扑斯[2]，因而也是直觉主义高阶逻辑的一个模型——可以将其视为“可计算数学的世界”。这个拓扑斯包含集合拓扑斯，即“经典数学的世界”，并将其作为最小的非退化子拓扑斯；二者之间还有一系列子拓扑斯，对应着介于可计算数学与经典数学之间的世界。在介绍有效拓扑斯的开创性工作中，Hyland 将一个“$\mathbf{d}$ -可计算数学”的子拓扑斯与每个图灵度$\mathbf{d}$相关联；相较于有效拓扑斯，这种数学的描述只需将普通可计算性替换为相对于$\mathbf{d}$的可计算性。Hyland 证明，这定义了从图灵度到有效拓扑斯的子拓扑斯的一个嵌入 [Hyland 1982, 定理 17。2]。然而，许多子拓扑斯并非以这种方式产生。

作为拓扑斯理论中的一条一般事实，初等拓扑斯的子拓扑斯可由该拓扑斯上的所谓“Lawvere–Tierney 拓扑”（也称为“局部算子”等多种名称）来描述。尽管这种刻画已经更加具体，但要明确描述有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑并非易事。 [Lee 与 van Oosten 2013], 迈出了第一步：他们引入了有效拓扑斯上的一类基本 Lawvere–Tierney 拓扑，并用某些称为视景的良基树来描述它们。不过，主要进展来自 [Kihara 2023],，他提出了一种简单得多的描述，涵盖了有效拓扑斯上的所有 Lawvere–Tierney 拓扑。这种描述为这些对象提供了一个全新的视角：将它们视为图灵度的推广，并纳入两种截然不同的非确定性形式。

这种广义预言机是一个函数[3] $g\colon\ \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，其中每个幂集都代表一种非确定性。当程序在 n g 处查询预言机时，一个外部代理会以有利的方式选择一个集合 $G \in g(n)$（天使式非确定性），随后另一个外部代理会以对抗性的方式选择一个自然数 $v \in G$ （魔鬼式非确定性），而程序收到的值 v 仅此而已。

“仁慈”和“对抗性”的数学精确定义使用一种三人不完全信息博弈。计算 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的程序由一名玩家 Arthur4 表示，他只能采用可计算策略。Arthur 与仁慈的外部智能体 Nimue 结盟，双方共同对抗对抗性的外部智能体 Merlin。初始配置由输入 m 给出。在每个回合，Arthur 要么宣布其计算的最终值；当且仅当该值是正确的 $f(m)$ 时，他获胜；要么在某个 n 处查询预言机，此时 Nimue 选择 $G \in g(n)$，随后 Merlin 选择 $v \in G$，而 Arthur 收到 v （关键的是，他看不到 G）。根据定义，当 Arthur 和 Nimue 在这场博弈中有战胜 Merlin 的获胜策略时， f 相对于预言机 g 可计算。可以用直接明了的方式将其推广到 $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，从而定义.....之间的可约关系

[2]本文中，单独使用 拓扑斯 一词时，始终指初等托普斯，而非格罗滕迪克托普斯。[3]或者，也可以将它们描述为从 $\mathbb{N}\times\Lambda$ 到 $\mathbb{N}$的偏多值函数，其中 Λ 是一个未指明的集合，可能取决于预言机。我们将在 ¶2.4 中对此作出说明。[4]这些名称大概借自复杂性理论中的 Arthur–Merlin 交互式证明协议，它们与这种博弈略有相似之处。

函数 f, $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，而将彼此可约的函数视为等价的通常商集，便得到 Arthur–Nimue–Merlin 度构成的偏序集。精确定义详见第 2 节，或见 [Kihara 2023]; 第 3 节将介绍这些广义度上的格结构。

这种基于博弈的描述也有助于理解 Hyland 将图灵度嵌入 Arthur–Nimue–Merlin 度的方式：它是通过将图灵预言机 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 与广义预言机 $\hat{}g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ $n \mapsto \{\{g(n)\}\}$等同而得到的。当使用 $\hat{}g$进行博弈时，Nimue 和 Merlin 的步都没有选择余地，而 Arthur 实际上是在使用普通图灵预言机 g。

为简化记号，以下我们将图灵度称为**T0 度**，将最一般的 Arthur–Nimue–Merlin 度称为**T3 度**[5]。正如术语所暗示的，这是因为还有其他一些值得关注的特定类型预言机，它们处于“T0”和“T3”层级之间。

我们将部分函数 $g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$的度称为**T1 度**，并通过设定 $\hat{}g(n) := \{\{g(n)\}\}$（当 $g(n)$ 有定义时）以及 $\hat{}g(n) := \varnothing$（其他情况下），将其转换为一般预言机。在使用 $\hat{}g$进行的博弈中，Arthur 只能在 g 有定义的输入上查询预言机，否则 Nimue 无法采取任何步，因此 Arthur 和 Nimue 会立即输掉。反过来，从 f 到 g 的可约性定义博弈，只能从这样的初始配置开始：输入 m 满足 $f(m)$有定义。概括而言，当 f 有一个扩展是相对于预言机 g 部分可计算的，且在 g 定义域之外进行预言机查询会导致计算失败时，$f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$是 T1 可约于 $g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$。这种可约性是针对部分函数可以构造的众多可约性之一（参见 [Sasso 1975], [Cooper 1990], [Odifreddi 1989，命题 II.3.25]；相关讨论见 [Madore 2012]）。此外，[Faber & van Oosten 2014，推论 2.13]证明，由 T1 度产生的有效拓扑斯的子拓扑斯恰好就是那些本身为可实现性拓扑斯的子拓扑斯。对 T1 度结构的系统研究（以“子图灵度”之名）始于 [Kihara & Ng (Keng Meng) 2025]。

类似地，我们将部分函数 $g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$（可以将其视为“部分多值”函数）的度称为 **T2 度**，并通过设定 $\hat{}g(n) := \{g(n)\}$（当 $g(n)$ 有定义时）以及 $\hat{}g(n) := \varnothing$（否则）将其转化为一般预言机。在这种情况下，Nimue 别无选择，但 Merlin 的策略可以并非平凡。当 Arthur 在 n 上查询预言机时，集合 $g(n)$ 必须有定义（否则 Arthur 就会输），而 Merlin 可以从 $g(n)$ 中任选一个值返回给 Arthur。因此，T2 度对应于一种相当自然的非确定性（即对抗性非确定性）函数的图灵归约概念。下面举一个例子来说明这一点。

众所周知，在可计算函数与停机问题之间存在严格的 T0（图灵）度，但似乎没有哪个是自然产生的。另一方面，在 T2 度中存在一个自然的中间度。定义 $g(e) := \{0\}$，如果无输入且输出为布尔值的第 e 个程序终止并返回 false；$g(e) := \{1\}$，如果它终止并返回 true；而 $g(e) := \{0,1\}$，如果它不终止。通俗地说，这相当于有一个预言机：对于会终止的布尔值程序，它会给出返回值；对于不会终止的程序，则可能返回任一布尔值。g 的 T2 度在 [Kihara 2023, example 2.5] 中称为 `LLPO`，因为它与构造性数学中的较小限制原理有关。

[5]在 [Kihara 2024], 中，使用了“扩展图灵–魏劳赫度”这一术语。不过，研究重点更多在于克莱尼–维斯利拓扑斯中的类似对象，而且我们倾向于避免与 Weihrauch 之名相关联，因为我们从不处理单次调用预言机。因此，我们选用“Arthur–Nimue–Merlin 度”，并用“T1”“T2”或“T3”加以限定，以便将 T3 度与下文各段引入的中间推广区分开来。（对于 Weihrauch 度，我们也可以建议使用“W1”至“W3”，见 ¶2.7。）我们希望这一建议不会导致 [Munroe 2011] 中所述的情况。

全知。在这个 T2 度之上的 T0 度恰好是“PA 度”，这是可计算性领域中一个经典的研究对象（[Cooper 2004, definition 15.3.11]以及 [Soare 2016, theorem 10.3.3]）。另见下文 ¶4.8。

总而言之，从 T0（图灵）到 T1 度，只需允许部分函数；从 T1 到 T2 度，则引入对抗性非确定性（由“Merlin”拟人化代表）；从 T2 到最一般的 T3 度，则引入仁慈的非确定性（由“Nimue”拟人化代表）。由于这些中间层级也可以通过 Lawvere–Tierney 拓扑在更优雅的层面上刻画（见定理 7.5 的第二段），我们认为 T0–T3 术语是恰当的。

T3 度的另一个重要子类是**基本** T3 度，它们与 T2 度不可比较，最早由 [Lee 与 van Oosten 2013], 研究；它们对应于取常值的函数$\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。换句话说，Arthur 甚至不需要明确向预言机提问（但 Nimue 可以“读懂他心中的问题”），而 Nimue 会从一个固定的可能行动集合中，为 Merlin 选择一个可能行动集合。因此，这场博弈实际上变成了 Nimue 试图向 Arthur 传递信息、却不得不经由对手 Merlin 的博弈。

我们在讨论 T2 度时阐明过这样一种现象：一个经过深入研究的 T0（图灵）度类，在广义度中会简化为一个锥；这一现象在基本 T3 度中再次出现。事实上，Pitts 在其博士论文（[Pitts 1981, example 5.8]）中考察了由 $\mathbb{N}$的余有限子集组成的 T3 预言机。通俗地说，这意味着 Nimue 先选择一个自然数，然后 Merlin 可以在 Arthur 看到它之前将其替换为任意更大的数。而在 [van Oosten 2014, theorem 2.2] 中，证明了可由该预言机 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 计算的函数恰好就是超算术函数（即 Δ^1_1）。

更近来， [Kihara & Ng (Ming) 2026]对基本度进行了深入研究，重点关注其组合性质（以及它们与 Rudin–Keisler 序之间出人意料的关系）。

¶1.3. 贡献。我们通过展示一种将标准序与其相反的图灵（T0）度嵌入基本 T3 度的方法，进一步加深了对 Arthur–Nimue–Merlin 度的理解。具体而言，对于每个图灵度 $\mathbf{d}$，我们定义一个基本[6] T3 度 $\mathrm{coT}(\mathbf{d})$，称为其余图灵度，使得映射 coT 是反序嵌入，即$\mathbf{d}_0 \leq \mathbf{d}_1 \Leftrightarrow \mathrm{coT}(\mathbf{d}_0) \geq \mathrm{coT}(\mathbf{d}_1)$ 对所有图灵度$\mathbf{d}_0,\mathbf{d}_1$均成立。此外，我们证明，非零图灵度永远不会与某个非零图灵度的余图灵度可比。

后一事实的证明依赖于 T1 度中交的一种性质，即 T1 度中不存在由 T0 度构成的极小对。作为预备，我们对此给出一个简短且自成一体的证明；这一事实已由 [Kihara & Ng (Keng Meng) 2025]作为更复杂结果的推论证明；此证明归功于 [“Pastebee” 2026]。我们也借此机会描述 T2 度和 T3 度中的交，尽管这对主要结果并无必要，并作出一些相关评论。

¶1.4. 概述。第 2 节精确描述了亚瑟–尼缪–梅林博弈，并回顾了我们度类的基本性质：这基本上是对 [Kihara 2023] 某些部分的总结，但在记法和术语上有一些无关紧要的差异。第 3 节中，我们描述度的二元并与交，并证明了若干关于其格结构的结果。第 4 节中，我们定义与承诺问题相关的*解码度* 和*编码度* ，并证明主要的技术结果——定理 4.17，该定理刻画了何时

[6]因此，我们的“余图灵度”构造为 [Kihara 2023, §6, question 1]所提出的、寻求其他“有趣”基本 T3 度的问题提供了一个答案。

编码度是全知度。第 5 节中，我们将余图灵度定义为编码度的一种特殊情形，并证明主要结果——定理 5.8：从图灵度到余图灵度的映射是反序嵌入。第 6 节中，我们证明余图灵度与图灵度之间不存在非平凡的比较。第 7 节致力于用拓扑斯论术语重新诠释这些构造，也是唯一一节（在开篇自成一体地回顾有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑之后）要求读者熟悉拓扑斯理论和（范畴论）可实现性的内容。最后，第 8 节提出了若干有待进一步研究的问题。

¶1.5. 一般记号与约定。除非另有说明，我们都在经典逻辑下工作。不过，我们仍沿用构造性数学中的约定，将**有元素的**用于指称含有元素的集合（在经典逻辑下，这等价于非空）。我们用 $f\colon A \to B$ 表示全函数，用 $f\colon A \dashrightarrow B$ 表示部分函数。在后一种情况下，我们写作 $f(x)\!\downarrow$，表示 f 在 x处有定义；写作 $f(x)\!\downarrow = y$，则进一步表示其值等于 y。X 的幂集记作 $\mathcal{P}(X)$。对于“多值”函数，我们将其明确视为取值于幂集的函数来处理（例如，我们考虑函数$\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，有些作者则更倾向于写作 $\mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$）。

我们固定一个将元组编码为自然数的可计算哥德尔编码，记作 $(m_0, \dots, m_{k-1}) \mapsto \langle m_0, \dots, m_{k-1}\rangle$。第 e 个部分可计算函数为 $\varphi_e\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，而以 f 为预言机的第 e 个部分可计算函数为 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，记作 φ_e^f。在 φ_e^f 的定义中，如果第 e 个程序在 n 上运行时查询预言机 f 的未定义处，那么 $\varphi_e^f(n)$ 也未定义。程序的编号独立于预言机（例如，存在 e，使得对所有 f 都有 $\varphi_e^f = f$）。我们将子集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 与其特征函数 1_A 等同看待。

我们用 $U \sqcup V$ 表示两个集合 U、$V \subseteq \mathbb{N}$ 的带标记的不交并，定义为$U \sqcup V := \{\langle 0, u\rangle \mid u \in U\} \cup \{\langle 1, v\rangle \mid v \in V\}$。

¶1.6. 本文引入的具体记号和定义（数字指其定义所在的段落）。

- T0–T3 预言机、“基本”预言机：2.1
- “归约博弈”（$\preceq_{\mathrm{T3}}$）：2.3
- T0–T3 度（$\mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$ 至 $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$，$[f]_{\mathrm{T3}}$）：2.6
- $\boldsymbol{\omega}$（“全知”度）：2.8
- $[f \oplus g] = [f] \vee [g]$（度的二元并）：3.1
- $[f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g]_{\mathrm{T1}} = [f]_{\mathrm{T1}} \wedge_{\mathrm{T1}} [g]_{\mathrm{T1}}$（T1 度的二元交）：3.3
- $[f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g]_{\mathrm{T3}} = [f]_{\mathrm{T3}} \wedge_{\mathrm{T3}} [g]_{\mathrm{T3}}$（T2/T3 度的二元交）：3.8
- $\mathbf{d}_{P,Q}$（“解码”预言机/度）以及$\mathbf{c}_{P,Q}$（“编码”预言机/度）：4.1
- “承诺问题”：4.3
- $\preceq_{\mathrm{m}}$（承诺问题的多对一归约）：4.10
- H_0^A，H_1^A：5.1。
- $\check{}\mathbf{c}_A$（“co-Turing”度）和$\mathbf{d}_A$：5.1
- $\mathrm{coT}([A]_{\mathrm{T0}}) = \check{}\mathbf{c}_A$：5.8
- $U \rightrightarrows V$：7.3
- “有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑”：7.3
- $g \mapsto J_g$ 和 $J \mapsto J^\natural$：7.4
- $\varpi(G)$（“G有元素的”）：7.14
- $X_{P,\,Q}$：7.17
- $\mathrm{coT}(j)$（关于 j Lawvere–Tierney 拓扑）：7.30

2 亚瑟–妮妙–梅林博弈与度

本节旨在为不熟悉 [Kihara 2023] 的读者提供 Arthur–Nimue–Merlin 度的定义及其基本性质概述。我们还正式介绍“T0”至“T3”这一套术语，这是我们自行采用的术语。熟悉 相关内容同上引文 的读者可阅读¶2.4。

我们首先介绍各种预言机。

定义 2.1. 我们正式定义如下：

- 一个**T0 预言机**（或**普通图灵预言机**）是一个函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$。
- 一个**T1 预言机**是一个部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$。
- 一个**T2 预言机**是一个部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$。
- 一个**T3 预言机**是一个函数 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。
- 一个**基本 T3 预言机**是$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$的一个元素。

我们约定以下等同关系：

- 一个 T0 预言机 $g\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 等同于这样得到的 T1 预言机：将全函数 g 视为处处有定义的部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$。
- 一个 T1 预言机 $g\colon\ \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 等同于由部分函数$\mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$给出的 T2 预言机；该函数在 $g(n)$有定义时将 n映射为$\{g(n)\}$，否则无定义。
- 一个 T2 预言机 $g\colon\ \mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$等同于由全函数$\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$给出的 T3 预言机；该函数在 $g(n)$有定义时将 n 映射为$\{g(n)\}$，否则映射为 $\varnothing$。
- 一个基本预言机 $\mathscr{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，可视为由常值函数$\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 给出的 T3 预言机，其值为 $\mathscr{G}$。

¶2.2. 直观地说，应当如下理解这些预言机：查询 T0 预言机$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，相当于询问“$g(n)$ 的值是多少？”。T1 预言机 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 也是如此，只不过现在我们补充一句：“我保证这个值有定义！”对于 T2 预言机$\mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$，查询应理解为“从 $g(n)$ 中随便给我一个值”（这就是引入对抗性非确定性）。而对于 T3 预言机 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，查询的意思是“我的盟友会从 $G \in g(n)$ 中选出最好的一个，现在请从 G 中随便给我一个值”（因此现在我们同时具有善意和对抗两种形式的非确定性）。

为使这些直觉更加精确，我们引入亚瑟–尼缪–梅林博弈。以下定义根据 [Kihara 2023，定义 2.9 和 2.10] 略作改写。

定义 2.3. 设 $f, g\colon\ \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 为 T3 预言机。我们定义从 f 到 g 的**归约博弈** 如下：

- 博弈有三位玩家，分别名为 Arthur、Nimue 和 Merlin。Arthur 和 Nimue 联手对抗 Merlin（因此只有两种可能的结果：Arthur 和 Nimue 获胜、Merlin 落败；或者 Arthur 和 Nimue 落败、Merlin 获胜）。
- 博弈从一个初始配置或“挑战”[7]开始，其中包含一个自然数 m和一个集合 $F \in f(m)$。Nimue 和 Merlin 都能看到 m 和 F，而 Arthur 只能看到 m。因此，我们有时会把 m 称为初始配置的“公开”部分，把 F称为“秘密”部分。
- 双方按以下顺序行动：Arthur、Nimue、Merlin依次轮流行动，直到Arthur在自己的回合中执行结束博弈的特殊行动（或某位玩家无法行动而输掉博弈）。

[7]可以设想，这是 Merlin 为 Arthur 和 Nimue 选择的一项挑战：参见¶2.4。

• 轮到Arthur行动时，他有两种行动可选：要么宣布一个由他选择的自然数作为博弈的最终值，从而结束博弈；要么在他选择的自然数处查询预言机。

• 如果 Arthur 宣布 $u \in \mathbb{N}$ 是博弈的最终值，那么当且仅当 $u \in F$ 成立时，Nimue 和 Arthur 获胜（其中 $F \subseteq \mathbb{N}$ 是初始配置的秘密部分）；否则 Merlin 获胜。

• 如果 Arthur 在某个 $n \in \mathbb{N}$ 处查询预言机，他选择的 n 必须使得 $g(n)$ 有元素，否则 Nimue 和 Arthur 立即输掉。如果 $g(n)$ 确实有元素，那么博弈继续，由 Nimue 接着行动。Nimue 和 Merlin 都能看到 n 的选择。

• 在 Arthur 于 n 处查询预言机之后轮到她行动时（此时 $g(n)$ 有元素），Nimue 选择一个集合 $G \in g(n)$。Merlin 能看到她的选择，但 Arthur 看不到。博弈继续，由 Merlin 行动。

• 如果 G 为空，Merlin 立即输掉。如果 G 有元素，Merlin 选择一个答复 $v \in G$，Arthur 和 Nimue 都能看到这个答复，随后博弈继续，由 Arthur 行动。

• 如果博弈永不结束，则 Merlin 默认获胜。

该博弈的 **尼缪策略** 是一个函数，它将初始配置以及 Merlin 和 Arthur 的有限行动序列映射到$\mathcal{P}(\mathbb{N})$中的一个元素，供 Nimue 执行；**Arthur 策略** 则是一个部分可计算 函数，它将一个自然数（代表初始配置的公开部分m）以及一个有限自然数序列（代表 Merlin 的行动）映射为 Arthur 要执行的一步（例如，编码为$\langle \mathbf{0}, n\rangle$ 以向预言机查询 n，或编码为$\langle \mathbf{1}, u\rangle$ 以声明 u 为最终值）。如果策略返回的这一步未定义或形式不正确，则 Arthur 和 Nimue 将输掉博弈。一个 **Arthur+尼缪策略**由一对策略组成，分别是 Arthur 策略和尼缪策略。

当 Arthur 和 Nimue 按照该策略进行博弈时，无论初始配置和 Merlin 的行动是什么[8]，他们都能获胜，则称该 Arthur+尼缪策略是**制胜的** 。

我们称 f 可**归约** 到 g（或称 f T_3-可归约到 g），并记作 $f \preceq g$（或 $f \preceq_{\mathrm{T3}} g$），若存在一个在从 f 到 g 的归约博弈中获胜的 Arthur+Nimue 策略。我们也记作 $f \equiv g$（或 $f \equiv_{\mathrm{T3}} g$），当且仅当 $f \preceq g$ 且 $g \preceq f$。

¶2.4. 我们所定义的框架与 [Kihara 2023], 所用的框架有两处无关紧要的不同，现记录如下。

第一处是，我们将一般的（T_3）预言机定义为函数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$，而不是 $\check{}g\colon \mathbb{N} \times \Lambda \dashrightarrow \mathrm{P}(\mathbb{N})$（在同上引文中称为「双层」函数），其中 Λ 是一个任意集合，可以因函数而异。在后一种表示法中，Λ 是尼缪可用的步的集合，而这两种描述之间的联系很简单：函数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$ 将 n 映射到集合 $\{\check{}g(n,\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, \check{}g(n,\lambda)\!\downarrow\}$，该集合由函数 $\check{}g$ 在形如 (n,λ) 且函数有定义的取值处的值组成。（反过来，给定 $g\colon \mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$，我们可以令 Λ 为所有 $g(n)$ 的并集，并将 $\check{}g(n,\lambda)$ 定义为 λ，若 $\lambda \in g(n)$；否则无定义。）我们发现，将表示法写成函数 $\mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$ 更为方便，因为它更具对称性，也避免了处理「未指定」集合 Λ。

第二个区别是，我们将数据 (m, F) 视为“初始配置”，而不是 Merlin 的开局一步。当然，这无关紧要，因为我们要求 Arthur+Nimue 策略适用于所有初始配置，所以我们不妨假设初始配置由 Merlin 选定。不过，当我们需要谈到例如“Merlin 的行动序列”或“针对这种初始配置的策略”时，这种约定会稍微方便一些

[8]我们不定义获胜的 Merlin策略这一概念，因为除平凡情形外，Merlin不可能拥有这样的策略：Arthur可能会“碰巧”获胜，在第一步就宣布一个正确的值。

当我们需要说例如“Merlin 的行动序列”或“针对这种初始配置的策略”时。

命题 2.5。 T3 可归约性 $\preceq_{\mathrm{T3}}$ 是函数 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$之间的预序（即自反且传递）关系。特别地，T3 等价 $\equiv_{\mathrm{T3}}$ 是一种等价关系。

参考文献。 [Kihara 2023，命题 2.13] □

定义 2.6。 **T3 度**构成的偏序集，是所有 T3 预言机（即函数 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$）组成的集合关于等价关系 $\equiv_{\mathrm{T3}}$的商集，并配备由 $\preceq_{\mathrm{T3}}$ 诱导的偏序（也记作 $\preceq_{\mathrm{T3}}$）。我们用 $[g]_{\mathrm{T3}}$ 表示 g 的 T3 度，用 $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 表示所有 T3 度构成的集合。

我们将由 T0、T1、T2 或基本 T3 预言机定义的 T3 度分别称为**T0**、**T1**、**T2**或**基本** T3 度（如 2.1 节所述，它们都视为特定的 T3 预言机）。我们将 $\preceq_{\mathrm{T0}}$ 和 $\equiv_{\mathrm{T0}}$ 分别定义为 $\preceq_{\mathrm{T3}}$ 和 $\equiv_{\mathrm{T3}}$ 在 T0 预言机上的限制，并用 $[g]_{\mathrm{T0}}$ 表示 g 的 T0 度，用 $\mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$ 表示所有 T0 度构成的集合；T1 和 T2 层级也类似。

¶2.7. 我们强调，我们的 T0–T3 预言机属于“图灵”类型的预言机，也就是说，它们可以不受限制地使用（只要计算最终会终止，Arthur 查询预言机的次数就没有限制）。在 [Kihara 2023] 和 [Kihara 2024], 中，这些“图灵”类型的预言机与“Weihrauch”类型的预言机一同得到研究；后者指的是恰好调用一次（对于“带指示点的 Weihrauch”类型，则至多调用一次）的预言机：形式上，这意味着归约由博弈的一个变体定义，其中步数限制为 Arthur 仅调用一次预言机。（但其余定义保持不变，所以我们或许可以称它们为“W0”至“W3”预言机；在更一般的背景下，“W3”预言机已作为“扩展 Weihrauch 谓词”得到研究，见 [Bauer 2022，定义 3.7]。）不过，本文不会涉及这些“Weihrauch”类型的预言机；提及它们的唯一原因，是为了消除可能的困惑，并说明我们所用的定义与文献中的其他定义有何联系。

另一个可能引起混淆、但同样与本文无关的方面是：除了 0–3 层级以及图灵或 Weihrauch 类型的归约之外，还有第三个彼此正交的维度，即预言机性质。这里我们关注的是在 $\mathbb{N}$ 上的计算，即使将其推广为允许各种形式的非确定性；不过，也可以对在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的计算做类似的研究，或者，对于真正勇于探索的人来说，还可以研究“部分组合代数”，甚至相对部分组合代数。Kihara 2024] 在 [中对这一主题作了非常一般性的阐述。我们提及这些概念，仍只是希望帮助读者辨别这些可能令人困惑的相似概念[9]；但在本文中，只会出现对 $\mathbb{N}$ 的计算。

既然已经作了这些说明，现在可以放心地忘掉前面两段了。

定义 2.8。 用 **0** 表示的**最小** 度，是恒为零函数的 T0 度；它也是由$\{\{0\}\}$ 定义的基本 T3 度（换言之，面对 Arthur 的任意一步，Merlin 唯一的应对步就是出 0）。作为图灵度，它就是所有可计算函数的通常度。

最高 度，记为 $\top$，是取值为 $\varnothing$ 的常值函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的 T2 度；它也就是由 $\{\varnothing\}$ 定义的基本 T3 度（换句话说，Merlin 永远没有可走的步）。

[9]例如，Weihrauch 可约性最常见的形式，就是我们所谓的对“可计算的 Kleene 第二代数部分上的 W2 层预言机 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$”的研究，用以刻画各种维度。

Th全知[10]度，记为 $\boldsymbol{\omega}$，是由$\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$定义的基本 T3 度 .

不熟悉该理论的读者或许可以通过完成下面的练习来检验自己的理解；这也能为我们后续的“解码”预言机做热身：

练习2.9。 基本 T3 预言机 $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 与基本 T3 预言机 $\{\{0\}, \{1\}\}$在 T3 意义下等价（因此二者都定义度 $\boldsymbol{\omega}$）。

解答。 从 $\{\{0\}, \{1\}\}$ 到 $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的归约显而易见：尼缪只需选择作为初始配置一部分的集合（$\{0\}$ 或 $\{1\}$），迫使梅林将其中唯一的元素告知亚瑟，而亚瑟将其声明为最终值。

对于从 $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 到 $\{\{0\}, \{1\}\}$的归约，我们实质上需要说明：如果尼缪能够向亚瑟传递一位信息，她就能传递任意自然数。例如，一个获胜的亚瑟策略+尼缪策略可以是这样的：如果初始配置的秘密部分是 $\{n\}$，那么尼缪在第 n 步选择 $\{1\}$，而在其他所有步都选择$\{0\}$；亚瑟的策略则是不断查询预言机，直到梅林返回位 1；若这发生在第 n 步，就将最终值声明为 n。 □

¶2.10. 显然可以验证，$\mathbf{0}$ 和 $\top$ 分别是最小和最大的 T3 度，且 $\mathbf{0} < \boldsymbol{\omega} < \top$，此外， $\boldsymbol{\omega}$ 是次大的度，也就是小于 $\top$的最大度。事实上，对于 $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，我们有以下另一种情况：

- 存在 n 使得 $\varnothing \in g(n)$。那么 $[g]_{\mathrm{T3}} = \top$ ，因为对于每个预言机 f，在从 f 到 g的归约博弈中，Arthur 和 Nimue 可以按如下方式获胜：Arthur 在 n处查询预言机，Nimue 则走 $\varnothing$，这样 Merlin 就没有合法步，会立即输掉。
- 否则， g 归约到 $\boldsymbol{\omega}$，因为在相应的归约博弈中，Arthur 和 Nimue 有如下策略：给定由 n 和$G \in g(n)$组成的初始配置，Nimue 选取必定存在的 $v \in G$，并走 $\{v\}$ ，迫使 Merlin 走 v；Arthur 查询预言机一次，并直接返回所得的值。

由于 $\boldsymbol{\omega}$ 到 g 的归约博弈这一特例经常出现，我们来明确说明这一特例：在这个博弈中，尼缪会得到一个目标自然数，或者不失一般性（根据练习2.9）只得到一个比特；Arthur 的目标是在看不到目标的情况下，借助尼缪的帮助，宣布一个与给定目标相等的值。显然，没有尼缪的帮助就不可能有策略做到这一点，这一事实证明 $\boldsymbol{\omega}$ 不是 T2 度。

¶2.11. T0 度恰好就是带有通常偏序的图灵度。事实上，很容易验证，对于 f, g 两个 T0 预言机，在从 f 到 g 的归约博弈中，Arthur 的策略等同于一个能从 g 计算出 f 的预言机机器程序（而尼缪策略在这种情况下是平凡的，因为 Arthur 走过一步后，尼缪唯一合法的一步始终是打出$\{\{g(n)\}\}$ 中的唯一元素 n）。

类似地，对于部分函数 $f, g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，我们有 $f \preceq_{\mathrm{T1}} g$ 当且仅当存在 e，使得 φ_e^g 扩展了 f；也就是说，若 $\varphi_e^g(m)\!\downarrow = f(m)\!\downarrow$，则 $f(m)\!\downarrow$。

警告2.12. 我们特别强调，具有 T1 度 0 的部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，是指存在一个部分可计算的 扩展[11]，但该函数本身不一定是部分可计算函数。

---

[10]这是我们采用的术语（在 [Kihara 2023] 中，该度记作 $\mathtt{Error}_{1/2}$），但其含义似乎不言自明。不过，值得指出的是，博弈论描述，尤其是“Nimue”这一角色，为我们所说的“全知”提供了令人满意的解释：我们可以向一个“全知”的预言机提问，同时又想避免诸如“你会对这个问题回答‘不’吗？”这样的自指问题。事实上，Arthur 甚至不需要向预言机表述问题，因为这是一个基本预言机；问题已由他与 Nimue 共享的共同策略所蕴含。

[11]一个 mi 我们暂且将这样的函数称为“次可计算”，但我们一直避免使用这一术语 y.

例如，任意部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 只要在其定义处均等于 0，其 T1 度就是 0，但显然，这类函数中只有可数多个属于 φ_e。

¶2.13. 正如我们刚才所说，对于 T1 预言机 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，满足 $[f]_{\mathrm{T1}} = \mathbf{0}$ 意味着它有一个（部分）可计算扩张。我们也简要说明一下，在其他层级中，度为 0意味着什么。

对于 T2 预言机 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$，命题 $[f]_{\mathrm{T2}} = \mathbf{0}$ 意味着存在一个部分可计算函数 φ_e，使得每当 $f(m)\!\downarrow$ 时，我们都有 $\varphi_e(m)\!\downarrow \in f(m)$（换句话说，对于每个已定义的 $f(m)$，我们都可以通过可计算方式选取其中一个元素）。

对于 T3 预言机 $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，命题 $[f]_{\mathrm{T3}} = \mathbf{0}$ 意味着存在一个部分可计算函数 φ_e，使得每当 $f(m)$ 有元素时，我们都有 $\varphi_e(m)\!\downarrow \in \bigcap_{F\in f(m)} F$。（事实上，在 f 归约到 0 的归约博弈中，初始配置包含一个展示给 Arthur 的 m，以及一个不展示给 Arthur 的 $F \in f(m)$。由于 Nimue 和 Merlin 此时实际上并未参与博弈，Arthur 的任何策略都会对所作的选择$F \in f(m)$作出相同的反应，因此最终必须产生$\bigcap_{F\in f(m)} F$中的一个元素。）注意，当 $f(m) = \varnothing$时，$\varphi_e(m)$可能没有定义。

特别地，基本预言机 $\mathscr{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 的度为 $\mathbf{0}$，当且仅当 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ 有元素（这是[Lee 与 van Oosten 2013，命题 3.1(iii)]）。

3 度上的格结构

本节汇集了若干关于 T1–T3 度格结构的结果，其中有些应视为众所周知的结论。我们陈述并证明的内容略多于主要结果严格所需的部分，希望这能为进一步研究 Arthur–Nimue–Merlin 度提供其格结构的描述。

二元并（即上确界、最小上界）运算没有什么问题：它由图灵度中两个度的并的标准构造表示，而该构造在所有其他层级上仍然适用。直观地说，能够访问两个预言机的并，意味着 Arthur 可以自由查询其中任意一个。具体而言：

命题 3.1. 偏序集 $\mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$、$\mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$、$\mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$、$\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 都有二元并（记作 $\vee$），且嵌入 $\mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$、$\to \mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$、$\to \mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$、$\to \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 保持这些二元并。在每个层级中，我们都有 $[f] \vee [g] = [f \oplus g]$，其中 $(f \oplus g)(2n) := f(n)$，且 $(f \oplus g)(2n+1) := g(n)$。

证明。 我们只需注意到，$f \oplus g \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 当且仅当 $f \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 且 $g \preceq_{\mathrm{T3}} h$（因为该构造保持 T0–T3 的每个层级；如果它在 T3 层级计算出并，那么在较低层级也同样成立）。不过，只要注意到从 $f\oplus g$ 到 h 的归约博弈的初始配置会告知 Arthur+Nimue 应采用哪种归约策略（$f \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 或 $g \preceq_{\mathrm{T3}} h$），这一点便显而易见。 □

基本 T3 度中也存在二元并，且它们在嵌入到 T3 度时得以保留，但构造必须有所不同；[Lee & van Oosten 2013，命题 5.12] 对此作了描述。

¶3.2. 现在我们来考虑更有趣的二元交（下确界、最大下界）情形。众所周知，T0 度并不总是存在二元交（参见 [Soare 2016，定义 3.4.1(v) 和推论 6.5.5]，或 [Cooper 2004，习题 10.3.10 和 13.4.24]），这可能会被视为 T0 度的一项缺陷。

现在我们将说明 T1、T2 和 T3 度为何都有二元交，以及它们之间有何关系。这个构造更为精细，但仍然相当明确。直观地说，能够获得两个预言机的交，意味着 Arthur 只能得到他从这两个预言机两者都能得到的答案；但“得到答案”究竟意味着什么，需要针对每个层级加以澄清（我们将看到，T1 层级与 T2/T3 层级对应着不同的运算）。

我们先从 T1 交谈起，它们将在第 6 节中发挥关键作用。

命题 3.3。 偏序集 $\mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$ 具有所有二元交。具体构造如下：对于 T1 预言机 f, g：$\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，有 $[f]_{\mathrm{T1}} \wedge_{\mathrm{T1}} [g]_{\mathrm{T1}} = [f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g]$，其中$f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g$：$\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$在 $\langle p, q, m, n\rangle$ 上定义，当且仅当 $\varphi_p^f(m)$ 和 $\varphi_q^g(n)$ 均有定义且取值相同；此时其值就等于该值。

证明。 这见 Kihara & Ng (Keng Meng) 2025，命题 3.1], ，但为方便读者，我们仍重复证明。我们有 $f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g \preceq_{\mathrm{T1}} f$，因为可以用 f 计算 $\varphi_p^f(n)$，同理可得 $f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g \preceq_{\mathrm{T1}} g$。另一方面，若 $h \preceq_{\mathrm{T1}} f$ 且 $h \preceq_{\mathrm{T1}} g$，根据 2.11 第二段对 T1 可约性的描述，存在 p 和 q，使得只要 $h(n)$ 有定义，它就同时等于 $\varphi_p^f(n)$ 和 $\varphi_q^g(n)$，因此 $h \preceq_{\mathrm{T1}} f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g$。 □

备注 3.4. $f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g$ 的定义有许多细微的变体。显然，我们可以取 $m = n = 0$（根据 s-m-n 定理）。不那么显而易见的是，有时称为“Posner 技巧”的事实：我们也可以（或者，作为替代）取 $p = q$：事实上，如果 f 和 g 在两者都有定义时总是相同，那么结论显然成立；而如果存在 k，使得它们都有定义且在 k 处不同，那么程序可以先查询 k 处的值，以判断自己面对的是哪个预言机。

¶3.5. 正如我们在命题 3.1 中所见，二元并运算不依赖于其计算所在的层级。对于 T0 和 T1 层级之间的二元交，情况则完全不同：T0 交不仅可能不存在（如我们在 3.2 中回顾的那样），而且即使它存在，也可能不等于 T1 交——事实上，我们很快将看到，它本质上从不等于 T1 交。

回顾一下，已知图灵（T0）度包含<狷style id='1'>极小对，即由非零度组成的二元组，其（T0）交为零（参见 [Soare2016，定理 6.2.3] 或 [Cooper2004，定理 12.5.2]）。下面的命题表明，与此相反，两个 T0 度的 T1 交只有在其中一个为零时才可能为零：这就是 [Kihara&Ng(KengMeng)2025，推论 4.8], 后者已足以满足我们的目的，但我们仍记录一个略微的推广，并给出一个更直接的证明；关于其中的思想，我们要感谢[12] [“Pastebee” 2026]。

命题 3.6。 （普通版本。） 若 $\mathbf{f} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$ 和 $\mathbf{g} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$ 满足 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} = \mathbf{0}$，那么必有 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$或 $\mathbf{g} = \mathbf{0}$。

（相对化版本。）如果$\mathbf{f} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$、$\mathbf{g} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$和$\mathbf{h} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$满足$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$，那么实际上$\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$或$\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$。

证明。 我们先证明“普通”版本。

不失一般性，我们可以假设我们的度由取值于 {0, 1} 的预言机表示，即 f： $\mathbb{N} \dashrightarrow \{0, 1\}$，以及 g： $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$。事实上，很容易验证˜函数 f： $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 的 T1 度等于 f： $\mathbb{N} \dashrightarrow \{0, 1\}$ 的 T1 度，其中当且仅当 $f(m)\downarrow$ 时˜ ˜ ˜$f(m, u)\downarrow$，在这种情况下，$f(m, u) = 1$当 $f(m) = u$且 $f(m, u) = 0$

[12]该答复的作者没有回应我们询问其希望以何种方式被致谢的评论，而且我们不知道他们现在真正的恒等映射，因此必须将其引用为“Pastebee”。

若 $f(m) \neq u$（当然，如果 g 是全函数，那么 $\tilde{g}$也是全函数，而且无论如何，这种情况下的论证都是标准的）。

现在（回顾 ¶2.11），我们的假设$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} = \mathbf{0}$ 意味着 $f \curlywedge_{\mathrm{T1}} g$ 有一个扩展是部分可计算函数 φ_e。

令 r 为这样一个预言机程序的代码：它接受一个参数，读取预言机在该参数处的值并直接返回该值，因此对所有 k都有 $\varphi_r^k = k$： $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$。类似地，令 r' 读取预言机在参数 v 处的值，并返回其相反值 $\neg v := 1 - v$，将其视为布尔值（r' 对非布尔值的行为无关紧要）。

考虑以下这个旨在计算 f的扩展的算法 X。给定输入 m，我们通过交错执行并行搜索满足以下条件的 $n \in \mathbb{N}$： $\varphi_e(r, r, m, n)$ 和$\varphi_e(r, r', m, n)$ 均有定义且相等，然后返回这个共同的值。我们来检查该算法的部分正确性。如果在输入 m 上调用该算法，且 $f(m)$ 有定义，并且算法在搜索中找到 n，那么要么 $f(m) = g(n)$，此时 $\varphi_e(r, r, m, n)\!\downarrow = f(m)$；要么 $f(m) = \neg g(n)$，此时 $\varphi_e(r, r', m, n)\!\downarrow = f(m)$；在这两种情况下，算法的返回值都是正确的。（这里用到 $\mathbf{g}$ 是 T0 的假设，以确保 $g(n)$ 有定义，从而可以进行分类讨论。）因此，如果算法 X 在所有 f 有定义的输入上都终止，那么 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$。

现在假设 m_0 是一个输入，使得 $f(m_0)$ 有定义，但刚才描述的算法 X 不会终止。在这种情况下，我们声称 $\mathbf{g} = \mathbf{0}$，因为下面这个其他算法 Y 可以计算 g：给定输入 n，并行计算 $\varphi_e(r, r, m_0, n)$ 和 $\neg\varphi_e(r, r', m_0, n)$，直到其中一个终止，然后返回其结果。先前假定用于计算 f 的算法 X 不会在 m_0 上终止，这意味着值 $\varphi_e(r, r, m_0, n)$ 和 $\neg\varphi_e(r, r', m_0, n)$ 不可能同时都有定义且彼此不同，因此只需证明其中一个必定有定义且正确即可。如果 $f(m_0) = g(n)$，那么 $\varphi_e(r, r, m_0, n)$ 有定义；而如果 $f(m_0) = \neg g(n)$，那么 $\neg\varphi_e(r, r', m_0, n)$ 有定义。

至此，“普通”版本定理的证明就完成了。

为了证明“相对化”版本，我们作如下观察：刚才给出的“普通”版本证明同样适用，只需将可计算性替换为相对于普通图灵预言机 h 的可计算性： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$（因此我们可以在全文中将 φ_e 替换为 φ_e^h）。

□

备注 3.7。在相对化版本的证明中，要求 $\mathbf{h}$ 是 T0 度这一假设，是为了能够并行运行计算。但我们来说明为什么这个条件确实是结论成立所必需的。事实上，若 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 是不可比较的 T0 度（由经典 Kleene–Post 定理可知这样的度存在 [Soare 2016，定理 6.1。1]），并令 $\mathbf{h} := \mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g}$（这是一个 T1 度），那么 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$ 显然成立。因此，如果我们能将该命题应用于作为 T1 度的 $\mathbf{h}$，就会得到 $\mathbf{f} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{g}$ 或 $\mathbf{g} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{f}$，这与 $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ 不可比较这一假设矛盾。

我们还注意到，即使交$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T0}} \mathbf{g}$ 恰好存在，在仍然假设$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 是不可比的 T0 度的情况下，显然的不等式$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T0}} \mathbf{g} \leq \mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g}$必定是严格的。事实上，否则，将命题应用于 $\mathbf{h} := \mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T0}} \mathbf{g}$（我们假设它存在），那么$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$ 就会推出$\mathbf{f} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{g}$ 或$\mathbf{g} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{f}$，这再次与$\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 不可比的假设矛盾。

另一方面，我们不知道$\mathbf{g}$ 是 T0 度这一假设（证明中用到了该假设）是否确实不可或缺（参见问题 8.4）。

尽管我们不会过多用到它，为求完整起见，仍描述 T2 和 T3 层级上的交。（回忆一下 $U \sqcup V := \{\langle \mathbf{0}, u\rangle \mid u \in U\} \cup \{\langle \mathbf{1}, v\rangle \mid v \in V\}$。）

命题 3.8。偏序集 $\mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$ 和 $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 都有所有二元交，且嵌入 $\mathscr{D}_{\mathrm{T2}} \hookrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 保持这些二元交。在 T2 层级上，一个显式构造如下：对于 T2 预言机 $f, g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathsf{P}(\mathbb{N})$，我们有 $[f]_{\mathrm{T2}} \wedge_{\mathrm{T2}} [g]_{\mathrm{T2}} = [f \curlywedge_{\mathrm{T2}} g]_{\mathrm{T2}}$，其中 $f \curlywedge_{\mathrm{T2}} g$ 在 m, n 上有定义，当且仅当 $f(m)$ 和 $g(n)$ 均有定义，此时其值为 $f(m) \sqcup g(n)$。在 T3 层级上，我们有构造 $[f]_{\mathrm{T3}} \wedge_{\mathrm{T3}} [g]_{\mathrm{T3}} = [f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g]_{\mathrm{T3}}$，其中 $(f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g)(m, n)$ 同样在 $f(m)$ 和 $g(n)$ 均有定义时才有定义，此时其值为 $\{U \sqcup V \mid U \in f(m)\ V \in g(n)\}$。

换言之，当查询 $f \curlywedge_{\mathrm{T2}} g$ 或 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 时，Arthur 会提出两个问题，一个针对 f，另一个针对 g；在 T3 层面，Nimue 也会做出两个相应的步；然后 Merlin 从这两个问题中任选一个作答。（当然，对称地，当试图将 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 归约到其他某个预言机时，初始配置会提出两个挑战，一个针对 f，另一个针对 g，而 Arthur 最终必须声明一个值来回答其中一个挑战，并指出所回答的是哪一个。）

命题 *3.8* 的证明。只需证明该构造给出了 T3 度中的交，因为将其应用于两个 T2 预言机时，会得到如所述的一个 T2 预言机。

$f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g \preceq_{\mathrm{T3}} f$ 和 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g \preceq_{\mathrm{T3}} g$ 这一点可立即验证。现在我们假设 $h \preceq_{\mathrm{T3}} f$ 和 $h \preceq_{\mathrm{T3}} g$，并证明 $h \preceq_{\mathrm{T3}} f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$。为此，Arthur 和 Nimue 在从 h 到 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 的归约博弈中采用以下策略。他们在脑中并行模拟两场归约博弈，一场是从 h 到 f，另一场是从 h 到 g（根据假设，他们在这两场博弈中都拥有获胜策略），并从相同的初始配置开始（即从 h 到 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 的归约博弈所要求的配置）。每当轮到 Arthur 在从 h 到 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 的归约博弈中行动时，他就参考自己在从 h 到 f 以及从 h 到 g 的归约博弈中的策略：如果其中任一策略指示他声明最终值，他就照做（采用先终止的策略给出的值）；否则，两种策略都会指示他用问题 m（针对 f）和 n（针对 g）查询预言机，于是他便查询 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 预言机 m, n。同样，轮到 Nimue 行动时，她会执行其在从 h 到 f 和从 h 到 g 的归约博弈中相应策略所指示的步。随后，Merlin 会输出形如 $0, u$（提供 f 预言机的回答）或 $1, v$（提供 g 中的一个）的步：在第一种情况下，我们假定 Merlin 在从 h 到 f 的归约博弈中走了步 u，而从 h 到 g 的归约博弈保持不变；第二种情况则对称。由于每一步至少会推动两场归约博弈中的一场向前进行，博弈最终会终止，届时 Arthur 会声明一个值；该值必定正确，因为它是由两场模拟博弈中的一场的获胜策略给出的。

□

注 3.9. 我们可以调整第 3.8 节的构造（例如，针对 T2 预言机），使其更接近第 3.3 节的构造：允许 Arthur 提出形式为 $\langle p,\ q,\ m,\ n\rangle$ 的查询，并让 Merlin 从 $\varphi_p^f(m)$ 的可能取值集合与 $\varphi_q^g(n)$ 的可能取值集合的带标记的不交并中作答（更精确地说，按第 7.4 节的记号，即 $J_f^\natural(p) \sqcup J_g^\natural(q)$），这样上述证明会更容易。不过，这里要指出的是，对于 T2/T3 度，我们不需要 借助某个“通用”构造 $p \mapsto \varphi_p^f(0)$ 来绕过这个问题；而对于 T1 度，我们确实需要这样做：若试图将 T1 交定义为一个函数，在 $f(m)$ 和 $g(n)$ 都有定义且取值相等时，把 $\langle m, n\rangle$ 映射到它们的公共值，显然会因一些简单原因而失败（例如，f 的取值可能属于 $\{0, 1\}$，而 g 的取值属于 $\{2, 3\}$）。

注 3.10。 [Kihara & Ng (Keng Meng) 2025] 的一项引人注目的结果是，尽管 T1 度构成一个格，但该格不是分配的 （同上引文，定理 4.9），甚至也不是模的（同上引文，定理 4.10）。与此相反，T2 度或 T3 度构成的格是 分配的。对于 T3 度，若预先采用第 7 节所阐述的观点，则这可由 [Kihara 2023 的推论 3.5] （我们将其重述为定理 7.5）中与 Lawvere–Tierney 拓扑的对应关系推出，再结合一个一般事实：Lawvere–Tierney 拓扑

在初等托普斯上构成海廷代数（[Johnstone 2002，例 A4.5.14(f)]；我们将在 ¶3.14 回到这一点），尤其构成分配格。对于 T2 度，这可由刚刚证明的事实推出，即包含映射 $\mathscr{D}_{\mathrm{T2}}, \to \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 保二元交与并。

或者，直接根据命题 3.1 和 3.8 中的描述，很容易验证 $(f \oplus g) \curlywedge_{\mathrm{T3}} (f \oplus h) \preceq_{\mathrm{T3}} f \oplus (g \curlywedge_{\mathrm{T3}} h)$ 一般成立[13]；这足以证明 T3（因而也包括 T2）度的分配律。

由此可知，包含映射 $\mathscr{D}_{\mathrm{T1}} \hookrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$ 不可能同时保持二元交和二元并；又因为它确实保持二元并（命题 3.1），所以我们得出结论：它不保持二元交。因此，存在 T1 度 $\mathbf{f}, \mathbf{g}$，使得显然的不等式 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} \leq \mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T2}} \mathbf{g}$ 是严格的。我们对这种情况还不甚了解；见问题 8.5。

现在我们来证明两个关于 T3 交的命题，它们与关于 T1 交的命题 3.6 非常相似。对我们的目的（其实相当有限）而言，其中任一个都足够了；但我们认为它们可能各自具有独立的意义，因此决定将两者都列出。建议读者仔细注意对 $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ 的假设。

命题 3.11。称 T3 预言机 $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 为**全 inhabited**，若对所有 n，$g(n)$都有元素。

设$\mathbf{f}$、$\mathbf{g} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$和$\mathbf{h} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$，其中$\mathbf{g}$由一个全 *inhabited* 预言机表示。若$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$，那么实际上$\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$ 或$\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$。

证明。设$\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$、$\mathbf{h}$ 分别由函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$、$g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 表示，其中对每个 n，$g(n)$ 都有元素；而 $h\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 则相应地表示。

根据命题 3.8，我们先来展开说明 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 的含义。注意，由于 h 是 T1，Nimue 不参与游戏，因此我们可以认为 Arthur 的策略 e 定义了一个部分 h-可计算函数 φ_e^h（参见 ¶2.11），它以 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g$ 初始配置中 Arthur 可见的部分 m, n 为输入。Arthur 看不到他要参与游戏的初始配置中的秘密部分（$F \in f(m)$ 和 $G \in g(n)$），因此，在没有 Nimue 帮助的情况下，他需要根据自己选择应对的挑战，在 $\bigcap_{F \in f(m)} F$ 或 $\bigcap_{G \in g(n)} G$ 中行动（此处 $\bigcap_{F \in f(m)} F$ 的出现，参见 ¶2.13）。因此，假设是存在某个 e，使得对所有满足 $f(m)$ 有元素的 m, n，以下二者必居其一：“Arthur 应对 f 挑战”：$\varphi_e^h(m,n)\!\downarrow = 0, u$，且 $u \in \bigcap_{F \in f(m)} F$；或“Arthur 应对 g 挑战”：$\varphi_e^h(m,n)\!\downarrow = 1, v$，且 $v \in \bigcap_{G \in g(n)} G$。假设对所有 n，$g(n)$ 都有元素，可确保只要 $f(m)$ 有元素，$\varphi_e^h(m,n)\!\downarrow$ 就成立（无需讨论 n）。

现在，根据经典逻辑（并利用这样一个事实：φ_e^h 是一个单值函数，且在我们刚才所说的情形下有定义），以下两种情况必有其一：要么对于所有满足 $f(m)$ 有元素的 m，都存在 n，使得 $\varphi_e^h(\langle m, n\rangle)\!\downarrow = \langle 0, —\rangle$；要么存在 m_0，使得 $f(m_0)$ 有元素，并且对于所有 n，都有 $\varphi_e^h(\langle m_0, n\rangle)\!\downarrow = \langle 1, —\rangle$。

在第一种情况下，以下策略 X 表明 $f \preceq_{\mathrm{T3}} h$：给定 m，我们依次搜索[14]，寻找满足 $\varphi_e^h(\langle m, n\rangle)\!\downarrow = \langle 0, u\rangle$的 n；找到这样的 n后，我们返回 u（即将其声明为最终值）。第一种情况的假设恰好表明，loop 会终止，并且 $u \in \bigcap_{F \in f(m)} F$，因此这是一个将 f归约到 h的正确策略。

在第二种情形下，以下策略 Y 表明 $g \preceq_{\mathrm{T3}} h$：只需计算$\varphi_e^h(\langle m_0, n\rangle)\!\downarrow = \langle 1, v\rangle$ 并返回 v（即将其声明为最终值）。第二种情形的假设

[13]相比之下，值得思考的是，为什么命题 3.3 不 允许将同样的证明推广到 T1 度。[14]我们强调，这里我们是按顺序 进行搜索的：由于我们关于 g 的假设，所有 $\varphi_e^h(\langle m, n\rangle)$ 都保证有定义，因此我们不需要进行交错执行；幸运的是，在 T1 预言机下无法进行交错执行。

恰好表明这样会得到$v \in \bigcap_{G\in g(n)} G$，因此这是一个将 g 归约到 h的正确策略。

□

命题 3.12。 如果 $\mathbf{f} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$，且 $\mathbf{g}$ 是一个基本 T3 度，并且 $\mathbf{h} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$ 满足 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$，那么事实上 $\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$ 或 $\mathbf{g} = \mathbf{0}$。

证明。 设 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$、$\mathbf{h}$ 分别由 f 表示： $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$、 $\mathscr{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，以及 h： $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$。

根据命题 3.8，我们来展开说明 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} \mathscr{G} \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 的含义。初始配置包含两个挑战，一个针对 f，另一个针对 $\mathscr{G}$ 预言机，而 Arthur 可以选择应对其中任意一个：第一个挑战由一个公开的 m 和一个来自 $f(m)$ 的秘密元素 F 构成，Arthur 应当通过给出 F 中的一个元素来作答；第二个挑战由一个来自 $\mathscr{G}$ 的秘密元素 G 构成，Arthur 应当通过给出 G 中的一个元素来作答；Arthur 可以选择应对任意一个挑战（并且必须说明选择哪一个）。假设 $f \curlywedge_{\mathrm{T3}} \mathscr{G} \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 意味着 Arthur 在没有 Nimue 帮助的情况下（因为 h 是 T2），但借助 h 预言机给出的（对抗性非确定）输出，对这个博弈有一个可计算的获胜策略。注意，Arthur 看不到第二个挑战的任何内容：他看到的只有针对 f 预言机的挑战中可见的部分 m。

现在，如果存在一个初始 m_0，以及一串 Merlin 的行动（回应对h 预言机的查询），使得 Arthur 的策略在这种情况下选择应对第二个挑战，那么它产生的元素属于 $\bigcap_{G\in\mathscr{G}} G$，因为它不能依赖于初始配置中秘密的 G 部分（更准确地说：对于 $\mathscr{G}$中的任意元素，展开的过程都会完全相同）。但这意味着 $\bigcap_{G\in\mathscr{G}} G$ 有元素，即 $[\mathscr{G}]_{\mathrm{T3}} = \mathbf{0}$（参见 ¶2.13）。否则，Arthur 的策略就是始终应对 f 预言机（无论初始配置和 Merlin 的回答是什么），这就表明了 $f \preceq_{\mathrm{T3}} h$。 □

注记 3.13。显然，命题 3.6、3.11 和 3.12 有一个共同主题（“在某些假设下，只有当$\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$ 时，才可能有$\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$ 或$\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$”），它们的证明也有一个共同主题。然而，我们尚未领会这一主题更深层的含义。

由于基本 T3 预言机要么是 $\varnothing$（其度为$\mathbf{0}$），要么在扩展为常值函数时是全 inhabited，因此命题 3.11 和 3.12 有一个共同的特殊情形（或者我们该说是一个“交”？），即$\mathbf{f}$ 是 T3，$\mathbf{g}$ 是一个基本 T3 度，而$\mathbf{h}$ 是 T1 的情形。事实上，后文中我们真正会用到的唯一情形，是一个更加特殊的情形：$\mathbf{f}$ 是 T0，$\mathbf{g}$ 是基本的，而$\mathbf{h} = \mathbf{0}$，所以任一命题都足够了。

不过，我们可能会想，这两个命题是否有一个自然的共同推广（或者我们该说是一个“并”？）。鉴于上一段第一句，显而易见的候选命题是：“若 $\mathbf{f} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$，且 $\mathbf{g} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 由一个全 inhabited 的预言机表示，并且 $\mathbf{h} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$ 满足 $\mathbf{f} \curlywedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$，那么实际上 $\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$ 或 $\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$。”然而，这个陈述是错误的：事实上，如备注 3.7 所述，令 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 为不可比较的 T0 度，并令 $\mathbf{h} = \mathbf{f} \curlywedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{g}$；根据命题 3.8，$\mathbf{h}$ 也满足 $\mathbf{f} \curlywedge_{\mathrm{T2}} \mathbf{g}$，因此它是一个 T2 度。于是，若引述的陈述成立，我们便可得出 $\mathbf{f} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{g}$ 或 $\mathbf{g} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{f}$，这与 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 不可比较的假设相矛盾。

¶3.14. *旁论。* 尽管这在下文的论述中只占很小的篇幅，但如果我们连 T3 度上的 **Heyting 运算**都不提及，至少也算失职。正如前面提到的， $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 是一个海廷代数：这是因为它可以与 [Kihara 2023 的推论 3.5]，中的 Lawvere–Tierney 拓扑相对应；该推论将在下文作为定理 7.5 重现，而拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑构成海廷代数这一事实也是一般结论（[Johnstone 2002，例 A4.5.14(f)]）。不过，我们当然可以

更直接地验证这一点：我们尚未这样做，但至少可以概述 T3 度上 Heyting 运算 $\mathbf{g} \Rightarrow_{\mathrm{T3}} \mathbf{h}$ 的一种具体描述。按定义，它是满足 $\mathbf{f}$ 的最大度，其中 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{g} \leq \mathbf{h}$。不过，这一描述是否确实正确，就留作练习。

具体而言，若 g，h 是表示$\mathbf{g}$，$\mathbf{h}$的 T3 预言机，那么$\mathbf{g} \Rightarrow_{\mathrm{T3}} \mathbf{h}$ 由一个 T3 预言机 s 表示，其描述如下。首先，我们考虑从 g 到 h 的归约博弈的一种略作修改的形式：现在 Arthur 还可以在任意时刻走一个特殊的“认输”步，并将任意值 $w \in \mathbb{N}$ 作为参数；这会结束博弈并使 Merlin 获胜。我们称该博弈中的“有效”Arthur+Nimue 策略（其条件比“获胜”策略弱）：无论 Merlin 走什么合法步，Arthur 和 Nimue 要么获胜，要么在有限时间内以 Arthur 认输告终（换言之，该策略总是给出合法步，从不会让 Nimue 陷入无步可走的局面，而且博弈总会在有限时间内终止）；等价地说，“有效”的 Arthur+Nimue 策略就是一种获胜策略，只不过我们假想认输也算 Arthur+Nimue 获胜（这样博弈就变得非常无聊了！）。显然，有效的 Arthur+Nimue 策略总是存在，但只有当$g \preceq_{\mathrm{T3}} h$时才存在获胜策略（按定义）。

现在，我们将 $\check{s}(e,\sigma) \in \mathrm{P}(\mathbb{N})$ 定义如下：若 (e,σ) 是一个有效的 Arthur+Nimue 策略（如我们刚刚所定义的），其中 $e \in \mathbb{N}$ 是 Arthur 部分（的哥德尔编码），而 σ 是 Nimue 部分，则我们令 $\check{s}(e,\sigma)$ 表示满足以下条件的 $w \in \mathbb{N}$ 所组成的集合：至少存在一段由 Merlin 执行的行动序列，使得 Arthur 在参数 w 下认输。（若 (e,σ) 不是有效的 Arthur+Nimue 策略，则 $\check{s}(e,\sigma)$ 未定义。若 (e,σ) 有效，但不存在 Arthur 认输的情形，则 $\check{s}(e,\sigma) = \varnothing$。）最后[15]，我们令 $s(e)$ 表示所有满足 (e,σ) 是有效的 Arthur+Nimue 策略的 σ 所对应的 $\check{s}(e,\sigma)$ 构成的集合（若不存在这样的 σ，则 $s(e)$ 将为 $\varnothing$；但若存在这样的 σ，使得 $\check{s}(e,\sigma) = \varnothing$，则 $s(e)$ 将有定义且包含 $\varnothing$）。这就定义了我们的s：$\mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$。

更通俗地说，s 接收一个可能会认输（但除此之外有效）的 Arthur 策略 e，用于将 g 归约到 h，并返回一个值 w，借此它或许会实际认输。（如果不存在这样的值，即 $g \preceq_{\mathrm{T3}} h$，那么对于某个 e，Arthur 将永不放弃、永不认输：于是$\varnothing \in s(e)$，因此 $[s]_{\mathrm{T3}} = \top$。）

利用命题 3.8 中给出的 T3 交的描述，可以验证$f \curlywedge_{\mathrm{T3}} g \preceq_{\mathrm{T3}} h$ 当且仅当 $f \preceq_{\mathrm{T3}} s$，因此 s 确实表示$\mathbf{g} \Rightarrow_{\mathrm{T3}} \mathbf{h}$。

利用这个 Heyting 运算，命题 3.11 和 3.12 可以表述如下：

- 若$\mathbf{g}$ 是全 inhabited 的，且$\mathbf{h}$ 是 T1，那么$\mathbf{g} \Rightarrow_{\mathrm{T3}} \mathbf{h}$ 要么等于$\mathbf{h}$，要么 $\top$。
- 若$\mathbf{g}$ 是基本的，且$\mathbf{h}$ 是 T2，则同样的结论成立。

4 与承诺问题相关的解码度与编码度

定义 4.1。令 $P, Q \subseteq \mathbb{N}$ 为有元素的且互不相交。我们定义：

- 将与 (P, Q) 相关联的**解码预言机** 定义为由部分函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 定义的 T1 预言机：该函数在 P 上取值为 0，在 Q 上取值为 1，其他情况下未定义。我们用 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 表示相应的（T1）度；有时也不严格地用它表示解码预言机本身。

[15]这里的做法是，我们通过表示法将 T3 预言机定义为函数$\check{s}$：$\mathbb{N} \times \Lambda \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$，如 ¶2.4 中所述（这次这样做更方便），然后再将其转换回通常的表示法 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$。

• 将与 (P,Q) 相关联的**编码预言机** 定义为由$\{P,Q\}$ 这个 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 的元素定义的基本 T3 预言机。我们用 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 表示相应的（T3）度；有时也不严格地用它表示编码预言机本身。

¶4.2. 更通俗地说：与 (P,Q) 相关联的解码预言机，会接收其中一个集合的元素，并告诉 Arthur 该元素属于哪个集合；而编码预言机则向 Arthur 提供任意一个“是”/“否”问题的答案（即传递由 Nimue 任意选择的一位比特），但它通过在答案为 0 时给出 P 中的一个元素、答案为 1 时给出 Q 中的一个元素来编码该答案。

因此，我们的开篇谜题（¶1.1）的设定涉及编码预言机 $\mathbf{c}_{P,Q}$：首先，$P:=K$ 且 $Q:=K$；接着，$P:=(K\times K)\cup(K\times K)$ 且 $Q:=(K\times K)\cup(K\times K)$，其中 $K:=\{e\mid\varphi_e(0)\!\downarrow\}$ 是停机集，而 $K:=\mathbb{N}\setminus K$ 是它的补集。在谜题的第一部分中，$\mathbf{c}_{\bar{K},K}=\boldsymbol{\omega}$。我们将在 ¶4.18 回答第二部分（证明此时$\mathbf{c}_{P,Q}<\boldsymbol{\omega}$）。

¶4.3. 在复杂性理论中，给定一个保证属于 $P\cup Q$ 的元素，判断它属于 P 还是 Q，这一问题称为**承诺问题**。因此，我们可以说，与 (P,Q) 相关联的解码预言机解决了相应的承诺问题，而编码预言机解决任意问题，但将答案表示为该承诺问题的一个实例。特别地，$\mathbf{d}_{P,Q}=\mathbf{0}$ 的确切含义是，承诺问题 (P,Q) 是**可判定的**，也就是“可计算地求解”。

E例 4.4. 如果 P 和 Q 互为补集，那么 $\mathbf{d}_{P,Q}=[P]_{\mathrm{T}0}=[Q]_{\mathrm{T}0}$.

一般而言，我们有 $\mathbf{d}_{P,Q}\leq[P]_{\mathrm{T}0}$，对称地，$\mathbf{d}_{P,Q}\leq[Q]_{\mathrm{T}0}$（可以合并写为：$\mathbf{d}_{P,Q}\leq[P]_{\mathrm{T}0}\wedge_{\mathrm{T}1}[Q]_{\mathrm{T}0}$）。

我们立即记录以下简单但关键的事实：

Pro位置 4.5。 我们有 $\mathbf{d}_{P,Q}\vee\mathbf{c}_{P,Q}=\boldsymbol{\omega}$。（特别是，如果 $\mathbf{d}_{P,Q}=\mathbf{0}$ 那么 $\mathbf{c}_{P,Q}=\boldsymbol{\omega}$。）

证明。 如果我们可以同时使用编码预言机和解码预言机，那么 Nimue 就能向 Arthur 传递一位信息（回想一下，我们在 ¶2.10 中明确描述了从 $\boldsymbol{\omega}$ 出发的归约情形；根据练习2.9，传递一位信息就足以实现全知）。

更准确地说，从 $\boldsymbol{\omega}=[\{\{0\},\{1\}\}]_{\mathrm{T}3}$ 到 $\mathbf{d}_{P,Q}\vee\mathbf{c}_{P,Q}$ 的归约如下：若 b 是目标位（Nimue 知道，但 Arthur 不知道），那么在第一步，Arthur 查询$\mathbf{c}_{P,Q}$ 预言机；Nimue 的策略在 $b=0$ 时出 P，在 $b=1$ 时出 Q，迫使 Merlin 在 $b=0$ 时向 Arthur 传达 P 中的一个元素，在 $b=1$ 时传达 Q 中的一个元素；在第二步，Arthur 查询$\mathbf{d}_{P,Q}$ 预言机，查询值为他在第一步收到的值，从而推断出 b的值。 □

例 4.6。 如果 P 和 Q 是可计算可枚举且互不相交的，那么$\mathbf{d}_{P,Q}=\mathbf{0}$。事实上，在承诺某个元素属于 $P\cup Q$ 的前提下，要判定它属于 P 还是 Q，我们只需并行枚举 P 和 Q 中的元素，直到找到所需的那个。由此，根据命题 4.5，$\mathbf{c}_{P,Q}=\boldsymbol{\omega}$。

以下这个特殊情形很重要（并且与我们将在定义 5.1 中给出的$\tilde{\mathbf{d}}_A,\tilde{\mathbf{c}}_A$的定义密切相关）：集合 H_0,H_1，其中 $H_i:=\{e\mid\varphi_e(0)\!\downarrow=i\}$ 是可计算可枚举且不相交的，因此 $\mathbf{d}_{H_0,H_1}=\mathbf{0}$（我们将在命题 5.5 中推广这一点）。这个例子表明，例 4.4 中提到的不等式 $\mathbf{d}_{P,Q}\leq[P]_{\mathrm{T}0}\wedge_{\mathrm{T}1}[Q]_{\mathrm{T}0}$ 可能是严格的，因为在这里 $[H_0]_{\mathrm{T}0}=[H_1]_{\mathrm{T}0}=\mathbf{0}'$。

[16]严格的论证将通过结合下面的例 4.14 和命题 4.16(ii) 得出。

警告 4.7。 为避免可能的混淆，我们强调，承诺问题 (P, Q) 是可判定的这一断言，不同于更强的陈述：P和 Q 是**可计算可分的**，这意味着存在一个全 可计算函数，在 P 上取值 0，在 Q 上取值 1。

等价关系的一个反例是例 4.6 中的集合 H_0, H_1，众所周知它们是可计算不可分的（[Soare 2016, 习题 1.6.26]），然而我们刚才指出，承诺问题（H_0, H_1）是可判定的。

¶4.8. 旁论。虽然 T1 度 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 表示了承诺问题可判定的程度，但也有一种与 P, Q 是否可计算可分这一问题自然相关的度，我们可以称之为 $\mathbf{s}_{P,Q}$；这次它是一个 T2 度。它由函数 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathbb{N})$ 定义：在 P 上取值 {0}，在 Q 上取值 {1}，在其他地方取值 {0, 1}。特殊情形 $\mathbf{s}_{H_0,H_1}$ 在 [Kihara 2023, 例 2.5]，中被称为 LLPO，我们在引言（¶1.2）中也曾提及它，并将其与“PA 度”联系起来：它是 $> \mathbf{0}$，因为 H_0, H_1 是可计算不可分的；但它也 $< \mathbf{0}'$，因为低基定理（[Soare 2016, 定理 3.7.2]）保证存在图灵度 $\geq \mathbf{s}_{H_0,H_1}$，它们是 $< \mathbf{0}'$。因此，不同于 $\mathbf{d}_{H_0,H_1}$（正如刚才所说，它等于 0），T2 度 $\mathbf{s}_{H_0,H_1}$ 严格介于 0 和 $0'$ 之间。一般来说，我们有 $\mathbf{d}_{P,Q} \leq \mathbf{s}_{P,Q} \leq [P]\mathbf{T}_0 \wedge \mathbf{T}_2\, [Q]\mathbf{T}0$；正如刚才所说，这两个不等式都可能是严格的，但除此之外，我们对这些度之间的关系知之甚少。

备注 4.9。 我们可以在不假设 P 和 Q 有元素的情况下定义 $\mathbf{d}_{P,\,Q}$，但如果 $P = \varnothing$ 或 $Q = \varnothing$，它就是平凡的（即，可计算的）；为了避免烦琐的情况区分，我们选择排除这种情况。我们也可以尝试在不假设 P 和 Q 不相交的情况下定义$\mathbf{d}_{P,\,Q}$，但这里有几个看似合理的候选；在我们的语境中，最合乎逻辑的候选（如果我们要保留性质 4.5）会在 $P \cap Q$ 有元素时给出 T3 度 $\boldsymbol{\omega}$：这并不是特别有用，因此我们不采用这种定义。

对称地，我们可以在不假设 P 和 Q 有元素的情况下定义 $\mathbf{c}_{P,\,Q}$，但如果 $P = \varnothing$ 或 $Q = \varnothing$，它就是顶度；我们也可以在不假设 P 和 Q 不相交的情况下定义它，但当 $P \cap Q$ 有元素时，它是平凡的（即，可计算的），因为 Merlin 总是可以选择 $P \cap Q$ 中的一个元素，从而使预言机失去作用。

现在让我们转而关注承诺问题的多对一归约；正如接下来的两个命题所示，它是得到$\mathbf{d}_{P,Q}$ 和$\mathbf{c}_{P,Q}$度之间不等关系的一种简便方法：

定义 4.10. 设 $P_1, Q_1 \subseteq \mathbb{N}$ 有元素且互不相交，$P_2, Q_2 \subseteq \mathbb{N}$也如此。若存在 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 部分可计算函数，至少在 $P_2 \cup Q_2$上有定义，并且满足 $f(P_2) \subseteq P_1$且 $f(Q_2) \subseteq Q_1$，则称承诺问题 (P_2, Q_2)**可多对一归约**到承诺问题 (P_1, Q_1)，记作 $(P_2, Q_2) \preceq_{\mathrm{m}} (P_1, Q_1)$。

命题 4.11. 可归约关系 $(P_2, Q_2) \preceq_{\mathrm{m}} (P_1, Q_1)$ 蕴含$\mathbf{d}_{P_2,Q_2} \leq \mathbf{d}_{P_1,Q_1}$T1 度)。 (as

证明。 给定 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$部分可计算，且至少在 $P_2 \cup Q_2$ 上有定义，使得 $f(P_2) \subseteq P_1$且 $f(Q_2) \subseteq Q_1$。要从与 (P_1, Q_1) 相关联的解码预言机计算与 (P_2, Q_2) 相关联的解码预言机，我们只需将后者作用于给定元素在 $P_2 \cup Q_2$ 中经 f 映射所得的像。 □

命题 4.12。 归约 $(P_2, Q_2) \preceq_{\mathrm{m}} (P_1, Q_1)$ 意味着 $\mathbf{c}_{P_1,Q_1} \leq \mathbf{c}_{P_2,Q_2}$（作为 T3 度）。

证明。 给定 f：一个部分可计算的 $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$，其定义域至少包含 $P_2 \cup Q_2$，满足 $f(P_2) \subseteq P_1$且 $f(Q_2) \subseteq Q_1$。若要根据与 (P_2, Q_2) 相关联的编码预言机，计算与 (P_1, Q_1) 相关联的编码预言机，只需将 f 应用于 (P_2, Q_2) 编码预言机返回的 $P_2 \cup Q_2$ 中的元素。 □

现在我们考察承诺问题 (P, Q) 与 $(P \times Q, Q \times P)$ 之间的关系。我们关注 $(P \times Q, Q \times P)$，是因为它概括了在 ¶1.1 中回答第一个谜题时所用技巧的精髓："把问题问两遍，一遍正着问，再一遍反着问"。因此，我们希望了解 $\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P}$ 与 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 之间的关系，以及 $\mathbf{c}_{P\times Q, Q\times P}$ 与 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 之间的关系。关于前者，有一个非常简单的不等式：

命题 4.13。 我们有 $\mathbf{d}_{P\times Q,\ Q\times P} \leq \mathbf{d}_{P,\ Q}$。

证明。 由命题 4.11 可得，因为第一投影见证了 $(P,\ Q) \preceq_{\mathrm{m}} (P\times Q,\ Q \times P)$。 □

例 4.14。 上述不等式可能是严格的。为说明这一点，设 P 是一个可计算可枚举集合， Q 是它的补集。那么 $\mathbf{d}_{P,\ Q}$ 是 P 的图灵度（正如我们在例 4.4 中已经指出的），它当然可以是 $> \mathbf{0}$。然而，$\mathbf{d}_{P\times Q,\ Q\times P} = \mathbf{0}$：事实上，要判断一个承诺属于 $(P \times Q) \cup (Q \times P)$ 的有序对属于 $P \times Q$ 还是 $Q \times P$，我们只需枚举 P，直到找到该有序对的第一个或第二个坐标。

上一句的推理更一般地适用于这样的情形： P 是一个可计算可枚举集合，且 Q 与 P 不相交（即，它的补集的任意一个子集 ）：因此在所有这类情形下，我们都有$\mathbf{d}_{P\times Q,\ Q\times P} = \mathbf{0}$（尽管此时对$\mathbf{d}_{P,\ Q}$几乎无话可说：可与例 4.6 对照）。

例 4.15。 另一个例子也值得一提。设 P 和 Q 分别为实数 x的下戴德金分割和上戴德金分割，即 $P := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ 以及$Q := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}$（此处已固定一种用自然数对有理数进行哥德尔编码的方式）。那么 $\mathbf{d}_{P,Q}$是 x的图灵度，可以是任意的；而$\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P}$是可判定的，只需比较这一对中的两个有理数即可。这个例子表明，我们甚至无法期望将$\mathbf{d}_{P,Q}$界定为$\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P}$的函数。

$\mathbf{c}_{P\times Q, Q\times P}$与$\mathbf{c}_{P,Q}$之间的关系较为简单——二者相等：

命题 4.16。 **(i)** 我们有$\mathbf{c}_{P\times Q, Q\times P} = \mathbf{c}_{P,Q}$。
(ii) 我们有$\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P} \vee \mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$。（特别地，若$\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P} = \mathbf{0}$，则$\mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$.)

证明。 关于 (i)，不等式 $\mathbf{c}_{P\times Q, Q\times P} \geq \mathbf{c}_{P,Q}$由命题 4.12 得出，因为第一投影见证了 $(P, Q) \preceq_{\mathrm{m}} (P \times Q, Q \times P)$。

对于不等式 $\mathbf{c}_{P\times Q, Q\times P} \leq \mathbf{c}_{P,Q}$，我们运用第 1.1 节中用于解答第一个谜题的技巧的核心：具体而言，Arthur 的策略是两次查询$\mathbf{c}_{P,Q}$ 预言机；Nimue 知道这一点，并根据初始配置是否要求 Arthur 生成 $P \times Q$ 或 $Q \times P$ 中的元素，分别先出 P 再出 Q，或先出 Q 再出 P。然后，Arthur 只需将收到的两个值收集成一对，并宣布这对值即可。

Fin因此，(ii) 可由 (i) 和命题 4.5 直接得出（但将其应用于 $(P\times Q, Q\times P)$）。 . □

现在我们来到了主要的技术结果：我们刚刚看到 $\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P} = \mathbf{0}$蕴含$\mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$；事实上，这两者等价：

定理 4.17。 （普通版本。） 设 $P,\ Q \subseteq \mathbb{N}$ 有元素且互不相交。如果与 $(P,\ Q)$ 相关联的编码预言机是全知的，那么承诺问题 $(P \times Q,\ Q \times P)$ 是可判定的。换句话说，如果 $\mathbf{c}_{P,\ Q} = \boldsymbol{\omega}$那么 $\mathbf{d}_{P\times Q,\ Q\times P} = \mathbf{0}$（正如我们刚才所说，这是一个等价关系）。

（相对化版本。）设 $P,\ Q \subseteq \mathbb{N}$ 是有元素的且互不相交的，并设 $\mathbf{a}$ 是一个 T0 度。若$\mathbf{c}_{P,\ Q} \vee \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$，则$\mathbf{d}_{P\times Q,\ Q\times P} \leq \mathbf{a}$。

证明。我们先证明“普通”版本。

在整个证明过程中，我们固定元素 $p \in P$ 和 $q \in Q$，它们由假设保证存在。

我们假设 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 是全知的，这意味着在将 $\boldsymbol{\omega}$ 归约到 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 的博弈中，存在一个获胜的 Arthur+尼缪策略（回顾一下，我们在 2.10 中描述了从 $\boldsymbol{\omega}$ 出发的归约的特殊情形）。我们固定这样一个策略，并将 σ 称为 Arthur 的策略部分；因此，σ 将由 Merlin 的步构成的有限自然数序列映射为 Arthur 的一步，这一步可以是“再次查询预言机”或“声明一个最终值 u”。

给定一个元素 $(x, y) \in (P \times Q) \cup (Q \times P)$，我们考虑函数 $M_{(x,y)} \colon \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}^2 \to \mathbb{N}$（其中 $\mathtt{P}, \mathtt{Q}$ 是两个标签[17]），其明确定义如下：

$$
\begin{aligned}
M_{(x,y)}(\mathtt{P}, \mathtt{P}) &= p \\
M_{(x,y)}(\mathtt{P}, \mathtt{Q}) &= x \\
M_{(x,y)}(\mathtt{Q}, \mathtt{P}) &= y \\
M_{(x,y)}(\mathtt{Q}, \mathtt{Q}) &= q
\end{aligned}
$$

此函数旨在确保以下性质（†）：若 $(x, y) \in P \times Q$，则对于任意 $r \in \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$，有 $M_{(x,y)}(\mathtt{P}, r) \in P$ 且 $M_{(x,y)}(\mathtt{Q}, r) \in Q$；反之亦然，若 $(x, y) \in Q \times P$，则对于任意 $\ell \in \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$，有 $M_{(x,y)}(\ell, \mathtt{P}) \in P$ 且 $M_{(x,y)}(\ell, \mathtt{Q}) \in Q$。

我们定义一种附属博弈，它是一种由 $(x, y) \in (P \times Q) \cup (Q \times P)$ 参数化的双人不完全信息博弈。两位玩家分别是“左方”和“右方”。在第 i 回合，左方选择一个值 $\ell_i \in \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$，右方则同时选择 $r_i \in \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$。（每位玩家都看到了对方截至本回合的步，但本回合的两步是独立选择的。）接下来会发生什么，取决于 Arthur 的策略 σ 在序列 $M_{(x,y)}(\ell_0, r_0), \ldots, M_{(x,y)}(\ell_i, r_i)$ 上的值。如果 σ 返回“查询预言机”，则附属博弈继续进行。如果 σ 返回“声明最终值 u”，其中 $u \in \{0, 1\}$，那么当 $u = 0$ 时左方获胜，而当 $u = 1$ 时右方获胜。如果 σ 未返回结果或返回格式错误的值，或者博弈无限进行下去，则结果为平局（没有玩家获胜）。

暂且假设 $(x, y) \in P \times Q$。

我们注意到，左方在附属博弈中有获胜策略。事实上，根据 (†)，左方可以控制提供给 σ 的后续元素属于 P 还是 Q；再利用 Arthur+Nimue 获胜策略中 Nimue 的部分，这使左方能够让 Arthur 的策略输出 0。

设 L 是左方的获胜策略。这是一个函数，其定义域为 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ 中的有限序列（表示右方过去所走的步），值域为 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ 中的元素（表示左方接下来所走的步）。对于右方所走的每个序列 $s \in \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}^{\mathbb{N}}$，若左方按照 L 行动，而右方依次走出 s 的各个元素，则经过有限步数 $m(s)$ 后，棋局必以左方获胜告终。函数 $m \colon \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ 是连续的（其中 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}^{\mathbb{N}}$ 赋予离散拓扑的乘积拓扑），因为 $m(s)$ 只取决于 s 的前 $m(s)$ 项。由康托尔空间 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}^{\mathbb{N}}$ 的紧致性可知，这一界必由某个常数 M 限定。这意味着，L 的一个有限片段——即它在 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ 中长度至多为 M 的有限序列上的限制——就足以证明左方拥有获胜策略。

我们已经证明，对于所有 $(x, y) \in P \times Q$，都存在一个策略的有限片段，即一个仅在 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ 中长度不超过某个值 M 的有限序列上有定义的函数，它可以证明左方能够获胜；具体而言，使用这个策略片段决定左方的步，并让右方的步采用 $\{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ 中的任意长度为 M 的序列，将博弈进行至第 M 回合时，博弈已经结束且左方获胜。

[17] 如果读者难以从排版上区分 $\mathtt{P}$，$\mathtt{Q}$ 和 P，Q，我们赶紧说明，这不会造成任何混淆。

对称地，对于 $(x,\ y) \in Q \times P$，存在一个有限策略片段，可以证明右方能够获胜。最后，这两个条件互不相容，因为玩家不可能同时获胜。这表明，$(x,\ y) \in P \times Q$ 当且仅当左方拥有一个获胜的有限策略片段，而 $(x,\ y) \in Q \times P$ 当且仅当右方拥有一个获胜的有限策略片段。

我们推导出一种算法，用于判定给定 $(x,\ y) \in (P \times Q) \cup (Q \times P)$ 时，$(x,\ y) \in P \times Q$ 还是 $(x,\ y) \in Q \times P$：并行枚举有限策略片段，同时寻找左方和右方的获胜策略片段。通过针对给定玩家使用该策略片段模拟博弈，并针对另一名玩家枚举所有长度不超过该片段长度的可能序列，可以半判定某个策略片段对于给定玩家是否为获胜策略。

这就完成了该定理“普通”版本的证明。

为证明“相对化”版本，我们作如下观察：我们刚刚给出的“普通”版本的证明同样适用，只需将可计算性替换为相对于普通图灵[18] 预言机 $A \subseteq \mathbb{N}$ 的可计算性即可。由此得到以下结果（§）：如果 Arthur+Nimue 在将 $\boldsymbol{\omega}$ 归约为 $\mathbf{c}_{P,\ Q}$ 的博弈中拥有获胜策略，但现在允许 Arthur 在计算其策略时访问预言机 A，那么就存在一种 A-可计算的方法来解决承诺问题 $(P \times Q,\ Q \times P)$。

但 (§) 的假设等价于说，Arthur+Nimue 在将 $\boldsymbol{\omega}$ 归约到 $[A]_{\mathrm{T0}} \vee \mathbf{c}_{P,\ Q}$ 的博弈中拥有获胜策略（因为 Arthur 的一个 A-可计算策略，等同于 Arthur 拥有一个能够执行查询 A-预言机这一步的策略），而 (§) 的结论等价于说，Arthur 在将与 $(P \times Q,\ Q \times P)$ 相关联的解码预言机归约到 A 的博弈中拥有获胜策略。因此，我们证明了所声称的相对化版本，整个证明也就此结束。 □

¶4.18. 这已经回答了引言 1.1 中提出的第二个谜题。事实上，令 $K := \{e \mid \varphi_e(0)\downarrow\}$ 为停机集，$\overline{K} := \mathbb{N} \setminus K$ 为其补集；令 $P := (K \times K) \cup (\overline{K} \times \overline{K})$ 为这样一组图灵机对：其中恰有偶数台停机；令 $Q := (K \times K) \cup (\overline{K} \times K)$ 为这样一组图灵机对：其中恰有一台停机。这个谜题问的是，$\mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$ 是否成立。若果真如此，那么根据定理 4.17，我们将有 $\mathbf{d}_{P \times Q, Q \times P} = \mathbf{0}$（换言之，给定四台停机台数为奇数的图灵机，我们就能计算出前两台中停机的台数的奇偶性）；但这样一来，我们就可以通过对 $((\mathtt{loop}, e), (\mathtt{halt}, e))$ 进行解码，从而（可计算地）判定任意 e 是否停机，其中 `loop` 是一台永不停止的固定图灵机，`halt` 是一台立即停机的图灵机：事实上，若 $e \in K$，则它属于 $Q \times P$；而若 $e \in \overline{K}$，则它属于 $P \times Q$。但这是不可能的；因此，实际上 $\mathbf{c}_{P,Q} < \boldsymbol{\omega}$，谜题由此得解。

5 共图灵度及其序

在前一节中，我们为一个承诺问题 $(P,\ Q)$ 定义了“解码”和“编码”预言机。然而，两者之间的关系并不像人们所希望的那样简单（我们将在下文 5.9 中指出，度 $\mathbf{c}_{P,\ Q}$ 并非度 $\widetilde{\mathbf{d}}_{P,\ Q}$ 的函数）。现在我们转而讨论 $\mathbf{d}_{P,\ Q}$ 和 $\mathbf{c}_{P,\ Q}$ 的一个特例，分别记作 $\mathbf{d}_A$ 和 $\widetilde{\mathbf{c}}_A$。它们由一个集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 定义，在这方面会表现得更好：度 $\mathbf{d}_A$

[18] 我们在此强调，这对于 T1 预言机并不成立，因为我们利用了并行运行多个计算的能力。另请参见问题 8.3。

最终将证明只是 A 的图灵度，而 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 最终将证明只取决于 A 的图灵度 $[A]_{\mathrm{T}0}$，由此我们将得到所寻求的“共图灵”度。

定义 5.1。对于 $A \subseteq \mathbb{N}$ 任意的以及 $i \in \{0, 1\}$，我们定义 $H_i^A := \{e \mid \varphi_e^A(0)\downarrow = i\}$ 为这样一组预言机程序：当以 A（即 1_A）作为预言机提供给它们时，这些程序会终止并返回值 i。（注意，H_0^A，H_1^A是有元素的且不相交的。）

我们还定义 $H_{\tilde{1}}^A$ 以及 $\tilde{\mathbf{c}}_A := \mathbf{c}_{H_0^A,\ H_1^A}$。我们将 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 称为与 A 相关联的**余图灵度**（我们将在 5.8 中看到，它只取决于 A的图灵度）。

¶5.2。由于这是本文的核心构造，我们将以下明确描述详细说明：$\tilde{\mathbf{c}}_A$ 预言机可以回答任意的“是”/“否”问题，但它并不直接提供答案 0 或 1，而是（以对抗性的方式）将答案编码成一个程序e；该程序以 A 作为（普通图灵）预言机运行时，会终止并计算出所需的答案 $\varphi_e^A(0)$。

H_i^A构造更深层的意义将在下文推论 7.26 附近进行探讨，但眼下的要点是，它将预言机 A 上的图灵归约转化为 H_i^A 上的多对一归约。事实上，以下事实是标准的（参见 [Soare2016，定理 3.4.3(v)]），也可以看作下文定理 7.5 的特例，不过我们还是把它明确写出来：

命题 5.3。对于 $A,\ B \subseteq \mathbb{N}$，如果 B 图灵可归约于 A，那么 $(H_0^B,\ H_1^B) \preceq_{\mathrm{m}} (H_0^A,\ H_1^A)$.

证明。假设 $1_B = \varphi_h^A$ 见证了 B 图灵可归约于 A。给定 $e \in H_0^B \cup H_1^B$，我们将其可计算地转换为程序 e'：把每次调用预言机（本应返回 B 的特征函数）都替换为对 h 的调用；于是作为部分函数有 $\varphi_e^B = \varphi_{e'}^A$，特别是当 $e \in H_i^B$ 时有 $e' \in H_i^A$，而 $e \mapsto e'$ 是可计算的（甚至是原始递归的），它见证了所声称的多对一归约。 □

命题 5.4。若 $A,\ B \subseteq \mathbb{N}$ 满足 B 图灵可归约于 A，则 $\tilde{\mathbf{c}}_A \leq \tilde{\mathbf{c}}_B$（作为 T3 度）。

证明。这可由命题 5.3 和命题 4.12 直接得出。 □

当然，在同一假设下，由命题 5.3 和命题 4.11，我们也有 $\tilde{\mathbf{d}}_B \leq \tilde{\mathbf{d}}_A$，但事实上我们可以说得更多：

命题 5.5。对任意的 $A \subseteq \mathbb{N}$，该（先验为 T1 的）度 $\tilde{\mathbf{d}}_A$ 就是 A的图灵度 $[A]_{\mathrm{T}0}$。

证明。为说明 $\tilde{\mathbf{d}}_A \leq [A]_{\mathrm{T}0}$，我们注意到，给定 $e \in H_0^A \cup H_1^A$，借助 A（即 1_A）作为预言机，我们只需计算φ_e^A并返回其值，而这恰好就是所需解码预言机的值。

反过来，要证明 $[A]_{\mathrm{T}0} \leq \tilde{\mathbf{d}}_A$，给定 $k \in \mathbb{N}$，我们可以判断 $k \in A$ 是否成立：先（利用相对 s-m-n 定理）计算出程序 e，该程序会在值 k 处向预言机发出查询，然后返回其答案；接着询问解码预言机，这个 e 是否属于 H_0^A 或 H_1^A。 □

请回想前一节中，我们已经看到，为了理解 $\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P}$，考虑它们（而不只是 $\mathbf{d}_{P,Q}$）的重要性；我们也看到，通常有 $\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P} \leq \mathbf{d}_{P,Q}$（命题 4.13），但这个不等式也可能是严格的（例 4.14 或 4.15）。然而，在当前情形下，这里是等式（它也是 A的图灵度）：

命题 ˜**在 5.6 中**。对于任意的 $A \subseteq \mathbb{N}$，度 $\mathbf{d}_{(H_0^A \times H_1^A),\,(H_1^A \times H_0^A)}$ 等于 $\mathbf{d}_{H_0^A,\,H_1^A} =: \mathbf{d}_A$。

证明。不等式 $\mathbf{d}_{(H_0^A \times H_1^A),\,(H_1^A \times H_0^A)} \leq \mathbf{d}_{H_0^A,\,H_1^A}$ 已在 4.13 中以完全一般的形式得到。因此，我们需要证明其逆命题。

但给定 $e \in H_i^A$，我们只需将 e 与交换 0 和 1 的函数复合，就能计算得到 $\mathtt{flip} \circ e \in H_{1-i}^A$。为了借助 $\mathbf{d}_{(H_0^A \times H_1^A),\,(H_1^A \times H_0^A)}$ 判断 $e \in H_0^A \cup H_1^A$ 是否属于 H_0^A 或 H_1^A，我们询问 $(e,\ \mathtt{flip} \circ e)$ 是否属于 $H_0^A \times H_1^A$ 或 $H_1^A \times H_0^A$。这就证明了 $\mathbf{d}_{H_0^A,\,H_1^A} \leq \mathbf{d}_{(H_0^A \times H_1^A),\,(H_1^A \times H_0^A)}$（严格来说，是将命题 4.11 应用于 $e \mapsto (e,\ \mathtt{flip} \circ e)$）。 □

This 使我们能够从主要技术结果推出命题 5.4 的逆命题 :

命题 5.7。如果 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $\tilde{\mathbf{c}}_A \leq \tilde{\mathbf{c}}_B$（作为 T3 度），那么 B 图灵可归约到 A。

˜ ˜证明。由命题 4.5 可知，$\mathbf{d}_A \vee \tilde{\mathbf{c}}_A = \boldsymbol{\omega}$，因此根据我们的假设，有 $\mathbf{d}_A \vee \tilde{\mathbf{c}}_B = \boldsymbol{\omega}$。现在由˜命题 5.5，$\mathbf{d}_A$ 是 A 的图灵度 $\mathbf{a}$：因此，$\mathbf{a} \vee \tilde{\mathbf{c}}_B = \boldsymbol{\omega}$。由定理 4.17，这意味着 $\mathbf{d}_{(H_0^B \times H_1^B),(H_1^B \times H_0^B)} \leq \mathbf{a}$。由命题 5.6 和命题 5.5（再次应用），$\mathbf{d}_{(H_0^B \times H_1^B),(H_1^B \times H_0^B)}$ 是 B的图灵度 $\mathbf{b}$。因此我们证明了 $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$，证毕。 □

综上所述，我们已经证明：

˜ ˜**定理 5.8**。对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，有 $\tilde{\mathbf{c}}_A \leq \tilde{\mathbf{c}}_B$ 当且仅当 $[B]_{\mathrm{T0}} \leq [A]_{\mathrm{T0}}$ (等价地：$\mathbf{d}_B \leq \mathbf{d}_A$)。

因此，映射 coT：$[A]_{\mathrm{T0}} \mapsto \tilde{\mathbf{c}}_A$ 是从 $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{T0}}$（其中 $(\text{—})^{\mathrm{op}}$表示反序）到 $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$的良定义单射，并且保持和反映序关系。

证明。第一个断言是命题 5.4 和命题 5.7 的合取；括号中的说明即命题 5.5。第二个断言由第一个断言和定义立即得出。 □

注记 5.9。回到我们在 4.15 中开始讨论的例子，若 $x \in \mathbb{R}$ 不可计算，且 P和 Q分别表示它的下 $\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ 戴德金分割和上 $\{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}$ 戴德金分割，则 $\mathbf{d}_{P,Q} = [x]_{\mathrm{T0}}$ 是 x的图灵度；将 x 视为 $\mathbb{N}$的子集（例如取其二进制展开中所有 1 的位置组成的集合）后，它也等于 $\mathbf{d}_x := \mathbf{d}_{H_0^x, H_1^x}$，由命题 5.5 可知；但是，根据命题 4.16(ii)以及例 4.15 中指出的事实 $\mathbf{d}_{P \times Q, Q \times P} = \mathbf{0}$，可得 $\mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$；而由定理 5.8，$\tilde{\mathbf{c}}_x := \mathbf{c}_{H_0^x, H_1^x} < \boldsymbol{\omega}$。这个例子表明，一般而言，度 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 不是度 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 的函数，尽管度 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 是 $\mathbf{d}_A$的一个˜函数。

注记 5.10.（推广到 *T1* 度。）若 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 是一个部分函数，我们可以用显而易见的方式定义H_0^f, H_1^f（当然，采用这样的约定：如果程序在未定义的值处调用预言机，就不会终止）；那么命题 5.3 的类似结论仍然成立：也就是说，$[g]_{\mathrm{T1}} \leq [f]_{\mathrm{T1}}$蕴含 $(H_0^g, H_1^g) \preceq_{\mathrm{m}} (H_0^f, H_1^f)$（证明中唯一的变化是 $\varphi_{e'}^f$现在可能扩展 φ_e^g，但这不会造成任何影响），因此命题 5.4 的类似结论也成立。类似定义 5.1，定义 $\tilde{\mathbf{c}}f := \mathbf{c}_{H_0^f, H_1^f}$后，我们得到一个反序映射 coT$_1$：$[f]_{\mathrm{T1}} \mapsto \tilde{\mathbf{c}}f$，它将 coT 扩展到 $\mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$。

我们还可以定义 在此语境下，我们仍有命题 5.5 和命题 5.6 的类似结论，且证明相同（因此$\mathbf{d}f := \mathbf{d}_{H_0^f,\ H_1^f}$仅仅是 f的 T1 度）。不过，我们不知道如何在此语境下得到命题 5.7 的类似结论，因为它依赖于定理 4.17 的相对版本，而该定理的证明要求$\mathbf{a}$ 是一个图灵度。因此，我们只能得到较弱的结论：当$\mathbf{a}$ 是 T0 度，而$\mathbf{g}$ 可以是 T1 度时，coT($\mathbf{a}$) $\leq$ coT$_1$($\mathbf{g}$) 蕴含 $\mathbf{g} \leq \mathbf{a}$。（尽管如此，这仍使我们能够得出 coT$_1$($\mathbf{g}$) $= \boldsymbol{\omega}$蕴含$\mathbf{g} = \mathbf{0}$。）另见下文的问题 8.2。

备注 5.11。（向 T2 度的暂定扩展。）沿着上一条备注的思路，我们甚至可以尝试对 T2 度做如下处理：如果$f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathsf{P}(\mathbb{N})$ 是一个 T2 预言机，我们可以分别将 H_0^f, H_1^f定义为 $J_f(\{0\})$ $J_f(\{1\})$（其中J_f 在 7.4 中定义），换言之，它们是这样一些 Arthur 策略：在查询 f 预言机时，无论 Merlin 给出什么答案，都能终止并分别返回值 0、1。同样，命题 5.3 的类比仍然成立：$[g]_{\mathrm{T2}} \leq [f]_{\mathrm{T2}}$蕴含 $(H_0^g, H_1^g) \preceq_{\mathrm{m}} (H_0^f, H_1^f)$，因此命题 5.4 的类比也成立；通过定义 $\tilde{\mathsf{c}}f := \mathsf{c}_{H_0^f, H_1^f}$，我们得到一个反转序的~映射 $\mathrm{coT}_2\colon [f]_{\mathrm{T2}} \mapsto \tilde{\mathsf{c}}f$，它将 coT（以及 coT_1）扩展到 $\mathscr{D}_{\mathrm{T2}}$。但现在，如果我们定义 $\mathsf{d}f := \mathsf{d}_{H_0^f, \tilde{H_1^f}}$，那么我们只能得到 $\mathsf{d}_f \leq [f]_{\mathrm{T2}}$；这个不等式可能是严格的，因为 $\mathsf{d}f$ 是一个 T1 度，但存在不是 T1 的 T2 度 f。换言之，命题 5.5 的类比不成立，使得情况更加不尽如人意。

我们将在下文的例 7.33 中指出，如果我们更大胆一些，将 coT 以“显而易见”的方式扩展为 T3 度上的映射 coT_3，那么尽管$\mathbf{g} > \mathbf{0}$，仍可能有 $\mathrm{coT}_3(\mathbf{g}) = \boldsymbol{\omega}$。

6 比较余图灵度与图灵度

在前一节中，我们为每个图灵度$\mathbf{a} = [A]_{\mathrm{T0}}$ 定义了一个“余图灵”度 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{c}}_A$（属于 T3 度），并且看到 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{coT}(\mathbf{b})$ 当且仅当 $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$。因此，我们了解了余图灵度的序关系。本节中，我们将比较余图灵度 $\mathrm{coT}(\mathbf{a})$ 与图灵度 $\mathbf{b}$（同样属于 T3 度）。

我们先验地知道，根据 [Phoa 1989, 命题 3]，如果对所有图灵度 $\mathbf{b}$，都有 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \geq \mathbf{b}$，那么实际上 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\omega}$（因此，根据定理 5.8，$\mathbf{a} = \mathbf{0}$）；本节将进一步证明，如果对某个图灵度 $\mathbf{b} > \mathbf{0}$，有 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \geq \mathbf{b}$，那么实际上 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$。（换句话说，$\mathrm{coT}(\mathbf{a})$ 对于 $\mathbf{a} > 0$ 不仅不会带来 Arthur 全知，甚至不能让他计算任何确定性函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，除非该函数原本就是可计算的。）

我们的策略是考察承诺问题 $(P,\ Q) := (H_0^A \times H_0^B,\ H_1^A \times H_1^B)$，并将其编码度和解码度与 $(H_0^A,\ H_1^A)$（即 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 和 $\tilde{\mathbf{d}}_A$）以及 $(H_0^B,\ H_1^B)$ 的编码度和解码度进行比较。

命题 6.1。对于 $A,\ B \subseteq \mathbb{N}$，若 $P := H_0^A \times H_0^B$且 $Q := H_1^A \times H_1^B$，则 $\mathbf{d}_{P,\ Q}$ 等于在 T1 度 $\mathscr{D}_{\mathrm{T1}}$ 中取的二元交（下确界）$[A]_{\mathrm{T0}} \wedge_{\mathrm{T1}} [B]_{\mathrm{T0}}$，也就是$A$ 和 B的图灵度之交。

（可以将其与命题 3.3 和 ¶7.7 中给出的交的构造进行比较。）

证明。*</style}*不等式 $\mathbf{d}_{P,\ Q} \leq [A]_{\mathrm{T0}} \wedge_{\mathrm{T1}} [B]_{\mathrm{T0}}$ 由 $\mathbf{d}_{P,\ Q} \leq \mathbf{d}_{H_0^A,\ H_1^A} = [A]_{\mathrm{T0}}$ 以及 $\mathbf{d}_{P,\ Q} \leq \mathbf{d}_{H_0^B,\ H_1^B} = [B]_{\mathrm{T0}}$ 推出（这些不等式来自投影和命题 4.11，而等式见命题 5.5）。

不等式 $\mathbf{d}_{P,Q} \geq [A]_{\mathrm{T0}} \wedge_{\mathrm{T1}} [B]_{\mathrm{T0}}$ 源自 3.3 中对 T1 度内 $\wedge_{\mathrm{T1}}$ 的明确描述：给定满足 $\varphi_p^A(m)\!\downarrow\ = \varphi_q^B(n)$ 的 (p, q, m, n)，我们遍历所有 $N = 0$、1、2、……，并对每一个值，可计算地生成一个预言机程序 a_N，该程序在 m 上运行 p，检查结果是否为 N，若是则返回 1，否则返回 0；类似地，为 N 上的 q 生成 b_N。接着，我们使用 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 检验 (a_N, b_N) 是否属于 $P = H_0^A \times H_0^B$ 或 $Q = H_1^A \times H_1^B$（注意，由于 $\varphi_p^A(m)\!\downarrow = \varphi_q^B(n)$，它必定属于其中之一），然后继续循环，直到发现它属于 Q，此时返回相应的 N。 □

回想一下，我们已经看到，通常 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P} \leq \mathbf{d}_{P,Q}$ 成立（命题 4.13），但这个不等式也可能是严格的（例 4.14 或 4.15）。在本节关注的具体情形中，事实上，就像命题 5.6 中那样，这是一个等式：

命题 6.2。对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，若 $P := H_0^A \times H_0^B$ 且 $Q := H_1^A \times H_1^B$，则度 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P}$ 等于 $\mathbf{d}_{P,Q}$。

证明。证明与命题 5.6 的证明基本相同：

等　式 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P} \leq \mathbf{d}_{P,Q}$ 已在命题 4.1 中以完全一般的形式得到证明　3.

反过来，回想一下，给定 $e \in H_i^C$（无论 $C \subseteq \mathbb{N}$ 是什么），我们都能通过将 e 与交换 0 和 1 的函数复合，以可计算的方式生成 $\mathtt{flip}\circ\, e \in H_{1-i}^C$。要借助 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P}$ 判断 $(a,b) \in P \cup Q$ 是否属于 P 还是 Q，我们只需判断 $((a,b),(\mathtt{flip}\circ\, a,\, \mathtt{flip}\circ\, b))$ 是否属于 $P\times Q$ 还是 $Q\times P$。 □

引理 6.3. 对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，若 $P := H_0^A \times H_0^B$ 且 $Q := H_1^A \times H_1^B$，则 $\tilde{}\mathbf{c}_A \leq \mathbf{c}_{P,Q}$

证明。根据命题 4.12，只需证明 $(P,Q) \preceq_{\mathrm{m}} (H_0^A,\, H_1^A)$。而第一投影即可证明这一点。 □

T定理 6.4. (i) 对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，若 $\tilde{}\mathbf{c}_A \geq [B]_{\mathrm{T0}}$，那么事实上 A, B 之一是可计算的　e.

换言之：对于所有图灵度 $\mathbf{a},\mathbf{b}$，若 $\mathbf{coT(a)} \geq \mathbf{b}$，那么 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$（反向显然）。

(ii) 对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，$\tilde{}\mathbf{c}_A \leq [B]_{\mathrm{T0}}$ 永远不成立。换言之：对于所有图灵度 $\mathbf{a},\mathbf{b}$，有 $\mathbf{coT(a)} \not\leq \mathbf{b}$。

证明。我们先证明 (i)，这是较难的结论（并且依赖于我们此前的结果）。设 $P := H_0^A \times H_0^B$ and $Q := H_1^A \times H_1^B$. If $\tilde{}\mathbf{c}_A \geq [B]_{\mathrm{T0}}$ 那么 $\mathbf{c}_{P,Q} \geq [B]_{\mathrm{T0}}$ 由引理 6.3 得；现在 $[B]_{\mathrm{T0}} \geq \mathbf{d}_{P,Q}$ 由命题 6.1 得，因此 $\mathbf{c}_{P,Q} \geq \mathbf{d}_{P,Q}$. 根据命题 4.5，这意味着 $\mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$. 根据定理 4.17，这意味着 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P} = \mathbf{0}$. 根据命题 6.2，这正是 $\mathbf{d}_{P,Q} = \mathbf{0}$. 再根据命题 6.1，这意味着 $[A]_{\mathrm{T0}} \wedge_{\mathrm{T1}} [B]_{\mathrm{T0}} = \mathbf{0}$. 根据命题 3.6，这意味着 A 或 B 是可计算的，证毕。

现在我们来证明 (ii)，这更容易。若 $\tilde{}\mathbf{c}_A \leq [B]_{\mathrm{T0}}$，则根据命题 4.5 和 5.5，我们有 $[A]_{\mathrm{T0}} \vee [B]_{\mathrm{T0}} = \boldsymbol{\omega}$；由命题 3.1 可知，这意味着 $[A \oplus B]_{\mathrm{T0}} = \boldsymbol{\omega}$。这是矛盾的，因为 $\boldsymbol{\omega}$ 不是图灵度（我们在 ¶2.10 中指出，$\boldsymbol{\omega}$ 不是 T2）。 □

鉴于上述结果，人们或许会想知道 $\mathbf{coT(a)} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 是否总是成立（因为我们刚刚看到，没有图灵度 $> \mathbf{0}$ 或余图灵度能够是 $\leq \mathbf{coT(a)} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{b}$）。事实上，基本上从来都不是 这样：

命题 6.5. 如果 $\mathbf{coT(a)} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{b} = \mathbf{0}$，那么 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$（事实上，此处甚至不必假设 $\mathbf{b}$ 是图灵度：T3 度即可）。

证明。这只是命题 3.11 或命题 3.12 的一个特例（注意到 $\mathbf{coT(a)} > \mathbf{0}$ 总是成立）。 □

注 6.6. 我们已在 ¶3.14 提到，T3 度构成的不仅是一个分配格，事实上还是一个海廷代数。现在，海廷代数中有一个显而易见的反序映射：否定映射 $\mathbf{d} \mapsto \neg_{\mathrm{T3}}\mathbf{d} := (\mathbf{d} \Rightarrow_{\mathrm{T3}} \mathbf{0})$。因此，读者或许会想知道，我们的 $\mathbf{d} \mapsto \mathbf{coT(d)}$ 映射是否至少在 T0 度上可以由 T3 度的海廷代数中的否定映射给出（或许还需截断到 $\boldsymbol{\omega}$）。

事实上，情况并非如此：根据否定的定义，任意 $\mathbf{d} \wedge_{\mathrm{T3}} \neg_{\mathrm{T3}}\mathbf{d}$ 与其否定的交为 $\mathbf{0}$；但我们刚刚在 6.5 中看到，只有当 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 已经成立时，$\mathbf{d} \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{coT(d)} = \mathbf{0}$ 才会 成立。事实上，否定运算在 T0 度上并无特别之处：根据我们在 ¶3.14 末尾的讨论可知，对于任意 $\mathbf{d} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$，都有 $\neg_{\mathrm{T3}}\mathbf{d} = \mathbf{0}$。

7 拓扑斯理论对若干构造的重述

> “数学家是一种法国人：你跟他们说话，他们便把话翻译成自己的语言，于是立刻就变成了完全不同的东西。”——J.W.冯·歌德[19]

我们先向读者说明：即便对拓扑斯一无所知，也不想了解相关内容，完全可以跳过本节。不过，对于喜欢抽象废话的读者，我们希望，下面对若干构造的重述能帮助他们理解这些构造的动机，并让其意义更加明晰。

我们先以非正式的方式说明有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑是什么，再给出精确定义，随后概述 [Kihara 2023] 和 [Kihara 2024] 关于这些拓扑与我们所称的 Arthur–Nimue–Merlin 度之间对应关系的主要结果（以及如何在这一对应关系中识别 T1 度和 T2 度）。本小节不要求读者事先熟悉拓扑斯理论或可实现性，只是旨在回顾这种联系是如何产生的，从而使我们能够将定理 5.8 改述为：“我们可以将图灵度反向嵌入有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑中”。

不过，从¶7.9开始，我们确实假定读者熟悉一般的拓扑斯理论，包括其“内部”逻辑，以及关于可实现性的范畴论观点——尤其是有效拓扑斯。

前者的标准参考文献包括：[Johnstone 1977]（尤其是第3章和§5.4）、[Lambek & Scott 1986]（尤其是§II.1–II.10）、[Mac Lane & Moerdijk 1992]（尤其是第V、VI章）、[McLarty 1992]（尤其是第14章和第21章），以及 [Johnstone 2002]（尤其是§§ A4.3–A4.4、D1和D4附近）。后者的参考文献是：[van Oosten 2008]（不过也可参见 [McLarty 1992，第 24]章）。

¶7.1. 促使我们将定义 2.1 中描述的图灵预言机推广为定义 2.6 所述形式的动机，在于这种推广与 **Lawvere–Tierney 拓扑**之间的联系。下面简要谈谈这一点。

根据讨论的语境，Lawvere–Tierney 拓扑有各种名称（也可以从不同角度来理解）：它们也称为“**局部算子**”。在初等拓扑斯的语境中，它们对应于子拓扑斯，即拓扑斯的嵌入，并将 Grothendieck 拓扑的概念推广到预层拓扑斯。在无点拓扑（即对 locale 的研究）中，它们通常称为框架／locale 上的“**核**”，并对应于子 locale。从逻辑学家的角度看，它们可以视为真值上的一种特殊模态算子（例如“局部为真”）。程序员或类型论学者或许更愿意将它们视为单子（下文采用的表示法应能清楚说明原因）。

（关于这些不同观点的更多内容，请参阅 [Johnstone 1977, §3.1] 或[Mac Lane & Moerdijk 1992, chap. V, §1] 或 [McLarty 1992, §21.1]，其中介绍了一般初等拓扑斯背景下 Lawvere–Tierney 拓扑的定义；关于无点拓扑背景下的核，请参阅[Johnstone 1982, chap. II, §2.2] 或 [Picado & Pultr 2012, chap. III, ¶5.3]；关于两者之间的联系，请参阅 [Johnstone 2002, §A4.4–§A4.5 and §C1.1]；关于可实现性背景下 Lawvere–Tierney 拓扑（在该背景下称为局部算子）的表示法，请参阅 [van Oosten 2008, §2.5.4]；最后，关于核的序论性质，可参阅 [Wilson 1994]。）

[19]引自 [歌德 1907年，第1279]节。——英文译文：“数学家就像法国人：你和他们交谈时，他们会把你的话翻译成自己的语言，很快就会变成完全不同的东西。”

¶7.2. 即使不解释什么是“有效拓扑斯”，也不解释一般意义上的“Lawvere–Tierney 拓扑”，我们仍可将“有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑”定义为一个映射 $J\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，使得

- J 是“可计算单调”的：存在一个程序[20] fmap（与 $U, V \subseteq \mathbb{N}$无关），它在输入一个将 U映射到 V 的程序后，会返回一个将 $J(U)$映射到 $J(V)$的程序；
- J 是“可计算膨胀”的：存在一个程序 return（与 $U \subseteq \mathbb{N}$无关），将 U映射到 $J(U)$；
- J 是“可计算幂等”的：存在一个程序 join（与 $U \subseteq \mathbb{N}$无关），将$J(J(U))$映射到 $J(U)$。

（这里，如果某个程序是一个部分可计算函数的代码，且该函数至少在 U 上有定义，并且函数将 U 中的元素映射到 V中，我们就说该程序“将 U 映射到 V”，或“在输入 U 中的一个元素时，返回 V中的一个元素”。关于此定义的精确重述，请参见 7.3。）

我们还像上文那样定义 Lawvere–Tierney 拓扑上的一个预序 $J \preceq K$：若存在一个程序（与 $U \subseteq \mathbb{N}$无关），将 $J(U)$映射到 $K(U)$。

以下直觉或许值得牢记：如果我们将 $U \subseteq \mathbb{N}$ 视为一个需要解决的问题（即，以可计算方式生成解集 U中的某个值这一问题），那么 $J(U)$就应理解为一组借助某种广义计算设备（即广义预言机）来解决该问题的方法。对 J所要求的三个性质反映了以下一般思想：第一，如果我们知道如何从 U的一个解中解决 V，那么借助帮助时我们也知道如何做到这一点；第二，我们总是可以选择不借助帮助而直接解决 U；第三，我们所获得的帮助是无限可用的。

这些概念在可计算性的语境中自然产生的方式如下：如果$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个作为普通图灵预言机来考虑的任意整数函数，那么将 $U \subseteq \mathbb{N}$映射为集合 $J_g(U) := \{e \in \mathbb{N} \mid \varphi_e^g(0)\downarrow \in U\}$的映射$J_g$，其中这些预言机程序在提供 g 作为预言机时会终止，并返回 U中的一个值，则满足这些性质，即定义了一个 Lawvere–Tierney 拓扑。此外，当且仅当 f 图灵可归约于 g时，$J_f \preceq J_g$ 才出现。自然的问题是：我们能否将普通图灵预言机和图灵可归约性加以推广，从而涵盖所有 Lawvere–Tierney 拓扑？T3 度正是为此而设。

因此，[Kihara 2023] 的核心结果是：Arthur–Nimue–Merlin（“T3”）博弈度恰好刻画了有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑（模等价关系“$J \preceq K$ 和 $K \preceq J$”），以及它们的序关系。事实上，给定预言机 g 所对应的 J_g并不难描述，它是对上文刚刚描述的 J_f的直接推广：如果 $U \subseteq \mathbb{N}$，那么 $J_g(U)$ 就是这样一组（可计算的！）Arthur 策略：它们借助 Nimue，利用所考虑的预言机 g，成功地产生 U的一个元素。下文 7.5 节将给出精确定义和定理陈述。此外，T2 度和 T1 度分别恰好是由某个 J所定义的度；该 J分别保持（任意）交集，以及同时保持交集和并集，取值于$\mathcal{P}(\mathbb{N})$。

现在让我们把这些非正式概念精确定义如下：

定义 7.3。我们用记号 $U \Rightarrow V$表示将 U中的元素映射到 V中元素的程序集合 $\{e \in \mathbb{N} \mid \forall m \in U.\ (\varphi_e(m)\downarrow \in V)\}$。

有效拓扑斯上的 **Lawvere–Tierney 拓扑**（或在上下文明确时简称“Lawvere–Tierney 拓扑”）是一个映射 $J\colon \mathcal{P}\ \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，满足这三个集合

- $\bigcap_{U,V\subseteq\mathbb{N}} \Big((U \Rightarrow V) \Rightarrow (J(U) \Rightarrow J(V))\Big)$

[20] 我们为上述三个部分取名为 fmap，return，join，这些名称沿用了 Haskell 编程语言中关于单子的惯例；不过，用更数学化的术语来说，后两者分别称为单子的单位 η 和乘法 μ，而前者表示函子性。

- $\bigcap_{U\subseteq\mathbb{N}} \big(U \Rrightarrow J(U)\big)$
- $\bigcap_{U\subseteq\mathbb{N}} \big(J(J(U)) \Rrightarrow J(U)\big)$

均有元素。此外，我们将它们按下一段中所述的等价关系 $\equiv$取商。

对于 J，K：具有 $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 映射，我们在 $\bigcap \big(J(U) \Rrightarrow K(U)\big)$ 是$_{U\subseteq\mathbb{N}}$有元素的（这是一种预序关系）时记作 $J \preceq K$；当 $J \preceq K$ 和 $K \preceq J$ 都成立时，我们也记作 $J \equiv K$ [21]。对于 $J \preceq K$，其中 $[J]$ 指的是 J 在 $\equiv$ 下的等价类，我们还记作 $[J] \leq [K]$。

参考文献。 [Lee 和 van Oosten 2013，定义 1。1]，[van Oosten 2014，定义 1。2]和[Kihara 2023，定义 3。2] 或 [Kihara 2024年，定义 3。3]。 □

严格来说，Lawvere–Tierney 拓扑是映射$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 在 $\equiv$ 下的类 $[J]$，如上所述；但我们常常宽泛地将 J 本身称为 Lawvere–Tierney 拓扑。

正如我们在 ¶7.1 中指出的，对于任意 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$（实际上，对于任意 $g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ T1 预言机），定义 $J_g(U) := \{e \in \mathbb{N} \mid \varphi_e^g(0)\!\downarrow \in U\}$ 会给出一个 Lawvere–Tierney $J_g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$（这很容易验证）。关键的是，T2 和 T3 预言机也会给出 Lawvere–Tierney 拓扑；事实上，T3 预言机能给出所有这类拓扑，下面我们将对此作出解释。

定义 7.4。对于每个 T3 预言机 $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，我们按如下方式关联一个映射 $J_g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$：$J_g(U)$ 是这样一个 Arthur 策略的集合：在 Nimue 的帮助下产生 U 中的一个元素；更正式地说，$J_g(U)$ 是这样的 Arthur 策略的集合：它们是从 $\{U\}$ 到 g 的归约博弈中某个 Arthur+Nimue 获胜策略的一部分，其中 $\{U\}$ 指取此值的基本 T3 预言机（因此初始配置由秘密部分 U 构成，而 Arthur 的目标是声明一个 U 中的元素）。

反过来，对于每个 Lawvere–Tierney 拓扑 $J\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，我们都将其关联到一个 T3 预言机$J^\sharp\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，定义如下：$J^\sharp(m) = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid m \in J(U)\}$。

参考文献。对于从预言机到拓扑的方向：[Kihara 2023，观察 3.3]，其中记作 $g^{\supset\to}$；或见 [Kihara 2024，§5.3 命题 5 之前。26] 其中一种密切相关且等价的构造记作 j_U；这也与 [Lee & van Oosten 2013，命题 2.3] 有关（但仅适用于基本预言机）。

对于拓扑到预言机方向：[Lee & van Oosten 2013，定理 2.4]，其中记作 $f \mapsto \theta$；或见 [Kihara 2023，定理 3.1]，其中记作 $\beta^{\leftarrow}$；或见 [Kihara 2024，§5.3 命题 5 之前。26] 其中记作 U_j。 □

定理 7.5。在 7.4 中定义的映射 $g \mapsto J_g$ 和 $J \mapsto J^\sharp$ 在 $\mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$（T3 度的集合）与有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑集合之间定义了保序（因而也保序反映）的双射；两者均采用前文定义的自然序。

此外，在这一对应关系下，T2 度（分别为 T1 度）$\leq \boldsymbol{\omega}$ 恰好对应于由 J 定义的 Lawvere–Tierney 拓扑，其中前者保持任意交（分别同时保持任意交和任意并）[22] 于 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中。

---

[21]我们强调，这意味着存在可计算映射（与 U无关），将每个 $J(U)$ 映射到对应的 $K(U)$，反之亦然，但不 一定是双射。[22]细节说明：我们允许“任意并”中包含空并（其值为 $\varnothing$），因此要求 $J(\varnothing) = \varnothing$（这相当于限制该度为 $\leq \boldsymbol{\omega}$）。另一方面，交集被假定是在 $\mathbb{N}$ 的某个未指明子集内进行的，因此空交不会对 $J(\mathbb{N})$ 施加约束。

参考文献。第一段的陈述见 [Kihara 2023，第 3.5] 条推论。第二段的陈述见 [Kihara 2024，第 3.7 条命题和第 3.10]，条定理；不过，为了免去读者在多种不同记号之间进行转换的不便，我们还在下文给出了直接证明。 □

第二段陈述的证明。如果 g 是一个 T2 预言机，也就是说 Nimue 在选择下一步时没有任何选择，那么 $J_g(U)$ 就是这样一个 Arthur 策略的集合：无论 Merlin 如何行动，都会使 Arthur 宣告一个属于 U 的值。由此可见，J_g 保持任意交。如果 g 是一个 T1 预言机，也就是说 Merlin 在选择下一步时没有任何选择，那么 $J_g(U)$ 就是$\{e \in \mathbb{N} \mid \varphi_e^g(0)\downarrow \in U\}$中能够产生一个属于 U 的值的 Arthur 策略集合，因此它就是所有 $J_g(u)$ 的并集，其中 $u \in U$，故 J_g 保持任意并。

反过来，如果 J 保持任意交（尤其是保持包含映射），那么只要 $m \in J(\mathbb{N})$，就存在最小的集合 U，使得 $m \in J(U)$，即$\bigcap\{U \mid m \in J(U)\} = \bigcap J^\natural(m)$。我们将其记为 $J^\flat(m)$（本质上，这是 Nimue 显而易见的最佳一步）：这定义了一个 T2 预言机 $J^\flat$，而 $J^\natural(m)$ 就是所有满足$U \supseteq J^\flat(m)$ 的 U 的集合，因此考察归约博弈即可看出 $[J^\natural]_{\mathrm{T3}} = [J^\flat]_{\mathrm{T2}}$。如果 J 还保持任意并，那么 $J^\flat(m)$ 就是满足 $m \in J(\{u\})$ 的 u，若其存在；因此 $J^\flat$ 实际上来自一个 T1 预言机。 □

例7.6。正如前面提到的，如果 $g\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 是一个 T1 预言机，它的度对应于 $J_g(U) = \{e \in \mathbb{N} \mid \varphi_e^g(0)\downarrow \in U\}$。特别地，可计算度 $\mathbf{0}$ 对应于$J_{\mathbf{0}}(U) = \{e \in \mathbb{N} \mid \varphi_e(0)\downarrow \in U\}$：但这等价于简单得多的 Lawvere–Tierney 拓扑 $\mathrm{id}\colon U \mapsto U$（确实，$\bigcap_{U\subseteq\mathbb{N}} \left(J_{\mathbf{0}}(U) \Rightarrow U\right)$ 中有元素是一个通用程序的代码$e \mapsto \varphi_e(0)$，反过来，$\bigcap_{U\subseteq\mathbb{N}} \left(U \Rightarrow J_{\mathbf{0}}(U)\right)$ 中有元素是一个常值输出程序的代码：这表明 $J_{\mathbf{0}} \equiv \mathrm{id}$）。

全知度 $\boldsymbol{\omega}$（此处视为$\{\{u\} \mid u \in \mathbb{N}\}$的度）具有如下定义性质：存在一个共同的 e，使得对于每个有元素的 U，都有 $e \in J_{\boldsymbol{\omega}}(U)$，但仍然有 $J_{\boldsymbol{\omega}}(\varnothing) = \varnothing$。确实，$e$ 可以是一个 Arthur 策略的代码，该策略向预言机查询并宣布从中获得的值；相应的尼缪策略是从 U中选择一个元素 u 并出$\{u\}$，迫使 Merlin 向 Arthur 展示 u。更简单地说，这等价于这样的 Lawvere–Tierney 拓扑：将每个有元素的 U 映射到 $\mathbb{N}$，并将 $\varnothing$ 映射到 $\varnothing$。

最后，$\top$ 度具有这样的定义性质：即使 $J_\top(\varnothing)$也有元素。

¶7.7. 此处我们提到，也可以在 Lawvere–Tierney 拓扑的层面上描述代数运算（交与并，参见 3.8 和 3.1，以及 3.14 中简要提及的 Heyting 运算）。具体公式如下：

- J_1 和 J_2 的交由 $U \mapsto J_1(U) \sqcap J_2(U)$表示。
- J_1和 J_2的并由 $U \mapsto \bigcap_{V\subseteq\mathbb{N}}((((J_1(V) \sqcup J_2(V)) \Rightarrow V) \sqcap (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V)$表示。
- J和 K的*Heyting* 运算由 $U \mapsto \bigcap_{V\subseteq\mathbb{N}}(J(V) \Rightarrow K(U \sqcup V))$表示。

这里我们使用以下记号表示$\mathcal{P}(\mathbb{N})$上的相应运算：

- $U \sqcap V := \{\langle u, v\rangle \mid u \in U,\ v \in V\}$ 是笛卡尔积[23]的哥德尔编码。
- $U \sqcup V := \{\langle \mathbf{0}, u\rangle \mid u \in U\} \cup \{\langle \mathbf{1}, v\rangle \mid v \in V\}$ 是带标记的不交并。
- $U \Rightarrow V := \{e \in \mathbb{N} \mid \forall m \in U.(\varphi_e(m)\downarrow \in V)\}$ 如前所述。

[23]在其他地方我们只是写作 $U \times V$，但在这里，为保持一致，我们更愿意强调它与交运算的联系。

虽然我们已为有效拓扑斯写出了这三个公式，但它们只是任意拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑（或者，实际上是框架上的核）对应运算的一般公式的特例：拓扑的交公式由 Lawvere–Tierney 拓扑按点序排列这一事实可立即得出；并的公式将由下文的命题 7.11 推出；至于 Heyting 运算的公式，请参见[Johnstone 1982年，第 II 章，第 2.5 节，第 2 页第二行； 52] 或 [Wilson 1994年，第 6 章，定理 23.4(2)]或 [Jibladze 2023]。

¶7.8. 正如下文将看到的，我们甚至可以显式计算分别与度$\mathbf{d}_{P,Q}$ 和$\mathbf{c}_{P,Q}$ 相关联的 Lawvere–Tierney $J_{\mathbf{d}_{P,Q}}$和 $J_{\mathbf{c}_{P,Q}}$ （按 7.4 中的意义）：它们在等价意义下由下式给出：

$$J_{\mathbf{d}_{P,Q}}(U) = \bigcap_{V\subseteq\mathbb{N}} (((((P \sqcap (\{0\} \Rightarrow V)) \cup (Q \sqcap (\{1\} \Rightarrow V))) \Rightarrow V) \sqcap (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V)$$

$$J_{\mathbf{c}_{P,Q}}(U) = \bigcap_{V\subseteq\mathbb{N}} (((((P \Rightarrow V) \cup (Q \Rightarrow V)) \Rightarrow V) \sqcap (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V)$$

（注意，此处的∪并非笔误：它表示集合论并。）这些公式将在¶7.19中解释，但对于研究$\mathbf{d}_{P,Q}$ 和$\mathbf{c}_{P,Q}$似乎并没有特别的用处，因此我们只顺带提及。

（从这里开始，我们假设读者熟悉拓扑斯理论以及可实现性的范畴论观点。）

¶7.9. 本节的附加记号。 若 S 是一个集合，我们用 ∇S 表示有效拓扑斯中的相应“常值”对象（[vanOosten2008, §2.4]）；在实践中，它由组装（S, ($s \mapsto \mathbb{N}$))表示（换言之，其底集为 S，且每个自然数都可实现 S中的每个元素）。

我们用 Ω 表示拓扑斯的子对象分类器，用 **自然数集** 表示其自然数对象。若有歧义风险，我们用 $[\![\phi]\!]$ 表示命题 ϕ 的真值；不过我们常常省略这些括号（例如，在引理 7.10 中，我们写作 $f(x \in A)$，而不写 $f([\![x \in A]\!])$）。

我们先回顾一些属于拓扑斯理论（或框架理论）常识的事实：

引理 7.10. 若 $A \hookrightarrow X$ 是拓扑斯中某个对象的子对象，则存在满足 $\forall x : X.\ f(x \in A)$ 的最小单调映射 $f\colon \Omega \to \Omega$，且其显式表达式为：

$$u \mapsto \exists x : X.\ ((x \in A) \Rightarrow u))$$

证明. 我们需要（在内部进行推理）证明： f 满足 $\forall x : X.\ f(x \in A)$，当且仅当对于每个 $u : \Omega$，都有 $(\exists x : X.\ ((x \in A) \Rightarrow u)) \leq f(u)$。

对于“如果”部分，假设 $(\exists x : X.\ ((x \in A) \Rightarrow u)) \Rightarrow f(u)$，并令 $x \in X$。显然有 $((x \in A) \Rightarrow (x \in A))$，因此 $f(x \in A)$，如所述。

对于“仅当”部分，假设 $\forall x : X.\ f(x \in A)$，并假设 $(x \in A) \Rightarrow u$ 对某个 x 成立：于是 $f(x \in A) \Rightarrow f(u)$，因为 f 是单调的，因此有 $f(u)$，如所述。 □

命题 7.11。 若 $f\colon \Omega \to \Omega$ 保序，其中 Ω 是拓扑斯中真值的集合，那么满足 $f \leq j$ 的最小 Lawvere–Tierney 拓扑 $j\colon \Omega \to \Omega$ 存在，且可明确写为：

$$u \mapsto \forall v : \Omega.\ (((f(v) \Rightarrow v) \wedge (u \Rightarrow v)) \Rightarrow v)$$

参考文献。 参见 [Lee & van Oosten 2013, 命题 1.2] 及其中证明的第二行。为追溯这一民间流传结果的历史，关于该结果及与之密切相关的陈述和/或下述推论，还可参阅： [Johnstone 1977, 定理 3.57]（其核心思想归功于 André Joyal）， [Hyland 1982, 命题 16.3] （该文针对有效拓扑斯陈述，但这点无关紧要）， [Johnstone 1990, 命题 1] （假设 f 是一个“预核”），以及 [Johnstone 2002, 推论 A4.5.13(i)] （未给出显式公式）。我们还可以提及 [Caramello 2014, 定义 4.2(a)]，尽管其表述方式是满足一个逻辑公式，而非使某个子对象稠密。另请参见 [Madore 2024]，了解更多背景以及另一种证明。

□

推论 7.12。 如果 $A \hookrightarrow X$ 是拓扑斯中某个对象的子对象，那么使 A j 在 X 中稠密的最小 Lawvere–Tierney 拓扑 j （即满足 $\forall x:\ X.\ j(x \in A)$ 的拓扑）存在，且可明确表示为：

$$j_{A\hookrightarrow X} : u \mapsto \forall v : \Omega.\ ((((\exists x : X.\ ((x \in A) \Rightarrow v)) \Rightarrow v) \wedge (u \Rightarrow v)) \Rightarrow v)$$

证明。 该推论可直接由引理 7.10 和命题 7.11 得出。 □

注 7.13。 无论如何，当 $A \hookrightarrow X$ 和 $B \hookrightarrow Y$ 是拓扑斯中的两个子对象时，我们可以利用上述结果写出一个逻辑公式来表达 $j_{A\hookrightarrow X} \leq j_{B\hookrightarrow Y}$ 这一事实，即：

$$\begin{aligned}\forall v : \Omega.\ (((\exists y : Y.\ ((y \in B) \Rightarrow v)) \Rightarrow v)\\ \Rightarrow ((\exists x : X.\ ((x \in A) \Rightarrow v)) \Rightarrow v))\end{aligned}$$

（在高阶命题逻辑中，验证该公式确实等价于 $\forall u : \Omega.\ (j_{A\hookrightarrow X}(u) \Rightarrow j_{B\hookrightarrow Y}(u))$ 是一道直接的练习，其中 $j_{A\hookrightarrow X}$ 和 $j_{B\hookrightarrow Y}$ 取自 7.12。）

虽然这个公式看起来并不特别引人入胜，甚至算不上真正有用，但知道它存在还是很有趣的，因为：(a) 它为任意拓扑斯中的任意种类子对象给出了类图灵可约性的概念（为了更好地模仿通常的图灵可归约性，也许最好将其应用于形如 $A \cup (X \setminus A)$ 的子对象），以及 (b) 特别地，对于有效拓扑斯，将其与命题 7.15 和 7.16 结合起来，原则上可以让我们完全用可实现性来表达 T0–T3 预言机的可归约性概念，而无需涉及博弈或预言机（参见 [Madore 2025]，其中明确地从该公式展开出了通常的图灵可归约性）。

¶7.14. 现在我们也来解释或回顾一下，从内部视角看，T3 预言机 $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 如何在有效拓扑斯上产生一个 Lawvere–Tierney 拓扑。

首先，我们有一个标准映射 $\varpi\colon \nabla\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Omega$（可简单表示为作用于 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上的恒等映射）。注意，可以通过将 $\nabla\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 识别为 $\mathbf{N}$ 的 $(\neg\neg)$-闭子对象所成的对象，在内部定义它（也就是说，内部同态对象 $(\nabla 2)^{\mathbf{N}}$，其中 $\nabla 2$ 本身被视为 $(\neg\neg)$-稳定真值所成的对象 $\{p \in \Omega \mid \neg\neg p = p\}$；参见 [van Oosten 2008年，第 129] 页）：于是 $\varpi(G)$ 是“G 有元素”的真值 $[\![\exists v : \mathbf{N}.(v \in G)]\!]$（参见同上引文，命题 3.1.11 的证明，其中指出 ϖ 是满射）。

接下来，$\nabla\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$ 可以类似地定义为 $\nabla\mathrm{P}(\mathbb{N})$ 的（$\neg\neg$）-闭子对象所构成的对象。集合映射 $g\colon \mathbb{N} \to \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$ 定义了有效拓扑斯中的一个态射 $\mathbf{N} \to \nabla\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$，我们稍有些滥用地仍将其记为 g。现在我们关注与该情形相关的 $\mathbf{N} \times \nabla\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N}))$ 的两个子对象。第一个是由形如 $\{(n, G) \mid G \in g(n)\}$ 的对构成的子对象（我们可以将它们看作 Arthur 针对预言机 g 的一步 n，以及 Nimue 的一步 G）：注意，它的底集与描述中给出的集合相同，而 (n, G) 的唯一实现子是整数 n 本身。第二个是前者的子对象 $\{(n, G) \mid G \in g(n) \wedge \varpi(G)\}$，由满足附加条件 G 有元素的对构成：注意，此时 (n, G) 的实现元由 $\{n\} \times G$ 给出（我们可以将它们看作 Merlin 作出回应的一步）。

命题 7.15。 若 $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 是一个 T3 预言机，那么有效拓扑斯 j_g 上与 g 相关联的 Lawvere–Tierney 拓扑[24]：$\Omega \to \Omega$（按定义 7.4 的意义）就是推论 7.12 针对子对象给出的拓扑

$$\{(n, G) \mid G \in g(n) \wedge \varpi(G)\} \hookrightarrow \{(n, G) \mid G \in g(n)\}$$

如上所述。

说明。这本质上是对 [Lee 与 van Oosten 2013，第 2.3] 条命题的重述，但由于后者将证明留给读者（并且由于我们需要确保该构造确实与作为我们理论基础的 [Kihara 2023] 的构造一致），我们在此给出更详细的说明。借助引理 7.10，所考虑的包含映射 $\{(n, G) \mid G \in g(n) \wedge \varpi(G)\} \to \{(n, G) \mid G \in g(n)\}$ 所对应的映射 f 是 $u \mapsto \exists(n, G)。\ (G \in g(n) \wedge (\varpi(G) \Rightarrow u))$。现在，若我们将 $U \subseteq \mathbb{N}$ 记作真值 $u : \Omega$ 的实现元集合，则 $\exists(n, G)。\ (G \in g(n) \wedge (\varpi(G) \Rightarrow u))$ 的一个实现子是代码 n, e，表示一个有序对，其中对于某个 $G \in g(n)$，我们有 $e \in (G \Rightarrow U)$。除去平凡的记号变更外，这就是 [Kihara 2023 中定理 3.1]证明开头所记为 $g^{\to}(U)$ 的对象。现在，同上引文中的定理 3.4 保证，由 f 通过 7.11 定义的 j 正是与 g 相关联的 Lawvere–Tierney 拓扑（在那里记作 $g^{\supset\to}$）。 □

¶7.16. 当 $g\colon\ \mathbb{N} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是一个 T2 预言机时，对 j_g 的上述描述可简化如下。首先，将 g 视为一个全函数 $g\colon\ D_g \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$（其中 $D_g :\!= \{n \in \mathbb{N} :\ g(n)\downarrow\}$）。因此，$D_g$ 定义了 $\mathbf{N}$ 在 **Eff** 中的一个（$\neg\neg$）-闭子对象（更准确地说，它是 $\nabla D_g \cap \mathbf{N}$，其中交取为 $\nabla\mathbb{N}$ 的子对象的交），尽管略有滥用，我们仍将其记作 D_g。于是，集合映射 $g\colon\ D_g \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 诱导出 **Eff** 中的一个态射 $D_g \to \nabla\mathcal{P}(\mathbb{N})$，上述描述转化为：$j_g$ 是与该子对象相关联的拓扑

$$\{n \mid n \in D_g \wedge \varpi(g(n))\} \hookrightarrow D_g$$

当 $g\colon\ \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 是一个 T1 预言机时，我们同样最好将其视为一个全函数 $g\colon\ D_g \to \mathbb{N}$；它诱导出从 $\mathbf{N}$ 的一个（$\neg\neg$）-闭子集 D_g 到 **Eff** 中的 $\nabla\mathbb{N}$ 的一个态射。此时，拓扑 j_g 是与该子对象相关联的拓扑

$$\{n \mid n \in D_g \wedge g(n) \in \mathbf{N}\} \hookrightarrow D_g$$

（请记住，**自然数集** 是 $\nabla\mathbb{N}$的一个子对象[25]）。这可能有点令人困惑，因为现在 g有两个“定义域”：左方的“有效”定义域使 g成为到**自然数集** 的态射，而右方的“经典”定义域使 g 成为到 $\nabla\mathbb{N}$的态射；拓扑 j_g 恰好使有效定义域在经典定义域中稠密。

当 $g\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$是一个 T0 预言机，由此产生一个在**Eff**中的态射**自然数集** $\to \nabla\mathbb{N}$时，拓扑 j_g 就是与子对象相关联的拓扑

$$\{n \mid g(n) \in \mathbf{N}\} \hookrightarrow \mathbf{N}$$

其中，左方的子对象也可以视为 g 的“有效”定义域，即作为部分态射的 g 的定义域 **自然数集** $\dashrightarrow$ **自然数集**。如果集合论的 g 是某个子集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 的特征函数，而我们将该子集视为 **自然数集** 的一个 (¬¬)-闭子对象，那么我们的

[24]我们用小写字母 j 表示**Eff** 中的态射，以区别于大写字母 J；后者表示一个映射$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，它代表前者。[25]我们可以将 $\nabla\mathbb{N}$ 视为**自然数集**中(¬¬)-闭的、次终端且(¬¬)有元素的子对象；在这种情况下，**自然数集** 由那些有元素的子对象组成（理由见命题 7.21），也就是说，它们在 ϖ下映射到真。

上述子对象的包含映射为 $\{(n \in A) \vee \neg(n \in A)\} \to$ **自然数集**。由此，我们建立了与 [Hyland 1982，定理 17.2] 的联系。

最后，当 $\mathscr{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 是一个基本 T3 预言机时，拓扑 $j_{\mathscr{G}}$ 是与子对象相关联的

$$\{G \in \nabla\mathscr{G} \mid \varpi(G)\} \hookrightarrow \nabla\mathscr{G}$$

在一般性地讨论了 Lawvere–Tierney 拓扑之后，现在我们来解释第 4 节中的 $\mathbf{d}_{P,Q}$和 $\mathbf{c}_{P,Q}$ 度（或它们相关联的拓扑）如何融入这一图景。

定义 7.17。 如果 $P, Q \subseteq \mathbb{N}$ 有元素且互不相交，我们用 $X_{P,Q}$ 表示有效拓扑斯 **Eff** 中的对象，该对象由组装 $(\{0,1\}, (0 \mapsto P,\ 1 \mapsto Q))$ 给出。（换言之，0 的实现元集合是 P，而 1 的实现元集合是 Q。）

特别要注意，$X_{\{0\},\{1\}} = 2$ 是 **Eff** 中的二元素集合（即两个终对象副本的余积）。

按照惯例，我们也用 $\nabla 2$ 表示由组装 $(\{0,1\}, (0 \mapsto \mathbb{N},\ 1 \mapsto \mathbb{N}))$ 给出的“常值”对象 $\nabla\{0,1\}$。

命题 7.18。 若 P，$Q \subseteq \mathbb{N}$ 都有元素且互不相交，则底集 $\{0, 1\}$ 上的恒等映射定义了组装的单态射

$$2 \hookrightarrow X_{P,Q} \hookrightarrow \nabla 2$$

而由推论 7.12 定义的拓扑 $j_{2,\ \to X_{P,\ Q}}$ 和 $j_{X_{P,\ Q,\ \to \nabla 2}}$，在定理 7.5 给出的对应关系下，分别是与 $\mathbf{d}_{P,\ Q}$ 和 $\mathbf{c}_{P,\ Q}$ 相关联的拓扑。

证明。 注意到，所讨论的所有对象都是组装。箭头 $2 \to X_{P,\ Q}$ 来自集合上的恒等映射，它由一个程序追踪，该程序将 0 映到 P 中某个固定元素，并将 1 映到 Q 中某个固定元素。箭头 $X_{P,\ Q} \to \nabla 2$ 也来自集合上的恒等映射，且显然可追踪。两者都是单态射，因为恒等映射是单射。

为了使下面的描述不那么令人困惑，我们需要一种记号来区分子集 $E \subseteq \mathbb{N}$ 与它在有效拓扑斯中定义的自然数集 $\mathbf{N}$ 的（$\neg\neg$）闭子对象（准确地说：$\nabla E \cap \mathbf{N}$，其中交是作为 $\nabla\mathbb{N}$ 的子对象取的）。因此，我们将后者记作 class(E)。

现在谈到$\mathbf{d}_{P,\ Q}$：¶7.16 中对 T1 层级的描述保证它与子对象 (class(P) $\cup$ class(Q)) $\to$ class($P \cup Q$) 相关联。明确地说，class($P \cup Q$) 是一个组装，其底集为 $P \cup Q$，其中 $P \cup Q$ 的每个元素都由其自身实现；而 class(P) $\cup$ class(Q) 是一个具有相同底集的组装，其中 P的每个元素 p 都由$\langle 0,\ p\rangle$ 实现，而 Q 的每个元素 q 都由$\langle 1,\ q\rangle$实现。现在我们有一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{class}(P) \cup \mathrm{class}(Q)) & \hookrightarrow & \mathrm{class}(P \cup Q) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ 2 & \hookrightarrow & X_{P,Q} \end{array}$$

其中右侧的竖直箭头在集合层面上来自于将 P的元素映射到 0、将 Q 的元素映射到 1，并由恒等程序跟踪；它是满射（也就是说，是满态），而且甚至有一个截面。因此，说 $\forall x \in$ class($P \cup Q$). j($x \in$ (class(P) $\cup$ class(Q))), 就等同于说$\forall x \in X_{P,\ Q}.\ j(x \in 2)$。

关于 $\mathbf{c}_{P,Q}$：¶7.16 中对基本 T3 预言机的描述保证，它与子对象 $\{G \in \nabla\{P, Q\} \mid \varpi$ (G)$\} \to \nabla\{P, Q\}$相关联，而左边只是 $X_{P,Q}$ 的一个别名，右边则是 $\nabla 2$ 的一个别名。 □

¶7.19. 这解释了 ¶7.8 中给出的公式：它们分别是将推论 7.12 应用于 $2^{\to X_{P,Q}}$ 和 $X_{P,Q}^{\to \nabla 2}$ 得到的。确实，（若将 V 记为 $v : \Omega$ 的实现元集合）那么 $\exists x : X_{P,Q}.\ ((x \in 2) \Rightarrow v)$ 的实现元集合，或者等价地，$\exists x : \nabla 2.\ ((x \in X_{P,Q}) \wedge ((x \in 2) \Rightarrow v))$ 的实现元集合，是 $((P \sqcap (\{0\} \Rightarrow V)) \cup (Q \sqcap (\{1\} \Rightarrow V))) \Rightarrow V$；而 $\exists x : \nabla 2.\ ((x \in X_{P,Q}) \Rightarrow v)$ 的实现元集合是 $((P \Rightarrow V) \cup (Q \Rightarrow V)) \Rightarrow V$。

备注 7.20。 说 $X_{P_2,Q_2} \subseteq X_{P_1,Q_1}$ 是 $\nabla 2$ 的子对象，确切来说（请记住，与映射到 $\nabla 2$ 的映射兼容的态射 $X_{P_2,Q_2} \to X_{P_1,Q_1}$ 必须在底集 $\{0,1\}$上是恒等映射），这意味着存在 $f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 部分可计算函数，它在$\{0,1\}$上跟踪恒等映射；换句话说，它至少在 $P_2 \cup Q_2$上有定义，并且满足 $f(P_2) \subseteq P_1$ 且$f(Q_2) \subseteq Q_1$：这正是我们在 4.10 中给出的承诺问题多对一归约 $(P_2, Q_2) \preceq_{\mathrm{m}} (P_1, Q_1)$ 的定义。

因此，$X_{P,Q}$ 可以看作承诺问题 (P, Q) 在有效拓扑斯中的体现（按多对一归约考虑），其中最简单的是 2（可判定承诺问题），而“终极”的是 $\nabla 2$ （它本身不是承诺问题，但请参见备注 4.9）。解码度 $\mathbf{d}_{P,Q}$ 对应于使 $2 \hookrightarrow X_{P,Q}$ 稠密的最小拓扑，而编码度$\mathbf{c}_{P,Q}$ 对应于使 $X_{P,Q} \hookrightarrow \nabla 2$ 稠密的最小拓扑。现在，命题 4.11 和 4.12 显而易见。

（当然，人们或许会对“相对编码-解码”度感兴趣：当 $(P_1,\ Q_1)$ 和 $(P_2,\ Q_2)$ 是两个承诺问题，且 $(P_2,\ Q_2) \preceq_{\mathrm{m}} (P_1,\ Q_1)$ 时，该度定义为使 $X_{P_2,\ Q_2}^{\ \to\ X_{P_1,\ Q_1}}$ 稠密的最小拓扑 $j_{X_{P_2,\ Q_2}^{\ \to X_{P_1,\ Q_1}}}$。对命题 7.18 的证明稍作改写便可表明，它对应于这样一个预言机：接收较难问题 $(P_1,\ Q_1)$ 的一个实例，并以较容易问题 $(P_2,\ Q_2)$ 的一个实例作为答案返回。不过，我们不再进一步讨论它，因为对此我们没有太多可说的。）

在讨论了 $\mathbf{d}_{P,\ Q}$ 和 $\mathbf{c}_{P,\ Q}$ 如何与 $X_{P,\ Q}$ 对象相关联之后，现在我们转而讨论 $\tilde{}\,\mathbf{d}_A$ 和 $\tilde{}\,\mathbf{c}_A$ 度（或它们对应的拓扑）。为了更好地理解 $H_0^A,\ H_1^A$ 在第5节中的出现，尤其是为了让对象 $X_{P,\ Q}$ 在此情形下（即 $X_{H_0^A,\ H_1^A}$）的出现不那么显得临时拼凑——正如我们将在推论 7.26 中所做的那样——现在我们转而讨论 Lawvere–Tierney 拓扑的**层化**概念，并首先回顾其构造。

（还要提到的是，Ahman 与 Bauer [给出并研究了一种更一般的层化定义，以及与我们备注 7.13 相关、但适用于更广泛类型论背景的可约性。）

命题 7.21。 若 $j : \Omega \to \Omega$ 是某个拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑，且 X 是该拓扑斯中的一个对象，并且它是 j-分离的（意即：$\forall x,\ y : X.(j(x = y) \Rightarrow (x = y))$），那么 X 关于 j 的层化 $\mathbf{sh}_j(X)$，就是 X 的满足以下三个性质的子对象 S：

1. S 是 j-闭的：$\forall x \in X.(j(x \in S) \Rightarrow (x \in S))$，2. S 是次终端的：$\forall x,\ y : X.(x,\ y \in S \Rightarrow x = y)$，3. S 是 j-有元素的：$j(\exists x : X.(x \in S))$。

其中，单位态射 $X \to \mathbf{sh}_j(X)$ 将 x 映射到子对象 $\{x\}$（且它是单射）。

说明。 这本质上是对 [Mac Lane & Moerdijk 1992, chap. V, §3] 中伴随层对象构造的重述。总而言之：首先注意到 $\Omega_j := \{u \in \Omega \mid j(u) = u\}$ 是一个 j-层，因此对象 $(\Omega_j)^X$ （即 j 的闭子对象）也是如此；接着注意到，接下来的两个条件本身在 $(\Omega_j)^X$ 中都是 j-闭的，意思是，如果 S 是 j-闭的，那么对于这两个条件中的任意一个，$j(\phi)$ 都蕴含 $\phi \ \ \phi$。但是，层的 j-闭子对象仍是层，因此我们定义了一个层 X_j。第三个条件保证 $X^{\to X_j}$

是 j-稠密的。因此，现在若 Y 是任意一个层，态射 $X \to Y$ 根据层的定义唯一地经由 X_j 分解。所以 X_j 确实是 X 的 j-层化。 □

（如果不假设 X 是 j-分离的，我们首先需要对等价关系 $j(x = y)$ 取商。不过，我们可以一步完成这两件事，只需将第二个条件替换为“S 是 j-次终端的”，即 $\forall x,\ y\colon\ X.(x,\ y \in S \Rightarrow j(x = y))$；但这样一来，$X \to \mathrm{sh}_j(X)$ 就由 $x \mapsto \{y \in X \mid j(x = y)\}$ 给出，当然一般不再是单射。）

¶7.22. 下文中，建议读者牢记：当 $j\colon \Omega \to \Omega$ 是拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑时，$j \leq (\neg\neg)$ 等价于 $j(\bot) = \bot$。（证明：若 $j \leq (\neg\neg)$，则特别有 $j(\bot) \leq \neg\neg\bot = \bot$；反过来，假设 $j(\bot) = \bot$，若 $j(u)$ 成立，即 $j(u) = \top$，则 $\neg(u = \bot)$，这恰好意味着 $\neg\neg u$，由此可得 $j(u) \leq \neg\neg u$。）

此外，值得注意的是，这也等价于 2 是 j-分离的（因为 $j(0 = 1) \Rightarrow (0 = 1)$归结为 $j(\bot) = \bot$）。

下面的命题当然是众所周知的（例如，它隐含于 [van Oosten 2014，§2] 中），但我们未能在文献中找到明确的表述：

命题 7.23。若 $J\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑，且 $J(\varnothing) = \varnothing$（这相当于 $J \leq (\neg\neg)$），并且 $(X,\ E)$ 是一个组装，则 $(X,\ E)$ 是J-分离的，其 J-层化为 $(X,\ J \circ E)$（即，在J-层化中，x 的实现元集合是原组装中 x 的实现元集合的 J）。

证明。(X, E) 是 J-分离的，意味着给定 x 和 y 的实现元，以及一个 J-实现子 $x = y$（即 $J(E(x) \cap E(y))$ 的一个元素），我们就可以（对 x, y 一致地）构造出 $x = y$ 的一个实现子：给定的 x 的实现子即可。

我们使用命题 7.21 中给出的 $\mathrm{sh}_J(X, E)$ 构造，定义一个态射 $(X,\ J \circ E) \to \mathrm{sh}_J(X, E)$，如下所示：由于 $\mathrm{sh}_J(X, E)$ 是对象 (X, E) 的子对象对象 $\Omega^{(X,E)}$ 的一个子对象，我们将通过伴随，根据一个态射 $(X,\ J \circ E) \times (X, E) \to \Omega$，定义一个态射 $(X,\ J \circ E) \to \Omega^{(X,E)}$；该态射在 $x \neq y$ 时将 $(x, y) \in X \times X$ 映到 $\varnothing$，在 $x = y$ 时则映到 $J(E(x))$。展开定义后，直接可检验它将 $(X,\ J \circ E)$ 嵌入 $\Omega^{(X,E)}$，且其像恰为我们在 7.21 中构造的 $\mathrm{sh}_J(X, E)$。 □

¶7.24. 例如，当 J 是由 $\varnothing \mapsto \varnothing$ 给出的 $(\neg\neg)$ 拓扑，但 $U \mapsto \mathbb{N}$ 当 $U \subseteq \mathbb{N}$ 有元素时，上述构造（前提是我们移除在 X 中借助 $E(x) = \varnothing$ 得到的无用元素）便给出了作为层化的 $\mathrm{sh}_{\neg\neg}(X, E) = \nabla X$。

注记 7.25. 命题 7.23 的一个推论或许有助于澄清问题（而且似乎未在文献中明确出现）：若 g 是一个 T3 预言机，且 J_g 是它所定义的拓扑（参见定义 7.4），那么在 J_g-层的拓扑斯中（即由 J_g 定义的有效拓扑斯的子拓扑斯中），态射 **自然数集**$_g \to$ **自然数集**^{g}，其中 **自然数集**^{g} 是其自然数对象，恰好由满足 $f \preceq_{\mathrm{T3}} g$ 的集合映射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 给出。事实上，还有更强的结论：J_g-层的拓扑斯中的对象 **自然数集**$_g^{\mathbf{N}^g}$，由一个组装给出，其底集是所有此类映射构成的集合，而 e 的实现元则是该归约的获胜 Arthur 策略（即获胜的 Arthur+Nimue 策略中的 Arthur 部分）。

注释的论证。事实上，为了说明这一点，记 $\mathbf{Eff}^g$ 为 J_g-层的拓扑斯，并记 $i^* \dashv i_*\colon \mathbf{Eff}_g \to \mathbf{Eff}$ 为该嵌入；首先回顾一下，根据 [Johnstone 2002，引理 A4.1 的证明14]，，$\mathbf{Eff}^g$ 中的自然数对象 $\mathbf{N}^g$ 是原拓扑斯 $\mathbf{Eff}$ 中自然数对象 $\mathbf{N}$ 的 J_g-层化 $i^*\mathbf{N}$。因此，由命题 7.23，$\mathbf{N}^g$ 由组装 $(\mathbb{N},\ k \mapsto J_g(\{k\}))$ 给出。现在，$\mathbf{Eff}^g$ 中的态射 $\mathbf{N}_g \to \mathbf{N}^g$ 与 $\mathbf{Eff}$ 中的相同（因为

i_* 是全忠实的），而这些又与 Eff 中的态射 $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_g$ 相同（因为 $i^* \dashv i_*$给出 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}_g}(i^*\mathbf{N}, \mathbf{N}_g) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{N}, i_*\mathbf{N}_g)$，即 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}_g}(\mathbf{N}_g, \mathbf{N}_g) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{N}, \mathbf{N}_g)$）。现在，Eff 中从组装 $(\mathbb{N},\ m \mapsto \{m\})$（它表示 $\mathbf{N}$）到 $(\mathbb{N},\ k \mapsto J_g(\{k\}))$ 的态射，是函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$；该函数由一个可计算函数跟踪，此可计算函数将 $m \in \mathbb{N}$ 映射为一个 Arthur 策略，用以宣告 $k := f(m)$；这恰好等同于针对 f 到 g的归约博弈的获胜 Arthur 策略。对于内部 Hom 集，同样的推理也成立，从而得到 $\mathbf{N}_g{}^{\mathbf{N}_g}$ 作为组装的描述。 □

推论 7.26。 若 $A \subseteq \mathbb{N}$，则与图灵预言机 A关联的 Lawvere–Tierney 拓扑 J_A 下，2 的层化为对象 $X_{H_0^A,\ H_1^A}$其定义见 7.17，其中 H_0^A，H_1^A如 5.1 中所述，分别为 $J_A(\{0\})$ $J_A(\{1\})$。

证明。 这只是命题 7.23 的一个特例。 □

˜推论 7.27。 **</style}若，则度 $\mathbf{d}_A$** 和 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 可定义如下：从与图灵预言机 A关联的 Lawvere–Tierney 拓扑 J_A 出发，考虑包含映射

$$2 \hookrightarrow \mathrm{sh}_{J_A}(2) \hookrightarrow \nabla 2$$

其中 $\mathrm{sh}_{J_A}(2)$ 是 2 在此拓扑下的层化（而 $\nabla 2$ 是在 $(\neg\neg)$ 拓扑下的层化）。那么 $\tilde{\mathbf{d}}_A$（结果表明恰好就是 $[A]_{\mathrm{T0}}$）和 $\tilde{\mathbf{c}}_A$ 分别是由推论 7.12 根据子对象 $2,\ \to \mathrm{sh}_{J_A}(2)$ 和 $\mathrm{sh}_{J_A}(2) \to \nabla 2$ 所定义的拓扑关联的度。

证明。 这直接由命题 7.18 和推论 7.26 得出。 □

¶7.28. 上述推论的有趣之处在于，它将我们的“余图灵度”构造 coT: $[A]_{\mathrm{T0}} \mapsto \tilde{\mathbf{c}}_A$ 描述为一种适用于任意拓扑斯中任意 Lawvere–Tierney 拓扑 $j \le (\neg\neg)$ 的构造实例：构造子对象 $\mathrm{sh}_j(2) \to \mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$，然后考虑使其 k-稠密的最小拓扑 k（根据推论 7.12）。不过，我们先来解释为什么一般而言 $\mathrm{sh}_j(2) \to \mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$ 是单射，以及如何相当明确地看出这一点。

命题 7.29。 在任意拓扑斯中，我们可以将 2 关于 $(\neg\neg)$ 拓扑的层化 $\mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$ 识别为对象 $\{u \in \Omega \mid \neg\neg u \Rightarrow u\}$，即 $(\neg\neg)$-稳定真值的对象。

此外，完成这一识别后，如果 $j \le (\neg\neg)$是一个拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑，那么态射 $\mathrm{sh}_j(2) \to \mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$（这是因为既然$j \le (\neg\neg)$，$(\neg\neg)$-层 $\mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$ 自然地也是一个 j-层）就是对象 $\{u \in \mathrm{sh}_{\neg\neg}(2) \mid j(u \vee \neg u)\}$ 的子对象的单射，该子对象由满足$j(u \vee \neg u)$的那些 $(\neg\neg)$-稳定真值 u 组成。

证明。根据命题 7.21，并利用这样一个事实：$j \le (\neg\neg)$ 意味着 2 是 j-分离的（参见 ¶7.22），如果我们将子对象 $S \hookrightarrow 2$ 与真值对 (p, q)——分别为 $p := [\![0 \in S]\!]$和 $q := [\![1 \in S]\!]$ ——对应起来，就可以将 $\mathrm{sh}_j(2)$ 看作由满足以下条件的对 $(p, q) \in \Omega^2$ 构成的对象：(1) $j(p) = p$ 且 $j(q) = q$；(2) $\neg(p \wedge q)$；(3) $j(p \vee q)$。在内部考察这样的一个对 (p, q)：若 q 成立，则由 (2) 可得 $\neg p$ 成立；反过来，若 $\neg p$ 成立，则 $j(\neg p)$ 也成立，并且由 (3) 可得 $j(q)$，再由 (1) 得到 q；因此，我们证明了 q 与 $\neg p$ 等价，即 $q = (\neg p)$。显然，$p = (\neg q)$ 也成立，因为一切都是对称的。因此，我们只需保留其中一个真值，并将其重新命名为 u，它需要满足 $\neg\neg u = u$。条件 (1) $j(u) = u$ 和 $j(\neg u) = \neg u$ 随即自动成立，因为 u 和 $\neg u$ 是 $(\neg\neg)$- 稳定的，所以它们也是 j- 稳定的，这是因为 $j \le (\neg\neg)$；条件 (2) $\neg(u \wedge \neg u)$ 也自动成立。因此，唯一保留下来的条件是 (3) $j(u \vee \neg u)$，由此我们完成了所需的对应。（并且我们得到的单射 $\mathrm{sh}_j(2) \to \mathrm{sh}_{\neg\neg}(2)$ 是来自 $j \le (\neg\neg)$ 的自然单射，因为我们最初将它们描述为由 2 的次终对象构成的对象。）

□

更简洁地说，$\mathsf{sh}_j(2) = \{u \in \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2) \mid j(u \vee \neg u)\}$ 是 $\mathsf{sh}_{\neg\neg}(2) = \{u \in \Omega \mid \neg\neg u \Rightarrow u\}$ 中 j- 闭包的 $2 = \{u \in \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2) \mid u \vee \neg u\}$（如果接受最后那个对应，这实际上就构成了该命题的证明）。

定义 7.30。 如果 $j \leq (\neg\neg)$是某个拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑，我们将另一种拓扑 $\mathsf{coT}(j)$定义为使包含映射 $\mathsf{sh}_j(2) \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$ 稠密的最小拓扑（根据推论 7.12），其中 $\mathsf{sh}_j(2)$ 是我们刚才所述的 2 的 j-层化。

更一般地，如果 $j \leq \ell \leq (\neg\neg)$，我们可以将 $\mathsf{coT}(j \leq \ell)$定义为使包含映射 $\mathsf{sh}_j(2) \to \mathsf{sh}_\ell(2)$ 稠密的最小拓扑。（不过，关于这一运算，我们没什么有见地的话可说。）

¶7.31。 因此，推论 7.27 表明，对于有效拓扑斯上的 Lawvere–Tierney 拓扑而言，这种 $j \mapsto \mathsf{coT}(j)$构造与定理 5.8 中的 coT 构造（甚至还有注释 5.10 和 5.11 中的 coT_1 和 coT_2 ）在对应关系 7.4 下是相容的。

容易的蕴含式（$\mathbf{b} \leq \mathbf{a}) \Rightarrow (\mathsf{coT}(\mathbf{a}) \leq \mathsf{coT}(\mathbf{b})$）（见命题 5.4）是一个完全普遍现象的例子： $k \leq j$ 蕴含 $\mathsf{coT}(j) \leq \mathsf{coT}(k)$，其中 coT 按 7.30 中的定义给出：事实上，$k \leq j \leq (\neg\neg)$ 给出一个分解 $\mathsf{sh}_k(2) \to \mathsf{sh}_j(2) \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$，显然，使 $\mathsf{sh}_k(2) \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$ 稠密的最小拓扑也必定使 $\mathsf{sh}_j(2) \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$ 稠密。困难的蕴含式（$\mathsf{coT}(\mathbf{a}) \leq \mathsf{coT}(\mathbf{b})) \Rightarrow (\mathbf{b} \leq \mathbf{a})$（见命题 5.7，其证明可追溯至定理 4.17）不可能属于某种普遍现象，因为存在以下反例：

例 7.32。 设 X 是一个豪斯多夫、极端不连通但非离散的拓扑空间，例如 $\beta\mathbb{N}$ （可数无限离散空间的斯通–切赫紧化），并令$\mathbf{Sh}(X)$ 表示 X上的集合层托普斯。那么，弱排中律 WLEM $(\forall u.(\neg u \vee \neg\neg u))$ 在$\mathbf{Sh}(X)$中成立，因为“极端不连通”意味着任意开集 U 的闭包 $\mathsf{cl}(U)$ 都是开集，因而既开又闭；因此它等于 $\neg\neg U = \mathsf{int}(\mathsf{cl}(U))$，同时也是集合论意义下的补集 $\neg U = \mathsf{int}(X \setminus U)$。另一方面，排中律 LEM $(\forall u.(u \vee \neg u))$ 在$\mathbf{Sh}(X)$中不成立，因为非孤立点 x 的补集 $X \setminus \{x\}$ 是一个稠密开集，但不是 X。

现在，根据将命题 7.29 应用于 j 为恒等映射时的描述，弱排中律恰好等价于断言 $2 \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$ 是一个同构。因此，在$\mathbf{Sh}(X)$ 中，拓扑 id 和 $(\neg\neg)$ 在 coT 下的取值相同（即 id），尽管它们彼此不同。

同一个例子也表明，使 $2 \to \mathsf{sh}_j(2)$ 稠密的最小拓扑“$\mathsf{coT}(\mathsf{id} \leq j)$”不一定总是 j 本身，这与命题 5.5 对图灵度这一特定情形的结论相反。（我们已在备注 5.11 的最后一句中见过这一现象。）

我们注意到，使 $2 \to \mathsf{sh}_{\neg\neg}(2)$ 稠密的最小拓扑“$\mathsf{coT}(\mathsf{id} \leq (\neg\neg))$”这一特定情形（正如我们刚才指出的，它等价于弱排中律，或者等价地说，德摩根律）已由 Caramello 2009]以“德摩根拓扑”之名进行研究。

例 7.33. 令 $\mathtt{Error}_{1/m}$ 表示由集合 $\{\{1, \ldots, m\} \setminus \{i\} \mid 1 \leq i \leq m\}$ 给出的基本 T3 预言机（在 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$；对于 $m = 2$，这是我们的 $\boldsymbol{\omega}$，但现在让我们考虑 $m = 3$。换句话说，这是一个预言机，它从 3 个选项中排除一个“坏”选项。（关于这个度及其性质的更多内容，见 [Kihara 2023, §4.1] 。）不难看出，如果 $f\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ 是一个 T1 预言机，并且 $f \preceq_{\mathrm{T3}} \mathtt{Error}_{1/3}$，那么实际上 f 是可计算的。（本质上，从 f 到 $\mathtt{Error}_{1/3}$ 的归约策略定义了一棵三分支可计算树，在其中，每个分支节点都有 2 个分支通向正确的计算；由于被假定为确定性的，这些计算总是相同的，因此可以通过多数表决计算

个分支通向正确的计算；由于 f 被假定为确定性的，这些计算总是相同的，因此可以通过多数表决计算 f。）

但这意味着，如果我们将 $J := J_{\mathtt{Error}_{1/3}}$ 定义为与度 $\mathtt{Error}_{1/3}$ 相关联的 Lawvere–Tierney 拓扑，并令 $P := J(\{0\})$ 和 $Q := J(\{1\})$，那么在 P 上取值为 0、在 Q 上取值为 1（其他地方未定义）的函数实际上是可计算的，也就是说，$\mathbf{d}_{P,\,Q} = \mathbf{0}$，因此$\mathbf{c}_{P,\,Q} = \boldsymbol{\omega}$（由命题 4.5 得出）。

用本节的语言来说，这意味着，对于与 $\mathtt{Error}_{1/3}$ 度相关联的拓扑，2 的层化就是 2 本身（它已经是一个层），所以，正如前一个例子中那样，coT 构造在该拓扑下得出的结果与在底（id）拓扑下一样。

用注释 5.10 和 5.11 的语言来说，这个例子意味着，若按照我们的一般构造将 coT 扩展到 T3 度，即将其定义为映射 $\mathrm{coT}_3\colon \mathscr{D}_{\mathrm{T3}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$，显式地写作 $\mathbf{c}_{J(\{0\}),\ J(\{1\})}$，那么即使 $\mathtt{Error}_{1/3} > \mathbf{0}$，我们也有 $\mathrm{coT}_3(\mathtt{Error}_{1/3}) = \boldsymbol{\omega}$，并且失去了单射性。

¶7.34. 将推论 7.12 的公式应用于命题 7.29 的描述，我们发现，对于 $j \le (\neg\neg)$，我们的 coT(j) 可由显式公式给出

$$u \;\mapsto\; \forall v : \Omega.\ ((((\exists w : \Omega.\ ((\neg\neg w \Rightarrow w) \wedge (j(w \vee \neg w) \Rightarrow v))) \Rightarrow v) \wedge (u \Rightarrow v)) \Rightarrow v)$$

虽然这个公式似乎并无特别启发性，但值得注意的是，它在相当一般的情形下（对于框架上的一个核）也有意义，因此值得研究这一一般构造意味着什么。

8 问题与进一步讨论

问题 8.1. 我们能否从 *T0* 度 $\mathrm{coT}(\mathbf{a})$ “内在地”定义它？它是否是满足$\mathbf{a} \vee \mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}$的最小 *T3* 度 $\mathbf{c}$？（后者何时存在？）

虽然 ¶7.34 对这个问题的第一部分给出了某种回答，但我们认为它并不令人满意，因为它并非纯粹依据度本身的序结构。无论如何，与 Heyting 运算或否定相比，coT 似乎带有某种“对偶”意味（关于后者，参见 ¶3.14）：否定是满足$\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{0}$的最大$\mathbf{d}$（这确实存在，但正如我们在 ¶3.14 末尾所解释的，对于$\mathbf{a}$为图灵度时，它就是$\mathbf{0}$）；而在这里，我们更倾向于寻找满足$\mathbf{a} \vee \mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}$的最小$\mathbf{c}$（这种对象通常并不存在）。尽管如此，我们怀疑第二个问题的答案是否定的；不过，这并不排除沿着类似思路给出另一种答案。

问题 8.2. 注记 *5.10* 中构造的映射 $\mathrm{coT}_1\colon \mathscr{D}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{T1}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{T3}}$ 是否满足定理 *5.8* 的类似结论？换句话说，它是否是单射且保序反映？备注 *5.11* 中定义的 coT_2 呢？

（我 们已在例 7.33 中指出，“显然”的扩展 coT_3 并非单射。）

问题 8.3. 是否存在一种合理的“可并行化”*T1* 度概念，使得定理 *4.17* 的证明能够成立，并得到以下结论：如果 $\mathbf{a}$ 是可并行化的，且$\mathbf{a} \vee \mathbf{c}_{P,Q} = \boldsymbol{\omega}$那么 $\mathbf{d}_{P\times Q,\,Q\times P} \le \mathbf{a}$？

这也与 3.7 中的评论有关。该评论强烈暗示，例如，两个不可比较的图灵度的 T1 交应当不可并行化。以下问题也可能与此相关。

问题 8.4。 命题 *3.6* 是否可以推广到两个 *T1* 度？换言之，当$\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$是两个 *T1* 度时，$\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} = \mathbf{0}$是否意味着$\mathbf{f} = \mathbf{0}$或$\mathbf{g} = \mathbf{0}$？

问题 8.5. 对于 *T1* 度，何时有 $\mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T1}} \mathbf{g} = \mathbf{f} \wedge_{\mathrm{T2}} \mathbf{g}$？

（我们在注 3.10 中看到，情况并非总是如此。）

问题 8.6. 当 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$遍历图灵度时，$\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \wedge_{\mathrm{T3}} \mathbf{b}$上的序关系是什么？$\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{b}$上的序关系又如何？

（上述问题大概不太难。）

问题 8.7. $\mathbf{c}_{P,Q}$是$\mathbf{d}_{P\times Q, Q\times P}$的函数吗？

（我们在注记 5.9 中看到，$\mathbf{c}_{P,Q}$ 不是$\mathbf{d}_{P,Q}$的函数。）

问题 8.8。 对于一个图灵度$\mathbf{c}_{P,\ Q} \geq \mathbf{b}$，是否意味着$\mathbf{c}_{P,\ Q} = \boldsymbol{\omega}$ 或者$\mathbf{b} = \mathbf{0}$?

（我们在定理 6.4 中已经看到，这对 $\tilde{}\mathbf{c}_A$ 成立。）

我们在定理 6.4 中已经看到如何比较余图灵度与图灵度：以下问题探讨我们能否将余图灵度与其他重要的 T3 度进行比较。

问题 8.9。 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \geq \mathtt{Error}_{1/m}$是否意味着$\mathbf{a} = \mathbf{0}$？（我们猜测答案是肯定的。）

这里，$\mathtt{Error}_{1/m}$表示由集合$\{\{1, \ldots\ldots, m\} \setminus \{i\} \mid 1 \leq i \leq m\}$定义的基本 T3 度（在$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 中）；对于 $m = 2$，这就是我们的 $\boldsymbol{\omega}$。换言之，这里的归约博弈是这样一种博弈：Merlin 秘密选择一个元素 $1 \leq i \leq m$，而 Arthur 的目标是借助 Nimue 避开 i；Nimue 的“否”/“是”步由 Merlin 加密为 H_0^A 或 H_1^A的元素。

（我们也不知道 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \geq \mathtt{LLPO}$ 是否成立，其中 $\mathtt{LLPO}$ 在 ¶4.8 中定义，并且根据[Kihara 2023，第 4.2]，条命题，满足 $\mathtt{LLPO} \leq \mathtt{Error}_{1/3}$。）

注意，对于所有 $\mathbf{a} \in \mathscr{D}_{\mathrm{T0}}$，我们确实有 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \geq \mathtt{Error}_{1/\mathbb{N}}$，其中 $\mathtt{Error}_{1/\mathbb{N}}$ 表示由集合 $\{\mathbb{N} \setminus \{i\} \mid i \in \mathbb{N}\}$定义的基本 T3 度；这是一个一般事实（[Lee 与 van Oosten 2013，第 5.5(ii) 条命题]），但我们可以非常直观地看到这一点：Merlin 秘密选择一个元素 $i \in \mathbb{N}$，然后 Nimue 根据 i 是否不在 H_0^A中，简单地出 0 或 1，从而迫使 Merlin 给 Arthur 一个元素 $\neq i$，Arthur 随后即可对其作出声明。

反过来：根据 [Lee 与 van Oosten 2013，第 4.17] 条命题（应用于 $n = 2$），对于任意 $m \geq 3$，我们有 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \not\leq \mathtt{Error}_{1/m}$。

命题 8.10。 对于所有图灵度$\mathbf{a} > \mathbf{0}$，(T3) 度 $\mathrm{coT}(\mathbf{a})$ 和 $\mathtt{Cofinite}$不可比较。这里，$\mathtt{Cofinite}$ 表示基本 T3 度（最早由 [Pitts1981 在例 5.8]中考虑），它由 $\mathbb{N}$的余有限子集构成。

（作为背景，我们回顾一下，根据 [van Oosten 2014，定理 2.2]，，对于图灵度$\mathbf{a}$，有 $\mathbf{a} \leq \mathtt{Cofinite}$当且仅当$\mathbf{a}$ 是超算术的。）

命题 *8.10* 的证明。 根据我们刚才回顾的结果（或者通过直接验证），有 $\mathtt{Cofinite} \geq \mathbf{0}'$，其中 $\mathbf{0}'$ 表示停机集的度，而根据我们的定理 6.4(i)，$\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \not\geq \mathbf{0}'$。这意味着 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \not\geq \mathtt{Cofinite}$

反过来，根据我们在问题 8.9 下已经提到的同一结果 [Lee & van Oosten 2013, prop. 4.17]（应用于 $n = 2$），我们有 $\mathrm{coT}(\mathbf{a}) \not\leq \mathtt{Cofinite}$。

□

问题 关于 8.11。 我们在多大程度上能够“内部地”或“综合地”证明定理 *5.8*?

（我们已在例 7.32 和 7.33——以及紧接其前的评注——中看到，这不可能由完全形式化的理由推出。然而，它或许仍可由在某些可实现性拓扑斯中有效的论证获得。）

问题 8.12。 由停机集度 $\mathbf{0}'$ 的余图灵度$\mathrm{coT}(\mathbf{0}')$（所对应的 *Lawvere–Tierney* 拓扑）所定义的有效拓扑斯 **Eff** 的子拓扑斯，是否具有有趣的内部性质?

我们特别指出这一例子，因为它似乎是最有趣的余图灵度。此拓扑斯中的态射 $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 由可计算映射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 给出（这是由定理 6.4(i) 与评注 7.25 一并得出的），但似乎我们距离获得所有映射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$只差“一次图灵跳跃”，这很耐人寻味。

参考文献

[Ahman & Bauer 2026] Danel Ahman 与 Andrej Bauer，“作为预言机计算的层”，预印本，可见于 https://arxiv.org/abs/2602.22135

[Ambos-Spies、Müller 和 Sacks（编） 1990] Klaus Ambos-Spies、Gert H. Müller、Gerald E. Sacks（编），递归理论周 （1989年3月19日至25日在德国奥伯沃尔法赫举行的会议论文集），施普林格《数学讲义》**1432**（1990），https://doi.org/10.1007/BFb0086109

[Bauer 2022] Andrej Bauer，《实例可约性与 Weihrauch 度》，《计算机科学逻辑方法》**18** （2022）20:1–20:18，https://doi.org/10.46298/ lmcs-18(3:20)2022

[Caramello 2009] Olivia Caramello，《De Morgan 分类拓扑斯》，《高等数学》**222**（2009）2117–2144，https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.07.009

[Caramello 2014] 奥利维娅·Caramello，《中间逻辑的拓扑》，数学逻辑季刊**60** （2014）335–347，https://doi.org/10.1002/malq.201200059

[Cooper 1990] S. Barry Cooper，《枚举可约性、非确定性计算与部分函数的相对可计算性》，[Ambos-Spies、Müller 和 Sacks（编）1990，第57–110],
https://doi.org/10. 1007/BFb0086114

[Coo据 2004] S. Barry Cooper，《可计算性理论》，Chapman & Hall/CRC（2004 ）

[Goethe 1907] 约翰·沃尔夫冈·冯·歌德，《格言与反思》（身后出版），《根据歌德与席勒档案馆的手稿编纂，由马克斯·赫克尔编辑》，魏玛，1907年（扫描件可见于 https://archive.org/details/ goethemaximenun00goetgoog）

[Faber 与 van Oosten 2014] Eric Faber 与 Jaap van Oosten，《关于可实现性拓扑斯之间的几何态射的更多论述》，*Theory Appl. Categ.***29** (2014), 874–895。

[Hyland 1982] J. Martin E. Hyland, 《有效拓扑斯》，[Troelstra 与 van Dalen（编）1982年，第 165–216], https://doi.org/10.1016/ S0049-237X(09)70129-6（重新排版的版本见 https://dpmms.cam.ac. uk/~ jmeh1/Research/Pub81-90/hyland-effectivetopos.pdf）[Jibladze 2023] Mamuka Jibladze 于 2023-04-17 在 MathOverflow 上回答问题“计算核框架上的 Heyting 运算”，https://mathoverflow. net/a/444977[Johnstone 1977] Peter T. Johnstone, 《拓扑斯理论》，Academic Press（1977）[Johnstone 1982] Peter T. Johnstone, 《Stone 空间》，剑桥大学出版社（1982年）[Johnstone 1990] Peter T. Johnstone, 《关于核的两则札记》，Order 7（1990）205–210, https://doi.org/10.1007/BF00383767[Johnstone 2002] Peter T. Johnstone, 《大象素描：拓扑斯理论纲要》，第 1、2 卷，Clarendon Press（2002）[Kihara 2023] Takayuki Kihara, 《面向可计算性理论学家的 Lawvere–Tierney 拓扑》，美国数学会汇刊 B 辑 10（2023）48–85，https://doi.org/10.1090/btran/ 134[Kihara 2024] Takayuki Kihara, 《重新思考预言机概念》（[Kihara 2023]的前传），预印本，见 https://arxiv.org/abs/2202.00188[Kihara 与 Ng（Keng Meng） 2025] Takayuki Kihara 与 Keng Meng Ng, 《次图灵度》，加拿大数学杂志 2025 1–26, https://doi.org/10.4153/S0008414X25101922[Kihara 与 Ng（Ming） 2026] Takayuki Kihara 与 Ming Ng, 《博弈论 Katětov 序与理想化有效子拓扑斯》，预印本，见 https://arxiv.org/ abs/2602.08138[Lambek 与 Scott 1986] Joachim Lambek 与 Philip J. Scott, 《高阶范畴逻辑导论》，剑桥大学出版社（1986）[Lee 与 van Oosten 2013] Sori Lee 与 Jaap van Oosten, 《有效拓扑斯的基本子拓扑斯》，纯粹与应用逻辑年刊 164（2013）866–883，https://doi.org/10.1016/j. apal.2013.04.001[Mac Lane 与 Moerdijk 1992] Saunders Mac Lane 与 Ieke Moerdijk, 《几何与逻辑中的层》，Springer Universitext（1992）[McLarty 1992] Colin McLarty, 《初等范畴与初等拓扑斯》，牛津大学出版社（1992）[Madore 2012] David A. Madore [= “Gro-Tsen”], 《部分函数的各种图灵归约概念》，MathOverflow 问题，提问于 2012-11-16，https:// mathoverflow.net/q/112617[Madore 2024] David A. Madore [= “Gro-Tsen”], 《在预核之上构造最小的核：这个证明说明了什么？》，MathOverflow 问题，提问于 2024-12-13, https://mathoverflow.net/q/484068

[Madore 2025] David A. Madore [= “Gro-Tsen”], “这种图灵可归约性方法曾在哪里使用过吗？”CS Theory StackExchange 问题，提问于2025年6月30日，https://cstheory.stackexchange.com/q/55511[Munroe 2011] Randall Munroe，《标准》，xkcd 网络漫画第927期（2011年7月20日），https: //xkcd.com/927/[Odifreddi 1989] Piergiorgio Odifreddi，《经典递归论：自然数函数与集合的理论》，爱思唯尔《逻辑与数学基础研究》第125卷（1989年）[“Pastebee” 2026] 用户“Pastebee”于2026年2月3日对 MathOverflow 问题“图灵度的‘一致’极小对”发布的回答，https://mathoverflow.net/a/ 507736[Picado & Pultr 2012] Jorge Picado & Aleš Pultr，《框架与局部》，Birkhäuser《数学前沿》（2012年）[Phoa 1989] Wesley Phoa，《有效拓扑斯中的相对可计算性》，Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 106（1989年）419–422，https://doi.org/10.1017/ S0305004100068146[Pitts 1981] Andrew Mawdesley Pitts，《三拓扑斯理论》，为取得剑桥大学哲学博士学位提交的学位论文（1981年）；现可访问：https://www.cl.cam.ac.uk/~amp12/papers/thet/thet.pdf[Sasso 1975] Leonard P. Sasso Jr.，《部分度综述》，J. Symbolic Logic 40（1975年），130–140，https://www.jstor.org/stable/2271892[Soare 2016] Robert I. Soare，《图灵可计算性：理论与应用》，施普林格（《可计算性理论与应用》系列）（2016年）[Troelstra & van Dalen (eds.) 1982] Anne Sjerp Troelstra & Dirk van Dalen（编），《L. E. J. Brouwer 百年纪念研讨会》（诺德韦克豪特举行的会议论文集，1981年6月8日至13日），北荷兰出版社（1982年）[van Oosten 2008] Jaap van Oosten，《可实现性：范畴论方面的引言》，《逻辑与数学基础研究》第152卷（2008年）[van Oosten 2014] Jaap van Oosten，《采用 A. M. Pitts 的局部算子的可实现性》，Theoret. Comput. Sci. 546（2014年）237–243，https://doi.org/10.1016/j.tcs. 2014.03.011[Wilson 1994] J. Todd Wilson，《组装塔以及框架理论的若干范畴论与代数方面》，为部分满足卡内基梅隆大学计算机科学学院哲学博士学位要求而提交的学位论文（1994年）；现可访问：https://www.researchgate.net/publication/35295449_The_assembly_tower_and_some_categorical_and_algebraic_aspects_of_frame_theory