arXiv:2603.19976v1 [math.OC] 20 Mar 2026

受约束非负格拉姆可行性是∃ℝ-完全的

Angshul Majumdar，德里因陀罗普拉斯信息技术学院，
印度

2026年3月23日

摘要

我们研究受约束非负格拉姆可行性的计算复杂性。给定一个部分指定的对称矩阵，以及选定条目之间的仿射关系，该问题要求判断是否存在一个非负矩阵 $H \in \mathbb{R}_+^{n\times r}$，使得 $W = HH^\top$满足所有指定条目和仿射约束。这类矩阵分解自然地出现在结构化低秩矩阵表示和几何嵌入问题中。

我们证明，即使对于秩 $r = 2$，这一可行性问题也是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。该困难性结果通过从算术可行性问题 ETR-AMI进行多项式时间归约得出。该归约利用秩二非负格拉姆表示中的算术约束几何编码：通过在 $\mathbb{R}_+^2$ 中固定锚定方向，并用形如$(x,\ 1)$的向量表示变量，可以通过内积关系实现加法和乘法约束。

结合可行性条件的半代数表述，这证明了 $\exists\mathbb{R}$-完备性。我们进一步证明，这种困难性对每个固定秩 $r \geq 2$ 都成立。我们的结果表明，受约束的对称非负格拉姆分解属于日益壮大的几何可行性问题范畴，而这类问题对于实数存在理论都是完备的。

最后，我们讨论该结果的局限性，并指出一个尚未解决的问题：确定无约束对称非负分解可行性问题的复杂性。

1 引言

低秩矩阵分解在算法、优化和矩阵理论的多个领域中发挥着核心作用。一类尤为自然的此类表示

源自 Gram 分解。给定向量h_1，……，$h_n \in \mathbb{R}^r$，矩阵

$$W_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle$$

是对称且半正定的。当进一步要求这些向量位于非负正交象限 $h_i \in \mathbb{R}^r_+$ 中时，所得表示

$$W = HH^\top, \qquad H \in \mathbb{R}^{n \times r}_+,$$

称为非负格拉姆分解。这类矩阵分解与完全正矩阵、共正优化以及非负矩阵分解模型密切相关（Berman 和 Shaked-Monderer 2003年；Bomze 2012年；Cohen 和 Rothblum1993；Vavasis 2010年；Lee 和 Seung 1999。

尽管这种表示在结构上很简单，但判定此类矩阵分解是否存在的计算复杂性仍鲜为人知。该判定问题自然属于实数存在理论 （$\exists\mathbb{R}$）这一框架；它是刻画实数域上多项式等式与不等式系统可行性的复杂性类（Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024。在具有代数结构的连续可行性问题研究中，这一复杂性类已成为核心研究对象。

过去几十年来，许多几何实现问题已被证明是 $\exists\mathbb{R}$完备的。经典例子包括伪直线拉伸性和定向拟阵可实现性，它们的困难性源于 Mn¨ev 的普适性定理 Mn¨ev 1988；Richter-Gebert2006。后续研究证明，许多几何与组合问题都是 $\exists\mathbb{R}$-完备的，例如线段相交图 F¨orster、Miltzow 和 Schnider 2026；Abrahamsen、Kleist 和 Miltzow 2023 ，以及几何嵌入问题 Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024；Abrahamsen、Miltzow 和 Seiferth2024。这些结果表明，看似简单的几何可行性问题已经能够编码任意的半代数算术结构。

矩阵分解问题也呈现出同样丰富的计算行为。一般情况下，非负矩阵分解已知是 NP 困难的 Vavasis 2010年。矩阵理论和优化领域对非负秩、完全正矩阵分解等密切相关的概念进行了广泛研究 Cohen 和 Rothblum1993；Berman 和 Shaked-Monderer2003；Bomze2012年。近年来，人们还通过半正定秩和扩展表述等概念，探索了矩阵分解与凸几何之间的联系 Fawzi 等人 2015年。然而，确切的

从存在实数复杂性的角度来看，低秩非负 Gram 实现的复杂性相对而言鲜少受到关注。

本文研究低维情形下受约束的非负 Gram 实现问题。输入由一个部分指定的对称矩阵以及针对所选条目的仿射约束构成。问题是是否存在一个矩阵 $H \in \mathbb{R}_{+}^{n\times 2}$，使得

$$W = HH^{\top}$$

所有已指定条目均满足要求，且所有仿射侧约束均成立。我们将此问题称为受约束的秩二非负 *Gram* 可行性。

我们的主要结果表明，该问题本身已具备存在实数算术的表达能力。

定理 1.1。 受约束的秩二非负 *Gram* 可行性是 $\exists\mathbb{R}$-完全的 .

该归约从算术标准形问题 ETR-AMI 出发。关键观察在于，秩-2 非负 Gram 几何具有一种简单的算术编码。两个锚定行迫使规范方向 (1，0) 和 (0，1) 出现在 $\mathbb{R}_{+}^{2}$ 中。随后将变量行约束在仿射直线 (x，1) 上，使得选定的 Gram 条目能够线性地还原变量，而成对内积则通过……生成乘法关系

$$\langle (x,1),(y,1)\rangle = xy + 1.$$

借助这一机制，实变量之间的加法、乘法和常数约束，都可以编码为 Gram 矩阵各元素之间的仿射关系。

我们的结果表明，即使在最小的非平凡维度下，受约束的非负 Gram 实现也已具备存在实数算术的表达能力。这使该问题跻身 $\exists\mathbb{R}$ 复杂性版图，并凸显了低秩非负 Gram 几何的代数丰富性。我们还证明，这种困难性会传播到每个固定秩 $r \geq 2$。

论文结构。第2 节介绍形式化框架。第3 节阐述秩-2 非负 Gram 几何。第4节介绍从 ETR-AMI的归约。第5 节推导由此得到的复杂性分类。第6 节提出若干开放问题，第7节作总结。

2 背景与预备知识

本节统一全文所用的符号，并回顾本文采用的形式化复杂性框架。我们首先回顾类 $\exists\mathbb{R}$，然后陈述归约中使用的算术标准形式，最后定义本文研究的受约束非负 Gram 可行性问题。

2.1 $\exists$R 类

$\exists$R 类由所有可在多项式时间内归约到实数存在理论的判定问题组成。一个标准的完全问题如下：给定具有整数系数的多元多项式 $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t$，判断命题

$$\exists x \in \mathbb{R}^m \ : \ \bigwedge_{i=1}^{s} p_i(x) = 0 \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{t} q_j(x) \geq 0$$

是否为真 Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024。等价地，$\exists\mathbb{R}$ 刻画了由多项式方程和不等式定义的半代数集的可行性问题。

$\exists$R 类 $\exists\mathbb{R}$ 自然地出现于几何和代数实现问题中。经典例子包括伪直线可拉伸性和定向拟阵可实现性，其困难性源于 Mn¨ev 的普适性定理 Mn¨ev1988；Richter-Gebert2006。如今，已知大量计算几何问题是 $\exists\mathbb{R}$-完全的，其中包括若干几何嵌入问题和交图实现问题 Schae- fer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024。因此，对于具有代数结构的连续可行性问题，$\exists\mathbb{R}$-困难性是衡量其难解性的标准概念。近期研究通过张量秩问题 Schaefer 和 Stefankovi˘c 2018、不动点和纳什均衡问题 Schaefer 和 Stefankovi˘c 2017，以及该类本身的扩展 Schaefer2024，进一步阐明了 $\exists\mathbb{R}$ 的能力。

众所周知，

$$\mathrm{NP} \subseteq \exists\mathbb{R} \subseteq \mathrm{PSPACE},$$

并且人们普遍认为这两个包含关系都是严格的，Schaefer 2010年。因此，$\exists\mathbb{R}$已成为涉及实变量和多项式约束的精确可行性问题的自然复杂性类。

2.2 算术标准形式

为证明困难性，我们从一种受限的算术标准形式归约到$\exists\mathbb{R}$。

定义 2.1 (ETR-AMI)。 ETR-AMI的一个实例由变量组成

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

以及以下三种形式的约束：

$$x_i = 1, \qquad x_i = x_j + x_k, \qquad x_i = x_j x_k.$$

判定问题是询问是否存在一个满足所有约束的非负实数赋值。

实数存在理论的标准范式结果表明，在 $\exists\mathbb{R}$困难性归约中，可以用这类系统替代更一般的存在公式 Schaefer2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024。这类受限算术系统十分方便，因为它们将编码半代数可行性所需的基本代数运算单独提取出来。特别是，一旦能够模拟常数、加法和乘法，就能获得一般实数存在算术所需的表达能力 Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow2024。

2.3 非负 Gram 分解

设 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵。 W 的秩为 r 的 Gram 分解是如下表示：

$$W = HH^\top$$

对于某个矩阵 $H \in \mathbb{R}^{n\times r}$。若将 H的各行记为 h_1、.....、 $h_n \in \mathbb{R}^r$，则这等价于以下恒等式：

$$W_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle \qquad \text{for all } i, j.$$

此外，若每个行向量都属于非负正交象限，

$$h_i \in \mathbb{R}^r_+,$$

那么 $W = HH^\top$ 称为非负格拉姆分解。这类分解与完全正矩阵、共正优化和非负矩阵分解密切相关（Berman 和 Shaked-Monderer2003年；Bomze 2012年；Cohen 和 Rothblum 1993年；Barker、Hill 和 Haertel

1984年；Vavasis 2010年。更广泛地说，人们也在若干相关领域研究低秩矩阵分解及其复杂性，包括精确和近似非负分解以及半正定秩（Vavasis 2010年；Arora 等人 2012年；Fawzi 等人2015年。

2.4 受约束非负 Gram 可行性

现在我们定义本文研究的判定问题。

定义 2.2（受约束秩-r 非负 Gram 可行性）。 一个实例由以下数据组成：

(i) 一个有限指标集，其中包含指定的若干对 (i,j) ，以及对称矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 中这些位置的给定有理数值 W_{ij} ；

(ii) 关于 W 中选定条目的有限个仿射约束；

(iii) 一个目标秩参数 r。

问题在于是否存在一个矩阵

$$H \in \mathbb{R}_{+}^{n\times r}$$

使得

$$(HH^{\top})_{ij} = \widehat{W}_{ij} \qquad \textit{for all specified pairs } (i,j),$$

并且在代入后满足所有仿射侧约束

$$W_{ij} = (HH^{\top})_{ij}.$$

因此，唯一的存在量化变量是 H 的条目。矩阵 W 本身仅作为指定 Gram 条目及其之间仿射关系的便捷表示。

本文聚焦于第一个非平凡情形 $r = 2$。

2.5 属于 $\exists\mathbb{R}$

上述问题属于 $\exists\mathbb{R}$。

命题 2.3。 受约束的秩-r 非负 *Gram* 可行性属于 $\exists\mathbb{R}$。

证明。 将未知矩阵 H 的元素记为

$$h_{ik}, \qquad 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le r.$$

这些是唯一被量化的实变量。

对于每个给定的数值为 W_{ij} 的指定数对 $(i,\ j)$，Gram 要求变为多项式方程

$$\sum_{k=1}^{r} h_{ik} h_{jk} = \widehat{W}_{ij}.$$

实现的非负性可用多项式不等式表示

$$h_{ik} \ge 0 \qquad \text{for all } i, k.$$

最后，对 W 中所选条目施加的每个仿射侧约束都具有如下形式

$$\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell W_{i_\ell j_\ell} = b$$

其系数为有理数 a_ℓ，b。代入

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{r} h_{ik} h_{jk},$$

这就得到一个关于变量 h_{ik}的多项式方程。

因此，整个可行性问题都可以写成关于实数的多项式等式与不等式的合取。因此，它定义了实数存在理论中的一个实例，并且属于 $\exists\mathbb{R}$ Schaefer2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024。 □

3 秩二非负 Gram 几何

本节将剖析归约背后的几何机制。我们研究秩二非负 Gram 实现，并证明，一旦固定两个特定的锚定行，其余各行便可用于编码非负实变量及其算术关系。

可表示为以下形式分解的对称矩阵 $W = HH^\top$其中 $H \ge 0$ 在矩阵理论意义下是完全正的，参见 Berman 和 Shaked-Monderer 2003年；Barker、Hill 和 Haertel 1984年。因此，当前构造可视为一种带有额外仿射约束的秩二完全正实现。本节的要点在于，即使在秩 2 的情况下，非负正交象限也具有足够的结构来支持一种简单的算术编码，参见 Berman 和 Shaked-Monderer 2003年；Bomze 2012年；Barker、Hill 和 Haertel1984年。

3.1 秩为 2 的非负 Gram 实现

设 W 是一个可进行秩二非负 Gram 矩阵分解的对称矩阵。因此，存在

$$H \in \mathbb{R}_+^{n\times 2}$$

使得

$$W = HH^\top.$$

若将 H 的各行记为 $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}_+^2$，则

$$W_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle \qquad \text{for all } i, j.$$

本节中，所有实现均假设为这种形式。

定义 3.1 (锚点行)。 若两个特定指标 e 和 f 对应的 *Gram* 条目满足以下条件，则称其为锚点

$$W_{ee} = 1, \qquad W_{ff} = 1, \qquad W_{ef} = 0.$$

锚点约束迫使对应的向量与 $\mathbb{R}_+^2$ 中的两个坐标方向重合。

引理 3.2 (锚定刚性)。 假设 W 存在一个满足定义*3.1*中锚点约束的秩 *2* 非负格拉姆实现。那么，除去两个坐标的置换，

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1).$$

证明。记

$$h_e = (a, b), \qquad h_f = (c, d)$$

其中 a，b，c，$d \geq 0$。Gram 约束蕴含

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad c^2 + d^2 = 1, \qquad ac + bd = 0.$$

由于所有量均非负，等式 $ac + bd = 0$ 蕴含

$$ac = 0, \qquad bd = 0.$$

因此， h_e 和 h_f 的支撑集互不相交。由于每个向量的范数均为单位范数，且二者都属于 $\mathbb{R}_+^2$，可知其中一个等于 (1，0)，另一个等于 (0，1)。这正是所述结论，至多相差两个坐标的交换。

□

因此，锚定行在非负正交象限中规范地确定了一个坐标系。

3.2 变量行

接下来，我们引入用于编码标量变量的行。

定义 3.3（变量行）。对于每个算术变量，我们引入一个索引 u并施加如下约束

$$W_{fu} = 1.$$

这样的索引称为变量行。

一旦锚点固定，该约束的效果便显而易见。

引理 3.4（变量编码）。假设锚点归一化

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1).$$

设 u 为一个满足 $W_{fu} = 1$的变量行。则

$$h_u = (x_u, 1)$$

对于唯一确定的标量 $x_u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。

证明。设

$$h_u = (a, b)$$

其中 $a, b \geq 0$。由于 $h_f = (0,1)$，约束 $W_{fu} = 1$ 给出

$$1 = \langle h_f, h_u \rangle = b.$$

因此 $b = 1$。令 $x_u := a$，得到

$$h_u = (x_u, 1),$$

唯一性显然成立。 □

因此，每个变量行都位于仿射直线

$$\{(x, 1) : x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2_+.$$

这条直线将作为归约中算术变量的坐标空间。

3.3 坐标提取

一旦变量行的形式为（x_u,1），就可以直接从 Gram 矩阵中恢复其第一个坐标。

引理 3.5 (坐标提取)。 在引理 *3.4*的假设下，

$$W_{eu} = x_u.$$

证明。 由于 $h_e = (1,\ 0)$ 且 $h_u = (x_u,\ 1)$,

$$W_{eu} = \langle h_e, h_u \rangle = \langle (1,0), (x_u,1) \rangle = x_u.$$

□

因此，相对于锚定行 e 指定的 Gram 条目可用于线性地读出编码的变量。

3.4 乘法结构

该构造的关键特征在于，变量行之间的内积会自动产生乘法。

引理 3.6 (乘法恒等式)。 设 u 和 v 是表示标量 x_u、$x_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$的变量行。那么

$$W_{uv} = x_u x_v + 1.$$

证明。 根据引理 3.4,

$$h_u = (x_u, 1), \qquad h_v = (x_v, 1).$$

因此

$$W_{uv} = \langle h_u, h_v \rangle = \langle (x_u,1), (x_v,1) \rangle = x_u x_v + 1.$$

□

这个恒等式是该归约中算术表达能力的基本来源。

3.5 算术实现

结合前面的引理，即可将算术约束直接转化为 Gram 条目之间的仿射关系。

命题 3.7 (秩 2 下的算术实现)。 设存在一个带有锚点的秩为 *2* 的非负 *Gram* 实现

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1),$$

并令 u、v、w 为编码 x_u、x_v、$x_w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的变量行。那么，以下等价关系成立：

$$\begin{aligned} x_u = 1 &\iff W_{eu} = 1, \\ x_u + x_v = x_w &\iff W_{eu} + W_{ev} - W_{ew} = 0, \\ x_u x_v = x_w &\iff W_{uv} - W_{ew} - 1 = 0. \end{aligned}$$

证明。 第一个等价关系由引理3.5立即得出。对于第二个，同样根据引理 3.5，

$$W_{eu} + W_{ev} - W_{ew} = x_u + x_v - x_w,$$

因此，所示等式成立当且仅当 $x_u + x_v = x_w$。

对于第三个，引理3.6 给出

$$W_{uv} = x_u x_v + 1,$$

尽管引理 3.5 给出了

$$W_{ew} = x_w.$$

因此

$$W_{uv} - W_{ew} - 1 = x_u x_v - x_w,$$

结论得证。 □

命题 3.7表明，常数、加法和乘法都可以由秩 2 非负格拉姆矩阵条目之间的仿射关系来表示。这正是从ETR-AMI进行归约所需的结构，该归约将在下一节中给出。

4 从 ETR-AMI 归约

本节中，我们通过给出一个从定义 2.1 中引入的算术标准形式到受约束的秩二非负 Gram 可行性的多项式时间归约，证明主要下界。该归约使用了第3节中开发的几何编码。

Let

$$\mathcal{I}$$

设 ETR-AMI 是一个由变量组成的实例

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

以及一个由以下形式的约束构成的有限约束族

$$x_i = 1, \qquad x_i = x_j + x_k, \qquad x_i = x_j x_k.$$

如第2节所述，这类算术系统源于实数存在理论的标准范式变换，并常用作 $\exists\mathbb{R}$-困难性归约的源问题（Schaefer）2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow2024。

我们从 $\mathcal{I}$ 构造一个符合定义 2.2 且目标秩为 $r = 2$的实例。

4.1 构造

输出实例由一组指定的 Gram 条目、一族仿射侧约束以及秩参数 $r = 2$组成，且完全符合定义 2.2的规定。目标实例的存在变量是实现矩阵的各项

$$H \in \mathbb{R}_{+}^{(n+2)\times 2}.$$

锚定行。引入两个特定指标 e 和 f。指定 Gram 条目

$$\widehat{W}_{ee} = 1, \qquad \widehat{W}_{ff} = 1, \qquad \widehat{W}_{ef} = 0.$$

根据引理3.2，在每个可行实现中，相应的行向量满足

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1),$$

允许对两个坐标进行置换。由于构造中的所有约束都仅以 Gram 条目的形式表达，而 Gram 条目在对所有行向量的两个坐标进行同步置换时保持不变，因此这种置换会得到一个等价的可行实现。因此，我们可以一次性固定坐标顺序，使上述规范化标准形式成立。

变量行。对于每个算术变量 x_i，引入一个索引 u_i。对于每个这样的索引，指定 Gram 条目

$$\widehat{W}_{fu_i} = 1.$$

根据引理 3.4，任意可行实现都必须满足

$$h_{u_i} = (x_i, 1)$$

其中标量 $x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 唯一确定。

常数约束。对于每个源约束 $x_i = 1$，添加仿射侧约束

$$W_{eu_i} = 1.$$

根据引理 3.5，这等价于 $x_i = 1$。

加法约束。对于每个源约束

$$x_i = x_j + x_k,$$

添加仿射侧约束

$$W_{eu_j} + W_{eu_k} - W_{eu_i} = 0.$$

根据引理 3.5，这等价于

$$x_j + x_k - x_i = 0.$$

乘法约束。对于每个源约束

$$x_i = x_j x_k,$$

添加仿射侧约束

$$W_{u_j u_k} - W_{eu_i} - 1 = 0.$$

根据引理 3.6和 3.5，这等价于

$$x_j x_k - x_i = 0.$$

至此，构造完成。

4.2 编码大小与复杂性

现在验证该构造具有多项式大小。

引理 4.1。 映射 $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{J}$ 将 $\mathcal{I}$ 的 ETR-AMI 实例映射到所构造的 $\mathcal{J}$ 受约束的秩二非负 *Gram* 可行性实例，该映射可在关于 $\mathcal{I}$大小的多项式时间内计算。

证明。 假设 $\mathcal{I}$ 具有 n 个变量和 m个算术约束。目标实例恰好引入 $n+2$ 个索引：两个锚点索引 e， f，以及为每个源变量 u_i 引入一个索引 x_i。

指定的 Gram 条目数量关于 n呈线性：三个锚点条目

$$\widehat{W}_{ee},\ \widehat{W}_{ff},\ \widehat{W}_{ef},$$

$\widehat{\ }$以及对于每个 $i = 1, \ldots, n$各一个条目 W_{fu_i}。

源实例的每个算术约束在目标实例中恰好贡献一个仿射侧约束。因此，仿射约束总数为 m。

此外，目标描述中出现的每个系数都属于

$$\{-1, 0, 1\},$$

且每个常数项都属于

$$\{0, 1\}.$$

因此，每个数值系数的比特长度均为 $O(1)$。由此可知，目标实例的完整编码长度为 $O(n+m)$，且该构造可在多项式时间内完成。

□

4.3 可靠性

接下来，我们证明，算术实例的每个满足赋值都会产生一个可行的非负 Gram 实现。

引理 4.2（可靠性）。 如果 ETR-AMI实例 $\mathcal{I}$ 可满足，那么所构造的受约束秩-*2* 非负 *Gram* 实例 $\mathcal{J}$ 是可行的。

证明。 假设 $\mathcal{I}$ 有一个满足赋值

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

在 $\mathbb{R}^2_+$ 中定义向量如下

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1),$$

并且，对每个变量 x_i,

$$h_{u_i} = (x_i, 1).$$

由于每个 $x_i \geq 0$，所有这些向量都位于 $\mathbb{R}^2_+$ 中。

令 H 为其行由刚刚定义的向量组成的矩阵，并令

$$W = HH^\top.$$

我们验证该实现满足 $\mathcal{J}$ 的所有指定条目和仿射侧约束。

首先，锚点约束成立：

$$W_{ee} = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle = 1,$$

$$W_{ff} = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1,$$

$$W_{ef} = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 0.$$

其次，对于每个变量行 u_i,

$$W_{fu_i} = \langle (0, 1), (x_i, 1) \rangle = 1,$$

因此所有变量行约束都得到满足。

第三，考虑一个源约束 $x_i = 1$。在 $\mathcal{J}$ 中，相应的仿射侧约束为 $W_{eu_i} = 1$。由于

$$W_{eu_i} = \langle (1, 0), (x_i, 1) \rangle = x_i,$$

这是因为该赋值满足 $x_i = 1$。

第四，考虑一个源加法约束 $x_i = x_j + x_k$。相应的仿射侧约束为

$$W_{eu_j} + W_{eu_k} - W_{eu_i} = 0.$$

根据向量的定义，

$$W_{eu_j} + W_{eu_k} - W_{eu_i} = x_j + x_k - x_i = 0.$$

最后，考虑一个源乘法约束 $x_i = x_j x_k$。相应的仿射侧约束为

$$W_{u_j u_k} - W_{eu_i} - 1 = 0.$$

Now

$$W_{u_j u_k} = \langle (x_j, 1), (x_k, 1) \rangle = x_j x_k + 1,$$

and

$$W_{e u_i} = x_i.$$

因此

$$W_{u_j u_k} - W_{e u_i} - 1 = (x_j x_k + 1) - x_i - 1 = x_j x_k - x_i = 0.$$

因此， $\mathcal{J}$ 中的所有指定条目及仿射侧约束均得到满足。因此， $\mathcal{J}$ 是可行的。

□

4.4 完备性

现在我们证明，目标实例的每个可行实现都会给出一个满足条件的算术赋值。

引理 4.3 (完备性)。 如果构造出的受约束秩为 *2* 的非负 *Gram* 实例 $\mathcal{J}$ 可行，那么原始 ETR-AMI实例 $\mathcal{I}$可满足。

证明。 假设 $\mathcal{J}$ 有一个可行实现

$$H \in \mathbb{R}_{+}^{(n+2)\times 2}.$$

将相应的行向量记作 h_e， h_f， h_{u_1}，……， h_{u_n}。

由锚点约束

$$W_{ee} = 1, \qquad W_{ff} = 1, \qquad W_{ef} = 0,$$

引理 3.2 可推出，经过两个坐标的置换后，

$$h_e = (1, 0), \qquad h_f = (0, 1).$$

与构造中一样，由于对坐标同时进行置换会保留所有 Gram 条目，我们可以固定坐标顺序，使这一归一化成立。

对于每个变量行 u_i，指定的条目 $W_{f u_i} = 1$ 和引理 3.4可推出

$$h_{u_i} = (x_i, 1)$$

其中标量 $x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 唯一确定。

我们声称，提取出的数值 x_1、……、 x_n 满足 $\mathcal{I}$的每个源约束。

常数约束。假设 $\mathcal{I}$ 包含约束 $x_i = 1$。那么$\mathcal{J}$ 包含仿射侧约束

$$W_{eu_i} = 1.$$

根据引理 3.5,

$$x_i = W_{eu_i} = 1.$$

加法约束。 假设 $\mathcal{I}$ 包含约束

$$x_i = x_j + x_k.$$

则 $\mathcal{J}$ 包含

$$W_{eu_j} + W_{eu_k} - W_{eu_i} = 0.$$

将引理 3.5 应用于每一项可得

$$x_j + x_k - x_i = 0,$$

因此 $x_i = x_j + x_k$。

乘法约束。 假设 $\mathcal{I}$ 包含约束

$$x_i = x_j x_k.$$

那么 $\mathcal{J}$ 包含

$$W_{u_j u_k} - W_{eu_i} - 1 = 0.$$

根据引理 3.6,

$$W_{u_j u_k} = x_j x_k + 1,$$

并根据引理3.5,

$$W_{eu_i} = x_i.$$

因此

$$(x_j x_k + 1) - x_i - 1 = 0,$$

这简化为

$$x_i = x_j x_k.$$

由于每个源约束都得到满足，所提取的非负元组

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

是 $\mathcal{I}$的满足赋值。因此， $\mathcal{I}$ 可满足。 □

4.5 主要复杂性结论

现在我们可以陈述主要定理。

定理 4.4。 受约束的秩二非负 *Gram* 可行性是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。

证明。 根据引理4.1，上述归约可在多项式时间内计算。根据引理4.2，源实例 $\mathcal{I}$ 的每个满足赋值都会产生目标实例 $\mathcal{J}$的一个可行实现。反过来，根据引理 4.3， $\mathcal{J}$ 的每个可行实现都会产生 $\mathcal{I}$的一个满足赋值。

因此，该归约是正确的。由于定义2.1 中所用类型的算术系统源自实数存在理论的标准形归约，并且作为$\exists\mathbb{R}$-困难性证明中的典型源问题（ Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow2024年），因此可知，受约束的秩二非负 Gram 可行性是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。 □

5 推论与复杂性分类

本节记录第 4 节所确立归约的形式化推论。下文所有陈述均直接源自第 2、3 和第4 节中已经证明的结果。

5.1 秩2分类

我们首先将命题2.3的成员资格结果与定理 4.4的困难性结果结合起来。

定理 5.1。 受约束的秩2 非负 *Gram* 可行性是 $\exists\mathbb{R}$-完备的 $e.$

证明。 根据命题 2.3，受约束的秩r 非负 Gram 可行性属于 $\exists\mathbb{R}$ ，对每个秩参数 r均成立。特别地，秩二情形属于 $\exists\mathbb{R}$。

根据定理 4.4，受约束的秩二非负 Gram 可行性是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。结合这两个结论即可得到所述 $\exists\mathbb{R}$-完备性。 □

因此，受约束的秩二问题属于计算几何和实代数复杂性领域所研究的 $\exists\mathbb{R}$-完全半代数可行性问题 Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow2024年。作为比较，关于非负矩阵分解本身的困难性结果也已为人所知；特别是，确定一个矩阵的非负秩是 NP 困难的 Vavasis 2010年。

5.2 算术可表示性

第 4 节的归约可以重新表述为一个精确可表示性结论。

推论 5.2。设

$$\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

为取值于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的有限变量集，并且令 $\mathcal{C}$ 为以下形式的有限约束族

$$x_i = 1, \qquad x_i = x_j + x_k, \qquad x_i = x_j x_k.$$

则可以在多项式时间内构造一个约束秩-2 非负 *Gram* 可行性实例，使得所构造的实例可行，当且仅当存在一个对 $\mathcal{S}$中的变量的非负赋值，满足 $\mathcal{C}$中的所有约束。

证明。这正是第 4.1 节中的构造。根据引理 4.1，该构造可在多项式时间内计算得到。“如果”方向由引理 4.2 得出，而“仅如果”方向由引理 4.3 得出。因此，所构造的实例具有所述的等价性质。

□

5.3 向更高秩传播

秩 2 的归约可立即推广到任意更大的固定秩。

引理 5.3. 设 $r \geq 2$。受约束的秩2 非负 *Gram* 可行性的每个可行实例，也是受约束的秩 r非负 *Gram* 可行性的可行实例。

证明。设 $r \geq 2$，并考虑受约束的秩 2 非负 Gram 可行性的一个可行实例。令

$$h_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2_+$$

为一个可行实现。定义

$$\iota(h_i) = (a_i, b_i, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^r_+.$$

那么对所有 i, j,

$$\langle \iota(h_i), \iota(h_j) \rangle = a_i a_j + b_i b_j = \langle h_i, h_j \rangle.$$

因此，所有 Gram 条目都得以保留。由于定义2.2中的约束仅取决于 Gram 条目，因此嵌入后的向量满足相同的指定条目和仿射侧约束。因此，同一个实例在秩 r下可行。

□

定理 5.4。 对于每个固定整数 $r \geq 2$，受约束的秩-r 非负 *Gram* 可行性问题是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。

证明。 固定 $r \geq 2$。根据命题 2.3，受约束的秩 r 非负 Gram 可行性属于 $\exists\mathbb{R}$。

为证明其困难性，通过对实例应用恒等映射，从受约束的秩二非负 Gram 可行性归约而来。若某实例在秩 2 下可行，则根据引理 5.3 ，它在秩 r 下也可行。因此，秩 2 问题的每个是实例都是秩 r 问题的一个是实例。由于根据定理 $\exists\mathbb{R}$4.4，秩 r 问题也是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。结合困难性与归属性即可得出结论。 □

5.4 向更高固定秩的推广

通过添加额外的锚定行，秩二构造可推广到每个更大的固定秩；这些锚定行会迫使所有算术向量都位于由前两个基向量张成的二维坐标平面内。

引理 5.5 (锚定标架刚性**)**。 设 $r \geq 2$，并假设对称矩阵 W 存在一个秩为 r 的非负 *Gram* 实现，其中特定指标

$$e_1, \ldots, e_r$$

满足

$$W_{e_a e_b} = \delta_{ab} \qquad \textit{for all } a, b \in \{1, \ldots, r\},$$

其中 δ_{ab} 表示克罗内克 δ。于是，除去对 r 坐标作一个共同的置换外，

$$h_{e_a} = e_a^{(r)} \qquad \textit{for all } a = 1, \ldots, r,$$

其中 $e_a^{(r)}$是 $\mathbb{R}^r$的第 a个标准基向量。

证明。令

$$h_{e_a} = (h_{e_a,1}, \ldots, h_{e_a,r}) \in \mathbb{R}^r_+.$$

Gram 约束意味着

$$\langle h_{e_a}, h_{e_a} \rangle = 1 \qquad \text{for all } a,$$

and

$$\langle h_{e_a}, h_{e_b} \rangle = 0 \qquad \text{for all } a \neq b.$$

由于所有坐标都非负，等式

$$\langle h_{e_a}, h_{e_b} \rangle = \sum_{t=1}^{r} h_{e_a,t} h_{e_b,t} = 0$$

意味着

$$h_{e_a,t} h_{e_b,t} = 0 \qquad \text{for every } t = 1, \ldots, r.$$

因此， r 向量 h_{e_1}、.....、 h_{e_r} 的支撑集两两不相交。

每个 h_{e_a} 都非零，因为其范数为单位范数。因此，我们有 r 个两两不相交的非空支撑集，它们包含于 $\{1, \ldots, r\}$中的 r元素集合。因此，每个支撑集必定恰好由一个坐标组成，而这些r 单元素支撑集必须构成 $\{1, \ldots, r\}$ 的一个划分。由于每个向量的范数为 1，每个h_{e_a} 中唯一的非零坐标必定等于 1。对坐标重新排列后，我们得到

$$h_{e_a} = e_a^{(r)} \qquad \text{for all } a = 1, \ldots, r,$$

如所述。 □

现在我们可以证明主困难性定理的高秩类比。

定理 5.6。 对于每个固定整数 $r \geq 2$，受约束的秩-r 非负 *Gram* 可行性问题都是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。

证明。 固定 $r \geq 2$。我们从 ETR-AMI （定义 2.1）。

Let

$$\mathcal{I}$$

是一个包含变量的 ETR-AMI 实例

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

以及以下形式的约束

$$x_i = 1, \qquad x_i = x_j + x_k, \qquad x_i = x_j x_k.$$

我们按如下方式构造一个受约束的秩-r 非负 Gram 可行性实例。

锚定行。 引入 r 个特定指标

$$e_1, \ldots, e_r$$

并指定 Gram 条目

$$\widehat{W}_{e_a e_b} = \delta_{ab} \qquad \text{for all } a, b \in \{1, \ldots, r\}.$$

根据引理 5.5，每个可行实现都可以归一化为

$$h_{e_a} = e_a^{(r)} \qquad \text{for all } a = 1, \ldots, r.$$

变量行。对于每个算术变量 x_i，引入一个索引 u_i。施加指定的 Gram 条目

$$\widehat{W}_{e_2 u_i} = 1,$$

并且对于每个 $t = 3, \ldots, r$，施加指定的 Gram 条目

$$\widehat{W}_{e_t u_i} = 0.$$

我们断言，在每个可行实现中，

$$h_{u_i} = (x_i, 1, 0, \ldots, 0)$$

对于一个唯一确定的标量 $x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。事实上，写作

$$h_{u_i} = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,r}) \in \mathbb{R}_+^r.$$

由于 $h_{e_2} = e_2^{(r)}$，约束 $\widehat{W}_{e_2 u_i} = 1$ 给出

$$a_{i,2} = 1.$$

同理，对于每个 $t = 3, \ldots, r$，约束 $W_{e_t u_i} = 0$ 给出

$$a_{i,t} = 0.$$

令 $x_i := a_{i,1}$，我们得到

$$h_{u_i} = (x_i, 1, 0, \ldots, 0),$$

正如所声称的。

常数约束。对于每个源约束 $x_i = 1$，施加仿射侧约束

$$W_{e_1 u_i} = 1.$$

加法约束。对于每个源约束 $x_i = x_j + x_k$，施加仿射侧约束

$$W_{e_1 u_j} + W_{e_1 u_k} - W_{e_1 u_i} = 0.$$

乘法约束。对于每个源约束 $x_i = x_j x_k$，施加仿射侧约束

$$W_{u_j u_k} - W_{e_1 u_i} - 1 = 0.$$

现在我们验证正确性。

可靠性。假设 $\mathcal{I}$ 有一个满足赋值

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

定义

$$h_{e_a} = e_a^{(r)} \qquad \text{for } a = 1, \ldots, r,$$

and

$$h_{u_i} = (x_i, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

这些向量属于 $\mathbb{R}_+^r$。锚点约束按构造成立。变量行约束成立，因为

$$\langle e_2^{(r)}, (x_i, 1, 0, \ldots, 0) \rangle = 1$$

and

$$\langle e_t^{(r)}, (x_i, 1, 0, \ldots, 0) \rangle = 0 \qquad \text{for } t = 3, \ldots, r.$$

此外，

$$W_{e_1 u_i} = x_i,$$

and

$$W_{u_j u_k} = x_j x_k + 1.$$

因此，常数、加法和乘法约束均与秩二构造中的约束完全相同。

完备性。 反过来，假设构造出的实例存在一个可行实现。根据引理 5.5，我们可以将其规范化，使得

$$h_{e_a} = e_a^{(r)} \qquad \text{for all } a = 1, \ldots, r.$$

于是，变量行约束强制

$$h_{u_i} = (x_i, 1, 0, \ldots, 0)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如上所示是唯一确定的。因此，

$$W_{e_1 u_i} = x_i, \qquad W_{u_j u_k} = x_j x_k + 1.$$

因此，仿射侧约束恰好施加了源算术约束 $x_i = 1$、$x_i = x_j + x_k$ 和 $x_i = x_j x_k$。由此提取的元组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个满足赋值。

因此，该归约是正确的。由于 r 固定，该构造使用 $n+r$ 个指标以及 O 个由 $n+m+r^2$ 指定的条目和仿射约束，其中 m 是源约束的数量。因此，该构造具有多项式时间复杂度。由此可知，受约束的秩-r 非负 Gram 可行性问题是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。 □

定理 5.7。 对于每个固定整数 $r \geq 2$，受约束的秩-r 非负 *Gram* 可行性问题是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。

证明。 属于 $\exists\mathbb{R}$可由命题 2.3 得出。困难性由定理 5.6 得出。 □

6 开放问题

前面的章节证明了，对于每个固定秩 $r \geq 2$，受约束的非负 Gram 可行性问题都是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。这引出了若干关于相关因子分解问题的自然问题。

6.1 无约束对称非负因子分解

第 4 节的困难性结果依赖于对 Gram 矩阵中选定条目施加的仿射侧约束。一个基本问题是，在移除这些约束后，类似的困难性是否仍然存在。

定义 6.1。 给定一个对称有理矩阵 $W \in \mathbb{Q}^{N\times N}$ 和一个整数 r，无约束对称非负分解可行性问题询问是否存在

$$H \in \mathbb{R}_{+}^{N\times r}$$

使得

$$W = HH^{\top}.$$

确定这个问题的复杂性仍然是一个开放问题。

6.2 近似分解

在许多应用中，对称非负分解被表述为一个优化问题，而非精确可行性问题。一种自然的判定形式是询问：是否存在一个误差在给定容差范围内的近似分解。

定义 6.2。 给定一个对称有理矩阵 $W \in \mathbb{Q}^{N\times N}$、一个整数$r$和一个有理阈值 $\tau \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，判断是否存在 $H \in \mathbb{R}_{+}^{N\times r}$使得 $\|W - HH^{\top}\|_F^2 \leq \tau$

理解这个近似可行性问题的复杂性，将有助于明确本文所揭示的困难现象在精确等式约束受到扰动后是否仍然存在。

6.3 受限约束族

第 4 节中的归约利用选定 Gram 条目之间的仿射关系来编码算术运算。这引出了一个问题：当约束结构受到限制时，该问题是否会变得更容易。

问题 6.3。 确定可在多项式时间内求解的受约束*Gram*可行性实例类别。例如，包括以下情形：

- 仅指定 *Gram* 矩阵的对角条目，
- 仅对数量有界的 *Gram* 条目施加约束，或
- 仿射约束被不等式取代。

6.4 与其他矩阵分解问题的联系

矩阵分解问题出现在优化和计算几何的许多领域。经典例子包括非负矩阵分解和完全正矩阵分解。

问题 6.4. 阐明受约束非负格拉姆可行性与其他因子分解问题（如非负秩和完全正分解）之间更精确的关系。

7 结论

我们证明了，即使在秩 2 的情形下，受约束非负格拉姆可行性也是 $\exists\mathbb{R}$-完全的；更一般地，对于任意固定秩 $r \geq 2$，结论也成立。因此，受约束对称非负格拉姆分解属于半代数可行性问题这一类，其精确求解对于实数存在理论而言是完全的（Schaefer 2010年；Schaefer、Cardinal 和 Miltzow 2024）。

主要的技术贡献是在非负正交象限内对算术进行秩 2 几何编码。一旦固定合适的锚定行，就可以在 $\mathbb{R}^2_+$的仿射切片上表示变量，并通过对 Gram 条目施加仿射约束来确保它们之间的代数关系。这表明，低秩非负格拉姆几何已具备模拟存在实数算术所需的表达能力。

与此同时，该结果的适用范围是明确的。其困难性证明本质上依赖于对选定 Gram 条目施加仿射侧约束，因此并未解决无约束对称非负分解可行性问题的复杂性。

$$W = HH^\top, \qquad H \in \mathbb{R}_+^{N\times r}.$$

判定无约束问题是否也属于 $\exists\mathbb{R}$-困难，仍是最直接的开放问题。其他自然的研究方向包括近似可行性、受限约束族，以及受约束非负格拉姆可行性与其他低秩分解问题之间的关系。

我们希望，本文提出的视角有助于厘清易处理的矩阵分解问题与存在实数解的矩阵分解问题之间的界限。

参考文献

Abrahamsen、Mikkel、Linda Kleist 和 Tillmann Miltzow（2023）。《复形的几何可嵌入性是 ∃ℝ-完备的》。载于：第 39 届计算几何国际研讨会（SoCG 2023）。Gill Barequet 和 Csaba D. T´oth 编。第 258 卷。Leibniz 国际信息学会议论文集（LIPIcs）。德国达格施图尔：Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，1:1–1:19。 ISBN：978-3-95977-281-5。 DOI：10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.1。 URL：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.1。Abrahamsen、Mikkel、Tillmann Miltzow 和 Nadja Seiferth（2024）。《二维装箱问题 ∃ℝ-完备性的框架》。载于：TheoretiCS 3，12:1–12:53。 DOI：10 . 46298/ theoretics . 2024 . 11145。arXiv：2004.07090。Arora、Sanjeev 等（2012）。《可证明地计算非负矩阵分解》。载于：第四十四届 ACM 计算理论年度研讨会论文集（STOC 2012）。美国纽约州纽约市：计算机协会，第 145–162 页。 DOI：10 . 1145 / 2213977.2214002。Barker、G. P.、Richard D. Hill 和 Raymond D. Haertel（1984）。《论完全正锥与半正定保持锥》。载于：《线性代数及其应用》56，第 221–229 页。 DOI：10.1016/0024-3795(84)90124-7。Berman、Abraham 和 Naomi Shaked-Monderer（2003）。《完全正矩阵》。新加坡：世界科技出版社。 DOI：10.1142/5270。Bomze、Immanuel M.（2012）。《共正优化——最新进展与应用》。载于：《欧洲运筹学杂志》216.3，第 509–520 页。 DOI：10.1016/j.ejor.2011.04.026。Cohen、Joel E. 和 Uriel G. Rothblum（1993）。《非负秩、分解与非负矩阵的因子分解》。载于：《线性代数及其应用》190，第 149–168 页。 DOI：10 . 1016 / 0024 - 3795(93)90226-J。Fawzi、Hamza 等（2015）。《半正定秩》。载于：《数学规划》153.1，第 133–177 页。 DOI：10.1007/s10107-014-0818-z。F¨orster、Helena、Tillmann Miltzow 和 Patrick Schnider（2026）。《多重图的几何厚度是 ∃ℝ-完备的》。载于：Algorithmica 88.3，第 1–38 页。 DOI：10.1007/s00453-025-01351-7。Lee、Daniel D. 和 H. Sebastian Seung（1999）。《通过非负矩阵分解学习物体的组成部分》。载于：《自然》401.6755，第 788–791 页。DOI：10.1038/44565。

Mn¨ev, Nikolai E.（1988）。“构形簇与凸多面体簇分类问题的普适性定理”。载于：《拓扑与几何：罗赫林研讨会》。第1346卷。《数学讲义》。柏林、海德堡：施普林格出版社，第527–544页。 DOI: 10. 1007/BFb0082792。Richter-Gebert, J¨urgen（2006）。《多面体的实现空间》。第1643卷。《数学讲义》。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg。 DOI: 10.1007/BFb0093761。Schaefer, Marcus（2010）。“若干几何与拓扑问题的复杂性”。载于：《图绘制：第17届国际研讨会，GD 2009，美国伊利诺伊州芝加哥，2009年9月22–25日，修订论文》。第5849卷。《计算机科学讲义》。Springer Berlin Heidelberg，第334–344页。 DOI: 10.1007/978-3-642-11805-0_32。—（2024）。“超越实数存在理论”。载于：《计算系统理论》68.2，第195–226页。 DOI: 10 .1007 / s00224 - 023 - 10151-x。Schaefer, Marcus、Jean Cardinal 和 Tillmann Miltzow（2024）。“作为复杂性类的实数存在理论：一部汇编”。载于：arXiv预印本 arXiv:2407.18006。 DOI: 10.48550/arXiv.2407.18006。arXiv: 2407.18006 [cs.CC]。Schaefer, Marcus 和 Daniel ˇStefankovi ˇc（2017）。“不动点、纳什均衡与实数存在理论”。载于：《计算系统理论》60.2，第172–193页。 DOI: 10.1007/s00224-015-9662-0。—（2018）。“张量秩的复杂性”。载于：《计算系统理论》62.5，第1161–1174页。 DOI: 10.1007/s00224-017-9800-y。Vavasis, Stephen A.（2010）。“非负矩阵分解的复杂性”。载于：《SIAM优化杂志》20.3，第1364–1377页。DOI: 10.1137/070709967。