arXiv:2603.19981v1 [math.LO] 20 Mar 2026

衔尾蛇古德斯坦原理

David Fern´andez-Duque[1,2], Milan Morreel[2] 和 Andreas Weiermann[2]

Abstract

在 [**10**], 中，最近有人引入了古德斯坦原始过程的一种变体：给定一组基 $B \subseteq \mathbb{N}$，将每个 $n \in \mathbb{N}$ 写成 B-范式，即 $n = b^e a + r$，其中 $b \in B$ 是小于 n 的最大基。随后，递归地将数 e 和 r 写成 B-范式，最后将 B 中的每个基替换为另一组 $C \subseteq \mathbb{N}$ 中相应的基。

研究表明，由此得到的过程会终止，且独立于 Kripke–Platek集合论（KP）；但相关证明依赖于两种不同的序数赋值：一种是单调的，却不够精确，无法确立独立性；另一种适用于证明独立性，却不具单调性，因此无法有效地用于证明终止性。

我们引入一种新的序数赋值，它能同时推出终止性和独立性，从而揭示与该过程中各个数相关的“真实”序数。借助这种赋值，我们可以探究应对该过程施加哪些限制，才能使其终止性的证明论强度介于系统 RCA_0, 、ACA_0, 、ATR_0 与 KP 之间。

1. 引言

古德斯坦序列构成了初等数论与序数分析之间的经典桥梁。经典的 Goodstein 过程如下：从一个自然数 n 开始，我们将 n 写成以 $b \geqslant 2$ 为基的形式，并反复将该表示中出现的所有系数都写成以 b 为基的形式。最后，我们将所有的 b 替换为 $b+1$，再从所得数中减去 **1**。我们重复这一过程，每一步都将 b 增加 **1**。古德斯坦原理 [**13**] 接着指出，每个这样的序列最终都会达到 **0**。原始论证为每个自然数指定一个小于 ε_0 的序数，并利用 ε_0 [**12**] 的良基性。由于 ε_0 是皮亚诺算术（PA）的证明论序数，这一论证无法在 PA 中完成。事实上，古德斯坦序列的终止性已被证明在 PA 中不可证 [**14**]。

本文以 [**10**], 的研究成果为基础，该研究将古德斯坦原理扩展到考虑多重基数的情形。该论文着重讨论可达性，而本文则面向序数分析背景更为扎实的读者。

[**10**]的基本思想是，对于每个自然数，我们都可以考察它的 b表示，然后再考察其中出现的系数的表示，不过这次使用的基可能比 b小。接着，我们对新出现的系数重复这一过程。最后，我们可以考察将这个表达式中的每个基都换成更大的基后会发生什么。我们称之为所考察自然数的升级（其定义将在第 2 节中精确定义）。 [**10**] 证明了，由此得到的古德斯坦原理最终会终止，且独立于克里普克-普拉特克集合论（KP）。

克里普克-普拉特克集合论（KP） [**3**] 是策梅洛-弗兰克尔集合论（含选择公理）的一个片段，通过省略幂集公理并限制概括模式和替换模式得到。具体而言，分离公理仅限于 Δ_0 公式，而替换模式则由较弱的 Δ_0-收集模式取代。

2000 *Mathematics Subject Classification* 03F40（主要分类），03D20。

KP 的证明论序数与若干研究充分的系统的证明论序数一致，包括非迭代归纳定义理论 ID_1，以及 Π^1_1-CA^-_0，即带无参数Π^1_1 概括的二阶算术子系统。这个共同的序数记作 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$。

虽然古德斯坦过程 [**2**, **11**] 的其他变体通常依赖于在皮亚诺算术中无法证明其为全函数的其他函数，以建立其相对于 Kripke–Platek集合论的独立性，但 [**10**] 所采用的方法转而考察一个非常自然的原理：它与经典古德斯坦过程保持密切联系，同时又具有高得多的证明论强度。关于古德斯坦原始原理的其他变体，参见 [**1**, **6**, **9**]。

在 [**10**], 中，终止性和独立性是利用两种不同的序数赋值建立的。用于证明终止性的赋值是单调的，但不够紧致，因而无法产生独立性结果。相反，用于独立性证明的赋值并不单调，因此无法证明终止性。我们提出一种同时满足这两种作用的单一序数赋值。对于独立性部分，我们使用 Buchholz[**4**] 的基本序列；这些基本序列基于 Rathjen 的 ϑ 函数 [**15**]。利用这一经过改进的赋值，我们能够在第 8 节中得到精确的序数界，并由此为 $\mathrm{RCA}_0 + (\Sigma^0_{2n})$ –IND、ACA_0, ATR_0 和 Kripke–Platek集合论$^-\omega + (\Pi_n) -$ IND 这些系统得到相变结果。

2. 多基古德斯坦过程

我们简要回顾 [**10**] 中介绍的内容，并将其与经典古德斯坦过程进行比较。如果 $b \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$，那么每个数 $n > 0$ 都可以唯一地写成 $n = b^e a + r$，其中 $b^e \leqslant n < b^{e+1}$、$0 < a < b$ 和 $r < b^e$。我们称此为 n的 b-分解，并记作$n =_b b^e a + r$。

经典古德斯坦过程的步骤如下。我们从某个数 $n_0 \in \mathbb{N}$开始。假设当前处于过程的第 i 步，且已得到数 n_i。如果 $n_i = 0$，那么定义 $n_{i+1} = 0$。否则，令 $b = i + 2$，并写出 $n_i =_b b^e a + r$。接着，将 e 和 r写成 b-分解，得到一个新的表达式，然后递归进行，直到表达式中出现的每个数都不大于 b。最后，为了得到 n_{i+1}，我们将表达式中每个 b都替换为 $b + 1$，再减去 1。古德斯坦定理指出，无论我们从哪个 $n_0 \in \mathbb{N}$开始，当 i 足够大时，$n_i = 0$。

在 [**10**], 中，b 分解的概念按以下方式进行了扩展。我们取一个（非空）基集合 $B \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$。给定 n，我们将 n 的 B-分解 定义为其 b-分解，其中 $b \in B$ 取满足 $b \leqslant n$ 的最大值。若不存在这样的 b，则令 $b = \min B$。形式上，$b = 基_B(n)$，其中

$$\mathrm{base}_B(n) := \begin{cases} \max\{b \in B \mid b \leqslant n\} & \text{if } n \geqslant \min B. \\ \min B & \text{if } n < \min B. \end{cases}$$

于是我们记作 $n =_B b^e a + r$。

新的过程按以下方式进行。在过程的每一步 i，我们会给定一个基集合 B_i。为了从 n_i 得到 n_{i+1}，我们将 n_i 写成 B_i-分解，记作 $n_i =b^e a + r$。接着，我们将 e 和 r 写成 B_i 分解，并递归进行，直到得到一个表达式，其中每个数要么是某个 $b \in B_i$，要么小于 $\min B_i$。最后，我们将该表达式中出现的每个基 $b \in B_i$ 替换为相应的 $c \in B_{i+1}$，并减去一。c 的选取在定义 2.2 中予以精确定义。

最后，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$S_B(n) := \begin{cases} \min\{b \in B \mid b > n\} & \text{if such a } b \text{ exists.} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们进一步认为，每个正整数都小于 8，且能整除 8。

Definition 2.1. 如果对于每个 $b\in B$，都有 $B\neq\varnothing$ 和 $b\mid S_B(b)$，则称集合 $B\subseteq\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ 为基层级。

注意，每个单元素集 $\{b\}$ 连同 $b\geqslant 2$ 都是一个基层级。

Definition 2.2. 设 B、C 是基层级，且 $\min B\leqslant\min C$ 以及 $n\in\mathbb{N}$。我们递归地在 n 上定义 $\uparrow n=\uparrow_B^C n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，即 n 的升级。如果 $n<\min B$，那么 $\uparrow n=n$。

否则，$n\geqslant\min B$。设 $b=基_B(n)$，并归纳地假设 $\uparrow m$ 对所有 $m<n$ 都有定义。我们先在 $m\leqslant n$ 上定义一个算子 $\langle{}^c_b\rangle=\langle{}^c_b\rangle_B^C$：若 $m<b$，则 $\langle{}^c_b\rangle m=\uparrow m$；否则记作 $m=_b b^e a+r$，并令

$$\langle{}^c_b\rangle m=c^{\langle{}^c_b\rangle e}\uparrow a+\langle{}^c_b\rangle r.$$

这相当于对 m 的所有 b-系数应用升级算子，同时将基改为 d。

接着，定义 $\uparrow n=\langle{}^c_b\rangle n$，其中 c 是满足以下条件的 C 的最小元素：

$$\uparrow(n-1)<\langle{}^c_b\rangle n<S_C(c). \tag{2.1}$$

如果不存在这样的 c，则令 $\uparrow n=\infty$。如果 c 确实存在，我们称它为 $\uparrow n$ 的见证。

换言之，给定 $n\in\mathbb{N}$，第一步是使用 C 中的一个基进行通常的基数变换，使得升级算子在 n 处单调，然后对所有系数归纳地应用升级。如果这得到一个 C-分解，我们就完成了。否则，就寻找一个合适的基 d，使得对 d 应用基数变换后得到一个 C-分解。接下来我们将举例说明，并整理 [**10**] 中的一些结果。

Example 2.3. 假设 $B=\{3,\ 6,\ 42\}$ 以及 $C=\{5,\ 10,\ 110\}$。令 $n=42^{39}=42^{6^2+3}$；我们希望计算 $\uparrow n=\uparrow_B^C n$。根据定义，我们首先要对 6^2+3 执行升级。容易看出，$\uparrow 2=2$ 且 $\uparrow 3=\langle{}^5_3\rangle 3=5$。接着我们计算得到 $\langle{}^5_6\rangle(6^2+3)=5^2+5$，它大于 $S_C(5)=10$。因此，我们改用基 10，并

$$\uparrow(6^2+3)=\langle{}^{10}_6\rangle(6^2+3)=10^2+5=105<110=S_C(10).$$

现在我们看到，$\langle{}^5_{42}\rangle n$ 和 $\langle{}^{10}_{42}\rangle n$ 都大于 110，因此

$$\uparrow n=\langle{}^{110}_{42}\rangle(42^{6^2+3})=110^{105}.$$

前面的例子引出了一些问题。具体来说，在计算 $\uparrow(6^2+3)$ 和 $\uparrow n$ 时，我们并未检验 (2.1) 中的左侧不等式。这一点可以得到验证：利用引理 2.5，可以检验出在前面的例子中，

(1) 对于 $3\leqslant n<6$，$\uparrow n=\langle{}^5_3\rangle n$。
(2) 对于 $6\leqslant n<42$，$\uparrow n=\langle{}^{10}_6\rangle n$。
(3) 对于 $42\leqslant n$，$\uparrow n=\langle{}^{110}_{42}\rangle n$。

Lemma 2.4. 设 B、C 是基层级，其中 最小 $B\leqslant$ 最小 C 和 $m<n\in\mathbb{N}$。记 $\uparrow$ 为 $\uparrow_B^C$。

(i) 升级算子是单调的，即 $\uparrow m<\uparrow n$。(ii) 对于每个 $n\geqslant b\in B$ 和 $c\in C$，我们都有 $c\leqslant\langle{}^c_b\rangle n$。(iii) 若 $c\geqslant\uparrow b$，则算子 $\langle{}^c_b\rangle$ 是单调的；也就是说，若 $c\geqslant\uparrow b$，则 $\langle{}^c_b\rangle m<\langle{}^c_b\rangle n$。(iv) 若 $c\leqslant d$，则 $\langle{}^c_b\rangle n\leqslant\langle{}^d_b\rangle n$。

(v) 若 c 是 $\uparrow m$ 的见证，且 d 是 $\uparrow n$ 的见证，则 $c \leqslant d$。

证明。第一项可由定义看出。对于第二项，首先用归纳法证明，对所有 $b \in B$ 和 $c \in C$，只要 $n > 0$，就有 $\langle {}^{c}_{b} \rangle n > 0$。然后该断言便很容易得出。其余各项见 [**10**,第 3] 节。

□

注意，由前述引理的第一项可知，如果 $\uparrow n$ 有见证，那么 $\uparrow m$ 也有见证。

LEMMA 2.5. 设 B、C 是基层级，且满足 最小值 $B \leqslant$最小值 C。设 $n \geqslant$最小值 B 且 $b =$基$_B(n)$。$\uparrow n$ 的见证 c 存在，当且仅当存在一个最小元素 $c' \in C$，使得 $c' \geqslant \uparrow b$ 且$\langle {}^{c'}_{b} \rangle n < S_C(c')$。若情况如此，则 $c' = c$。

证明。对 n 使用归纳法。假设 c 存在。那么 $\uparrow b$ 有一个见证，设为 d，并且根据前述引理，$c \geqslant d = \langle {}^{d}_{b} \rangle b = \uparrow b$。显然，$c' \leqslant c$ 存在。

假设 c' 存在。如果 $n = b \in B$，那么由于 $\uparrow b < \infty$，c 存在，并且容易看出 $c' = c$。否则，$n > b$。根据 $\langle {}^{c'}_{b} \rangle$ 的单调性，我们可以选取满足 $d \geqslant \uparrow b$、$\langle {}^{d}_{b} \rangle (n-1) < S_C(d)$ $d \leqslant c'$ d $\uparrow(n-1)$ 和 的最小 $d \in C$。根据归纳假设，是 的见证。由此可得

$$\uparrow(n-1) = \langle {}^{d}_{b} \rangle (n-1) \leqslant \langle {}^{c'}_{b} \rangle (n-1) < \langle {}^{c'}_{b} \rangle n < S_C(c').$$

因此 c 存在，并且 $c \leqslant c'$。

最后，如果 c，c' 中的某个量存在，那么根据前述计算，我们同时有 $c' \leqslant c$ 和 $c \leqslant c'$。因此 $c' = c$。

□

下面的引理大致说明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们只需要有关 B、C 的有限信息即可计算出 $\uparrow^{C}_{B} n$。鉴于升级算子的递归定义，这并不令人意外。

LEMMA 2.6. 设 B、B'、C、C' 为基层级，且满足 最小 $B \leqslant$最小 C。假设 $n \in \mathbb{N}$满足 $n \geqslant$最小 B、$B \cap [0, n] = B' \cap [0, n]$ 以及 $C \cap [0, \uparrow^{C}_{B} n] = C' \cap [0, \uparrow^{C}_{B} n]$。那么，(i) 对于 $x \leqslant n$、$\uparrow^{C}_{B} x = \uparrow^{C'}_{B'} x$ (ii) 对于 $x \in \mathbb{N}$、$n \geqslant b \in B$ 以及 $\uparrow^{C}_{B} n \geqslant c \in C$、$\langle {}^{c}_{b} \rangle^{C}_{B} x = \langle {}^{c}_{b} \rangle^{C'}_{B'} x$。

证明。如果 $\uparrow^{C}_{B} n = \infty$，则该引理显然成立。因此设情况并非如此。接下来，我们对 x同时使用归纳法证明这两项。$x <$最小 B的情形很容易。假设 $x \geqslant$最小 B。

对于 (i)，假设 $x \leqslant n$。如果 x 不是基，那么计算 x 的升级时，既要进行升级，也要在小于 x的数上应用算子 $\langle {}^{c}_{b} \rangle$。这里 $b \leqslant x \leqslant n$，且根据引理 2.4 的第二项，$c \leqslant \uparrow^{C}_{B} x \leqslant \uparrow^{C}_{B} n$。因此我们可以使用归纳假设。否则，如果 $x \in B$，那么 x 的升级就是大于 $\uparrow(x-1)$的第一个基。由于 $\uparrow^{C}_{B} x \leqslant \uparrow^{C}_{B} n$，这个基存在于 C 当且仅当它存在于 C'。

对于 (ii)，如果 $x \geqslant b$，那么计算 $\langle {}^{c}_{b} \rangle x$ 时要进行升级，并在小于 x的数上应用 $\langle {}^{c}_{b} \rangle$，因此我们可以使用归纳假设。否则，如果 $x < b$，那么 $\langle {}^{c}_{b} \rangle x$ 就是 x的升级，我们使用 (i)。

□

一般来说，$\uparrow^{C}_{B}(m+1)$ 可能远大于 $\uparrow^{C}_{B} m$，但当 $m+1$ 是一个基时，我们不希望它大得过于离谱。良好后继可以确保这种情况不会发生。

Definition 2.7. 设 B 和 C 是基层级，并记 $\uparrow$ 为$\uparrow_B^C$。如果满足以下条件，我们就称 C 是 B 的良好后继：
(1) 最小$B \leqslant$ 最小C。(2) $\uparrow n < \infty$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，换言之，$\uparrow n$ 的见证总是存在。(3) 每当最小$B < b \in B$时，基$_C(\uparrow(b-1))$ 的倍数中，没有任何一个严格位于$\uparrow(b-1)$ 与 $S_C(\uparrow(b-1))$ 之间。

Example 2.8. 在例 *2.3* 中，C 是 B 的良好后继，因为
(i) $\uparrow(6-1) = \langle \frac{5}{3} \rangle 5 = 7$，并且基$_C(7) = 5$ 的倍数中，没有任何一个严格位于7 与 $S_C(7) = 10$之间。<*style id='10'>(ii)* $\uparrow(42-1) = \langle \frac{10}{6} \rangle 41 = 10^2 + 7 = 107$，并且基$_C(107) = 10$ 的倍数中，没有任何一个严格位于107 与 $S_C(107) = 110$之间。

Example 2.9. 设 B 为任意基层级。我们定义 $B' = \bigcup B'_n$，其中 B'_n 通过对 n 应用归纳法定义如下：$B'_n = \{$最小值$B+1\}$，若 $n \leqslant$最小值 B；$B'_n = B'_{n-1}$，若 最小值 $B < n \notin B$；否则为 $B'_n = B'_{n-1} \cup \{k\}$，其中 k 是严格大于最大值B'_{n-1} 的最小倍数 $\uparrow_B^{B'_{n-1}}(n-1)$。我们称 B' 为 B的极简后继。文献 *[***10***]* 证明了 B' 是 B的良好后继。

给定一个基层级 B，若元素 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\mathsf{base}_B(n) \mid n$，则称其为 B-临界的。关于以下三个引理的证明，请参见 [**10**]。

Lemma 2.10. 设 B, C 为基层级，且 C 是 B的良好后继。设 $n \in \mathbb{N}, b \in B$和 $c \in C$ 满足 $c \geqslant \uparrow b$。*(i) </style}* $b \mid n$ 当且仅当 $c \mid \langle \frac{c}{b} \rangle n$。*(ii) </style}* 若 $n =_b b^e a + r$，则 $\langle \frac{c}{b} \rangle n =_c c^{\langle \frac{c}{b} \rangle e} \cdot \uparrow a + \langle \frac{c}{b} \rangle r$。

Lemma 2.11. 设 B, C 为基层级，且 C 是 B 的良好后继。设 $n \in \mathbb{N}$。(i) $n \in B$ 当且仅当 $\uparrow n \in C$。(ii) n 是 B- 临界的，当且仅当 $\uparrow n$ 是 C- 临界的。

Lemma 2.12. 设 B, C 为基层级，且 C 是 B 的良好后继。设 $n \in \mathbb{N}$ 和$b \in B$。用 $\uparrow$ 表示 $\uparrow_B^C$。

(i) 若 c 是 $\uparrow n$ 的见证，则 $c =$基$_C(\uparrow n)$。(ii) 若 $n = ba + r$ 且满足 $r < b$，则 $\uparrow n = \uparrow ba + \uparrow r$。(iii) 若 最小$B \nmid n$，则 $\uparrow n = \uparrow(n-1) + 1$。(iv) 若 $b >$最小B，则 $\uparrow b = \uparrow(b-d) + c$，其中 $d \in B$ 是 B 中 b 的前驱，且其中$c =$基$_C(\uparrow(b-1))$。

Lemma 2.13. 设 B、C 是基层级，且 C 是 B 的良好后继。设 b、$d \in B$ 满足 $b = 2d$。记 $\uparrow$ 为 $\uparrow_B^C$。则 $\uparrow b = 2 \cdot \uparrow d$。

证明。设 $c =$基$_C(\uparrow(b-1)) \geqslant \uparrow d$。根据前述引理的第四项，$\uparrow b = \uparrow d + c$。于是，$\uparrow d$、$c$和 $\uparrow d + c$ 中的每一个都是 C中的一个基。特别地，$c \mid \uparrow d + c \leqslant 2c$，由此得到 $\uparrow d = c$。然后反过来，$\uparrow b = \uparrow d + c = 2 \cdot \uparrow d$。 □

对于良好后继，引理 2.5 转化为以下结果，该结果给出了升级算子的另一种定义。

LEMMA 2.14. 设 B, C 是基层级，且 C 是 B 的良好后继。令 $n \geqslant \min B, b = 基_B(n)$，并记 $\uparrow$ 为 $\uparrow_B^C$。(i) 若 $n \in B$，则 $\uparrow n = S_C(\uparrow(n-1))$。(ii) 若 $n \notin B$，则 $\uparrow n$ 的见证是满足 $c \geqslant \uparrow b$ 和 $\langle {}^{c}_{b} \rangle n < S_C(c)$ 的最小 $c \in C$。

证明。第二项由引理 2.5 以及 C 是 B 的良好后继这一事实立即得到。第一项很容易由升级 [**10**] 的定义得出。 □

如本节开头所述，在过程的每一步 i，我们都会考虑一个基层级 B_i。此外，为了使过程定义良好，我们需要 B_{i+1} 在每一步都是 B_i 的良好后继。这样的序列 $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 称为动力层级。</style}我们通常将 $\uparrow_i$ 记作 $\uparrow_{B_i}^{B_{i+1}}$，即第 i 步的升级。

DEFINITION 2.15. 一个动力层级 是一个序列 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$，其中对每个 $i \in \mathbb{N}$，B_i 都是一个基层级，且 B_{i+1} 是 B_i的良好后继。

DEFINITION 2.16. 给定一个动力层级 $\mathcal{B}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们递归地定义$\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n)$：令 $\mathbb{G}_0^{\mathcal{B}}(n) = n$，若 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n)$ 为正，则令 $\mathbb{G}_{i+1}^{\mathcal{B}}(n) = \uparrow_i \mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) - 1$；否则令$\mathbb{G}_{i+1}^{\mathcal{B}}(n) = 0$。

EXAMPLE 2.17. 若 $B_i = \{i+2\}$，则 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个动力层级。于是，序列$\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n)$ 就是 n 的经典古德斯坦序列。

EXAMPLE 2.18. 若给定 B_0，并如例 *2.9* 中那样定义 $B_{i+1} = (B_i)_+$，则 $\mathcal{B} =(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个动力层级。若 $B_0 = \{2\}$，我们就得到前一个例子中的动力层级。

3. 巴赫曼–霍华德序数

本节回顾序数算术中的一些概念，并介绍塌缩函数。我们假定读者对序数加法、乘法和幂运算有基本了解。若 α 的前驱存在，则记为 $\alpha - 1$。

我们将使用以 Ω（第一个不可数序数）为基础的序数标准形。对于所有序数 ξ，都存在唯一的序数 α，β，γ，使得 $\beta < \Omega^\alpha \beta + \gamma$，并且 $\gamma < \Omega^\alpha$。这就是 ξ 的 Ω-范式。我们将序数 $\varepsilon_{\Omega+1}$ 定义为满足 $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ 的最小 $\varepsilon > \Omega$。令 $\Omega_0 = 1$ 且 $\Omega_{i+1} = \Omega^{\Omega_i}$，则有 $\varepsilon_{\Omega+1} = \sup_{n<\omega} \Omega_i$。对于每个序数 $\xi < \varepsilon_{\Omega+1}$，我们递归地定义其最大系数 ξ^*：令 $0^* = 0$，且 $(\Omega^\eta \alpha + \gamma)^* = \max\{\alpha, \eta^*, \gamma^*\}$。我们将使用的序数赋值基于 Rathjen 的 ϑ-函数 [**15**],，如下所示。

DEFINITION 3.1. 令 $\sup \varnothing = 0$，并定义 $\vartheta\colon \varepsilon_{\Omega+1} \to \Omega$ 为

$$\vartheta(\xi) = \min\{\omega^\theta > \xi^* : \forall \zeta < \xi (\zeta^* < \omega^\theta \Rightarrow \vartheta(\zeta) < \omega^\theta)\}.$$

函数 ϑ 为小于巴赫曼–霍华德序数的序数提供记号，该序数定义为 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}] := \sup_{n<\Omega} \vartheta(\Omega_n)$。我们经常需要比较以 ϑ 表示的表达式。因此，下面的引理将会很有用。

PROPOSITION 3.2. *[4]* 如果 $\zeta < \xi < \varepsilon_{\Omega+1}$，那么 $\vartheta(\zeta) < \vartheta(\xi)$ 当且仅当 $\zeta^* < \vartheta(\xi)$。

继续之前，我们先陈述 ϑ 的一些其他性质。

LEMMA 3.3.
(i) ϑ 是单射，且在 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 上是满射。(ii) 如果 $\xi < \varepsilon_{\Omega+1}$，那么 $\xi^* < \vartheta(\xi)$。(iii) 如果 $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ 且 $\beta_1 < \beta_2 < \Omega$，那么 $\vartheta(\Omega\alpha + \beta_1) < \vartheta(\Omega\alpha + \beta_2)$。(iv) 如果 $\Omega \leqslant \xi < \varepsilon_{\Omega+1}$，那么 $\omega^{\vartheta(\xi)} = \vartheta(\xi)$。

证明。 (i)、(ii) 和 (iii) 已在 [4] 中证明。(iv) 请参见 [8]。 □

LEMMA 3.4. 如果 $\alpha < \Omega$，那么

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} \omega^{\alpha+1}, & \text{if } \alpha = \delta + n \text{ where } \omega^\delta = \delta \text{ and } n < \omega. \\ \omega^\alpha, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 由于 $\alpha < \Omega$， $\vartheta(\alpha)$ 的定义可化简为

$$\vartheta(\alpha) = \min\{\omega^\theta > \alpha : \forall \zeta < \alpha(\vartheta(\zeta) < \omega^\theta)\}$$

现在，利用上述定义，对 α进行标准归纳即可完成证明。对于满足 $\omega^\alpha = \alpha$ 的α，我们发现不能取 $\theta = \alpha$，而应取 $\theta = \alpha + 1$。更多细节留给读者。

□

4. 终止性

DEFINITION 4.1. 设 $b \geqslant 2$ 和 $f\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \Omega$ 是一个部分函数，且 $[0, b) \subseteq \mathrm{dom}(f)$。我们按如下方式定义 $O := O_f^b\colon \mathbb{N} \to \varepsilon_{\Omega+1}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，记作 $n =_b b^e a + r$，并令

$$O(n) = \begin{cases} f(n) & \text{if } n < b, \\ \Omega^{O(e)} f(a) + O(r) & \text{if } n \geqslant b \end{cases}$$

LEMMA 4.2. 设 $b \geqslant 2$ 和 $f\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \Omega$ 是一个部分函数，且 $[0, b) \subseteq \mathrm{dom}(f)$。如果 f 在 $[0, b)$ 上递增，那么 O_f^b 在 $\mathbb{N}$ 上递增。

证明概要。 我们简要说明一下思路。详细证明请参见 [10]。如果 $m < n$，我们可以将 m 和 n都写成 b-范式。直观地看，

$$m = b^{e_1} \cdot a_1 + \cdots + b^{e_k} \cdot a_k < b^{f_1} \cdot c_1 + \cdots + b^{f_\ell} \cdot c_\ell = n,$$

其中所有系数都属于 $[0,\ b)$。在等式两边作用 O_f^b，相当于将每个b 都替换为 Ω，并对每个系数应用 f。此外， b-表示按字典序比较，Ω-表示也同样如此。由于 f 在所有系数上都是单调的，因此我们看到 O_f^b 保持了序关系。

□

LEMMA 4.3. 设 $b \geqslant 2$ 和 $f\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \Omega$ 是一个部分函数，且 $[0,b) \subseteq$ 定义域(f)。假设对于 $\varepsilon \in \{0,1\}$，有 $f(n) = \varepsilon$ 当且仅当 $n = \varepsilon$。那么， $O^b_f(n)$ 是 Ω 的倍数，当且仅当 n 是 b的倍数；而 $O^b_f(n)$ 是 Ω^2 的倍数，当且仅当 n 是 b^2的倍数。

证明概要。我们说明其思路，进一步的细节留给读者补充。首先，通过归纳证明：对于 $\varepsilon \in \{0,\ 1\}$， $O^b_f(n) = \varepsilon$ 当且仅当 $n = \varepsilon$。然后，将 n 写成 b-范式：

$$n = b^{e_1} \cdot a_1 + \cdots + b^{e_k} \cdot a_k.$$

应用 O^b_f，我们得到

$$O^b_f(n) = \Omega^{O^b_f(e_1)} f(a_1) + \cdots + \Omega^{O^b_f(e_k)} f(a_k).$$

注意，对于 $\tau \in \{1,\ 2\}$，我们有：$b^\tau \mid n$ 当且仅当对每个 i都有 $e_i > \tau - 1$，当且仅当对每个 i 都有 $O^b_f(e_i) > \tau - 1$，当且仅当 $\Omega^2 \mid O^b_f$。 □

DEFINITION 4.4. 给定一个基层级 B，我们定义两个序数解释， $o_B\colon \mathbb{N} \to \Omega$ 和 $O_B\colon \mathbb{N} \to \varepsilon_{\Omega+1}$。如果 $n <$最小 B，则令 $o_B(n) = O_B(n) = n$。否则， $n \geqslant$最小 B。

归纳地假设 o_B 和 O_B 定义在 $[0,n)$上。令 $b =$基$_B(n)$，并称 $n$$B$-临界，如果 $b \mid n$。

我们将 $O_B(n)$ 定义为 $O^b_f(n)$，其中 $f = o_B{\restriction}_{[0,\ b)}$。我们归纳地假设，对于 $\varepsilon \in \{0,1\}$，当且仅当对每个 $m < n$都有 $o_B(m) = \varepsilon$ 时， $m = \varepsilon$ 成立。于是 f 满足引理 *4.3* 的条件。

为定义 $o_B(n)$，我们作如下分类讨论。

CASE 1 *($n =$ 最小值 B)*。于是， $o_B(n) = \vartheta(1) = \omega$。

CASE 2 *($n = b >$ 最小值 B)*。令 d 为 B 中 b 的前驱，并设

$$o_B(b) = o_B(b-d) \cdot 2.$$

CASE 3 （n 不是 B-临界）。将 $n = ba + r$ 写成满足 $0 < r < b$ 的形式，并设

$$o_B(n) = o_B(ba) + o_B(r).$$

CASE 4 （$n \notin B$ 是 B-临界的）。设 $n = b^2u + bv$ 满足 $v < b$。我们将定义

$$o_B(n) = \vartheta(\zeta_B(n)),$$

其中 $\zeta_B(n)$ 定义如下。

由引理 *4.3* 可知，$\Omega^2 \mid O_B(b^2u)$。设 $O_B(b^2u) = \Omega \cdot \alpha_B(n)$，并令 $\beta_B(n)$ 为满足 $o_B(b) < \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n))$的最小序数（必然小于 Ω）。于是

$$\zeta_B(n) = \alpha_B(n) + \beta_B(n) + \omega^{o_B(\tilde{v})},$$

其中，若 $\tilde{v} = 0$，则假定 $\omega^{o_B(\tilde{v})}$ 为零；而 $\tilde{v}$ 由以下两种情况给出。CASE 4.1 （$u = 0$ 且 $2 \leqslant v <$最小 B）。令 $\tilde{v} = v - 2$。CASE 4.2 （$u > 0$ 或 最小 $B \leqslant v < b$）。令 $\tilde{v} = v$。

注意，在 $u = 0$的情况下，我们有 $\alpha_B(n) = 0$ 且 $o_B(\tilde{v}) = o_B(v-2) = v - 2$，因此 $\zeta_B(n) = \beta_B(n) + \omega^{v-2} < \Omega$。在另一种情况下， $\zeta_B(n) \geqslant \Omega$。

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b \in B$，我们将 $O^b_B(n)$ 定义为 $O^b_f(n)$，其中 $f = o_B{\restriction}_{[0,\ b)}$。我们进一步将 α_B 和 β_B 的定义扩展到所有的 $n \in \mathbb{N}$，如下所示。令 $\alpha_B(0) = \beta_B(0) = 0$。如果 $n > 0$，则令$b =$基$_B(n)$，并写作 $n = b^2u + bv + w$，其中 $v,\ w < b$。令 $m = b^2u + bv$。然后，设 $\alpha_B(n) = \alpha_B(m)$ 和 $\beta_B(n) = \beta_B(m)$。同时，为所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b \in B$定义 $\alpha^b_B(n)$ 也会很方便。为此，我们写作 $n = b^2u + bv + w$，其中 $v,\ w < b$，并令 $O^b_B(b^2u) = \Omega \cdot \alpha^b_B(n)$。注意 $\Omega \mid \alpha^b_B(n)$。

我们先整理序数解释的一些标准性质。

LEMMA 4.5. 设 B 为一个基层级，且 $n\in\mathbb{N}$ 具有 $b=\text{基}_B(n)$。 (*i*) $o_B(n)=o_B(n-1)+1$ 当且仅当 $\min B\nmid n$。 (*ii*) $o_B(n)\in$ 为极限序数，当且仅当 $\min B\mid n$。 (*iii*) $o_B(n)$ 为加法不可分解极限序数，当且仅当 $n=\min B$ 或 $n\notin B$ 为 B-临界的。 (*iv*) $\omega^{o_B(n)}=o_B(n)$ 当且仅当 $n\notin B$ 为 B-临界的且 $n\geqslant b^2$。 (*v*) 对于所有 $d\in B$，有 $O^d_B(n)=O^d_B(n-1)+1$ 当且仅当 $\min B\nmid n$。 (*vi*) 对于所有 $d\in B$，有 $O^d_B(n)\in$ 为极限序数，当且仅当 $\min B\mid n$。 (*vii*) $O_B(n)$ 的所有系数都具有 $o_B(r)$ 的形式，其中 $r<b$。特别地，对于某个 $r<b$，有 $O_B(n)^*=o_B(r)$。 (*viii*) $\alpha_B(n)$ 的所有系数都具有 $o_B(r)$ 的形式，其中 $r<b$。特别地，对于某个 $r<b$，有 $\alpha_B(n)^*=o_B(r)$。 (*ix*) $o_B(n)<\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$。

证明。我们先对 n 作归纳，证明 (i) 和 (ii)。 $n\leqslant\min B$ 的情形显然。假设 $n>\min B$。若 $n\in B$，则 $\min B\mid n$ 且 $o_B(n)=o_B(n-d)\cdot 2$，其中 d 是 n 的前驱。于是由归纳假设可得 (ii)，再由 (ii) 可得 (i)。若 n 不是 B-临界的，则写作 $o_B(n)=o_B(ba)+o_B(r)$，其中 $0<r<b$。对 r 应用归纳假设，即可得到 (i) 和 (ii)。假设 $n\notin B$ 是 B-临界的，并写作 $n=b^2u+bv$，其中 $v<b$。若 $u=0$，则根据 $\beta_B(n)$ 的定义和引理 3.3(iii)，$o_B(n)=\vartheta(\beta_B(n)+\omega^{v-2})>o_B(b)$。由归纳假设，$o_B(b)\in$ 极限序数；又由于 ϑ 的像由加法可分解序数组成，$o_B(n)\in$ 极限序数。否则，若 $u>0$，则根据引理 3.3(iv)，$\alpha_B(n)>0$ 且 $o_B(n)=\vartheta(\zeta_B(n))\in$ 极限序数。由此证明了 (i) 和 (ii)。

通过检查定义并运用引理 3.3(iv)，很容易得到 (iii) 和 (iv)。对于 (v) 和 (vi)，将 $n=d^{e_1}\cdot a_1+\cdots+d^{e_k}\cdot a_k$ 写成 d-范式。于是

$$O^d_B(n)=\Omega^{O^d_B(e_1)}o_B(a_1)+\cdots+\Omega^{O^d_B(e_k)}o_B(a_k).\tag{$\star$}$$

如果 $\min B\mid n$，那么要么 $e_k>0$，要么 $\min B\mid a_k$。如果 $e_k>0$，那么 $O^d_B(e_k)>0$，且 $O^d_B(n)$ 是 Ω 的倍数。否则，根据 (ii)，$O^d_B(n)$ 以极限序数 $o_B(a)\in$ 结尾。无论哪种情况，$O^d_B(n)\in$ 极限序数。另一方面，如果 $\min B\nmid n$，那么 $e_k=0$ 且 $\min B\nmid a_k$。显然，展开写出 $O^d_B(n-1)$ 会得到 ($\star$)，其中 $o_B(a_k)$ 被 $o_B(a_k-1)$ 替换。根据 (i)，$o_B(a_k)=o_B(a_k-1)+1$，因此我们得出 $O^d_B(n)=O^d_B(n-1)+1$。

对于 (vii)，我们有 $O_B(n)=O^b_f(n)$，其中 $f=o_B{\restriction}_{[0,\ b)}$ 由定义可知，而 $O^b_f(n)$ 的系数具有如下形式：$f(r)=o_B(r)$，其中 $r<b$。

对于 (viii)，设 $n=b^2u+bv+w$。由 (vii) 可知，$O_B(b^2u)$ 的系数具有如下形式：$o_B(r)$，其中 $r<b$（若 $u=0$，则显然成立）。将 $O_B(b^2u)=\Omega^{\lambda_1}\mu_1+\cdots+\Omega^{\lambda_n}\mu_n$ 写成 Ω-正规形。于是 $\alpha_B(n)=\Omega^{\lambda'_1}\mu_1+\cdots+\Omega^{\lambda'_n}\mu_n$，其中对于 $1\leqslant i\leqslant n$，若 $\lambda_i\geqslant\omega$，则有 $\lambda'_i=\lambda_i$；否则有 $\lambda'_i=\lambda_i-1$。现在注意到 $\lambda_i\geqslant 2$，且 λ_i 的系数也具有如下形式$o_B(r)$，其中 $r<b$。因此，当 $\lambda_i<\omega$时，对于某个 $0<r<b$，我们有 $\lambda_i=o_B(r)$。由 (i) 和 (ii)，$\lambda'_i=o_B(r-1)$。

性质 (ix) 很容易通过对 n 进行归纳法证明：当 $n\notin B$ 是 B-临界时，使用引理 3.2，并结合 (viii) 以及 $\beta_B(n)\leqslant o_B(b)$ 这一事实，因为根据引理 3.3(ii)，$o_B(b)<\vartheta(\alpha_B(n)+o_B(b))$。□

虽然不会用到，但可以通过归纳法轻松证明下面这个引理 2.6 的类似命题。

LEMMA 4.6. 设 B、B' 为基层级。假设 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $B\cap[0,\ n]=B'\cap[0,\ n]$。那么，

(i) 对于 $x\leqslant n$，$o_B(x)=o_{B'}(x)$。

(ii) 对于 $x \in \mathbb{N}$ 和 $b \leqslant n$，$O^b_B(x) = O^b_{B'}(x)$。

PROPOSITION 4.7. 如果 B 是一个基层级，且 $m < n$，那么
(i) $o_B(m) < o_B(n)$。(ii) 若 $b = 基_B(m) = 基_B(n)$，则 $O_B(m) < O_B(n)$。(iii) 若 $b = 基_B(m) = 基_B(n)$，则 $\alpha_B(m) \leqslant \alpha_B(n)$。

证明。我们先证明 (ii) 蕴含 (iii)。事实上，若 $b = 基_B(m) = 基_B(n)$，则可以写成 $m = b^2u' + bv' + bw'$ 和 $n = b^2u + bv + bw$，其中 v，v'，w，$w' < b$。于是 $m < n$ 蕴含 $u' \leqslant u$，由此可得 $O_B(b^2u') \leqslant O_B(b^2u)$ 和 $\alpha_B(m) \leqslant \alpha_B(n)$。

我们通过对 $m + n$ 归纳，同时证明 (i) 和 (ii)。$n \leqslant \min B$ 的情形是显然的（注意 $O_B(\min B) = \Omega$），因此我们假设情况并非如此。

根据归纳假设，我们知道 o_B 在 $[0, b)$ 上递增。由此可根据引理 4.2 得出 $O_B(m) < O_B(n)$。在证明的其余部分，我们着重证明第一项的归纳步骤。令 $b = 基_B(n)$ 和 $d = 基_B(m)$。

CASE 1 ($n = b > \min B$)。记 $m = da + r < b$。由于 b 是 d、$da \leqslant b - d$ 和 $r < d \leqslant b - d$ 的倍数，因此由归纳假设可得

$$o_B(m) = o_B(da) + o_B(r) < o_B(b - d) \cdot 2 = o_B(n).$$

CASE 2 ($b \nmid n$)。将 $n = ba + r$ 写成 $0 < r < b$。若 $m < ba$，则归纳假设给出 $o_B(m) < o_B(ba) < o_B(n)$。否则 $m = ba + r'$，我们对 $r' < r$ 应用归纳假设。

CASE 3 ($b \mid n > b$)。设 $n = b^2u + bv + v < b$。若 $d < b$，则由归纳假设可得$o_B(m) < o_B(b)$，并根据 $\beta_B(n)$ 的定义，我们有 $o_B(b) < \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n)) \leqslant o_B(n)$。因此，可以假设 $d = b$ 且 $m > b$。此外，若 $m = ba + r$ 且 $0 < r < b$，则由归纳假设可得 $o_B(m) < o_B(ba) \cdot 2$。由于 $o_B(n)$ 根据引理 4.5(iii)是加法不可分解的，只需证明 $o_B(ba) < o_B(n)$。因此，可以假设 $m = b^2u' + bv'$，其中某个 u' 和 $v' < b$。于是 $o_B(m) = \vartheta(\zeta_B(m))$ 且 $o_B(n) = \vartheta(\zeta_B(n))$。

CASE 3.1（$u' = u$）。利用 $v' < v$ 上的归纳假设，并注意到 $u = 0$ 和 $2 \leqslant v <$ 小于等于 B 当且仅当对于 u'，v' 也成立，即可由引理 3.3(iii) 轻松得到此情形。

CASE 3.2（$u' < u$）。根据前一种情形，我们可以假设 $n = b^2u$。无论 u' 和 v' 如何，我们都有 $o_B(m) \leqslant \vartheta(\alpha_B(m) + \beta_B(m) + \omega^{o_B(v')})$，接下来将证明右边小于 $o_B(n) = \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n))$。由第 (iii) 项（的证明）可知 $\alpha_B(m) < \alpha_B(n)$；又因为 $\alpha_B(m)$ 和 $\alpha_B(n)$ 都是 Ω 的倍数，

$$\alpha_B(m) + \beta_B(m) + \omega^{o_B(v')} < \alpha_B(n) + \beta_B(n).$$

由命题 3.2 可知，我们只需证明

$$(\alpha_B(m) + \beta_B(m) + \omega^{o_B(v')})^* < \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n)) = o_B(n).$$

由于根据归纳假设，$\alpha_B(m)$ 的每个系数都具有形式 $o_B(r)$，其中 $r < b$、$\alpha_B(m)^* < o_B(n)$。由归纳假设我们还得到 $o_B(v') < o_B(n)$。根据引理 3.3(iv)，$\omega^{o_B(v')} < o_B(n)$；又由于 $o_B(n)$ 是加法不可分解的，剩下只需证明 $\beta_B(m) < o_B(n)$。但这由 $\beta_B(m)$ 的极小性以及 $o_B(b) < \vartheta(\alpha_B(m) + o_B(b)) < \vartheta(\alpha_B(m) + o_B(n))$可得。这里我们分别使用了引理 3.3(ii)和引理 3.3(iii)。

□

下面的归纳步骤会很有用。

LEMMA 4.8. 设 α 是 Ω 的一个倍数，并令 $\min B < m$。设 $\delta < \Omega$ 使得对所有$m' < m$ 均有 $o_B(m') < \vartheta(\alpha + \delta)$。假设 $\alpha_B(m) < \alpha$ 或 $o_B(m) \leqslant \alpha$*之一成立。那么也有$o_B(m) < \vartheta(\alpha + \delta)$。

证明。如果 $o_B(m) \leqslant \alpha$*，则结论由引理 3.3(ii) 得出。因此我们可以假设$\alpha^* < o_B(m)$，并且 $\alpha_B(m) < \alpha$。

m 不是 B-临界或 $m \in B$ 的情形，可由归纳假设以及 $\vartheta(\alpha + \delta)$ 是加法不可分解这一事实推出。因此，假设 $m \notin B$ 是 B-临界的，并写作$m = d^2u + dv$，其中 $d =$ 以$_B(m)$为基。于是我们必须证明

$$o_B(m) = \vartheta(\zeta_B(m)) = \vartheta(\alpha_B(m) + \beta_B(m) + \omega^{o_B(\tilde{v})}) < \vartheta(\alpha + \delta),$$

其中 $\tilde{v}$ 要么是 $v - 2$，要么是 v。我们将使用命题 3.2。

由 $\alpha_B(m) < \alpha$ 可得 $\zeta_B(m) < \alpha + \delta$ 和 $\alpha > 0$。此外，我们有 $\alpha_B(m)^*$，$o_B(\tilde{v}) <o_B(d) < \vartheta(\alpha + \delta)$，并且根据 $\beta_B(m)$的极小性，还有 $\beta_B(m) \leqslant o_B(d) < \vartheta(\alpha + \delta)$。由引理 3.3(iv)，$\beta_B(m) + \omega^{o_B(\tilde{v})} < \vartheta(\alpha + \delta)$。 □

给定一个以 $b =$ 为基的 B-临界元素 n，若存在，则令 n_* 表示不属于 B、小于 b 且满足 $\alpha_B(n) \leqslant \alpha_B(n_*)$ 和 $(\alpha_B(n))^* < o_B(n_*)$ 的最大 B-临界元素。我们称满足 $m < b$、$\alpha_B(n) \leqslant \alpha_B(m)$ 和 $(\alpha_B(n))^* < o_B(m)$ 的 B-临界元素 $m \notin B$ 为 n_* 的候选元素。由前述引理可得如下结论。

LEMMA 4.9. 设 $n \in \mathbb{N}$ 是以基$_B(n)$ 为基的 B-临界元素，且 $b =$ 基$_B(n)$；令最小 $B < m \leqslant b$。设 $\delta < \Omega$ 满足：对所有 $m' < m$，均有 $o_B(m') < \vartheta(\alpha_B(n) + \delta)$。若 m 不是 n_* 的候选元素，则 $o_B(m) < \vartheta(\alpha_B(n) + \delta)$ 也成立。

LEMMA 4.10.

(i) 若 n_* 不存在且 $\alpha_B(n) > 0$，则 $\beta_B(n) = 0$。(ii) 若 n_* 不存在且 $\alpha_B(n) = 0$，则 $\beta_B(n) = 2$。(iii) 若 n_* 存在且 $\alpha_B(n_*) > \alpha_B(n)$，则 $\beta_B(n) = o_B(n_*)$。(iv) 若 n_* 存在且 $\alpha_B(n_*) = \alpha_B(n)$，则 $\beta_B(n) = \zeta + 1$，其中 $o_B(n_*) = \vartheta(\alpha_B(n) + \zeta)$。

证明。首先假设 n_* 不存在。那么每个 $m \leqslant b$ 都不是 n_*候选元素。若 $\alpha_B(n) > 0$，则 $o_B(\min B) = \omega < \vartheta(\alpha_B(n))$，并利用引理 4.9进行归纳，可得 $o_B(b) < \vartheta(\alpha_B(n))$。因此 $\beta_B(n) = 0$。若 $\alpha_B(n) = 0$，则 $o_B(\min B) < \vartheta(2)$，并通过同样的步骤可得 $o_B(b) < \vartheta(2)$。此外，由单调性可得 $\vartheta(1) \leqslant o_B(b) < \vartheta(2)$。

接下来，假设 $\alpha_B(n_*) > \alpha_B(n)$。注意，对于所有 $m' \leqslant n_*$，我们都有 $o_B(m') \leqslant o_B(n_*) < \vartheta(\alpha_B(n) + o_B(n_*))$。对 $n_* < m \leqslant b$ 归纳使用引理 4.9，可得 $o_B(b) < \vartheta(\alpha_B(n) + o_B(n_*))$。为了证明 $\beta_B(m) = o_B(n_*)$，只需证明对于所有 $\gamma < o_B(n_*)$，我们都有

$$\vartheta(\alpha_B(n) + \gamma) < o_B(n_*) < o_B(b).$$

这可由命题 3.2 轻易得出。

最后，假设 $\alpha_B(n_*) = \alpha_B(n)$。我们再次可以使用引理 4.9，得到 $o_B(b) <\vartheta(\alpha_B(n) + \zeta + 1)$。考虑到 $o_B(n_*)$，显然 $\zeta + 1$ 是 $\beta_B(n)$ 的最小候选元素，因此 $\beta_B(n) = \zeta + 1$。 □

PROPOSITION 4.11. 设 C 是 B 的良好后继，并将 $\uparrow$ 记作 $\uparrow^C_B$。那么，对于每个满足 $b =$ 基$_B(n)$ 的 $n \in \mathbb{N}$，

(i) $o_B(n) = o_C(\uparrow n)$。(ii)
$O_B(n) = O_C^c(\langle {}^c_b\rangle n)$ 如果 $c \geqslant \uparrow b$。(iii)
$O_B(n) = O_C(\uparrow n)$。(iv)
$\alpha_B(n) = \alpha_C^c(\langle {}^c_b\rangle n)$ 如果 $c \geqslant \uparrow b$。(v)
$\alpha_B(n) = \alpha_C(\uparrow n)$。

证明。</style}如果 c 是 $\uparrow n$ 的见证，那么根据引理 2.14 和引理 2.12，分别有 $c \geqslant \uparrow b$ 和基 $_C(\uparrow n) = c$。因此，(iii) 和 (v) 分别由 (ii) 和 (iv) 得出。

此外，很容易看出 (iv) 可由 (ii) 得出。事实上，若 $n = b^2u + bv + w$，则 $\langle {}^c_b\rangle n = c^2u' + c \cdot \uparrow v + \uparrow w$ 且 $\uparrow v,\ \uparrow w < \uparrow b \leqslant c$。于是 $O_B(b^2u) = O_C^c(\langle {}^c_b\rangle b^2u) = O_C^c(c^2u')$，这意味着 $\alpha_B(n) = \alpha_C^c(\langle {}^c_b\rangle n)$。

现在我们通过对 n 进行归纳，同时证明 (i) 和 (ii)。$n < \min B$ 的情形显然成立，因此假设 $n \geqslant \min B$。很容易看出，(ii) 可由 (i) 的归纳假设得出。事实上，写作 $n = b^{e_1} \cdot a_1 + \cdots + b^{e_k} \cdot a_k$。那么

$$\langle {}^c_b\rangle n = c^{\langle {}^c_b\rangle e_1} \cdot \uparrow a_1 + \cdots + c^{\langle {}^c_b\rangle e_k} \cdot \uparrow a_k. \tag{$\star$}$$

对每个 a_i 应用 (i) 的归纳假设，并对每个 e_i 应用 (ii) 的归纳假设，

$$\begin{aligned} O_B^b(n) &= \Omega^{O_B^b(e_1)} o_B(a_1) + \cdots + \Omega^{O_B^b(e_k)} o_B(a_k) \\ &= \Omega^{O_C^c(\langle {}^c_b\rangle e_1)} o_C(\uparrow a_1) + \cdots + \Omega^{O_C^c(\langle {}^c_b\rangle e_k)} o_C(\uparrow a_k) = O_C^c(\langle {}^c_b\rangle n). \end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们利用了 ($\star$) 是以 c 为基的范式这一点，而这由 $\uparrow b \leqslant c$ 得出。

现在我们证明 (i) 对 n 成立。根据上述内容，我们可以假设（同时假设对所有项的归纳假设）(ii) 至 (v) 对 n 成立。

Case 1 ($n = b \in B$)。若 $n = \min B$，则 $\uparrow n = \min C$，因此 $o_B(n) = o_C(\uparrow n) = \omega$。否则，令 d 为 b 在 B 中的前驱。由归纳假设，$o_B(b-d) = o_C(\uparrow(b-d))$。令 $c =$ 以 $_C(\uparrow(b-1))$ 为基。由引理 2.12(iv),

$$o_C(\uparrow b) = o_C(\uparrow b - c) \cdot 2 = o_C(\uparrow(b-d)) \cdot 2 = o_B(b-d) \cdot 2 = o_B(b).$$

Case 2 (n 不是 B-临界的)。将 $n = ba + r$ 写成 $0 < r < b$。由引理 2.12(ii)，$\uparrow n = \uparrow ba + \uparrow r$。于是归纳假设推出

$$o_C(\uparrow n) = o_C(\uparrow ba) + o_C(\uparrow r) = o_B(ba) + o_B(r) = o_B(n).$$

Case 3 （$n \notin B$ 是 B-临界的）。记 $n = b^2u + bv$ 和 $\uparrow n = d^2u' + d \cdot \uparrow v$。注意到 $\widetilde{\uparrow v} = \uparrow \tilde{v}$。由 (v) 可知 $\alpha_B(n) = \alpha_C(\uparrow n) =: \alpha$。假设 $\uparrow b = c \leqslant d$。显然

$$o_B(b) = o_C(c) \leqslant o_C(d) < \vartheta(\alpha + \beta_C(\uparrow n)),$$

因此 $\beta_B(n) \leqslant \beta_C(\uparrow n)$。
证明的其余部分着重于证明 $\beta_B(n) = \beta_C(\uparrow n)$或对某个序数 γ有 $\beta_B(n) + \gamma = \beta_C(\uparrow n)$。在后一种情况下，将有一个非零项 $\omega^{o_B(\tilde{v})} > \gamma$，其中$\tilde{v}$ 要么是 $v-2$，要么是 v，这将确保

$$\beta_B(n) + \omega^{o_B(\tilde{v})} = \beta_C(\uparrow n) + \omega^{o_B(\tilde{v})} = \beta_C(\uparrow n) + \omega^{o_C(\uparrow \tilde{v})}.$$

在最后一个等式中，我们对 $\tilde{v}$使用了归纳假设。由此可得 $\zeta_B(n) = \zeta_C(\uparrow n)$，因此 $o_B(n) = o_C(\uparrow n)$。

首先我们断言，对于每个严格介于 c 和 $\uparrow n$之间的 C-临界 m，都有 $O_C(m) < O_C(\uparrow n)$。假设不然。由于 O_C 在 d 和 $\uparrow n$之间单调，我们必有$m < d$。令基$_C(m) = e$，其中某个 $c \leqslant e < d$，则

$$O_C^e(m) = O_C(m) \geqslant O_C(\uparrow n) = O_C^e(\langle {}^e_b\rangle n).$$

根据 O_C^e的单调性（引理 4.2），我们有 $\langle {}^{e}_{b}\rangle n \leqslant m < S_C(e) \leqslant d$。由于 $\uparrow b \leqslant e$，引理 2.14 蕴含 $\uparrow n$的见证小于或等于 e，而 e小于 d。矛盾。

接下来，我们将对 m 进行归纳，证明对于 $m \leqslant d$，存在某个序数 $\gamma < \omega^{o_B(\tilde{v})}$，使得 $o_C(m) < \vartheta(\alpha + \beta_B(n) + \gamma)$。这里，当 $\tilde{v} = 0$ 时， $\omega^{o_B(\tilde{v})}$ 视为零。然后，令 $m = d$，便得到 $\beta_C(\uparrow n) \leqslant \beta_B(n) + \gamma$，所需结果随即成立。

如果 $m \leqslant c$，那么根据 $\beta_B(n)$ 的定义以及 $o_B(b) = o_C(c)$，结论成立。此外，如果 m 不是一个 $(\uparrow n)_*$ 候选元素，那么归纳步骤可由引理 4.9 得出。因此，假设 m 是 $(\uparrow n)_*$ 的候选元素。记 $m = e^2u'' + ev''$。由于 $O_C(m) < O_C(\uparrow n)$，必有 $\alpha_C(m) = \alpha$ 且 $v'' < \uparrow v$。接下来我们需要证明

$$o_C(m) = \vartheta(\alpha + \beta_C(m) + \omega^{o_C(\widetilde{v''})}) < \vartheta(\alpha + \beta_B(n) + \gamma)$$

对于某个 $\gamma < \omega^{o_B(\tilde{v})}$。由于 $\widetilde{v''} < \widetilde{\uparrow v} = \uparrow\tilde{v}$，只需证明 $\beta_C(m) < \beta_B(n) + \omega^{o_B(\tilde{v})}$。根据归纳假设，存在某个 $\gamma' < \omega^{o_B(\tilde{v})}$，使得

$$o_C(e) < \vartheta(\alpha + \beta_B(n) + \gamma').$$

T因此，根据 $\beta_C(m)$的极小性，我们得到 $\beta_C(m) \leqslant \beta_B(n) + \gamma'$，证毕 .

□

Theorem 4.12. 若 $\mathcal{B}$ 是任意一个动力层级，且 $m \in \mathbb{N}$，则存在 $i \in \mathbb{N}$，使得$\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m) = 0$。

证明。令 o_i 表示$o_{\mathcal{B}_i}$， $\uparrow_i$ 表示 $\uparrow_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i+1}}$。令 I 为从 m开始的古德斯坦序列的长度。那么，若 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m) > 0$，我们有

$$o_{i+1}(\mathbb{G}_{i+1}^{\mathcal{B}}(m)) = o_{i+1}(\uparrow_i \mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m) - 1) < o_{i+1}(\uparrow_i \mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m)) = o_i(\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m)),$$

其中，第一个不等式由命题 4.7 得出，第二个不等式由命题 4.11 得出。因此，$(o_i(\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m)))_{i<I}$ 是一个递减的序数序列，故它是有限的，并且必有$o_{I-1}(\mathbb{G}_{I-1}^{\mathcal{B}}(m)) = 0$。

□

5. 典范动力层级

我们的目标是定义一种动力层级，使其导出一个独立于Kripke–Platek集合论的古德斯坦原理。在 [**10**],中，通过迭代取所谓的“贪心后继”构造出了这样的基层级。我们定义另一种后继，称为衔尾蛇后继，它更适合我们的用途。

Definition 5.1. 给定基层级 B 和 $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，我们定义一个新的基层级$B_{+i} = \bigcup_{n<\infty} B_{+i}^n$，其中 B_{+i}^n 递归定义如下。归纳地假设，对于 $m < n$， B_{+i}^m已定义且为有限集。

首先，若 $n \leqslant \min B$，则令 $B_{+i}^n = \{\min B + 1\}$。

对于 $n > \min B$，令 $b = \mathrm{base}_B(n)$，并令 $c = \max B_{+i}^{n-1}$。

(i) 若 n 不是 B-临界的，则 $B_{+i}^n = B_{+i}^{n-1}$。

(ii) 若 $n \in B$，则令 $b = \mathrm{base}_B(n-1)$ 并设

$$B_{+i}^n = B_{+i}^{n-1} \cup \{ca\},$$

其中 a 是满足 $\langle {}^{c}_{b}\rangle(n-1) < ca$ 的最小值。

(iii) 如果 $n \notin B$ 是 B-临界的，令 $b = 基_B(n)$。那么，

$$B^n_{+i} = B^{n-1}_{+i} \cup \{d_j\}^i_{j=1},$$

其中我们递归地定义 $d_j = d_j(n, i)$，定义方式为 $d_0 = c$，并且

$$d_{j+1} = \langle {}^{d_j}_{b} \rangle n.$$

我们将 典范动力层级 $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 定义为满足 $C_0 = \{3\}$ 和 $C_{i+1} = (C_i)_{+(i+2)}$的唯一动力层级。我们将证明 $\mathcal{C}$ 实际上是一个动力层级，也就是说，它由良好后继组成，并且相应的 Goodstein 过程独立于 Kripke–Platek集合论。

LEMMA 5.2. 设 B 是一个基层级，且 $n \in \mathbb{N}$。设 $C_n = B^n_{+i}$ 和 $c_n = 最大值 C_n$。记 $\uparrow_n$ 为 $\uparrow^{C_n}_B$。那么 $\uparrow_n n < \infty$，且 c_n 是见证。

证明。 我们对 n应用归纳法。 $n \leqslant \min B$ 的情形显然，因此不妨假设并非如此。我们先证明以下断言。

每当向 C_n 中添加一个尚未出现在 C_{n-1}中的基时，该基都大于c_{n-1}，因此必定是 c_n。此外， $c_{n-1} \mid c_n$ 以及 $c_{n-1} \leqslant \uparrow_{n-1}(n-1) < c_n$。

在 $n \in B$ 的情况下，根据引理 2.4(ii)，我们有 $c_{n-1} \leqslant \langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle (n-1) < c_{n-1}a = c_n$，其中 $b = 基_B(n-1)$。显然， $c_{n-1} \mid c_n$，并且根据归纳假设，我们有 $\uparrow_{n-1}(n-1) = \langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle (n-1)$。

否则， $n \notin B$ 是 B-临界的。于是 $b = 基_B(n-1) = 基_B(n)$，并且根据归纳假设以及引理 2.5，我们有 $c_{n-1} \geqslant \uparrow_{n-1} b$。于是 $d_1 = \langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle n > \langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle b = c_{n-1}$，并且根据引理 2.10(i)， $c_{n-1} \mid d_1$。反复进行可知，对于每个 $j < i$， d_{j+1} 都是 d_j 的真因子。此外，在这种情况下， $\uparrow_{n-1}(n-1) = \langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle (n-1) < d_1$。这就证明了该断言。

根据我们的断言，我们知道 C_{n-1} 是 C_n 在区间 $[0, \uparrow_{n-1}(n-1)]$上的限制。于是由引理 2.6， $\uparrow_n x = \uparrow_{n-1} x < \infty$ 对所有 $x < n$都成立，而且两次升级的见证相同。令 $b = 为基_B(n)$。

CASE 1 （n 不是 B-临界的）。于是 $c_n = c_{n-1}$，并且

$$\uparrow_n(n-1) = \langle {}^{c_n}_{b} \rangle (n-1) < \langle {}^{c_n}_{b} \rangle n < \infty = S_{C_n}(c_n).$$

由引理 2.4(v)， c_n 是 $\uparrow_n n$的见证。

CASE 2 （n 是 B-临界的）。于是由该断言和引理 2.4(ii)，

$$\uparrow_n(n-1) < c_n \leqslant \langle {}^{c_n}_{b} \rangle n < \infty = S_{C_n}(c_n).$$

根据升级的定义，我们需要证明 c_n 是满足此条件的最小基。由引理 2.4(v)，只需排除 c_{n-1} 以及可能存在的介于 c_{n-1} 和 c_n之间的基。CASE 2.1 ($n = b \in B$)。于是 c_{n-1} 和 c_n之间没有其他基，并且 $\langle {}^{c_{n-1}}_{b} \rangle n = c_{n-1} \leqslant \uparrow_n(n-1)$。

CASE 2.2（$n \notin B$）。那么， c_{n-1}， c_{n-1} 和 c_n 之间的基的形式为 d_j，其中 $j < i$，且 $\langle {}^{d_j}_{b} \rangle n = d_{j+1} = S_C(d_j)$。

□

LEMMA 5.3. 设 B 是一个基层级，且对于某个 i，有 $C = B_{+i}$。那么 C 是 B的良好后继。

证明。 C 是基层级这一事实可由前述引理中的断言推出。显然，$\min C = \min\ B+1$。

对于 $n\in\mathbb{N}$，令 $C_n = B^n_{+i}$。用 $\uparrow$ 表示$\uparrow^C_B$，用 $\uparrow_n$ 表示 $\uparrow^{C_n}_B$。根据引理 2.6，我们有 $\uparrow n = \uparrow_n n < \infty$。

为验证最后一个条件，设 $\min B < n \in B$。那么， $\uparrow(n-1)$ 的见证是c_{n-1}，我们需要证明区间 $[\uparrow(n-1),\ c_n)$中没有 c_{n-1} 的倍数。这成立是因为 c_n 被选为大于 $\langle {}^{c_{n-1}}_{b}\rangle(n-1) = \uparrow_{n-1}(n-1) = \uparrow(n-1)$的 c_{n-1} 的最小倍数，其中 $b =$ 基$_B(n-1)$。 □

给定一个基层级 B，考虑某个 i对应的 $C = B_{+i}$。那么 C 是 $C_m := B^m_{+i}$的并集。如果 $n\notin B$是 B-临界的，那么根据定义 5.1，在 C中存在相应的基 $d_j = d_j(n,\ i)$，对应于 $0\leqslant j\leqslant i$。定义 5.1指出， $d_{j+1} = \langle {}^{d_j}_{b}\rangle n$ 在某个 C_m中成立，其中 $b =$ 基$_B(n)$。根据引理 2.6，这在 C中仍然成立。我们记录以下性质，以便在第 7 节证明独立性时使用。

Lemma 5.4. 令 $n\notin B$ 为 B-临界，且其 $b =$ 基$_B(n)$。记 $\uparrow$ 为 $\uparrow^C_B$， d_j 为 $d_j(n,i)$。(i) d_i 是 $\uparrow n$ 的见证， d_0 是 $\uparrow(n-b)$的见证。(ii) 若 $n+b\in B$，则不存在严格位于 d_i 与 $\uparrow(n+b)$之间的 C 的基。

证明。 对每个 $m\in\mathbb{N}$，令 $c_m =$ 为 C_m 的最大值。由引理 5.2 的证明可知， c_n 是元素 d_j之一，并且对每个 j， d_j 都是 d_{j+1}的真因子。因此$c_n = d_i$。根据定义 5.1， $d_0 = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_{n-b}$。现在由引理 5.2 和引理 2.6 可得 (i)。假设 $n+b\in B$。那么根据引理 5.2 和引理 2.6， $\uparrow(n+b) = c_{n+b}$。此外， $d_i = c_n = c_{n+b-1}$，并且根据引理 5.2 中的断言以及定义 5.1， c_{n+b} 是 c_{n+b-1} 在 C中的后继。这就证明了 (ii)。 □

6. 基本序列

我们回顾 [4] 和 [8]中的一些概念。

Definition 6.1. 设 $\xi<\varepsilon_{\Omega+1}$ 为 Ω-范式。 ξ的共尾性 记作 $\tau(\xi)$，递归定义如下：

(i) $\tau(0)=0$和 $\tau(\zeta+1)=1$,(ii) $\tau(\Omega^\alpha\beta+\gamma)=\tau(\gamma)$若 $\gamma>0$,(iii) $\tau(\Omega^\alpha\beta)=\beta$若 β是一个极限(iv) $\tau(\Omega^\alpha(\beta+1))=\tau(\alpha)$若 α是一个极限，且(v) $\tau(\Omega^{\alpha+1}(\beta+1))=\Omega$。

Definition 6.2. 对于 Ω-范式的 $\xi<\varepsilon_{\Omega+1}$ 以及 $\theta<\Omega$，定义如下：
(i) $0[\theta]=1[\theta]=0$,(ii) $(\Omega^\alpha\beta+\gamma)[\theta]=\Omega^\alpha\beta+\gamma[\theta]$若 $0<\gamma<\Omega^\alpha$,(iii) $\Omega^\alpha\beta[\theta]=\Omega^\alpha\theta$若 $\beta\in$极限,(iv) $(\Omega^\alpha(\beta+1))[\theta]=\Omega^\alpha\beta+\Omega^\alpha[\theta]$若 $\beta>0$,(v) $\Omega^\alpha[\theta]=\Omega^{\alpha[\theta]}$若 $\alpha\in$极限，且(vi) $\Omega^{\alpha+1}[\theta]=\Omega^\alpha\theta$。

Proposition 6.3. 设 $\zeta\in\varepsilon_{\Omega+1}$ 且 $\theta,\eta<\Omega$。
(i) $\zeta[\theta]^*\leqslant$最大值(ζ^*,θ)。

(ii) 若 $\eta < \theta$ 且 $\zeta \in$极限序数，则 $\zeta[\eta] < \zeta[\theta]$。

证明。对 ζ 进行归纳法。这些性质也在 [4] 中陈述。 □

Definition 6.4. 我们引入以下记号。

(i) 不动点 $= \{\xi < \varepsilon_{\Omega+1} \mid \xi[1]^* < \xi^* = \tau(\xi) = \vartheta(\gamma)$ 对于某个 $\gamma > \xi\}$

(ii) 跳跃 $=$ 不动点 $\cup$ 后继 $\cup \{0\}$

(iii) $\vartheta^*(\xi) = \begin{cases} \vartheta(\zeta) & \\ \quad \text{若 } \xi = \zeta + 1, & \\ 0 & \end{cases}$

$\tau(\xi) \quad \xi \in \quad$ 若 不动点，否则。

(iv) 对于 $\xi = \Omega\alpha + \beta$ 且 $\beta < \Omega$，令

$$\check{\xi} = \begin{cases} \Omega\alpha & \text{if } \vartheta^*(\zeta) > 0, \\ \xi & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们回顾 Buchholz 基本序列 [4]。为方便起见，我们将它们定义在 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 的所有元素上。注意，$\check{}\,\xi = 0$ 等价于 $\xi \in \Omega \cap$Jump。

Definition 6.5. 令 $\xi \in \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 和 $\iota < \omega$。定义 $\xi\{\iota\} \in \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 如下：(i) $0\{\iota\} = 0$。(ii) 若 $0 < \beta < \omega^{\alpha+1}$，则 $(\omega^\alpha + \beta)\{\iota\} = \omega^\alpha + \beta\{\iota\}$。(iii) 若 $\xi = \vartheta(\zeta)$，则令 $\tau = \tau(\check{}\,\zeta)$，并且：(a) 若 $\zeta \in \Omega \cap$Jump，则 $\vartheta(\zeta)\{\iota\} = \vartheta^*(\zeta) \cdot \iota$。(b) 若 $0 < \tau < \Omega$，则 $\vartheta(\zeta)\{\iota\} = \vartheta\big(\check{}\,\zeta[\tau\{\iota\}] + \vartheta^*(\zeta)\big)$。(c) 若 $\tau = \Omega$，则 $\vartheta(\zeta)\{0\} = \vartheta^*(\zeta)$ 且 $\vartheta(\zeta)\{\iota+1\} = \vartheta(\check{}\,\zeta[\xi\{\iota\}])$。

在 [4] 中证明了基本序列通常具有的性质，即若 $\xi \in \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}] \cap$ 极限序数，则 $\xi\{n\}$ 在 n 中严格递增，并收敛到 ξ。我们通过定义 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]\{n\} = \vartheta(\Omega_n)$，将此性质推广到 $\xi = \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$。

Lemma 6.6. 设 $\zeta < \varepsilon_{\Omega+1}$, $0 < \theta < \Omega$，$\xi \in \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 且 $0 < \iota < \omega$。(i) 若 $\zeta > 1$，则 $\zeta[\theta] > 0$。(ii) 若 ζ 是无限的，则要么 $\zeta[\theta] = \theta$，要么 $\zeta[\theta]$ 是无限的。(iii) 若 ζ 是不可数的，则要么 $\zeta[\theta] = \theta$，要么 $\zeta[\theta]$ 是不可数的。(iv) 若 $\xi > 1$，则 $\xi\{\iota\} > 0$。(v) 若 ξ 是无限的，则要么 $\xi\{\iota\} = \iota$，要么 $\xi\{\iota\}$ 是无限的。

证明。我们对 $\zeta > 0$ 进行同时归纳法，证明前三个断言。设 $\zeta = \Omega^\eta\alpha + \gamma$，其中 α 加法不可分解。

若 $\gamma > 0$，则 $\zeta[\theta] = \Omega^\eta\alpha + \gamma[\theta]$ 在 ζ 不可数时不可数，在 ζ 无限时为无限，并且大于零。现在假设 $\gamma = 0$。

若 α 是极限，则 $\zeta[\theta] = \Omega^\eta\theta$；当 ζ 是不可数时，它也不可数，否则它等于 $\theta > 0$。

否则，$\alpha = 1$。若 η 是极限，则 $\zeta[\theta] = \Omega^{\eta[\theta]}$ 是不可数的，因为 $\eta[\theta] > 0$。否则，$\eta = \delta + 1$ 是后继序数，且除非 $\delta = 0$，$\zeta[\theta]$ 是不可数的。但这样一来，$\zeta[\theta] = \theta > 0$。

现在，我们对 ξ 使用同时归纳法来证明最后两个断言。如果 $\xi = \omega^\alpha + \beta$ with $0 < \beta < \omega^{\alpha+1}$，那么如果 ξ 是无限的，$\xi\{\iota\} = \omega^\alpha + \beta\{\iota\}$ 也是无限的；如果 $\xi > 1$，则 $\xi\{\iota\} = \omega^\alpha + \beta\{\iota\}$ 大于零。因此，假设

进一步假设，对于某个 ζ， $\xi = \vartheta(\zeta)$。那么只有当 $\zeta > 0$ 且 ξ 是无限的情况下，才会出现 $\xi > 1$，因此我们只需考虑最后一个断言。

注意， $\vartheta^*(\zeta)$要么为零，要么具有 $\vartheta(\zeta')$ 的形式；在后一种情况下，它要么是 1，要么是无限的。当 $\xi\{\iota\}$ 具有 $\vartheta^*(\zeta)\cdot\iota$ 的形式时，我们有 $\vartheta^*(\zeta) > 0$，断言便得证。

˘˘ 现在考虑 $\xi\{\iota\} = \vartheta(\zeta[\tau\{\iota\}] + \vartheta^*(\zeta))$ 的情形。只需验证 $\zeta[\tau\{\iota\}] + \vartheta^*(\zeta) > 0$。若此结论不成立，则必须有 $\vartheta^*(\zeta) = 0$，因此 ˘ $\zeta = \zeta$。由于$\zeta \notin \Omega \cap \mathrm{Jump}$，我们有 ˘ ζ 是无限的。根据第一项，˘ $\zeta[\tau\{\iota\}] = 0$ 只有在$\tau\{\iota\} = \tau(\zeta)\{\iota\} = 0$时才会出现。由于 $\tau(\zeta) \leqslant \zeta^* < \xi$，我们可以应用归纳假设，得出在这种情况下 $\tau \leqslant 1$。由于 $\xi > 1$，必然有 $\tau = 1$，并且 ζ 是一个后继序数。但这与 $\vartheta^*(\zeta) = 0$ 的事实矛盾。

˘˘ 现在假设 $\tau(\zeta) = \Omega$。那么， $\xi\{1\} = \vartheta(\zeta[\vartheta^*(\zeta)])$ 要么为一个，要么为无穷多个。无论哪种情况，根据第一个断言，˘ $\zeta[\xi\{1\}] > 0$，所以 $\xi\{2\}$ 是无穷的。重复这一论证可知，对于每个 $\iota \geqslant 2$， $\xi\{\iota\}$ 都是无穷的。 □

Lemma 6.7. 如果 $\alpha < \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$，那么
(i) 如果 $\alpha < \omega^\alpha$，那么 $\alpha \notin$不动点。(ii) 如果 $\alpha \in$ 极限序数，那么 $\omega^\alpha\{\iota\} \leqslant \omega^{\alpha\{\iota\}+1}$。
(iii) 如果 $\alpha \in$ 后继，那么 $\omega^\alpha\{\iota\} = \omega^{\alpha-1}\cdot\iota$。

证明。 对于 (i)，假设 α 在 ϑ的像中，因此 $\alpha = \omega^\beta$。根据假设 $\beta < \omega^\beta$，于是根据引理 3.4， $\alpha = \omega^\beta$ 等于 $\vartheta(\beta)$ 或 $\vartheta(\beta-1)$。由 ϑ的单射性，不可能有 $\alpha = \vartheta(\gamma)$ 且 $\gamma > \alpha \geqslant \beta$。

若 $\alpha = \omega^\alpha$，则 (ii) 显然成立。因此假设 $\alpha \in$ 极限序数且 $\alpha < \omega^\alpha$。于是 $\vartheta(\alpha) = \omega^\alpha$。容易验证

$$\vartheta(\alpha)\{\iota\} = \vartheta(\breve{\alpha}[\alpha\{\iota\}] + \vartheta^*(\alpha)) = \vartheta(\alpha\{\iota\}) \leqslant \omega^{\alpha\{\iota\}+1}.$$

对于 (iii)，若 $\alpha+1$ 不是形如 $\delta+n$ 的形式，其中 $\omega^\delta = \delta$ 且 $n < \omega$，则

$$\omega^{\alpha+1}\{\iota\} = \vartheta(\alpha+1)\{\iota\} = \vartheta^*(\alpha+1)\cdot\iota = \vartheta(\alpha)\cdot\iota = \omega^\alpha\cdot\iota.$$

否则，假设 $\alpha+1$ 具有 $\delta+n$ 的形式。若 $n > 1$，我们可以进行与上文相同的计算。进一步假设 $\alpha = \delta$。由 ϑ 的满射性可得 $\delta = \vartheta(\gamma)$，又由引理 3.4， $\gamma \geqslant \Omega$，这意味着 $\delta \in$不动点。于是

$$\omega^{\alpha+1}\{\iota\} = \vartheta(\delta)\{\iota\} = \vartheta^*(\delta)\cdot\iota = \delta\cdot\iota = \omega^\alpha\cdot\iota.$$

□

Definition 6.8. 对于 $i < \omega$ 和 $\alpha < \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$，递归地定义 $\alpha[\![i]\!]$，使得 $\alpha[\![0]\!] = \alpha$ 且 $\alpha[\![i+1]\!] = \alpha[\![i]\!]\{i+1\}$。定义 $F_\alpha(n)$ 为满足 $\alpha\{n\}[\![\ell]\!] = 0$ 的最小 ℓ。

对于每个 α，函数 F_α 都是全定义的，因为只要右侧不为零，就有 $\alpha\{n\}[\![i+1]\!] < \alpha\{n\}[\![i]\!]$。然而，证明全定义性所需的证明论强度会随着 α 增长。特别是对于 $\alpha = \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$， F_α 的全定义性无法在 Kripke–Platek集合论中证明。事实上，一个更一般的结论成立：它是 Cichon 等人提出的一般原理的一个特例 [5]，该原理适用于 Buchholz 的基本序列系统 [4, 8]。

Theorem 6.9. 设 f 是一个可计算函数，并设 T 表示以下某个系统：$\mathsf{RCA}_0 + (\Sigma^0_n) - \mathrm{IND}$、$\mathsf{ACA}_0$, ATR_0, $\mathsf{KP}^-\omega + (\Pi_n) - \mathrm{IND}$，或 KP。若 T 证明了 f 的全定义性，

即 $T \vdash \forall x \exists y (y = f(x))$ [†]，则 $\exists m\ \forall n > m\ \big(f(n) < F_\alpha(n)\big)$，其中 α 是 T 的证明论序数：

(i) 若 $T \equiv \mathsf{RCA}_0 + (\Sigma^0_n)$ –IND，则 $\alpha = \omega_{n+1}$。(ii) 若 $T \equiv \mathsf{ACA}_0$, ，则 $\alpha = \vartheta(\Omega) = \varepsilon_0$。(iii) 若 $T \equiv \mathsf{ATR}_0$, ，则 $\alpha = \vartheta(\Omega^2) = \Gamma_0$。(iv) 若 $T \equiv$ Kripke–Platek集合论$^-\omega + (\Pi_n)$ –IND，则 $\alpha = \vartheta((\Omega_n)^\omega)$。(v) 若 $T \equiv$Kripke–Platek集合论，则 $\alpha = \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$。

以下命题是对函数 F 进行上界估计的基本工具。

PROPOSITION 6.10 [**1**, **8**]。 假设 $(\xi_i)_{i \leqslant I} < \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 满足对所有 $i < I$，

$$\xi_i\{i+1\} \leqslant \xi_{i+1} \leqslant \xi_i.$$

那么，对于所有的 $i \leqslant I$, $\xi_i \geqslant \xi_0[\![i]\!]$。

7. 独立性

下面的引理大致说明：给定 $n > 0$，对 $O^b_B(n)$ 应用平方基本序列（其中我们可能忽略 Ω 的一个足够小的幂），等同于将 n 替换为一个更小的数。此结果将用于界定独立性证明中 α_B 的出现次数。

LEMMA 7.1. 设 B 是一个基层级。设 $n > 0$, $b \in B$ 和 $O^b_B(n) = \Omega^d\xi$ 满足 $d < \min B$。假设对于某个 $c < b$，有 $0 < \iota = o_B(c)$，其中或者 $\iota < \min B - d$，或者 $\omega \leqslant \iota < \tau(\xi)$。

那么，存在 $n' < n$ 使得

$$O^b_B(n') = \Omega^d(\xi[\iota]).$$

此外，

(i) 若 $b^e \mid n$ 且 $e > 0$，则 $n' \leqslant n - b^{e-1}(b-c)$。

(ii) 若 $n > b$ 且 $\xi \geqslant \Omega$，则 $n' \geqslant b$。

证明。 设 $n =_b b^e a + r$ 且 $\xi = \Omega^\eta\alpha + \gamma$。我们对 n 使用归纳法来构造 n'。容易验证，在每种情况下，陈述底部列出的各项都成立。

CASE 1 ($r > 0$)。于是 $O^b_B(r) = \Omega^d\gamma > 0$。我们应用归纳假设，找到合适的$r' < r$，并令 $n' = b^e a + r'$。

CASE 2 ($r = 0$)。于是，$\gamma = 0$ 且 $o_B(a) = \alpha$。

CASE 2.1（$\min B \nmid a > 1$）。于是，根据引理 4.5(i)，$\alpha = \delta + 1$，其中 $\delta = o_B(a-1)$。将归纳假设应用于 $\Omega^d\Omega^\eta = O^b_B(b^e)$，我们找到合适的 $r' < b^e$，使得 $\Omega^d \cdot \Omega^\eta[\iota] = O^b_B(r')$。然后我们令 $n' = b^e(a-1) + r'$。

CASE 2.2（最小的 $B \mid a > 1$）。根据引理 4.5(ii)，$\alpha \in$极限序数。于是 $\tau(\xi) = o_B(a)$，因此根据假设以及 o_B 的单调性，我们有 $c < a$。随后我们可以令 $n' = b^e c$。

CASE 2.3（$a = 1$）。对于 e，我们分情况讨论。

CASE 2.3.1 ($\min B \nmid e > 0$)。在这种情况下，根据引理 4.5(v)，$d + \eta = \delta + 1$ 是后继序数，其中$\delta = O^b_B(e-1)$。若 $\eta = 0$，则 $\xi[\iota] = \Omega^0[\iota] = 0$，于是我们可以取 $n' = 0$。否则，$\Omega^d \cdot \xi[\iota] = \Omega^\delta\iota$，我们取 $n' = b^{e-1}c$。

[†]表达式 $y = f(x)$ 应理解为 $\varphi_f(x,\ y)$，其中 $\varphi_f(x,\ y)$ 是 f 的图的 Σ^0_1 定义。

Case 2.3.2 (min $B \mid e > 0$)。于是 $\eta \in$ 是极限序数，因此 $\xi[\iota] = \Omega^{\eta[\iota]}$。若 $\eta[\iota]$ 是无限的，则$\Omega^d(\xi[\iota]) =\Omega^{\eta[\iota]}$。由于 $\tau(\xi) = \tau(\eta)$，我们可以使用归纳假设找到合适的 $e' < e$，使得$O^b_B(e') = \eta[\iota]$。然后令 $n' = b^{e'}$。

否则，若 $\eta[\iota]$ 是有限的，则根据引理 6.6(ii)，$\eta[\iota] = \iota$，因此根据我们的假设，$d + \eta[\iota] <$min B。于是我们可以设 $n' = b^{d+\eta[\iota]}$。在这种情况下，第一项由 $d + \eta[\iota] <$min B 得出，而 $e \geqslant$ min B。

Case 2.3.3 ($e = 0$)。于是 $n = 1$，我们可以取 $n' = 0$。

□

Corollary 7.2. 设 B 是一个基层级。设 $n = b^2u$，其中 $b \in B$ 且 $u > 0$。假设对于某个 $c < b$，有 $0 < \iota = o_B(c)$，其中或者 $\iota <$最小 $B - 1$，或者 $\omega \leqslant \iota < \tau(\alpha^b_B(n))$。
那么 $\alpha^b_B(n)[\iota] \leqslant \alpha^b_B(n - b^2) + \iota$。

证明。根据前述引理应用 $d = 1$，我们找到 n' 使得
(i) $O^b_B(n') = \Omega \cdot \alpha^b_B(n)[\iota]$(ii)
$b \leqslant n' \leqslant n - b(b - c) = b^2(u - 1) + bc$。由此可得

$$\Omega \cdot \alpha^b_B(n)[\iota] = O^b_B(n') \leqslant O^b_B(b^2(u - 1) + bc) = \Omega \cdot (\alpha^b_B(n - b^2) + \iota)$$

□

Lemma 7.3. 设 B 为一个基层级，且 $n \in \mathbb{N}$ 是 B-临界的。
(i) 若 $o_B(n)$ 包含一个非零项 $\omega^{o_B(\tilde{v})}$，则 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) = 0$。否则，(ii) 若 n_* 不存在且 $\alpha_B(n) = 0$，则 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) = \omega$。(iii) 若 n_* 不存在且 $\alpha_B(n) > 0$，则 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) = 0$。(iv) 若 n_* 存在且 $\alpha_B(n_*) = \alpha_B(n)$，则 $\zeta_B(n) \in$后继 且 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) = o_B(n_*)$。(v) 若 n_* 存在且 $\alpha_B(n_*) > \alpha_B(n)$，则 $\zeta_B(n) \in$不动点 且 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) = o_B(n_*)$。

证明。首先假设

$$o_B(n) = \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n) + \omega^{o_B(\tilde{v})}),$$

其中 $\omega^{o_B(\tilde{v})} \neq 0$。那么显然 $\zeta_B(n)$ 不是后继序数，因此只需证明$\zeta_B(n) \notin$不动点。反设 $\zeta_B(n) \in$ 是不动点。

由于 $\Omega \mid \alpha_B(n)$，我们有 $\tau := \tau(\zeta_B(n)) = \beta_B(n) + \omega^{o_B(\tilde{v})}$。如果 $\beta_B(n) \geqslant \omega^{o_B(\tilde{v})}$，那么 τ 不是加法不可分解的，这意味着对于任意 γ 和 $\zeta_B(n) \notin$ 不动点，都有 $\tau \neq \vartheta(\gamma)$。因此 $\beta_B(n) <\omega^{o_B(\tilde{v})}$ 且 $\tau = \omega^{o_B(\tilde{v})}$。如果 $\omega^{o_B(\tilde{v})} > o_B(\tilde{v})$，则根据引理 3.3(iv)以及 $\vartheta(\gamma) = \tau = \omega^{o_B(\tilde{v})}$，有 $\gamma < \Omega$。由引理 3.3(ii)，$\gamma < \vartheta(\gamma) = \tau$，这再次与 $\zeta_B(n) \in$ 不动点矛盾。因此进一步假设 $\omega^{o_B(\tilde{v})} = o_B(\tilde{v})$，特别地，$\tilde{v} = v$ 和 $\tau = o_B(v)$。于是由引理 4.5(iii)和 $\zeta_B(n) \in$不动点可知，$v \notin B$ 是 B-临界的，因此 $\tau = \vartheta(\zeta_B(v))$。此外，$\alpha_B(v) > \alpha_B(n)$，因为否则 $\zeta_B(v) < \zeta_B(n)$，这与 $\zeta_B(n) \in$ 不动点矛盾。

现在我们证明 $\beta_B(n) \geqslant o_B(v) = \omega^{o_B(v)}$，这与我们先前对$\beta_B(n)$ 所作的假设矛盾。令 $b =$ 基$_B(n)$。只需证明对于任意 $\gamma < o_B(v)$，我们都有

$$\vartheta(\alpha_B(n) + \gamma) < \vartheta(\zeta_B(v)) = o_B(v) < o_B(b).$$

为此，我们使用命题 3.2。由于 $\alpha_B(v) > \alpha_B(n)$，我们有 $\alpha_B(n) + \gamma < \zeta_B(v)$。此外，$\gamma < o_B(v)$，由 $\zeta_B(n) \in$ 不动点可得 $\alpha_B(n)^* = \zeta_B(n)[1]^* < \zeta_B(n)^* = \tau =o_B(v)$。这就证明了第一项。

接下来，假设

$$o_B(n) = \vartheta(\alpha_B(n) + \beta_B(n)).$$

如果 n_* 不存在且 $\alpha_B(n)=0$，那么根据引理 4.10，$\beta_B(n)=2$，显然$\vartheta^*(\zeta_B(n))=\omega$。如果 n_* 不存在且 $\alpha_B(n)>0$，那么根据引理 4.10，$\zeta_B(n)=\alpha_B(n)$。显然 $\alpha_B(n)\notin$ 是后继，因此我们必须证明 $\alpha_B(n)\notin$ 是不动点。再次反设 $\alpha_B(n)\in$ 是不动点。

于是，存在 B-临界的 $v<b$，它不是基。再者，由于 $\zeta_B(v)<\alpha_B(n)$，我们有 $\alpha_B(v)\geqslant\alpha_B(n)$。现在注意到，由于 v是 B-临界的，它与 $v+1$具有相同的基。这意味着 $\alpha_B(n)\leqslant\alpha_B(v)\leqslant\alpha_B(v+1)$ 且$\alpha_B(n)^*=o_B(v)<o_B(v+1)$。我们看到，$v+1$ 是 n_*的一个候选元素。由于 n_* 不存在，故得到矛盾。

接下来，假设 n_* 存在且 $\alpha_B(n_*)>\alpha_B(n)$。根据引理 4.10，有 $\beta_B(n)=o_B(n_*)$，并且容易看出，$\zeta_B(n)\in$ 是满足 $\tau(\zeta_B(n))=o_B(n_*)$的不动点，因此 $\vartheta^*(\zeta_B(n))=o_B(n_*)$。

最后，如果 $\alpha_B(n_*)=\alpha_B(n)$，那么根据引理 4.10 可得 $\zeta_B(n)=\zeta_B(n_*)+1$，从而 $\vartheta^*(\zeta_B(n))=\vartheta(\zeta_B(n_*))=o_B(n_*)$。 □

PROPOSITION 7.4. 设 B 是一个动力层级，且 $C=B_{+(i+1)}$ 满足 $0<i<$最小值$B-1$。那么对于 $n>0$,

$$o_C(\uparrow_B^C n-1)\geqslant o_B(n)\{i\}.$$

证明。记 $\uparrow$为$\uparrow_B^C$。注意，根据对 i的假设，$\min B\geqslant 3$，因此$\min C\geqslant 4$。对 n使用归纳法，我们证明命题中的不等式；此外，当 $\min B\mid n$时，或者等价地，当 $o_B(n)\in\mathrm{Lim}$ 时，我们还证明该不等式是严格的。设 $b=$基$_B(n)$ 且 $c=\uparrow b$。当 $n<\min B$时，情况很容易处理，因为此时 $o_B(n)=n$ 且 $o_B(n)\{i\}=n-1=o_C(\uparrow n-1)$。下文假设 $n\geqslant\min B$。

若 $b\nmid n$，则写作 $n=ba+r$，其中 $0<r<b$。由引理 2.12(ii)，$\uparrow n=\uparrow ba+\uparrow r$。根据归纳假设，$o_C(\uparrow r-1)\geqslant o_B(r)\{i\}$，因此

$$\begin{aligned}o_C(\uparrow n-1)&=o_C(\uparrow ba+\uparrow r-1)\\&=o_C(\uparrow ba)+o_C(\uparrow r-1)\geqslant o_B(ba)+o_B(r)\{i\}=o_B(n)\{i\}.\end{aligned}$$

在第二个等式中，我们用到了：根据引理 2.11(ii)，$\uparrow ba$ 是 C-临界的，并且 $\uparrow r-1<\uparrow b=c\leqslant$基$_C(\uparrow ba)$。若 $\min B\mid n$，则 $\min B\mid r$，因此我们可以将上述不等式替换为严格不等式。

现在假设 $n=b^2u+bv$ 是 B-临界的，并令 $d_j=d_j(n,i+1)$，其中 $0\leqslant j\leqslant i+1$。于是 $o_B(n)=\vartheta(\zeta_B(n))$。我们还记 $\tau:=\tau(\check{}\,\zeta_B(n))$。我们将证明 $o_C(d_{i+1}-d_i)\geqslant o_B(n)\{i\}$。由于根据引理 5.4(i)，$\uparrow n-1>d_{i+1}-d_i$，所需结论随即得证。

CASE 1 ($o_B(n)$ 含有一个非零项 $\omega^{o_B(\tilde{v})}$)。那么 $\zeta_B(n)=\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v})}$。根据引理 7.3，$\zeta_B(n)\notin$ 是不动点，所以$\check{}\,\zeta_B(n)=\zeta_B(n)$ 且 $\tau=\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v})}$。那么

$$o_B(n)\{i\}=\vartheta(\check{\zeta}_B(n)[\tau\{i\}]+\vartheta^*(\zeta_B(n)))=\vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v})}\{i\}) \tag{7.1}$$

我们将在下面的子情形中使用以下事实。

(i) 要么 $v>2$，要么 $u>0$。那么

$$d_{j+1}=\left\langle {d_j \atop b}\right\rangle(b^2u+bv)=d_j^2u_j+d_j\cdot\uparrow v\geqslant 3d_j,$$

因为在第一种情形下，$\uparrow v\geqslant 3$；而在最后一种情形下，$d_j\geqslant\min C\geqslant 4$ 且 $u_j>0$。因此 $d_{j+1}-d_j\notin C$ 是 C-临界的。

(ii) 由 $\uparrow v>0$ $\alpha_C(d_{j+1}-d_j)=\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})$ $O_C^{d_j}(d_j^2u_j)=O_C^{d_j}(\langle {d_j \atop b}\rangle b^2u)=$ 我们得到。$O_B(b^2u)$ $\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})=\alpha_B(n)$ j d_j-d_{j-1}

由于，对于所有 都有。特别地，我们看到，当 $j>0$ 时，是 $(d_{j+1}-d_j)_*$ 的候选元素；事实上，它是最大的候选元素，即$(d_{j+1}-d_j)_*=d_j-d_{j-1}$。根据引理 4.10，$\beta_C(d_{j+1}-d_j)=\gamma+1$，其中 $o_C(d_j-d_{j-1})=\vartheta(\alpha_B(n)+\gamma)$。

Case 1.1 ($o_B(\tilde{v}) \in$ 后继)。根据引理 4.5，我们有 $\min B \nmid \tilde{v}$ 和 $o_B(\tilde{v}) = o_B(\tilde{v}-1)+1$。因此也有 $\min B \nmid v$ 和 $o_B(v) = o_B(v-1)+1$。根据引理 6.7(iii)，于是 $\omega^{o_B(\tilde{v})}\{i\} = \omega^{o_B(\tilde{v})-1}\cdot i = \omega^{o_B(\tilde{v}-1)}\cdot i$。我们声称，对于 $0 \leqslant j < i+1$,

$$\vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}\cdot j) \leqslant o_C(d_{j+1}-d_j). \tag{7.2}$$

于是，对 $j = i$、$o_B(n)\{i\} \leqslant o_C(d_{i+1}-d_i)$。由引理 2.12(iii)，$\uparrow v = \uparrow(v-1)+1$。因此，$d_{j+1}-d_j = \langle {}^{d_j}_{b}\rangle(b^2u+b(v-1)) = \langle {}^{d_j}_{b}\rangle(n-b)$ 对所有 $j < i+1$ 都成立。再由引理 5.4(i)，$\uparrow(n-b) = \langle {}^{d_0}_{b}\rangle(n-b) = d_1-d_0$。

现在我们通过对 j 使用归纳法来证明方程（7.2）。

Case 1.1.1（$\tilde{v}=1$）。当 $n = 3b$ 且 $3 < \min B$，或者 $n = b^2u+b$ 时，就会出现这种情况。于是 $o_C(d_1-d_0) = o_B(n-b) = \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n))$，并通过归纳使用上面的 (ii)，$o_C(d_{j+1}-d_j) = \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+j)$。

Case 1.1.2（$\tilde{v}>1$）。那么，基例 $j=0$ 可由下式得出：

$$o_C(d_1-d_0) = o_B(n-b) = \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}) \geqslant \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)),$$

归纳步骤则由下式得出：

$$\begin{aligned} o_C(d_{j+1}-d_j) &= \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_C(d_{j+1}-d_j)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}) \\ &\geqslant \vartheta(\alpha_B(n)+(\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}\cdot(j-1)+1)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}) \\ &= \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(\tilde{v}-1)}\cdot j). \end{aligned}$$

$\frown$对于第一行，只需验证在我们所考虑的情形下 $\uparrow v - 1 = \uparrow(\tilde{v}-1)$ 成立。第二行用到了引理 3.3(iii)。

Case 1.2（$o_B(\tilde{v}) \in$ 极限序数）。那么，根据引理 4.5，$\min B \mid \tilde{v} > 0$，特别是 $\tilde{v} = v$。

Case 1.2.1 （$n = b\cdot\min B$）。那么 $\omega^{o_B(v)}\{i\} = \omega^{\omega}\{i\} = \omega^i$，并且我们有 $d_1 = d_0\cdot\min C$。现在我们将使用以下事实。

（i）由 $i < \min B - 1$ 以及 $\min C = \min B + 1$，我们得到 $i \leqslant \min C - 3$。

（ii）由引理 5.4(i) 可推出 $\uparrow b \leqslant d_0$，从而得到 $\beta_B(n) \leqslant \beta_C(d_1-d_0)$。这里我们还依赖于以下事实：$\alpha_C(d_1-d_0) = \alpha_B(n) = 0$。

因此回到方程（7.1），

$$o_B(n)\{i\} = \vartheta(\beta_B(n)+\omega^i) \leqslant \vartheta(\beta_C(d_1-d_0)+\omega^{\min C-3}) = o_C(d_1-d_0).$$

Case 1.2.2（$n \neq b\cdot\min B$）。无论 $\omega^{o_B(v)} = o_B(v)$ 是否成立，根据引理 6.7(ii)，我们都有 $\omega^{o_B(v)}\{i\} \leqslant \omega^{o_B(v)\{i\}+1}$；又由于 $\min B \mid v$，由归纳假设可得 $o_B(v)\{i\}+1 \leqslant o_C(\uparrow v-1)$。与前一种情况一样，我们有 $\beta_B(n) \leqslant \beta_C(d_1-d_0)$。于是

$$\begin{aligned} o_B(n)\{i\} &\leqslant \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_B(n)+\omega^{o_B(v)\{i\}+1}) \\ &\leqslant \vartheta(\alpha_B(n)+\beta_C(d_1-d_0)+\omega^{o_C(\uparrow v-1)}) = o_C(d_1-d_0). \end{aligned}$$

Case 2 ($n = 2b$)。于是 $\zeta_B(n) = \beta_B(n)$。由引理 4.10 和引理 7.3 可知，无论 n_* 是否存在，我们都有 $\zeta_B(n) \in \Omega \cap$ Jump。因此 $o_B(n)\{i\} = \vartheta^*(\zeta_B(n))\cdot i$。现在注意，对于 $0 \leqslant j < i+1$，我们有 $d_{j+1} = 2d_j$，所以 $o_C(d_0)\cdot 2^i = o_C(d_i) = o_C(d_{i+1}-d_i)$。因此，只需证明 $\vartheta^*(\zeta_B(n)) \leqslant o_C(d_0)$。如果 n_* 不存在，那么根据引理 7.3，$\vartheta^*(\zeta_B(n)) = \omega = o_C(\min C) \leqslant o_C(d_0)$。否则，$\vartheta^*(\zeta_B(n)) = o_B(n_*) < o_B(b) \leqslant o_C(d_0)$。

Case 3 （$n = b^2u$，其中 $u>0$）。由引理 4.10 和引理 7.3 可知，无论n_* 是否存在，$\zeta_B(n) = \alpha_B(n)$。因此 $\tau = \tau(\alpha_B(n))$。我们汇总以下事实，以供后续情形使用。

（i）与情形 1 中一样，

$$d_{j+1} = \langle {}^{d_j}_{b}\rangle n = d_j^2u_j \geqslant 3d_j,$$

并且 $d_{j+1}-d_j \notin C$ 是 C-临界的。

(ii) 对所有 j，我们再次有 $\alpha_C^{d_j}(d_{j+1}) = \alpha_B(n)$；然而，通常 $\alpha_C(d_{j+1} - d_j) = \alpha_C(d_j^2(u_j - 1))$ 可能依赖于 j。

现在需要考虑两种情况。

Case 3.1 ($\tau = \Omega$)。我们将对 $0 \leqslant j < i + 1$ 进行归纳证明

$$o_B(n)\{j\} \leqslant \vartheta(\alpha_C(d_{j+1} - d_j^2) + \beta_C(d_{j+1} - d_j) + \omega^{o_C(d_j - 1)}) = o_C(d_{j+1} - d_j). \tag{7.3}$$

基例 $j = 0$ 可由下式得出

$$o_B(n)\{0\} = \vartheta^*(\zeta_B(n)) \leqslant o_B(b) \leqslant o_C(d_1 - d_0),$$

因为 $\vartheta^*(\zeta_B(n))$ 要么是 $o_B(n_*)$，要么为零。对于归纳步骤，假设 $j > 0$。 n

$$o_B(n)\{j\} = \vartheta(\alpha_B(n)[o_B(n)\{j-1\}]) = \vartheta(\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})[o_B(n)\{j-1\}])$$

我们将利用引理 3.2 证明最后这个表达式小于 $o_C(d_{j+1} - d_j)$。由归纳假设、命题 6.3(ii) 和推论 7.2，可得

$$\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})[o_B(n)\{j-1\}] \leqslant \alpha_C^{d_j}(d_{j+1})[o_C(d_j - d_{j-1})] \leqslant \alpha_C(d_{j+1} - d_j^2) + o_C(d_j - d_{j-1}).$$

此外，$o_C(d_j - d_{j-1}) < \omega^{o_C(d_j - 1)}$。现在只需证明

$$\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})[o_B(n)\{j-1\}]^* < o_C(d_{j+1} - d_j).$$

由命题 6.3 可知这一点成立，因为 $\alpha_C^{d_j}(d_{j+1})^* = \alpha_B(n)^*$ 是 $o_B(v)$ 的形式，其中 $v < b$，所以 $\uparrow v < d_0$，并且由归纳假设可得 $o_B(n)\{j-1\} \leqslant o_C(d_j - d_{j-1}) < o_C(d_{j+1} - d_j)$。Case 3。2（$\tau < \Omega$）。在这种情况下，存在某个 $v < b$ 使得 $\tau = o_B(v)$，并且由于 $\alpha_B(n) \notin$ 后继，τ 必须是无限的。我们断言

$$\begin{aligned} o_B(n)\{i\} &= \vartheta(\alpha_B(n)[\tau\{i\}] + \vartheta^*(\zeta_B(n))) \\ &= \vartheta(\alpha_C^{d_0}(d_1)[\tau\{i\}] + \vartheta^*(\zeta_B(n))) \\ &\leqslant \vartheta(\alpha_C(d_1 - d_0^2) + \beta_C(d_1 - d_0) + \omega^{o_C(d_0 - 1)}) = o_C(d_1 - d_0). \end{aligned}$$

我们再次将命题 3.2 与推论 7.2 一起使用。需要考虑两种情形。Case 3.2.1 ($\tau\{i\} < \omega$)。根据引理 6.6(v)，$\tau\{i\} = i$。因此，$0 < \tau\{i\} < \min C - 1$ 满足推论 7.2 的条件。所以 $\alpha_C^{d_0}(d_1)[\tau\{i\}] \leqslant \alpha_C(d_1 - d_0^2) + \tau\{i\}$。由归纳假设和 $\uparrow v < d_0$，我们得到 $\tau\{i\} = o_B(v)\{i\} \leqslant o_C(\uparrow v - 1) < o_C(d_0 - 1)$。此外，由于 $\vartheta^*(\zeta_B(n))$ 要么是 $o_B(n_*)$，要么为零，$\vartheta^*(\zeta_B(n)) < o_C(d_0 - 1)$。综合以上各点，

$$\alpha_C^{d_0}(d_1)[\tau\{i\}] + \vartheta^*(\zeta_B(n)) < \alpha_C(d_1 - d_0^2) + \beta_C(d_1 - d_0) + \omega^{o_C(d_0 - 1)}.$$

与情形 3.2 中一样，$\alpha_C^{d_1}(d_0)[\tau\{i\}]$的所有系数以及项 $\vartheta^*(\zeta_B(n))$都小于 $o_C(d_1 - d_0)$。由于 $o_C(d_1 - d_0)$ 是加法不可分解的，

$$\left(\alpha_C^{d_0}(d_1)[\tau\{i\}] + \vartheta^*(\zeta_B(n))\right)^* < o_C(d_1 - d_0).$$

Case 3.2.2（$o_B(v)\{i\} \geqslant \omega$）。根据归纳假设，$\omega \leqslant \tau\{i\} = o_B(v)\{i\} \leqslant o_C(\uparrow v - 1)$，因此

$$\alpha_C^{d_0}(d_1)[\tau\{i\}] + \vartheta^*(\zeta_B(n)) \leqslant \alpha_C^{d_0}(d_1)[o_C(\uparrow v - 1)] + \vartheta^*(\zeta_B(n))).$$

显然，$o_C(\uparrow v - 1)$ 满足推论 7.2 的条件，我们按与前一种情况相同的方式继续。

最后，假设 $n = b \in B$。如果 $n = \min B$，那么 $o_B(n) = \omega$ 且 $\omega\{i\} = i < \min C - 1$，因此我们有 $\omega\{i\} < \uparrow n - 1 = o_C(\uparrow n - 1)$。否则，令 d 为 b 在 B 中的前驱，并令 $m = b - d$。根据保持性，$o_C(\uparrow n) = o_B(n) = o_C(m) \cdot 2 = o_C(\uparrow m) \cdot 2$。若 $m = d \in B$，则根据引理 2.13 有 $\uparrow n = 2 \cdot \uparrow m$，并且我们可以对 m 使用归纳假设，得到

$$o_C(\uparrow n - 1) = o_C(\uparrow m) + o_C(\uparrow m - 1) > o_B(m) + o_B(m)\{i\} = o_B(n)\{i\}.$$

否则， $m = b - d$ 是 B-临界的。令 $d_j := d_j(m,\ i+1)$，其中 $j \leqslant i+1$。我们不对 m 应用归纳假设，而需要更强的条件，即 $o_C(d_{i+1} - d_i) \geqslant o_B(m)\{i\}$，这一点我们已在上文证明。根据引理 2.12(iv) 和 5.4(ii)，$\uparrow n = \uparrow m + 基_C(\uparrow(n-1)) = \uparrow m + d_{i+1}$。于是

$$o_C(\uparrow n - 1) = o_C(\uparrow m) + o_C(d_{i+1} - 1) > o_B(m) + o_B(m)\{i\} = o_B(n)\{i\}.$$

证明至此结束。 □

THEOREM 7.5. 定理 *4.12* 在Kripke–Platek集合论中不可证。

证明。考虑典范动力层级 $\mathcal{C}$，其中有 $C_0 = \{3\}$ 和 $C_{i+1} = (C_i)_{+(i+2)}$。由引理 5.3，$\mathcal{C}$ 中的每个基层级都是前一个基层级的良好后继。记 $\uparrow_i$ 为 $\uparrow_{C_i}^{C_{i+1}}$，并记 o_i 为 o_{C_i}。

设 $G\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $G(k)$ 是从 3_k 开始的、以 $\mathcal{C}$ 为参数的古德斯坦序列的终止时间。定理 4.12 蕴含 G 是 Kripke–Platek集合论上的全定义函数。我们证明 Kripke–Platek集合论不能证明它的全定义性，因此也不能证明定理 4.12。由定理 6.9，只需证明 G 不被 F_α 支配，其中 $\alpha = \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$。

对于 $i \leqslant G(k)$，设 $n_i = \mathbb{G}_i^{\mathcal{C}}(3_k)$。注意到 $o_0(n_0) = o_0(3_k) = \vartheta(\Omega_k) = \alpha\{k\}$。我们断言，若 $i \leqslant G(k)$，则 $\alpha\{k\}[\![i]\!] = o_0(n_0)[\![i]\!] \leqslant o_i(n_i)$。事实上，序列 $(o_i(n_i))_{i \leqslant I}$ 满足命题 6.10 的假设，因为

$$o_i(n_i) = o_{i+1}(\uparrow_i n_i) > o_{i+1}(\uparrow_i n_i - 1) \geqslant o_i(n_i)\{i+1\},$$

其中，第一个等式由命题 4.11 得出，第二个由命题 4.7 得出，第三个由命题 7.4 得出。

由此可知，只要 $n_i > 0$，就有 $\alpha\{k\}[\![i]\!] > 0$，因此 $G(k) \geqslant F_\alpha(k)$。 □

REMARK 7.6. 我们也可以设 $C_0 = \{2\}$、$C_{i+1} = (C_i)_{+(i+1)}$ 和 $n_0 = 2_k + 1$。于是，根据引理 *2.12*(iii)，$\uparrow n_0 - 1 = \uparrow(n_0 - 1)$。因此，$o_1(n_1) = o_0(n_0 - 1) = \vartheta(\Omega_k)$。现在我们可以重复前一个定理中的论证，把过程视为从 n_1 开始，而不是从n_0开始。

REMARK 7.7. 定理 *7.5* 的证明中出现的动力层级 $\mathcal{C}$ 包含无限多个基层级，除第一个之外皆是如此。正如 *[10]*, 所示，这一特征并非必要：利用引理 *2.6*，可以构造一个单一的动力层级 $\mathcal{D} = (D_i)_{i \in \mathbb{N}}$，它能够证明独立性，并且具有每个 D_i 都是有限的这一性质。

8. 相变

在本节中，设 B 是一个基层级。我们引入如下记号

$$\mathcal{I}(B) := \sup_{n \in \mathbb{N}} o_B(n).$$

注意，$\mathcal{I}(B) > \omega = o_B(最小\ B)$。我们将进一步探究 $\mathcal{I}(B)$与 B的结构之间的联系。

LEMMA 8.1. 以下两者等价。(i) $\mathcal{I}(B) = \omega^2$。
(ii) $S_B(b) = 2b$ 对每个 $b \in B$ 都成立。

证明。若（ii）成立，则我们可知 $o_B(b_k) = \omega \cdot 2^{k-1}$，其中 b_k 是 B 的第 k 个基。

另一方面，如果 (ii) 不成立，那么就存在一个 B临界元素 $2b$，它不是基。根据以下情况分类，$o_B(2b) \geqslant \omega^2$，因此 (i) 不成立。

Case 1 ($b =$ 最小 $B = 2$)。那么 $o_B(2b) = \vartheta(\Omega^\Omega)$.Case 2 ($b \neq$ 最小 $B = 2$)。那么 $o_B(2b) = \vartheta(\beta_B(2b) + \omega^\omega)$.

Case 3 (最小 $B > 2$)。那么 $o_B(2b) = \vartheta(\beta_B(2b))$，并且由于 $o_B(b) \geqslant \omega$，我们有 $\beta_B(2b) \geqslant 2$。

□

Lemma 8.2. 以下条件等价。(i) $\omega^2 < \mathcal{I}(B) \leqslant \omega^\omega$.(ii) $S_B(b) \leqslant 3b \leqslant b \cdot$最小 B 对每个 $b \in B$ 都成立，并且 $S_B(b) = 3b$ 对某个 $b \in B$ 成立。此外，$\mathcal{I}(B) = \omega^\omega$ 当且仅当存在无穷多个 $b \in B$ 满足 $S_B(b) = 3b$。

证明。假设 (ii) 成立。考虑满足 $S_B(b) = 3b$ 的最小 $b \in B$。则 $2b$ 是 B-临界的，并且 $(2b)_*$ 不存在。由引理 4.10，$o_B(2b) = \vartheta(2) = \omega^2$，因此 $\omega^2 < \mathcal{I}(B)$。现在我们对 n 使用归纳法，证明 $o_B(n) < \omega^\omega$，由此可得 $\mathcal{I}(B) \leqslant \omega^\omega$。我们假设 $n = 2b$ 不是基，因为其他情况显然成立。于是 $o_B(n) = \vartheta(\beta_B(n))$。由引理 4.10，$\beta_B(n)$ 要么是二，要么具有 $\zeta + 1$ 的形式，其中 $o_B(n_*) = \vartheta(\zeta) < \omega^\omega$ 由归纳假设成立。由引理 3.3(iii) 可知 $\zeta < \omega$，因此 $\beta_B(n) < \omega$ 且 $o_B(n) < \omega^\omega$。

要看出该命题的最后一个断言，注意如果 $S_B(b) = 3b$，那么 $(2b)_*$ 就是 $2d$ 中满足 $d \in B$ 和 $S_B(d) = 3d$ 的前一个元素。如果存在无穷多个这样的 $b \in B$ 满足 $S_B(b) = 3b$，那么 ζ 将持续递增，每次增加 1，而 $\mathcal{I}(B) = \sup_n(\vartheta(n)) = \omega^\omega$。反过来，如果存在某个$b \in B$，使得它的所有后继 $d \in B$（包括 b 它本身）都满足 $S_B(d) = 2d$，那么 $o_B(b) < \omega^\ell$，并且对于所有后继 $d \in B$，都有 $o_B(d) = o_B(b) \cdot 2^k < \omega^{\ell+1}$。

反过来，如果 (ii) 不成立，那么有以下三种情况。Case 1（$b \cdot \min B < S_B(b)$，其中某个 $b \in B$）。那么 $b \cdot \min B$是 B-临界的且不是基，我们考虑以下子情况。Case 1.1（$b = \min B = 2$）。那么 $o_B(b \cdot \min B) = \vartheta(\Omega^\Omega) > \omega^\omega$。Case 1.2（$b = \min B > 2$）。那么 $o_B(b \cdot \min B) = \vartheta(\Omega) > \omega^\omega$。Case 1。3 ($b >$min B)。那么 $o_B(b \cdot \min B) = \vartheta(\beta_B(b \cdot \min B) + \omega^\omega) > \omega^\omega$。Case 2（$3b < S_B(b) \leqslant b \cdot \min B$，其中某个 $b \in B$）。那么 $3b$ 是 B-临界的且不是基，并且$o_B(3b) = \vartheta(\beta_B(3b) + \omega) \geqslant \omega^\omega$。Case 3（对于每个 $b \in B$，都有 $S_B(b) = 2b$）。根据引理 8.1，$\mathcal{I}(B) = \omega^2$。无论哪种情况，我们都能看出 (i) 不成立。

□

Theorem 8.3. 设给定了 $k \geqslant 0$。RCA_0 证明如下结论。设 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个动力层级。假设 B_0 满足：对每个 $b \in B_0$，都有 $S_{B_0}(b) \leqslant \min(3b, b \cdot \min B_0)$，并且对于无穷多个 $b \in B_0$，$S_{B_0}(b) = 3b$ 成立。那么对每个 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0$。

证明。首先，我们固定一个二阶算术的 Δ^0_0-公式 $\mathrm{Hist}(B, C, s, n)$，用来表达 s 是截至 n、连同算子 $\langle {}^{c}_{b} \rangle$一起对升级进行的（编码）计算，其中$b \leqslant$ 基为 $_B(n)$，而 c 取值范围截至 $\uparrow n$的见证。若上下文明确，参数 B, C 将省略。更确切地说，s 应包含：

(i) $m \leqslant n$对应的值 $\uparrow m$，若 $m \geqslant \min B$，还包括其见证。

（ii） $m \leqslant n$、$b \leqslant$基$_B(n)$和 $c \leqslant$基$_C(\uparrow n)$的值为 $\langle {}^{c}_{b} \rangle m$。

所有数据都可以通过 s 原始递归得到。特别地，我们将用 s_n表示 $\uparrow n$ 在 s中的值。于是，升级的定义如下。

$$\uparrow n = m \iff \exists s(\mathrm{Hist}(s, n) \wedge s_n = m)$$

此外，升级的全定义性可由 Π^0_2公式 $\forall n \exists s \mathrm{Hist}(s,\ n)$表达。我们用这个公式将“$C$ 是 B的良好后继”形式化，而这又用于将“$(B_i)_i$ 是一个动力层级”形式化。陈述中关于 B_0 的假设也很容易形式化。

现在我们要论证，在 [**10**],中证明的升级算子的所有性质，都可以在 RCA$_0$中证明。我们只考虑证明终止性所需的性质，并为方便起见，在每个陈述中都加入良好后继假设，从而使 $\uparrow$成为全函数。除归纳法外，这些证明只用到逻辑规则。因此，只需检查我们对其应用归纳法的每个公式至多属于 Σ^0_1。例如，要证明升级的单调性，我们对以下 Δ^0_0公式应用归纳法

$$\mathrm{Hist(s, n)} \to (\forall m < n : s_m < s_n).$$

现在可以验证，每次需要归纳法时，我们都能使用同样的技巧。我们证明引理 2.4 的所有其他条目，以及引理2.10、2.11和2.14。引理 2.12 的条目 (i) 不需要归纳法。对于条目 (ii)，当 $c \leqslant$ 基$_C(\uparrow(ba + r))$时，先对 a应用归纳法，证明等式 $\langle {}^{c}_{b}\rangle(ba + r) = \langle {}^{c}_{b}\rangle ba + \uparrow r$。我们还可以用 Hist 将这个等式再次表示为一个 Δ^0_0公式。之后再证明 (ii)。此外，(iii) 很容易由 (ii) 推出。最后，(iv) 不需要归纳法，但会用到我们刚才讨论过的引理。

为了能够在 RCA$_0$, 中处理小于 $\vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$ 的序数，我们使用 [**7**]中给出的记号系统。具体而言，表示序数的项由常数 0 以及函数$x \mapsto \vartheta(x)$、 $(x, y) \mapsto x + y$ 和 $(x, y) \mapsto \Omega^x y$构成。 [**7**] 证明了该系统是完备的，即对每个 $\xi < \vartheta[\varepsilon_{\Omega+1}]$，都存在一个表示 ξ的项。于是，我们可以通过对项进行递归，同时定义以下原始递归函数和关系：
(1) $x \mapsto \bar{x}$，即 x的范式。 $\bar{x}$ 的每个子项都应处于 Ω-正规形。(2) $x \prec y$，表示 x 的序数小于 y的序数。(3) $x \mapsto x^*$，即 x的最大系数。

例如， $\vartheta(x) \prec \vartheta(y)$ ，当 $x \prec y$ 和 $x^* \prec \vartheta(y)$均成立，或 $y^* \succcurlyeq x$成立时。判定 $y^* = x$归结为将 y^* 和 x 化为范式，并检查这些项是否相同。再举一例，要将 $x + y$ 化为范式，将 $\bar{x} = x_1 + \cdots + x_m$ 和 $\bar{y} = y_1 + \cdots + y_n$写成 x_i, y_i 加法不可分解的形式，并输出 $x_1 + \cdots + x_k + y_1 + \cdots + y_n$，其中 k 是满足 $x_k \succcurlyeq y_1$的最大值。
此外，我们还有以下原始递归函数和关系。
(1) Term(x)，表示 x 是某个序数的编码。(2) SubTerm$(x,$ $y)$，表示 x 是 y 的子项。(3) $|x|$，项 x 的大小。

接着，我们在 RCA$_0$ 中通过对 $|x| + |y|$ 归纳证明：当 x 是 y 的子项时， $x^* \prec \vartheta(y)$ 。特别地，引理 3.3 的 (ii) 项可在 RCA$_0$ 中推出。引理 3.3 的其他项以及命题 3.2 均可由此和 $\prec$ 的定义推出（但不包括 ϑ 的满射性，因为终止性证明不需要它）。

现在我们着手在 RCA$_0$ 中定义序数赋值。定义 4.1 中的函数 O^b_f 可以通过对 f 和 b 进行原始递归来定义。因此，它有一个以 f 和 b 为参数的 Δ^0_0 定义。引理 4.2 和 4.3 通过对 [**10**], 进行归纳证明，因此在 RCA$_0$ 中成立。

注意，在我们的记号系统中，我们可以通过检查 $\bar{x}$ 是否具有 $\vartheta(y) + \vartheta(0) + \cdots + \vartheta(0)$（对于 $y \succcurlyeq \Omega$）的形式，引入原始递归函数$x \mapsto \omega^x$（引理 3.4）。随后，对于每个 n，我们可以通过关于 B的原始递归计算（ $o_B(n)$ 的代码）。事实上，我们可以根据引理 4.10 推导出 $\beta_B(n)$ 的值。因此，我们固定一个 Δ^0_0-公式 Trace$(B,\ w,\ n)$，该公式表达了 w 是一个包含

(i) $m \leqslant n$的值为 $o_B(m)$ 。（ii） $m \leqslant n$ 的值以及 $b \leqslant$ 基$_B(n)$的值为 $O^b_B(m)$ 。（iii） $m \leqslant n$ 的值以及 $b \leqslant$ 基$_B(n)$的值为 $\alpha^b_B(m)$ 。

换句话说，Trace 是 Hist 的类似物，但用于验证序数赋值的计算。现在，Lemma 4.5、Proposition 4.7、Lemmas 4.8 to 4.10 以及 Proposition 4.11 的证明，均通过在需要归纳法时使用公式 Trace，在 RCA_0，中形式化完成。我们还涵盖了这些证明中所使用的 $\uparrow$ 和 ϑ 的全部性质。

我们可以再次在 RCA_0，中证明引理 8.1 和引理 8.2，因为证明只需要对 Σ^0_1-公式进行归纳。根据陈述中给出的 B_0 条件，RCA_0 证明了对于每个 n，都有 $o_{B_0}(n) < \omega^{k+3}$。

最后，我们在 RCA_0 中证明陈述 $\forall n \exists i(\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0)$。任取 n。对于函数 $i \mapsto \mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n)$，我们使用一个 Σ^0_1-定义，其中用到了前面所述的升级定义。我们定义映射 f，它将 $i \in \mathbb{N}$ 映射到 $o_i(\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n))$（的编码）。那么，对于所有 i，f 也有一个 Σ^0_1-定义，其中用到了 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n)$ 和 o_{B_i} 的定义。特别要注意，f 的定义以序列 $(B_i)_i$ 为参数。根据命题 4.7 和 4.11，只要 i 满足 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) \neq 0$，$\mathsf{RCA}_0$ 就能证明 $f(i+1) < f(i)$。

现在考虑公式 $\varphi(\alpha) \equiv \exists i(f(i) \leqslant \alpha)$，它含有参数 α 和 $(B_i)_{i\in}$。只需找到一个编码的序数 α，使其相对于 $\leqslant$ 最小。于是，对于某个 i，有 $\alpha = f(i)$，并且 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0$，因为否则 $f(i+1) < f(i)$。为此，我们对 Π^0_1-公式 $\psi \equiv \neg\varphi$ [**16**] 使用超限归纳原理。也就是说，对于每个 $\gamma < \omega^\omega$,

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall\alpha((\forall\beta < \alpha\ \psi(\beta)) \to \psi(\alpha)) \to \forall\alpha < \gamma\ \psi(\alpha).$$

如果取 $\gamma = \omega^{k+1} + 1$，那么 RCA_0 就能证明结论的否定，从而证明前提的否定，即存在一个最小的 α，使得 $\varphi(\alpha)$。 □

相反，通过重复定理 7.5 的证明，我们得到以下结论 .

THEOREM 8.4. 设 B_0 是任意一个不满足上一条定理所述条件的基层级。对每个 i，定义 $B_{i+1} = (B_i)_{+(i+1)}$。那么 RCA_0 无法证明：对于所有 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0$。

证明。设 $\alpha = \omega^\omega$。根据引理 8.1 和引理 8.2，我们知道 $\mathcal{I}(B_0) \geqslant \alpha$。于是，对每个 k，我们都可以找到 $n_k \in \mathbb{N}$ 使得 $o_0(n_k) \geqslant \alpha\{k\}$。我们将 $G(k)$ 定义为从 n_k开始的古德斯坦序列的终止时间。根据定理 6.9，只需证明 G不被 F_α支配。现在，我们可以重复定理 7.5 的论证，并使用注 7.6 中说明的技巧。 □

我们还可以用以下方式证明，RCA_0 不能证明定理 8.3 的陈述（其中量化范围为 k）。考虑如下函数 $G\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。给定 k，我们考虑满足以下条件的某个基层级 $B_{0,\ k}$

(1) $S_{B_{0,\ k}}(b) \leqslant 3b \leqslant b \cdot \min B_{0,\ k}$ 对每个 $b \in B_{0,\ k}$。
(2) $S_{B_{0,k}}(b) = 3b$ 对于 k 许多 $b \in B_{0,k}$.

对每个 i，令 $B_{i+1,\ k} = (B_{i,\ k})_{+(i+1)}$。我们取某个 n，使得 $o_{B_{0,\ k}}(n) > \omega^k$，并令 $G(k)$等于 n处 Goodstein 序列的终止时间。如果皮亚诺算术$_0$ 能够对 k一致地证明定理 8.3 的陈述，那么它尤其能够证明G的全定义性。但对所有 k，$G(k) \geqslant F_\alpha(k)$，其中 $\alpha = \omega^\omega$。

LEMMA 8.5. 以下各项等价。(i) $\omega^\omega < \mathcal{I}(B) < \omega^{\omega^\omega}$。(ii) $S_B(b) \leqslant b \cdot$最小值B对每个 $b \in B$，以及 $S_B(b) > 3b$ 对某个 $b \in B$。

证明。若（ii）成立，考虑某个 b $3b < S_B(b) \leqslant b \cdot$ B $o_B(3b) =$，使得 min 。于是，所以。$\vartheta(\beta_B(3b)+\omega) \geqslant \omega^{\omega}$ $\omega^{\omega} < \mathcal{I}(B)$ n $o_B(n) < \omega^{\omega^{\min B}}$ 我们对 作归纳法，证明。假设$n \notin B$ 是 B-临界的，其他情形显然。于是 n 具有 bv 的形式，其中 $v < \min B$，且 $o_B(n) = \vartheta(\beta_B(n) + \omega^{o_B(v-2)}) \leqslant \vartheta(\beta_B(n) + \omega^{\min B - 2})$。应用引理 4.10，并在必要时对 n_*使用归纳假设，得到 $\beta_B(n) < \omega^{\min B}$。由此可得 $o_B(n) < \omega^{\omega^{\min B}}$。

若 (ii) 不成立，则要么对每个 $b \in B$， $S_B(b) \leqslant b \cdot \min B$ and $S_B(b) \leqslant 3b$，此时前两个引理表明 (i) 不成立；要么对某个 $b \in B$， $S_B(b) > b \cdot \min B$。后一种情况下，我们有 $b \cdot \min B$ 是 B-临界的，且自身不是一个基。按照引理 8.2 第一种情形中的相同分类讨论，可以看出 $o_B(b \cdot \min B) \geqslant \omega^{\omega^{\omega}}$。 □

重复定理 8.3 和定理 8.4 的证明，可得到以下结果。

THEOREM 8.6. 给定 $k \geqslant 2$。$\mathsf{RCA}_0 + (\Sigma^0_2) - \mathrm{IND}$ 证明以下结论。设任意一个动力层级为 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$。假设 B_0 满足对每个$b \in B_0$， $S_{B_0}(b) \leqslant b \cdot \min B_0$，且 $\min B_0 \leqslant k$。那么对每个 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0$。$\mathsf{RCA}_0 + (\Sigma^0_2)$ –IND 不能证明这个对 k 量化的陈述。

THEOREM 8.7. 令 B_0 为任意一个不满足定理 *8.6* 所述条件的基层级。对每个 i定义 $B_{i+1} = (B_i)_{+(i+1)}$。那么，$\mathsf{RCA}_0 + (\Sigma^0_2) - \mathrm{IND}$ 不能证明：对所有 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(n) = 0$。

LEMMA 8.8. 对于 $n > 0$，以下条件等价。

(i) $\omega_{2n+1} < \mathcal{I}(B) < \omega_{2n+3}$。*(ii) </style}*对每个 $b \in B$， $S_B(b) \leqslant b^2$，并且存在一条最大长度为 n 的基的链 $b_0 < \cdots < b_n$，使得 $S_B(b_i) > b_i \cdots b_0$ 对 $0 \leqslant i \leqslant n$ 成立。

证明。 首先，我们说明，若 (ii) 成立，则以下贪心算法将给出一条满足 (ii) 条件的最大长度基的链：

令 $d_0 =$ 最小值 B，并对 $i > 0$ 递归地定义 $d_i \in B$ 为大于d_{i-1}且满足 $S_B(d_i) > d_i \cdots d_0$的最小基，若这样的 d_i 存在。

事实上，设 $b_0 < \cdots < b_n$ 是由 (ii) 给出的链。然后我们通过对 i 作归纳法可知， $d_i \leqslant b_i$，因为 d_i 被选为最小值，因此若 b_{i+1} 存在，则 d_{i+1}也存在。所以 d_i 对$i \leqslant n$有定义；而根据 n的极大性， d_{n+1} 不存在。

现在设 $d_0 < d_1 < \cdots$由我们的算法定义。我们将通过对 $m \geqslant d_0$作归纳法证明以下结论：

若 $d_i \cdots d_0 \leqslant m < d_{i+1} \cdots d_0$，则

$$\omega_{2i+1} \leqslant o_B(m) < \vartheta(\omega^{o_B(d_i \cdots d_0 - 1)} \cdot \omega) < \omega_{2i+2}(\min B).$$

这里 $\omega_k(\ell)$ 表示由 k 个 ω构成的塔，并在 ℓ 的幂上加上一个 上界 ω。

若 d_{n+1} 未定义，则上述不等式对所有 $m \geqslant d_n \cdots d_0$ 都成立。

那么，若 (ii) 成立，我们不妨假设对所有 i 都有 $b_i = d_i$，而 (i) 则由上述命题的最后一行推出。

基例 $m = d_0 = \min B$，以及 m 为基或非-B-临界元素的情形，都是显然的。考虑 $m = d_{i+1} \cdots d_0$的情形。于是

$$o_B(m) = \vartheta(\beta_B(m) + \omega^{o_B(d_i \cdots d_0)}).$$

根据引理 4.10，$\beta_B(m)$ 要么为二，要么为 $\zeta+1$，其中 $o_B(m_*)=\vartheta(\zeta)$。对 m_*应用归纳假设（如有必要）后，我们得到

$$\beta_B(m)<\omega^{o_B(d_i\cdots d_0-1)}\cdot\omega\leqslant\omega^{o_B(d_i\cdots d_0)}.$$

因此 $o_B(m)=\vartheta(\omega^{o_B(d_i\cdots d_0)})$，结合归纳假设和 $o_B(d_i\cdots d_0)<o_B(d_{i+1}\cdots d_0-1)$，即可得出该结论。

现在假设 $m\notin B$是 B-临界的，$d_i\cdots d_0<m$，并且在 d_{i+1}存在的情况下，$m<d_{i+1}\cdots d_0$。将归纳假设应用于 $d_i\cdots d_0$，即可得出结论中的下界。对于上界，注意到与之前一样，$\beta_B(m)<\omega^{o_B(d_i\cdots d_0-1)}\cdot\omega$。

设 $m=dv$，其 $d=$基为$_B(m)$，且 $v<d$。于是 $o_B(m)=\vartheta(\beta_B(m)+\omega^{o_B(\tilde{v})})$，其中 $\tilde{v}$要么是 v，要么是 $v-2$。要证明 $o_B(m)<\vartheta(\omega^{o_B(d_i\cdots d_0-1)}\cdot\omega)$，只需证明 $\tilde{v}\leqslant d_i\cdots d_0-1$。注意，$d_i\leqslant d$，且如果 d_{i+1} 存在，则 $d\leqslant d_{i+1}$。我们分几种情况讨论。

Case 1 $(d=d_i)$。于是 $\tilde{v}\leqslant v<d=d_i\leqslant d_i\cdots d_0$，因此 $\tilde{v}\leqslant d_i\cdots d_0-1$。

Case 2 $(d_i<d<d_{i+1})$。根据 d_{i+1}的定义，$m<S_B(d)\leqslant d\cdot d_i\cdots d_0$，因此 $v<d_i\cdots d_0$且 $\tilde{v}\leqslant v\leqslant d_i\cdots d_0-1$。

Case 3 $(d=d_{i+1})$。由 $m<d_{i+1}\cdots d_0$我们得到 $v<d_i\cdots d_0$，因此 $\tilde{v}\leqslant v\leqslant d_i\cdots d_0-1$.

现在讨论逆向蕴含，假设 (ii) 不成立。

Case 1（对某个 $b\in B$，$S_B(b)>b^2$）。于是我们有一个 B-临界元素 $b^2\notin B$，通过简单的分类讨论可以验证 $o_B(b^2)\geqslant\vartheta(\Omega)>\omega_{2n+3}$。在接下来的情形中，我们假设对所有 $b\in B$，$S_B(b)\leqslant b^2$。我们将证明开头给出基 d_i 的算法称为贪心算法。

Case 2（贪心算法给出一条有限链 $d_0<\cdots<d_m$，满足 $0<m\neq n$）。那么根据我们的断言，(i) 对 m成立，而非 n。

Case 3（贪心算法给出一个无限链 $d_0<d_1<\cdots$）。于是根据我们的断言，$\mathcal{I}(B)=\varepsilon_0$，特别是 (i) 不成立。

Case 4（贪心算法给出 d_0）。由于 d_1 不存在，对于所有 $b\in B$，我们都有 $S_B(b)\leqslant b\cdot b_0=b\cdot\min B$。根据前面三个引理，$\mathcal{I}(B)<\omega_3\leqslant\omega_{2n+1}$。

□

Theorem 8.9. 设 $n>0$ 和 $k\geqslant 2$ 已给定。$\mathsf{RCA}_0+(\Sigma^0_{2n+2})-\mathrm{IND}$ 证明如下结论。设 $\mathcal{B}=(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个动力层级。假设 B_0 满足

- $S_{B_0}(b)\leqslant b^2$ 对每个 $b\in B_0$都成立。
- 不存在满足 $S_{B_0}(b_i)>b_i\cdots b_0$ 的基的链 $b_0<\cdots<b_{n+1}$，其中 $0\leqslant i\leqslant n+1$。
- $\min B_6\leqslant k$。

那么，对于每个 m，都存在某个 i，使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(m)=0$。$\mathsf{RCA}_0+(\Sigma^0_{2n+1})-\mathrm{IND}$ 无法证明这个对 k 量化的陈述。

Theorem 8.10. 设 $n>0$，并令 B_0 为任意一个不满足定理 8.9 中所述条件的基层级。定义对 $B_{i+1}=(B_i)_{+(i+1)}$ 每个 i。那么 $\mathsf{RCA}_0+(\Sigma^0_{2n+2})-\mathrm{IND}$ 无法证明：对于所有 m，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}^{\mathcal{B}}_i(m)=0$。

Lemma 8.11. 以下命题等价。(i) $\mathcal{I}(B)<\varepsilon_0$。(ii) $S_B(b)\leqslant\min(b^2,bc)$ 对于每个 $b\in B$，其中 $c\geqslant 2$ 独立于 b。

证明。若 (ii) 成立，则每条满足 $S_B(b_i)>b_i\cdots b_0$ 的基的链 $b_0<b_1<\cdots$ 的长度必然小于某个有限数 n_c（可以取 $n_c=\log_2(c)+1$）。根据前述引理，(i) 成立。

另一方面，如果 (ii) 不成立，那么我们有两种情况。

Case 1 （$S_B(b) > b^2$ 对某个 $b \in B$成立）。在这种情况下， $o_B(b^2) \geqslant \vartheta(\Omega) = \varepsilon_{0\circ}$ Case 2 （$S_B(b) \leqslant b^2$ 对每个 $b \in B$都成立，但对每个常数 c，都存在一个 b 使得 $S_B(b) > bc$）。于是，我们很容易构造出一个满足 $S_B(b_i) > b_i \cdots b_0$ 对所有 i 都成立的无限链 $b_0 < b_1 < \cdots$；根据前述引理证明中的断言，我们得到 $\mathcal{I}(B) = \varepsilon_{0\circ}$

□

Theorem 8.12. 给定 $c \geqslant 2$ 。则 ACA_0 证明如下结论。设 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个动力层级。假设 B_0 满足：对于每个 $b \in B_0$，都有 $S_{B_0}(b) \leqslant$ 最小值(b^2, bc) 。那么对于每个 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) = 0$。$\mathsf{ACA}_0$ 无法证明这个对 c量化的陈述。

Theorem 8.13. 设 B_0 是任意一个不满足定理 *8.12* 所述条件的基层级。对每个 i，定义 $B_{i+1} = (B_i)_{+(i+1)}$ 。那么 ACA_0 无法证明：对于所有 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) = 0$。

Lemma 8.14. 以下命题等价。

(i) $\mathcal{I}(B) < \Gamma_{0\circ}$ (ii) 以下条件之一成立：– 最小值 $B = 2$ 且对于每个 $b \in B$，$S_B(b) \leqslant b^2$ 。– 最小值 $B > 2$ 且 $S_B(b) \leqslant$ 最小值(b^3, b^2c)，对于每个 $b \in B$，其中 $c \geqslant 2$ 独立于 b。

证明。 假设 (ii) 成立。在 $\min B = 2$ 的情形下，根据我们在引理 8.8 中证明的断言，有 $\mathcal{I}(B) \leqslant \varepsilon_0 < \Gamma_0$ 。进一步假设 (ii) 的第二项成立。注意，对于所有$n \in \mathbb{N}$，要么 $\alpha_B(n) = 0$，要么 $\alpha_B(n) =\Omega$。因此，我们可以归纳地使用引理 4.8，得到 $o_B(n) < \vartheta(\Omega \cdot o_B(c))$，以及 $o_B(n) < \Gamma_{0\circ}$ 然后利用 $o_B(c) < \Gamma_0$ 和命题 3.2，$\mathcal{I}(B) \leqslant \vartheta(\Omega \cdot o_B(c)) < \vartheta(\Omega^2) = \Gamma_{0\circ}$

反过来，假设 (ii) 不成立。

Case 1 ($\min B = 2$)。那么存在一个 B-临界元素 b^2，满足 $o_B(b^2) \geqslant \vartheta(\Omega^\omega) > \Gamma_{0\circ}$

Case 2 （最小 $B > 2$).

Case 2.1 （$S_B(b) > b^3$ 对于某个 $b \in B$）。那么 $o_B(b^3) \geqslant \vartheta(\Omega^3) > \Gamma_{0\circ}$

Case 2.2 （$S_B(b) \leqslant b^3$ 对于每个 $b \in B$）。那么，对于给定的每个 c，我们都能找到 $b \in B$，使得$S_B(b) > b^2c$。因此，我们可以构造一条无限基链 $b_0 < b_1 < \cdots$，使得 $b_0 = \min B$，并且对于 $i > 0$，b_i 是满足 $S_B(b_i) > b_i^2 \cdots b_0^2$且大于 b_{i-1} 的最小基。现在很容易通过归纳法证明，对于每个 i，都有 $o_B(b_i^2 \cdots b_0^2) \geqslant \Gamma_0\{i\}$。事实上，$\Gamma_0\{0\} = \vartheta^*(\Omega^2) = 0 \leqslant o_B(b_0^2)$，并且

$$\Gamma_0\{i+1\} = \vartheta(\Omega^2[\Gamma_0\{i\}]) = \vartheta(\Omega \cdot \Gamma_0\{i\}) \leqslant \vartheta(\Omega \cdot o_B(b_i^2 \cdots b_0^2)) \leqslant o_B(b_{i+1}^2 \cdots b_0^2).$$

由于 $\sup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_0\{i\} = \Gamma_0$，我们得到 $\mathcal{I}(B) \geqslant \Gamma_{0\circ}$ 事实上，很容易看出，在这种情况下 $\mathcal{I}(B) = \Gamma_0$。尽管如此，(i) 并不成立。

□

Theorem 8.15. 设 $c \geqslant 2$ 已给定。那么 ATR_0 证明如下结论。设 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个动力层级。假设 B_0 满足以下条件之一：

– $\min B_0 = 2$ 和 $S_{B_0}(b) \leqslant b^2$ 对于无穷多个 $b \in B_0$

– $\min B_0 > 2$ 且 $S_{B_0}(b) \leqslant \min(b^3,$ 对于每个 $b \in B_0$ 都成立。

那么，对于每个 n，都存在某个 i，使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) = 0$。$\mathsf{ATR}_0$ 无法证明这个对 c进行全称量化的陈述。

THEOREM 8.16. 令 B_0 为任意一个不满足定理 *8.15* 所述条件的基层级。对每个 i，定义 $B_{i+1} = (B_i)_{+(i+1)}$ 。那么，ATR_0 无法证明：对于所有 n，都存在某个 i，使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) = 0$。

LEMMA 8.17. 对于 $n \geqslant 2$，以下命题等价。(i)
$\mathcal{I}(B) \leqslant \vartheta(\Omega_n)$。*(ii) </style}*对于每个 $b \in B$，$S_B(b) \leqslant b_n$ 。

证明。 </style}若 (ii) 成立，则对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$\alpha_B(m) < \Omega_n$。利用引理 4.8 归纳可得，$o_B(m) < \vartheta(\Omega_n)$ 对每个 $m \in \mathbb{N}$均成立。
另一方面，若 (ii) 不成立，则可找到一个 B-临界元素 b_n，使得 $\alpha_B(b_n) =\Omega_n$，因此 $o_B(b_n) \geqslant \vartheta(\Omega_n)$。 □

THEOREM 8.18. 若 $n \geqslant 2$，则 Kripke–Platek集合论$^-\omega + (\Pi_n) - IND$ *</style}*证明如下命题。设 $\mathcal{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$为任意动力层级。假设 B_0 满足：对每个 $b \in B_0$，$S_{B_0}(b) \leqslant b_n$ 。则对于每个 m，存在某个 i 使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(m) = 0$。

THEOREM 8.19. 令 $n \geqslant 2$，并设 B_0 为任意一个不满足定理 *8.18* 所述条件的基层级。对每个 i定义 $B_{i+1} = (B_i)_{+(i+1)}$ 。那么，克里普克–普拉特克集合论$^-\omega + (\Pi_n) - \mathrm{IND}$ 不能证明：对所有 n，都存在某个 i 使得 $\mathbb{G}_i^{\mathcal{B}}(n) = 0$。

9. 总结

我们确定了分形古德斯坦过程的精确序数解释，并以此为介，在 RCA_0 与克里普克–普拉特克集合论之间的理论中建立了若干独立性结果。特别是，在使用衔尾蛇后继时，我们发现，动力系统中第一个基层级的结构决定了分形古德斯坦过程终止性的证明论强度。第一个基层级中的基间距越大，通常终止所需的时间就越长。

除了改变第一个基层级外，我们还可以通过使用不同于衔尾蛇后继的另一类后继序数，为中间理论获得独立性结果。为此，需要采用一种不同的序数赋值，使其更适合所考虑的特定后继序数。从某种意义上说，衔尾蛇后继甚至比例 2.9 中使用的贪心后继更加稠密。第一步可以研究更稀疏的后继序数所对应的序数赋值，例如例 2.9 中的极简后继。

在 [**10**], 中，也探讨了将分形古德斯坦过程与阿克曼函数结合的问题。我们认为，这种方法会导向一个证明论强度更高的原理。

参考文献

1. T. Arai、D. Fern´andez-Duque、S. Wainer 和 A. Weiermann。阿克曼型古德斯坦原理的不可由预测主义证明的终止性。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，2019年。已接受发表。**2.** T. Arai、S. Wainer 和 A. Weiermann。基于参数化阿克曼–彼得函数的古德斯坦序列。 *Bull. Symb. Log.*，27(2):168–186，2021年。**3.** J. Barwise。*Admissible sets and structures: An approach to definability theory*。数理逻辑视角。施普林格出版社，柏林、纽约，1975年。**4.** W. Buchholz。序数记号与基本序列，2003年。手稿。

5. E.A. Cichon、W. Buchholz 和 A. Weiermann。基本序列与层级的统一方法。 *Mathematical Logic Quarterly*，40:273–286，1994年。**6.** D. Fern´andez-Duque 和 A. Weiermann。中间增长的阿克曼型古德斯坦序列。载于 Marcella Anselmo、Gianluca Della Vedova、Florin Manea 和 Arno Pauly 编， *Beyond the Horizon of Computability - 16th Conference on Computability in Europe CiE 2020 Fisciano Italy June 29 - July ,,,,,,* 第 卷，第 – 页。施普林格，。**7.** D. Fern´andez-Duque 和 A. Weiermann。中间增长的阿克曼型古德斯坦序列。载于 *Computability in Europe*，2020年。**8.** D. Fern´andez-Duque 和 A. Weiermann。巴赫曼–霍华德序数的基本序列与快速增长层级。 *Ann. Pure Appl. Log.*，175(8):103455，2024年。**9.** D. Fern´andez-Duque 和 A. Weiermann。与古德斯坦同行。 *Bull. Symb. Log.*，30(1):1–19，2024年。**10.** David Fern´andez-Duque 和 Andreas Weiermann。分形古德斯坦原理。 *arXiv preprint arXiv:2508.14768*，2025。**11.** David Fern´andez-Duque 和 Andreas Weiermann。快速古德斯坦游走。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 57 2 510 533, 2025，( ): – 。**12.** R.L. Goodstein。论受限序数定理。 *Journal of Symbolic Logic*，9(2):33–41，1944年。**13.** R.L. Goodstein。递归数论中的超限序数。 *Journal of Symbolic Logic* 12 4 123 129, ，( ): – 。**14.** L. Kirby 和 J. Paris。关于皮亚诺算术的可及独立性结果。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 14 4 285 293, 1982，( ): – 。**15.** M. Rathjen。克里普ke–普拉特克集合论的片段。载于 P. Aczel、S. Wainer 和 H. Simmons 编，*Proof Theory*，第251–273页。剑桥大学出版社，1992年。**16.** Richard Sommer。皮亚诺算术中的超限归纳。 *Annals of pure and applied logic*，76 3 231( ): –289，1995年。

根特大学数学系 *WE16* 根特，比利时

Milan.Morreel@UGent.be
Andreas.Weiermann@UGent.be

巴塞罗那大学哲学系 巴塞罗那，西班牙

fernandez-duque@ub.edu