arXiv:2603.20158v1 [math.QA] 20 Mar 2026

具有两个特征值的酉 R 矩阵的分类问题

Gandalf Lechner*

2026年3月23日

摘要

本文探讨如何对任意有限维、恰有两个不同特征值的所有酉 R 矩阵进行分类，并考虑由其辫群表示的特征给出的自然等价关系。除一个可能存在也可能不存在于大于二的偶数维情形中的类别外，本文得到了完整的分类定理。

1 引言

（量子）Yang-Baxter 方程（YBE）是关于线性映射 $R\colon V\otimes V\to V\otimes V$的代数非线性方程，该映射作用于向量空间 V 的张量平方上，即

$$(R\otimes 1)(1\otimes R)(R\otimes 1)=(1\otimes R)(R\otimes 1)(1\otimes R) \tag{1.1}$$

它是 End($V\otimes V\otimes V$) 中的一个方程，其中 1 表示恒等映射$_V$。这个方程在数学和数理物理的众多不同领域中都发挥着作用，例如辫群表示 [Jon87], 纽结理论 [Tur 88], 子因子 [Wen90],量子群 [CP94], 霍普夫代数 [AG03], 统计力学 [Bax82], 量子场论 [AAR01], 以及量子计算 [RW17]。它还有若干有趣的变体，例如经典杨–巴克斯特方程 [BK12] 或集合论 Yang-Baxter 方程 [CV26]。

YBE 如此广泛地出现，自然让人对理解方程（1.1）的解产生了浓厚兴趣，并促使研究者采用各种不同的工具，从代数和范畴方法、组合学到算子代数方法。直接求解的朴素尝试会遇到一个问题：（1.1）相当于一个包含 (维数 V)^6 个三次方程、涉及 (维数V)^4 个变量的方程组，即使 维数$V>2$很低，也难以处理。从更一般的角度来看，YBE 解集的结构——无论是对固定的 V 还是对一类向量空间而言——在很大程度上仍不为人所知。

因此，人们通常会将注意力限制在解的子族上，例如二维的解 [Hie92], 表示 Temperley-Lieb 代数的解[Byt15], 荷守恒解 [HMR24], 集合论解 [CV26], 或酉对合的解 [LPW19]。

*数学系，埃尔朗根-纽伦堡大学，Cauerstr. 11，91058 Erlangen。gandalf.lechner@fau.de

受量子物理中的应用启发 [RW12; AL17; RW17; CL23], , 本文聚焦于酉解：我们要求 $V \cong \mathbb{C}^d$ 是有限维希尔伯特空间，且 R： $V \otimes V \to V \otimes V$ 关于 $V \otimes V$ 上的标准内积是酉的，即我们可以将 $R \in \mathsf{End}(V \otimes V) \cong M_{d^2}$ 视为酉 $(d^2 \times d^2)$ 矩阵，其中我们使用标准同构 $M_d \otimes M_d \cong M_{d^2}$，而 M_d 表示复数 $(d \times d)$ 矩阵的 * 代数。这类 (1.1) 的解称为酉 R 矩阵，我们将 $\mathcal{R}(V)$ 记作基空间为 V 的所有酉矩阵的集合，并将 $\mathcal{R} = \bigcup_V \mathcal{R}(V)$ 记作遍历所有有限维希尔伯特空间 V 所得的并集。我们将 $d := \dim V$ 称为 R 的维数（尽管 R 是 $\mathbb{C}^{d^2}$ 上的算子），并写作 $\dim R := \dim V$。

对一般的 V， $\mathcal{R}(V)$ 的分类尚遥不可及。因此，我们将识别那些就其所对应的辫群表示而言相同的 R 矩阵。为定义这一等价关系，我们采用标准记号

$$R_k := 1^{\otimes(k-1)} \otimes R \otimes 1^{\otimes(n-k-1)} \in \mathrm{End}(V^{\otimes n}), \qquad 1 \le k \le n-1, \tag{1.2}$$

（张量因子的总数 n 可从上下文中明确）。若 R 可逆，我们便得到辫群 B_n、$n \in \mathbb{N}$ 的表示：回顾一下， B_n 由 $n-1$ 个生成元 b_1、……、b_{n-1} 及以下关系给出

$$\begin{aligned} b_k b_l &= b_l b_k, && |k-l| > 1, \\ b_k b_l b_k &= b_l b_k b_l, && |k-l| = 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

容易验证映射

$$\rho_R^{(n)} : B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n}), \qquad b_k \mapsto R_k,$$

唯一地扩张为 $V^{\otimes n}$ 上的 B_n-表示。若 R 是酉的（即 $R \in \mathcal{R}(V)$），则此表示显然也是酉的。

定义 1.1. 两个酉 R 矩阵 R， $S \in \mathcal{R}$ 称为等价，记作 $R \sim S$，若对每个 $n \in \mathbb{N}$，表示 $\rho_R^{(n)} \cong \rho_S^{(n)}$ 都酉等价。

这个定义着重于 R 矩阵的辫群表示方面。去掉酉性假设后，它对可逆 R 矩阵（包括作用于无限维空间上的 R 矩阵）也有意义，因此我们提及 [AG03；AL17；LPW19] 其中有一些文献中的相关例子。

注意，维数 R是一个不变量（即 $R \sim S \Rightarrow$维数 $R =$维数 S），而 R 的谱$\sigma(R)$（包括重数）也是一个不变量。这可通过考察两个等价 R 矩阵 $R \sim S$的酉等价关系 $\rho_R^{(1)} \cong \rho_S^{(1)}$ 和 $\rho_R^{(2)} \cong \rho_S^{(2)}$ 得出。 R 的偏迹 是另一个重要的不变量，我们将在下一节回顾。

我们还注意到，对于 u： $V \to V$ 酉且 $R \in \mathcal{R}(V)$，有

$$\begin{aligned} &(u \otimes u) R (u^* \otimes u^*) \in \mathcal{R}(V), && (u \otimes u) R (u^* \otimes u^*) \sim R, \\ [u \otimes u, R] = 0 \Rightarrow &(1 \otimes u) R (1 \otimes u^*) \in \mathcal{R}(V), && (1 \otimes u) R (1 \otimes u^*) \sim R. \end{aligned} \tag{1.4}$$

为证明这些结论，只需注意，在第一种情况下，张量幂 $u^{\otimes n}$ 是 $\rho_R^{(n)} \cong \rho^{(n)}{}_{(u\otimes u)R(u^*\otimes u^*)}$的酉交织算子；而在第二种情况下， $u \otimes u^2 \otimes \ldots \otimes u^n$是 $\rho_R^{(n)} \cong \rho^{(n)}{}_{(1\otimes u)R(1\otimes u^*)}$ [CL21]的酉交织算子。

对 $\mathcal{R}/\sim$ 进行分类这一具有挑战性的一般问题目前仍未解决。不过，可以将问题限制在与 $\mathcal{R}$ 相容的 $\sim$子族上，例如限制 R的维数或谱。所有维数为 $\dim R = 2$ 的酉 R 矩阵都可以在等价意义下完全分类，正如本节末尾将要展示的那样。即使对于 $\dim V = 3$，也没有已知的可比分类结果（不过，参见 [HMR24], ，其中对三维情况下守恒荷的 R 矩阵进行了分类）。如命题 1.2所示，问题的一部分在于，会出现具有各种不同谱以及不同谱基数的 R 矩阵，从而导致许多等价类。

这一观察表明，与其指定维数，不如考虑具有指定谱的 R 矩阵。除平凡情形 $\sigma(R) = \{q\}$（即 R 矩阵 $R = q\cdot 1$ 是单位元的倍数）之外，对于谱为 $\sigma(R) \subset \{1$的 $-1\}$ 全体酉 R 矩阵，这一分类问题已有定论；也就是说，这些矩阵是酉对合的 R 矩阵（维数任意）。在这种情形下，表示 $\rho_R^{(n)}$ 经由对称群 S_n分解。LPW [LPW19] 利用无限对称群的极端特征对酉对合 R 矩阵进行了分类。由此得到这些矩阵与杨图对的集合之间的显式双射，并且可以为每个等价类指定一个代表元。

本文更进一步，阐述具有两个特征值的酉 R 矩阵 R 的更一般分类问题，即 $|\sigma(R)| = 2$。这一族包含所有与琼斯多项式相关的 Temperley–Lieb 代数和 Hecke 代数的酉 Yang-Baxter 表示。正如我们将看到的，其中包含非对合元素，可将其视为对称性（对合 R 矩阵）的“非经典变形”。

不考虑酉 R 矩阵这一限制时，Gurevich 曾研究过这一族 [Gur93] 和 Ram [Ram91]。然而，酉 R 矩阵这一限制会产生相当大的影响。正如 Rowell 和 Wang 所述 [RW12]（另见 [DRW17]），大多数 R 矩阵并非酉矩阵，而酉局部（就张量积而言）的辫群表示十分罕见。由于具有两个特征值的酉 R 矩阵也可以用 Hecke 代数或 Temperley-Lieb 代数来描述，因此也可以等价地从这些代数的某些表示角度研究这一分类问题。在具体的矩阵框架下，Bytsko 曾探讨过这一问题 [Byt15；Byt22]。

相较之下，本文将采用我们与 Conti 在[CL21]中共同发展的子因子框架。我们将在第 2 节回顾相关概念，尤其着重讨论马尔可夫迹。在该节中，我们还将回顾一类称为高斯R 矩阵的酉 R 矩阵；这一类矩阵源自 Goldschmidt 和 Jones 的工作 [GJ89；Jon89a；Jon89b]，后来由 Galindo 和 Rowell 推广 [GR14]。

虽然第 2 节仍适用于任意酉 R 矩阵，但我们在第 3节将讨论范围限定为具有两个特征值的 R 矩阵，并且不失一般性地将谱固定为

$$\sigma(R) = \{-1, q\}, \qquad q \in \mathbb{T} \setminus \{-1\}.$$

由于对应于 $q = 1$ 的对合族已完成分类，且其表现与 $q \neq 1$ 大不相同，因此我们将讨论范围限定为非对合情形 $q \neq \pm 1$。

应用一般框架中的结果，我们证明了具有两个特征值的酉非对合 R 矩阵的等价类由三个

数据标记：特征值 q、对应于特征值 -1 的谱投影的归一化迹 $\eta \in (0,\ 1)$，以及维数 $d \in \mathbb{N}$。这三个数据 q，η，d并非彼此独立，任务是理解哪些三元组（q，η，d）能够由 R 矩阵实现。

在这一背景下，一个主要结果是定理 3.4。该定理建立在 Wenzl 关于 Hecke 代数子因子的工作 [Wen88] 以及辫群特征标的有理性命题（命题 2.1）之上，并对可能出现的三元组 (q,η,d)施加了严格限制：只剩下八个等价类族，每族的 q 和 η固定，而维数 d可变。特别是，除非 $q \in \{i,-i,e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3}\}$，否则这些等价类均为空。将范围限制在 Temperley-Lieb 子族时，这一结果便恢复了 Bytsko 的一个定理[Byt19]。

利用 Temperley-Lieb 结构和对称性，可以将这八个族归结为三个族。接着，我们在命题 3.6 中证明，这三个族中的两个可以完全由高斯 R 矩阵以及与恒等映射的张量积构成。最后一个等价类族对应于 $q=e^{i\pi/3}$, $\eta=\frac{1}{2}$，以及任意偶数维数 d，目前尚未得到理解。我们证明，当 $d=2$ 时该族为空，但尚未证明对于 $d>2$ 这一结论仍然成立。这类 R 矩阵需要表示 Hecke 代数而非 Temperley-Lieb 代数，并对应于某个特定辫群表示的一个未知局部化 [GHR12]。

So我们的部分结果已在奥伯沃尔法赫会议论文集 [Lec25] .

为结束引言并供后文参考，我们描述维数为二的酉 R 矩阵的简单分类。

命题 1.2。 每个酉R矩阵 R 维数为 $\dim R=2$ 都等价于下列矩阵中的恰好一个[1]（采用通常的恒等认定 $M_2\otimes M_2\cong M_4$）：

$$R_1 = q\cdot 1, \qquad q\in\mathbb{T},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} p & & & \\ & & q & \\ & q & & \\ & & & s \end{pmatrix}, \qquad q\in\mathbb{T},\quad \{p,s\}\in\mathbb{T}^2,\quad p\neq s,$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} & & & q \\ & p & & \\ & & p & \\ q & & & \end{pmatrix}, \qquad p,q\in\mathbb{T},$$

$$R_4 = \frac{q}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad q\in\mathbb{T},$$

其中参数 q,p 唯一确定，或参数对 $\{p,s\}$ 无序。

证明。 基于 Hietarinta 和 Dye 先前的工作 [Hie92；Dye03], 证明了 [CL21], 每个酉R矩阵都等价于下列 R 矩阵之一

[1]在此处，且仅在本命题及其证明中，记号 $R_1,\dots,R_4$ 指所指定的矩阵，而非（1.2）。

如下：

$$
\begin{aligned}
R_1 &= q \cdot 1, && \sigma(R_1) = \{q\},\\
R_2 &= \begin{pmatrix} p & & & \\ & q & & \\ & & r & \\ & & & s \end{pmatrix}, && \sigma(R_2) = \{p, s, \sqrt{qr}, -\sqrt{qr}\},\\
R_3 &= \begin{pmatrix} & & & q \\ & p & & \\ & & p & \\ r & & & \end{pmatrix}, && \sigma(R_3) = \{p, \sqrt{qr}, -\sqrt{qr}\},\\
R_4 &= \frac{q}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}, && \sigma(R_4) = \left\{ \tfrac{q(1+i)}{\sqrt{2}}, \tfrac{q(1-i)}{\sqrt{2}} \right\}.
\end{aligned}
$$

为了从这一事实推导出命题中类似但更强的结论，我们需要证明可以将范围限制为命题陈述中给出的更具体的参数选择，并且其中列出的任意两个不同的 R 矩阵都不等价。

我们首先考察上文列出的这些 R 矩阵的谱。显然，R_1 与其他任何 R 矩阵都不酉等价（尤其是不等价）；而 R_4 与 R_2 或 R_3 都不酉等价，因为后两者有一对相反特征值 $\pm\lambda$，而 R_4 没有。为了比较 R_2 和 R_3，我们使用等价关系 (1.4)。考虑酉对角（2×2）矩阵 $u = \mathrm{diag}((r/q)^{1/4}, 1)$，其中 q、r 是 R_3的参数。计算可知，$(u \otimes u) R_3 (u^* \otimes u^*)$与 R_3 仅在 r 和 q 被替换为 $\sqrt{rq}$这一点上不同。由于$(u \otimes u) R_3 (u^* \otimes u^*) \sim R_3$，因此在等价意义下，我们可以将参数限制为 R_3 中的 $q = r$。

同理，可以验证 R_2 与对角酉 (2×2)-矩阵的张量平方 $u \otimes u$ 对易。因此 $R_2 \sim (1 \otimes u) R_2 (1 \otimes u^*)$，并且由于 $(1 \otimes u) R_2 (1 \otimes u^*)$与 R_2形式相同，可以验证 u 可选为与 q 和 r相匹配。因此，在 R_2中，我们同样可以将范围限制为在等价意义下的 $r = q$。

对于 R_2中的 $p \neq s$，矩阵 R_2 和 R_3 并非酉等价（特征值分别为 2 个和 3 个）。对于 $p = s$，它们酉等价（参数已对应），事实上在这种情况下甚至 $R_2 \sim R_3$。为证明这一点，我们考虑满足 $a = \sqrt{p/q}$ 的酉矩阵 $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。通过直接计算，可以验证 $u \otimes u$ 与 R_3对易，并且 $R_3 \sim (1 \otimes u) R_3 (1 \otimes u^*) = R_2$。

R_2 的等价类仅取决于 q 和无序对 $\{p, s\}$，因为用 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 的张量平方对 R_2 进行共轭会交换 p 和 s。 □

2 R 矩阵、子因子与马尔可夫迹

在讨论具有两个特征值的 R 矩阵之前，我们先推导一些稍后会用到的一般结果。首先，我们回顾 [CL21] 中提出的酉 R 矩阵的子因子方法。

给定 $R \in \mathcal{R}(V)$，我们记 $d := \dim V$为其维数，并考虑矩阵代数 $M_d \cong B(V)$ 的无限张量积，即 $\mathcal{N} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} M_d$，并将其视为

一个冯·诺伊曼代数，它关于归一化迹 τ 所诱导的拓扑弱闭。这里， τ 定义在有限张量积上，其定义为

$$\tau(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) := \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{Tr}(A_k)}{d}, \qquad A_k \in M_d.$$

该代数具有典范的保持 τ 的移位自同态 φ ，其由以下条件确定

$$\varphi(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \otimes 1 \ldots) = 1 \otimes A_1 \otimes \ldots A_d \otimes 1 \ldots .$$

保持 τ 的左逆通常记作 ϕ ： $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$，并满足

$$\phi(\varphi(x)y\varphi(z)) = x\phi(y)z, \qquad x, y, z \in \mathcal{N}. \tag{2.1}$$

它在第一个张量因子上作用为归一化偏迹，即 $\phi(A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots) = \tau(A_1) \cdot A_2 \otimes \ldots$。

借助 ϕ，我们可以描述等价关系 $\sim$ 的一个重要不变量，即 R 的（归一化）偏迹。对于 R， $S \in \mathcal{R}$，有 [CL21，定理 5。8]

$$R \sim S \implies \phi(R) = \phi(S).$$

一般而言，反向推论不成立（即使除了假设 $\phi(R) = \phi(S)$ 外，还假设 $\dim(R) = \dim(S)$ 以及 $\sigma(R) = \sigma(S)$ ）。

请注意，尽管 ϕ 是通过算子代数方法定义的，但 $\phi(R)$ 是一个基本对象，可以借助线性代数工具进行计算。利用 $R \in M_d \otimes M_d$，它可以与归一化偏迹 $\phi(R) = \frac{1}{\dim R}(\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{id})(R) \in M_d$ 等同。

回顾这些数据后，可以将由 $\rho_R^{(n)}$ 给出 B_n 的 $R \in \mathcal{R}(V)$ 表示组合成无穷辫群 ρ_R 的一个酉表示 B_∞ （该群以 b_k、 $k \in \mathbb{N}$为生成元，并满足与 1.3 相同的关系），即 B_n所给出的表示

$$\rho_R : B_\infty \to \mathrm{End}\,\mathcal{N}, \qquad b_k \mapsto \varphi^{k-1}(R), \quad k \in \mathbb{N}.$$

下文中，我们常将 B_n 股辫群与其在归纳极限 B_∞ 中的像视为相同。

在 B_∞ 层面上，典范端同态的对应物是单射群同态

$$s : B_\infty \to B_\infty, \qquad b_k \mapsto b_{k+1},$$

显然，它满足 $\rho_R \circ s = \varphi \circ \rho_R$。

考虑由 ρ_R 生成的冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{L}_R \subset \mathcal{N}$ 也往往很有用，即包含所有 $\varphi^n(R)$、 $n \in \mathbb{N}_0$ 的 $\mathcal{N}$ 内部最小的冯·诺伊曼代数。我们注意到， $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{L}_R$ 是 II_1 型因子，并且

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\mathcal{N}) & \subset & \mathcal{N} \\ \cup & & \cup \\ \varphi(\mathcal{L}_R) & \subset & \mathcal{L}_R \end{array}$$

是一个 II 型交换方$_1$因子 [CL21]。相对交换子 $\varphi(\mathcal{N})' \cap \mathcal{N}$由所有形如 $x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$, $x \in M_d$的元素组成，而相对交换子$\varphi(\mathcal{L}_R)' \cap \mathcal{L}_R \subset \varphi(\mathcal{N})' \cap \mathcal{N}$尤其包含偏迹 $\phi(R)$。

我们将 R 的特征定义为

$$\tau_R := \tau \circ \rho_R : B_\infty \to \mathbb{C},$$

我们也将其视为单位元群 *-代数 $\mathbb{C}B_\infty$上的一个泛函。需要注意的是，给定 R, $S \in \mathcal{R}$, 我们有等价关系 [CL21，命题 5。2]

$$R \sim S \iff \tau_R = \tau_S \quad \text{and} \quad \dim R = \dim S. \tag{2.2}$$

鉴于这一结果，自然可以考虑 R 的特征 τ_R。以下命题汇总了一些基本性质。

命题 2.1。酉R矩阵 $R \in \mathcal{R}(V)$ 的特征 τ_R 具有以下性质：

a) τ_R 是 $\mathbb{C}B_\infty$ 上的归一化迹，即 $\tau_R : \mathbb{C}B_\infty \to \mathbb{C}$ 是一个线性泛函，使得对于所有 x、$y \in \mathbb{C}B_\infty$，有 $\tau_R(xy) = \tau_R(yx)$，并且 $\tau_R(1) = 1$; *b)* τ_R 是正且忠实的，即对于所有 $x \in \mathbb{C}B_\infty \setminus \{0\}$，有 $\tau_R(x^*x) > 0$；*c)* τ_R 分解的含义是

$$\tau_R(xs^n(y)) = \tau_R(x)\tau_R(y), \qquad x \in \mathbb{C}B_n,\ y \in \mathbb{C}B_\infty.$$

d) τ_R 在以下意义下是有理的：存在 $d \in \mathbb{N}$ （即 $d =$ 维数 R），使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 及任意正交投影 $p \in \mathbb{C}B_n$,

$$d^n \tau_R(p) \in \mathbb{N}_0.$$

证明。a) 是 ρ_R 为表示且 τ 为迹的直接推论，而b) 类似地成立，因为 ρ_R 是 *-表示 $\mathbb{C}B_\infty$，且 τ 是正且忠实的。

归一化迹 τ 在张量积上分解，由此可推出c)的性质，只需注意到 τ_R 中 $s^n(y)$ 在前 n 个张量因子上平凡作用，而 $x \in \mathbb{C}B_n$ 只在前 n 个因子上非平凡作用。

d) 成立是因为对于 $p \in \mathbb{C}B_\infty$ 任意正交投影，$\rho_R(p) = \rho_R^{(n)}(p) \otimes 1 \ldots \in \mathcal{N}$ 也是正交投影。因此

$$(\dim R)^n \tau_R(p) = \mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(\rho_R^{(n)}(p)) = \dim(\rho_R^{(n)}(p) V^{\otimes n}) \in \mathbb{N}_0.$$

□

除了这里列出的性质外，我们还会关注另一个相关概念，即马尔可夫迹，它满足一种分解性质，在纽结理论中发挥着重要作用 [Jon83；Jon87；Wen88；Fre+85]。

定义 2.2。 μ 上的迹称为马尔可夫迹，如果[2]

$$\mu(b_1 s(x)) = \mu(b_1)\mu(x), \qquad x \in \mathbb{C}B_\infty.$$

[2]这个定义等价于条件 $\mu(xb_n) = \mu(b_1)\mu(x)$ 对所有 $x \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$ 都成立；这也是更常用于定义马尔可夫迹 [Jon87; Wen88] 的条件。为了证明这两个条件等价，可以利用这样一个事实：B_n 存在一个内自同构 γ_n, $n \in \mathbb{N}$，使得对于 $1 \le k \le n-1$ [Bir74]，$\gamma_n(b_k) = b_{n-k}$。由于 μ 是一个迹，我们有 $\mu \circ \gamma_n = \mu$, $\mu \circ s = \mu$, $\mu(b_n) = \mu(b_1)$，由此可得两者等价。

虽然命题2.1 对每个 τ_R 的特征 $R \in \mathcal{R}$都成立，但其中只有一部分具有Markov性质。下面的结果利用了典范端同态 ϕ的左逆 φ 及其双模性质（2.1）。

命题 2.3. 设 $R \in \mathcal{R}$。那么， τ_R 是马尔可夫迹，当且仅当 R 具有平凡偏迹[3], $\phi(R) = \tau(R) \cdot 1$。

*P*证明。 </style}迹 τ_R 是马尔可夫迹，当且仅当对于每个 $x \in \mathbb{C}B_\infty$，都有

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_R(b_1 s(x)) - \tau_R(b_1)\tau_R(x) \\ &= \tau(R\varphi(\rho_R(x))) - \tau(R)\tau(\rho_R(x)) \\ &= \tau\Big((R - \tau(R)\cdot 1)\,\varphi(\rho_R(x))\Big) \\ &= \tau\Big((\phi(R) - \tau(R)\cdot 1)\,\rho_R(x)\Big). \end{aligned}$$

由连续性，这对所有 $m \in \mathcal{L}_R$ 都推广为 $0 = \tau\Big((\phi(R) - \tau(R)\cdot 1)\, m\Big)$；特别地，我们可以取 $m = (\phi(R) - \tau(R)1)^*$，因为 $\phi(R) \in \mathcal{L}_R$。由于 τ 是忠实的，我们得到 $\phi(R) = \tau(R)1$。反向蕴含显然成立。 □

回顾一下， $\phi(R)$ 属于相对交换子 $\varphi(\mathcal{L}_R)' \cap \mathcal{L}_R$，显然，当子因子 $\varphi(\mathcal{L}_R) \subset \mathcal{L}_R$ 不可约时， τ_R是马尔可夫的。由于通常很难根据给定的 R矩阵检验不可约性，下面我们给出一个简单的不可约性充分条件。若 R 有一对相反特征值，则称其具有一对相反特征值；也就是说，其谱 $\sigma(R)$ 包含某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 对应的 λ 和 $-\lambda$。

命题 2.4。 如果 $R \in \mathcal{R}$ 没有一对相反特征值，则 $\varphi(\mathcal{L}_R) \subset \mathcal{L}_R$ 是不可约的，因此 τ_R 是马尔可夫迹。

证明。 证明依赖于以下关于$\varphi(\mathcal{L}_R) \subset \mathcal{L}_R$的相对交换子的刻画：

$$\varphi(\mathcal{L}_R)' \cap \mathcal{L}_R = M_d \cap \mathcal{L}_R \subset \{x \in M_d : \varphi(x) = R^* x R\},$$

证明见 [CL21，命题 3.4 (i)] 。由于 $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_{R^*}$，我们得出任意 $x \in \varphi(\mathcal{L}_R)' \cap \mathcal{L}_R$ 都满足 $\varphi(x) = R^* x R = R x R^*$，即 x 与 R^2交换。由于 R 没有一对相反特征值， R^2 和 R 具有相同的谱投影，因此我们发现 x 不仅与 R^2交换，也与 R交换。另一方面， x 也与 $\varphi^n(R)$ $n \geq 1$交换，因为这些在第一个张量因子上平凡作用。因此，任意 $x \in \varphi(\mathcal{L}'_R) \cap \mathcal{L}_R$ 都与整个表示 ρ_R交换，即 x 属于 $\mathcal{L}_R$的中心。由于 $\mathcal{L}_R$ 是一个因子， x 必定是单位元的倍数。 □

该命题的逆命题并不成立，即存在 $R \in \mathcal{R}$ 使得$\varphi(\mathcal{L}_R) \subset \mathcal{L}_R$ 是不可约的，并且 R 具有一对相反特征值。张量翻转 [LPW19]就是一个例子。然而，对于接下来将要介绍的非对合 Hecke R 矩阵这一类，命题2.4 将成为一种高效的工具。

作为一个例子，并为后文参考，我们现在回顾一类带有马尔可夫迹的有趣酉 R 矩阵。这些 R 矩阵被称为亚辛型或高斯型。

[3]R 矩阵具有相同的左偏迹和右偏迹 [CL21，定理 5。10]。

它们源自 Goldschmidt 和 Jones 的工作 [GJ89; Jon89a; Jon89b]，后来 Galindo 和 Rowell 对其进行了推广 [GR14]。我们将为每个维数 G_d 定义一个 R 矩阵 $d \geq 2$。

定义高斯 R 矩阵时，我们必须区分奇数和偶数 d。按照 [GR14],，我们定义单位根

$$\xi := \begin{cases} e^{2\pi i/d} & d \text{ odd} \\ e^{\pi i/d} & d \text{ even} \end{cases}$$

并固定一组正交归一基 $(e_k)_{k=0,\ldots,d-1}$，其属于 $\mathbb{C}^d$。我们将张量积基中的 $U \in M_d \otimes M_d$ 定义为

$$U(e_k \otimes e_l) := \xi^{l-k}(e_{k+1} \otimes e_{l+1}),$$

其中，此处及下文中，e_k 上的指标均按周期延拓，即 $e_{k+d} = e_k$。根据这些定义，可以验证，对于任意（奇数或偶数）$d \in \mathbb{N}$，关键的交换关系

$$U\varphi(U) = \xi^2 \varphi(U)U, \qquad U^d = 1$$

成立。这意味着

$$G_d := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \xi^{k^2} U^k$$

是一个酉R矩阵，我们称之为维数为 d 的高斯*R*矩阵。

引理 2.5。设 $G_d \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^d)$ 是维数为 d 的高斯 *R* 矩阵。*a)* G_d 至多有 d 个不同的特征值，且所有特征值都是$(4d)$次单位根。更确切地说，G_d 的特征值为

$$\mu_l(d) = \begin{cases} e^{i\pi/4} e^{-i\pi l^2/d} & d \text{ even} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4 - \frac{i\pi l^2}{2d}} (1 + e^{-i\pi(d+2l)/2}) & d \text{ odd} \end{cases}, \qquad l = 0, \ldots, d-1.$$

具体来说，对于 $d = 2$ 和 $d = 3$，其谱为

$$\sigma(G_2) = \{e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}\},$$
$$\sigma(G_3) = \{i, e^{-i\pi/6}\}.$$

b) G_d 的归一化偏迹为

$$\phi(G_d) = \frac{1}{\sqrt{d}},$$

因此，τ_{G_d} 是一个马尔可夫迹。

证明。a) 由于 $U^d = 1$，其特征值是 d次单位根。为证明所有 d次单位根都是 U的特征值，只需直接验证 $P_l := \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d} kl} U^k$，$l = 0$，……，$d-1$，都是非零正交投影，且 $P_l P_m = \delta_{lm} P_l$，$\sum_l P_l = 1$，

以及 $\sum_l e^{\frac{2\pi i l}{d}} P_l = U$。这表明 P_l是 U的谱投影，并说明$\sigma(U) = \{e^{\frac{2\pi i l}{d}} : \ l = 0, \ ... \ ..., \ d-1\}$。

G_d 的特征值因此为以下数

$$\mu_l = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \xi^{k^2} e^{\frac{2\pi i l k}{d}},$$

特别是 $|\sigma(G_d)| \leq d$。

应用广义高斯和的互反定理 [BEW98，定理 1.2。2] 并回想 $\xi = e^{2\pi i/d}$ 当 d 为奇数且 $\xi = e^{i\pi/d}$ 当 d 为偶数时，可得

$$\mu_l = \begin{cases} e^{i\pi/4} e^{-i\pi l^2/d} & d \text{ even} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4 - \frac{i\pi l^2}{2d}} (1 + e^{-i\pi(d+2l)/2}) & d \text{ odd} \end{cases}.$$

直接检验可知， $\mu_l^{4d} = 1$ 在所有情况下均成立。

b) 由 U的定义可直接得出， U、 U^2、 ……、 U^{d-1}的偏迹均为零。因此 $\phi(G_d) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \xi^{k^2} \phi(U^k) = \frac{1}{\sqrt{d}}$。 □

3 酉 Hecke R 矩阵

正如引言中所述，我们现在将注意力限制在具有指定谱的酉 R 矩阵上。也就是说，我们固定单位圆的一个有限子集 $S \subset \mathbb{T}$ ，并要求 $\sigma(R) = S$。于是 $\prod_{\lambda \in S}(R - \lambda) = 0$，即同态 $\rho_R : \mathbb{C}B_\infty \to \mathcal{N}$可经由商 $(\mathbb{C}B_\infty)_S = \mathbb{C}B_\infty/\mathcal{I}(S)$ 分解，其中该商由多项式 $\prod_{\lambda \in S}(b_1 - \lambda)$ 生成的 *-理想 $\mathcal{I}(S)$ 给出。

若 $S = \{\lambda\}$，则谱为 S 的酉R矩阵只有平凡的 $R = \lambda 1$。对于有两个不同特征值的情形， $S = \{\lambda_1, \ \lambda_2\}$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，情况就有趣得多。我们首先指出，由于 Yang-Baxter 方程是齐次的，R 矩阵的倍数仍是 R 矩阵；并且，两个谱为$\{\lambda_1, \ \lambda_2\}$ 的 R 矩阵 R， S 等价，当且仅当 $-\lambda_2^{-1} R \sim -\lambda_2^{-1} S$ 等价。也就是说，我们可以将范围限制在谱为 $\{-1, \ q\}$ 的 R 矩阵上，其中 $q := -\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{T}\backslash\{-1\}$。下文中，我们用 $\mathcal{R}_q(V)$ 和 $\mathcal{R}_q := \bigcup_V \mathcal{R}_q(V)$ 分别表示谱为 $\sigma(R) = \{-1, \ q\}$ 且基空间为 V，以及基空间为任意（有限维）空间的所有酉 R 矩阵的集合。

$\mathcal{R}_q$ 中的元素将被称为*Hecke R* 矩阵 （参数为 q），因为代数 $H_\infty(q) := (\mathbb{C}B_\infty)_{\{-1,q\}}$ 称为（无限）Hecke 代数（类型为 A）。

一个特殊情形是 $q = 1$。此情形对应于 R 具有一对互为相反数的特征值 $\{-1, +1\}$ 因此是对合的，且此前已被分类 [LPW19]。在非对合情形下，上一节的结果立即推出以下引理。

引理 3.1。 设 $R \in \mathcal{R}_q$ 满足 $q \neq \pm 1$。则 $\varphi(\mathcal{L}_R) \subset \mathcal{L}_R$ 是不可约的，且 τ_R 是 $H_\infty(q)$上的正 *Markov* 迹。

证明。 R 没有一对互为相反数的特征值，因为 $q \neq 1$，这意味着其不可约，尤其是 τ_R 具有 Markov 性质（命题 2.4）。迹 τ_R根据构造为正。 □

给定 $q \neq -1$，我们来回顾 Hecke 代数 $H_\infty(q)$ 的结构。谱 $\{-1, q\}$ 的最小多项式为 $0 = (b_1 + 1)(b_1 - q)$，这意味着在 $H_\infty(q) = (\mathbb{C}B_\infty)^{\{-1,q\}}$ 中，我们有 $k \in \mathbb{N}$，

$$b_k = q - (1+q)e_k, \qquad e_k := \frac{q - b_k}{q+1}, \qquad q \neq -1.$$

通过简单计算可知，$H_\infty(q)$是由生成元 1、e_k、$k \in \mathbb{N}$及以下关系构成的含幺 *代数

$$\begin{aligned} e_k e_{k+1} e_k - \frac{q}{(1+q)^2} e_k &= e_{k+1} e_k e_{k+1} - \frac{q}{(1+q)^2} e_{k+1}, \\ e_k e_l &= e_l e_k \quad \text{for} \quad |k-l| > 1, \\ e_k^2 &= e_k = e_k^*. \end{aligned} \tag{3.1}$$

对于具有谱分解 $R = -P + q(1-P)$ 的 R矩阵 $R \in \mathcal{R}_q$（即，P是对应于特征值 -1 的谱投影，而 $1-P$ 是对应于特征值 q 的谱投影），$H_\infty(q)$ 的表示 ρ_R 由以下条件确定

$$\rho_R(e_1) = P.$$

我们还将使用生成元 $e_k^\perp := 1 - e_k$，它们满足与 e_k相同的关系。

由于 Hecke 代数的迹和表示与琼斯多项式及其推广，以及子因子 [Fre+85; Jon87; Wen88] 有关，因此对它们的研究已十分深入。已知对于每个 $\eta \in \mathbb{C}$，在 $H_\infty(q)$ 上都存在唯一的马尔可夫迹 μ_η，满足 $\mu_\eta(e_1) = \eta$ [Fre+85; Jon87]。特别地，$H_\infty(q)$ 上的马尔可夫迹 μ 由其在 e_1 上的取值 $\eta = \mu(e_1)$ 唯一确定。

C推论 3.2. 设 $q \in \mathbb{T}\backslash\{1, -1\}$ 和 $R, S \in \mathcal{R}_q$。以下条件等价 :

a) $R \sim S$。 *b)* $\tau_R(e_1) = \tau_S(e_1)$ 且 维数 $R =$ 维数 S。 *c)* 迹 $R =$ 迹 S 且 维数 $R =$ 维数 S。

证明。 蕴含关系 a)⇒b) 显然，而 b) 与 c) 之间的等价性由谱分解 $R = -P + q(1-P)$ 可得，分解给出

$$\tau_R(e_1) = \tau(P) = \frac{1}{1+q}\left(q - \frac{\mathrm{Tr}(R)}{(\dim R)^2}\right).$$

蕴含关系 b)⇒a) 可由上文提到的 Markov 迹唯一性结果以及（2.2）得出。

□

因此，我们可以用如下形式的三元组来标记 Hecke 型 R 矩阵的等价类

$$(q, \eta, d) \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\} \times (0,1) \times \mathbb{N},$$

其中各项对应于 R 的第二个特征值 q（除 -1 外）；$= \tau(P)$ 表示特征值 -1 的谱投影上的归一化迹的值 $\tau_R(e_1)$，而 $d = \dim R$ 表示维数。我们将用 $[q, \eta, d] \in \mathcal{R}_q/\sim$ 表示具有这些参数的 R 矩阵的等价类。注意，$[q, \eta, d]$ 可能为空：任务是

找出哪些三元组 $(q,\ \eta,\ d)$ 可以由 R 矩阵实现，即判定 $[q,\eta,d]$ 何时非空。由于 $d\geq 2$，有一些简单的限制；这是因为 R 有两个不同的特征值，而 $\eta\in\mathbb{Q}$ 则是命题 2.1 d)中有理性的结果，不过我们将在下文发现强得多的约束。

在此分析中，正性至关重要。对于 Hecke R矩阵$R\in\mathcal{R}_q$，B_∞-表示 ρ_R 通过将 e_k 映射到 $\varphi^{k-1}(R)$对应于特征值−1的谱投影，定义了 $H_\infty(q)$的一个 C^*-表示（仍以同一符号表示）。如上所示，这些表示允许存在正 Markov 迹，并且是非平凡的，即 $\rho_R(e_1)\neq\rho_R(e_2)$。独立于 R 矩阵，Wenzl 分析了 $H_\infty(q)$何时存在非平凡的 C^*-表示，以及对于$\mu(e_1)$的哪些取值，$H_\infty(q)$上的马尔可夫迹 μ 为正。

定理 3.3。 *[Wen88]* 设 $q\in\mathbb{T}\setminus\{1,\ -1\}$。

a) $H_\infty(q)$ 存在非平凡的 C^*-表示，当且仅当对于某个$\ell\in\mathbb{N}$，$q=e^{\pm 2\pi i/\ell}$ 且 $\ell\geq 4$。***b)*** 设 $q=e^{\pm 2\pi i/\ell}$，$\ell\geq 4$。则在 $H_\infty(q)$上存在 $\ell-1$ 个互不相同的正 *Markov* 迹。它们由 $k\in\{1,\ .....,\ \ell-1\}$ 参数化，使得 $\mu(e_1)=\eta_{\ell,\ k}$，其中

$$\eta_{\ell,k}:=\frac{1-q^{-k+1}}{(1+q)(1-q^{-k})}=\frac{\sin\frac{\pi(k-1)}{\ell}}{2\cos\frac{\pi}{\ell}\sin\frac{\pi k}{\ell}}. \tag{3.2}$$

结合我们先前的发现，该结果可用于推导以下非平凡酉 Hecke R 矩阵的分类定理。

定理 3.4。 *Hecke R* 矩阵仅有可能非空的等价类，是以下形式的八个族：

$$\left[\pm i,\tfrac{1}{2},2d\right],\quad \left[e^{\pm i\pi/3},\tfrac{1}{3},3d\right],\quad \left[e^{\pm i\pi/3},\tfrac{2}{3},3d\right],\quad \left[e^{\pm i\pi/3},\tfrac{1}{2},2d\right],$$

其中 $d\in\mathbb{N}$。

证明。我们首先证明，除非 $q\in\{\pm i,e^{\pm i\pi/3}\}$，否则 $\mathcal{R}_q$ 为空。令 $R\in\mathcal{R}_q$。由于R 定义了 $H_\infty(q)$ 的一个非平凡 C^*-表示，根据定理 3.3 a)，对某些$\ell\in\mathbb{N},\ell\geq 4$，有 $q=e^{\pm 2\pi i/\ell}$。由引理 3.1 和定理 3.3 b)，我们得出存在 $k\in\{1,\ldots,\ell-1\}$，使得 $\tau_R(e_1)=\eta_{\ell,k}$ (3.2)。

以下论证的思路是利用 τ_R 的有理性（命题 2.1 d)）：若对于某个 $p\in H_\infty(q)$，$\rho_R(p)$ 是正交投影，则存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\rho_R(p)\in\mathrm{End}\ V^{\otimes n}$，因此 $\tau_R(p)=\tau(\rho_R(p))=(\dim R)^{-n}\,\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(\rho_R(p))$ 是有理数。特别地，$\eta_{\ell,\ k}=\tau_R(e_1)$（$R$ 的谱投影的归一化迹）必为有理数。

首先注意，两个极端值 $k=1$ 和 $k=\ell-1$ 分别给出 $\tau_R(e_1)=\eta_{\ell,\ 1}=0$和 $\tau_R(e_1)=\eta_{\ell,\ \ell-1}=1$，对应于 $R=q$恒等映射$V\otimes V$和 $R=-$恒等映射$V\otimes V$。由于我们要求 $\sigma(R)=\{-1,\ q\}$，因此排除了这些 k 值。

为更好地分析其余情形，我们必须在ρ_R（H_∞（q））中给出适当的投影。类似于 Fredenhagen、Rehren、Schroer [FRS89，命题 3 的分析，1],我们考虑以下正交投影 $P_1^R:=1$,

$$P_{n+1}^R:=\rho_R(e_1)\wedge\rho_R(e_2)\wedge\ldots\wedge\rho_R(e_n),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

在 [FRS89], 中，证明了这些投影的一个递推关系；将其适用于我们的杨-巴克斯特情形，可得 $1 \le n \le \ell - 2$,

$$P^R_{n+1} = \varphi(P^R_n) - \alpha_n \cdot \varphi(P^R_n)\rho_R(e_1^\perp)\varphi(P^R_n), \qquad \alpha_n := \frac{2\cos\frac{\pi}{\ell}\,\sin\frac{n\pi}{\ell}}{\sin\frac{(n+1)\pi}{\ell}},$$

$$P^R_\ell = \varphi(P^R_{\ell-1}).$$

由于 τ_R 是马尔可夫迹，我们有 $\phi(R) = \tau(R)1$ 根据命题2.3 ，因此$\phi(\rho_R(e_1^\perp))$ $= \phi(1 - \frac{q-R}{q+1}) = 1 - \eta_{\ell,\ k} = \tau_R(e_1^\perp)$。将 ϕ 应用于递推关系，得到

$$\phi(P^R_{n+1}) = (1 - \alpha_n\,\tau_R(e_1^\perp))P^R_n, \qquad 1 \le n \le \ell - 2.$$

由于 ϕ 保持 τ 不变，我们得到

$$\tau(P^R_{n+1}) = (1 - \alpha_n\tau_R(e_1^\perp))\tau(P^R_n).$$

由于$\eta_{\ell,\ k} = \tau_R(e_1)$和 $\tau(P^R_n)$、 $\tau(P^R_{n+1})$都是有理数，因此系数 α_n 也是有理数。但是

$$\frac{1}{\alpha_2} = 1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{\ell}},$$

我们看到，杨-巴克斯特性质要求 $\cos^2\frac{\pi}{\ell} \in \mathbb{Q}$。对于 $\ell \in \mathbb{N}$、 $\ell \ge 4$，仅当 $\ell = 4$ （$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ 且 $q = e^{\pm 2\pi i/\ell} = \pm i$）和 $\ell = 6$ （$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$ 且 $q = e^{\pm i\pi/3}$）时才成立。

对于 $\ell = 4$， k 在 $\{2, \dots, \ell - 2\}$ 中唯一可能的取值是 $k = 2$，其中 $\eta_{4,2} = \frac{1}{2}$。对于 $\ell = 6$，有三种情形： $k \in \{2, 3, 4\}$，它们分别对应 $\eta_{6,2} = \frac{1}{3}$、 $\eta_{6,3} = \frac{1}{2}$和 $\eta_{6,4} = \frac{2}{3}$。

这证明了 q 和 η 的取值可能组合所受到的限制，接下来还需证明对维数 d 的限制。令 r 表示 R 的特征值 -1 的重数，并令 $d = \dim R$。那么 $\tau_R(e_1) = \frac{r}{d^2}$，由此可见，只有当 $\dim R$ 为偶数时， $\tau_R(e_1) = \frac{1}{2}$ 才可能出现；而 $\tau_R(e_1) \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ 只有当 $\dim R$ 是 3 的倍数时才可能出现。 □

为了将这一结果与文献中的其他结果进行比较，我们回顾一下，Temperley-Lieb 代数 $\mathrm{TL}_\infty(q)$ 是 $H_\infty(q)$ 对由关系 $e_k e_{k+1} e_k = \frac{}{(1+q)^2} e_k$, $k \in \mathbb{N}$ 生成的 *-理想取商所得，该关系称为 。因此，在 $\mathrm{TL}_\infty(q)$ 中，Hecke 关系 (3.1) 的两边都为零。若 $R \in \mathcal{R}_q$ 的表示 ρ_R 可经由 $\mathrm{TL}_\infty(q)$ 分解，即其特征值 -1 的谱投影满足

$$P_1 P_2 P_1 = \frac{q}{(1+q)^2} P_1.$$

由于 Hecke 关系和 Temperley-Lieb 关系只涉及投影 P，我们也分别称之为 ***Hecke*** 投影 和 *Temperley-Lieb* 投影。

定理 3.4 中的部分分类结果此前已为人所知。在维数为 $\dim R = 2$ 的特殊情况下，Conti 和 Pinzari 已证明， $\mathcal{R}_q$ 非空仅当$q = \pm i$ 或 $\mathrm{Re}(q) \ge \frac{1}{2}$ [CP96，命题 9。10]。当 $q = i$ 时，他们还证明了 R 必定属于 Temperley-Lieb 型。此外，Bytsko 也有一项相关结果

[Byt19，定理 1]。用我们的记号，他证明了，在假设 R 是非平凡的 Temperley-Lieb 型酉R矩阵的条件下，要么 $q = \pm i$ 且 $\tau_R(e_1) = \frac{1}{2}$，要么 $q = e^{\pm i\pi/3}$ 且 $\tau_R(e_1) = \frac{1}{3}$。

因此，了解 Hecke R矩阵何时属于 Temperley-Lieb 型颇有意义。我们列出几种等价的刻画。

引理 3.5. 设 $R \in \mathcal{R}_q$、$q \neq \pm 1$ 和 $R = -P + q(1-P)$ 是谱分解。则下列条件等价：

a) P 是 *Temperley-Lieb*投影，即 $P_1P_2P_1 = \frac{q}{(1+q)^2}P_1$. *b)* $\tau(P) = \frac{q}{(1+q)^2}$.

c) $P_1 \wedge P_2 = 0$. *d)* 存在 a、$b \in \mathbb{C}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\tau((P_1P_2)^n) = ab^n$。（此时，$a = b = \frac{q}{(1+q)^2}$。）

证明. 在整个证明中，我们用 $x := \frac{q}{(1+q)^2}$ 作为简写。回忆$0 < x < 1$。

a) b) Temperley-Lieb条件等价于

$$\begin{aligned}
0 &= \tau((P_1P_2P_1 - xP_1)^*(P_1P_2P_1 - xP_1)) \\
&= \tau(P_1P_2P_1P_2P_1) - 2x\tau(P_1P_2P_1) + x^2\tau(P) \\
&= \tau(P_1P_2P_1P_2) - 2x\tau(P_1P_2) + x^2\tau(P) \\
&= \tau(P_2P_1P_2) - x\tau(P) + x\tau(P)^2 - 2x\tau(P)^2 + x^2\tau(P) \\
&= \tau(P)\,(1-x)\,(\tau(P) - x)\,.
\end{aligned}$$

由于 $P \neq 0$ 和 $x \neq 1$，这等价于 b)。

a) $\Rightarrow$ *c)* 若 Temperley-Lieb条件成立，则有 $\tau((P_1P_2)^{n+1}) = x\tau((P_1P_2)^n)$，因此 $\tau((P_1P_2)^{n+1}) = x^n\tau(P_1P_2) = x^{n+2}$。在极限 $n \to \infty$ 下，右边趋于零，而左边收敛到 $\tau(P_1 \wedge P_2)$，因此由 τ 忠实可得 c)。

c) $\Rightarrow$ *a)* 设 $v \in V^{\otimes 3}$，且 $w := (P_1P_2P_1 - xP_1)v$。那么显然 $P_1w = w$，并且

$$\begin{aligned}
P_2w &= (P_2P_1P_2P_1 - xP_2P_1)v \\
&= (P_1P_2P_1 - xP_1 + xP_2P_1 - xP_2P_1)v = w.
\end{aligned}$$

因此，w 属于 $P_1 \wedge P_2$ 的值域，由 c) 可知它必为 0。这意味着 $P_1P_2P_1 = xP_1$.

b) d) 对于 Hecke解 P，我们借助 Hecke 关系以及 τ 的 Markov性质进行计算

$$\tau((P_1P_2)^n) = \tau(P)\left(x\frac{1-x^{n-1}}{1-x}(\tau(P)-1) + \tau(P)\right). \tag{3.3}$$

对于 P Temperley–Lieb，有 $\tau((P_1P_2)^n) = x^{n+1}$，如 *a)* $\Rightarrow$ *c)* 的证明中所示。因此*b)* 蕴含 *d)*。另一方面，如果 *d)* 成立，即 $\tau((P_1P_2)^n) = ab^n$，那么由 (3.3) $b = x$ 可知，经过简短计算后可得 $x = \tau(P)$，即 *b)*。 □

与 Bytsko 和 Conti/Pinzari 的结果一致，在命题 3.4 列出的四种情形中，有两种满足这种 Temperley–Lieb 性质：对于 $q = \pm i$ 和$\tau_R(e_1) = \frac{1}{2}$，以及对于 $q = e^{\pm i\pi/3}$和 $\tau_R(e_1) = \frac{1}{3}$，引理 b)的性质 3.5成立，

$$\frac{\pm i}{(1 \pm i)^2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{e^{\pm i\pi/3}}{(1 + e^{\pm i\pi/3})^2} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}.$$

对于类 $\left[e^{\pm i\pi/3}, \frac{2}{3}, d\right]$，有 $q_{(1+q)_2} = 1 = \tau_R(e_1) \neq \tau_R(e_1)$，因此它不属于 Temperley-Lieb 型。这种情形可以如下理解。在 $\mathcal{R}_q$ 上，我们有一个对合对称操作，它交换 R 的两个谱投影。如果P 表示 R 中对应于特征值 -1的谱投影，那么 $R = -P + q(1-P)$，并且

$$R' := -(1-P) + qP$$

也属于 $\mathcal{R}_q$：显然， R' 是酉的，其特征值为 -1 和 q；它满足 Yang-Baxter 方程，是因为 Hecke 代数关系在 $e_k \leftrightarrow e_k^{\perp}$ 下保持不变。在等价类层面，这意味着

$$[q, \eta, d]' = [q, 1-\eta, d],$$

因此我们发现， $[e^{\pm i\pi/3}, \frac{2}{3}, d]$ 是 Temperley-Lieb 等价类 $[e^{\pm i\pi/3}, \frac{2}{3}, d]$ 的“翻转版本”。后一个等价类并非 Temperley-Lieb 型，因为翻转对称性保留 Hecke 关系，但不一定保留 Temperley-Lieb 关系。

类似地，我们注意到，对于 R矩阵 $R \in [q, \eta, d]$，其伴随 R^* 属于等价类

$$[q, \eta, d]^* = [\overline{q}, \eta, d].$$

这一观察将为定理 3.4 中所列等价类寻找代表元的任务缩减为特征值 $q = i$ 和 $q = e^{i\pi/3}$；也就是说，在定理 3.4所列的八个族中，我们不失一般性地只需考虑以下三个族

$$\left[i, \tfrac{1}{2}, 2d\right], \qquad \left[e^{i\pi/3}, \tfrac{1}{3}, 3d\right], \qquad \left[e^{i\pi/3}, \tfrac{1}{2}, 2d\right]$$

（维数为 $d \in \mathbb{N}$）。

在下述命题中，我们使用引理 2.5 中的高斯 R 矩阵 G_d ，以及 R 矩阵 $R \in \mathcal{R}(V)$、 $S \in \mathcal{R}(W)$ 的张量积 $R \boxtimes S \in \mathcal{R}(V \otimes W)$。除对张量因子重新排列外，它定义为 $R \otimes S$，从 $V \otimes V \otimes W \otimes W$ 到 $(V \otimes W) \otimes (V \otimes W)$，例如参见 [LPW19, (4.15)]。由于 $R \boxtimes S$ 与 $R \otimes S$ 酉等价，我们有 $\dim(R \boxtimes S) = \dim R \cdot \dim S$，且 $\sigma(R \boxtimes S) = \{\lambda\mu : \lambda \in \sigma(R),\ \mu \in \sigma(S)\}$。

我们用 $1_k :=$恒等映射$_{\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k}$ 作为简写。

命题 3.6。设 $d \in \mathbb{N}$。则

$$-e^{-i\pi/4}\, G_2 \boxtimes 1_d \in [i, \tfrac{1}{2}, 2d], \qquad\qquad i\, G_3 \boxtimes 1_d \in [e^{i\pi/3}, \tfrac{1}{3}, 3d].$$

证明。 考虑 R矩阵 $R := -e^{-i\pi/4} G_2$。根据引理 2.5 a)， $\sigma(R) = \{-1,\ i\}$，即 R 是一个 Hecke R矩阵，其中 $q = i$。将G_2的一个谱投影记为 P，则有 $G_2 = e^{i\pi/4} P + e^{-i\pi/4}(1-P)$ 因此 $R = i - (1+i)P$。利用引理 2.5 b)，可得

$$\tau_R(e_1) = \tau(P) = \frac{1}{1+i}\left(i + e^{-i\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2},$$

由此我们得出 $R \in [i, \frac{1}{2}, 2]$。通过与维数为 d 的单位映射作张量积，我们得到 $R \boxtimes 1_d \in [i, \frac{1}{2}, 2d]$。

类似地，R矩阵 $S := iG_3$ 的谱为 $\sigma(S) = \{-1, e^{i\pi/3}\}$ 根据引理 2.5 a)，即 S 是一个 Hecke R 矩阵，且 $q = e^{i\pi/3}$。将 G_3 的一个谱投影记为 P，则有 $G_3 = iP + e^{-i\pi/6}(1-P)$ 因此 $S = e^{i\pi/3} - (1+e^{i\pi/3})P$。利用引理 2.5 b)，可得

$$\tau_S(e_1) = \tau(P) = \frac{1}{1+e^{i\pi/3}}\left(e^{i\pi/3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}.$$

再次得出 $S \in [e^{i\pi/3}, \frac{1}{3}, 3]$ 和 $S \boxtimes 1_d \in [e^{i\pi/3}, \frac{1}{3}, 3d]$。 □

迄今为止给出的结果，几乎已经对所有具有两个特征值的酉 R 矩阵按等价类 $[e^{i\pi/3}, \frac{1}{2}, 2d]$完成了分类。目前我们尚不清楚 $[e^{i\pi/3}, \frac{1}{2}, 2d]$ 是否为空（对某些 d而言）。关于这种 R 矩阵是否存在的问题，也曾在 [GHR12第 5 节中提出。6]。

值得注意的是，Wenzl 构造了一个 C^*-表示 $H_\infty(e^{i\pi/3})$，其马尔可夫迹 μ 满足 $\mu(e_1) = \frac{1}{2}$。此迹具备命题 2.1中列出的所有性质，包括有理性（其中 $d = 2$）。然而，目前尚不清楚它是否能表示成 R 矩阵所要求的张量积形式。

我们还注意到，对于 $d = 1$，类$[e^{i\pi/3}, \frac{1}{2}, 2d]$ 为空。这可由命题1.2中给出的二维R矩阵等价类列表看出： R_1 只有一个特征值，而 R_2、 R_3 有一对互为相反数的特征值。因此 R_1、 R_2、 R_3 都不是 Hecke 型。R_4 是 G_2^*的倍数，特别是其负特征值之比为 $-i \neq e^{\pm i\pi/3}$。

若 $R \in [e^{i\pi/3}, \frac{1}{2}, 2d]$ 存在，其 Yang-Baxter 端同态 [CL21] 的指标将为4 ，并且是标准编织的 [CF00]。

致谢

谨向 Roberto Conti、Hans Wenzl 和 Eric Rowell 致谢，感谢他们就 R 矩阵和子因子展开的精彩讨论。同时，也衷心感谢德国研究基金会 DFG 通过海森堡资助项目“量子场与算子代数”（LE 2222/3-1）提供的经费支持。

参考文献

[AAR01] E. Abdalla、M. Abdalla 和 K. Rothe。二维中的非微扰方法 l

量子场论。World Scientific，2001年。[AG03] N. Andruskiewitsch 和 M. Graña。“从架到带点霍普夫代数”。《数学进展》178.2（2003），177–243。[AL17] S. Alazzawi 和 G. Lechner。“可积量子场论中的逆散射与局域性”。《数学物理通讯》354（2017），913–956。doi: 10.1007/s00220-017-2891-0.[Bax82] R. J. Baxter。《统计力学中的精确可解模型》。AcademicPress，1982年。[BEW98] B. C. Berndt、R. J. Evans 和 K. S. Williams。《高斯和雅可比和》。Wiley-Interscience，1998年。[Bir74] J. Birman。《辫子、链环与映射类群》。普林斯顿大学出版社，1974年。[BK12] I. Burban 和 B. Kreussler。《椭圆曲线退化上的向量丛与 Yang-Baxter 方程》。第220卷，1035。美国数学会，2012年。

[Byt15] A. G. Bytsko。“通过秩为 $r \geq 1$ 的正交投影构造 Temperley-Lieb 代数的张量空间表示”。《数学物理学杂志》56（2015），083502。doi：10.1063/1.4927629.[Byt19] A. Bytsko。“Jones-Wenzl 投影算子与 Temperley-Lieb 代数张量空间表示之间的一个关系”。《线性与多重线性代数》（2019），1–15。doi：10.1080/03081087.2019.1577796.[Byt22] A. Bytsko。“关于与 Hecke 代数在张量空间上的表示相关的正交投影”。《数学物理学杂志》63（2022）。12页，LaTeX，081701。doi：10.1063/5.0102693.[CF00] R. Conti 和 F. Fidaleo。“Cuntz 代数的编织端同态”。《斯堪的纳维亚数学杂志》（2000），93–114。[CL21] R. Conti 和 G. Lechner。“Yang-Baxter 端同态”。《伦敦数学学会杂志》103.2（2021），633–671。doi：10.1112/jlms.12387.[CL23] R. Correa da Silva 和 G. Lechner。“扭曲 Araki-Woods 代数的模结构与包含关系”。《数学物理通讯》402（2023），2339–2386。doi：10.1007/s00220-023-04773-y.[CP94] V. Chari 和 A. Pressley。《量子群指南》。剑桥大学出版社，1994年。[CP96] R. Conti 和 C. Pinzari。“关于 Cuntz 代数端同态指标的评述”。《泛函分析杂志》142（1996），369–405。[CV26] F. Cedó 和 L. Vendramin。《群、根环与 Yang-Baxter 方程：解的组合方法》。施普林格·自然，2026年。[DRW17] C. Delaney、E. C. Rowell 和 Z. Wang。“辫群的局部酉表示及其在量子计算中的应用”。《哥伦比亚数学评论》50.2（2017），211。doi：10.15446/recolma.v50n2.62211.[Dye03] H. A. Dye。“四维空间中 Yang-Baxter 方程的酉解”。《量子信息处理》2.1-2（2003），117。doi：10.1023/A:1025843426102

[Fre+85] P. Freyd、D. Yetter、J. Hoste、W. B. R. Lickorish、K. Millett 和 A. Ocneanu。《纽结与链环的一种新多项式不变量》。《美国数学会通报》12 (1985), 239–246. doi: 10.1090/S0273-0979-1985-15361-3.[FRS89] K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer。《具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。1. 一般理论》。《数学物理通讯》125 (1989), 201.[GHR12] C. Galindo、S.-M. Hong 和 E. C. Rowell。《辫群表示的广义局部化与拟局部化》。《Int. Math. Res. Not.》2013.3 (2012), 693–731. doi: 10.1093/imrn/rnr269.[GJ89] D. M. Goldschmidt 和 V. F. R. Jones。《亚辛链环不变量》。《Geom. Dedicata》31.2 (1989), 165–191. doi: 10.1007/BF00147477.[GR14] C. Galindo 和 E. C. Rowell。《由酉辫向量空间得到的辫表示》。《数学物理学杂志》55 (2014), 061702. doi: 10.1063/1.4880196.[Gur93] D. Gurevich。《Hecke 对称性与辫李代数》。《旋量、扭量、Clifford 代数与量子变形：第二届马克斯·玻恩研讨会论文集，1992年9月于波兰弗罗茨瓦夫附近举行》。Springer. 1993, 317– 326.[Hie92] J. Hietarinta。《二维常数型量子 Yang–Baxter 方程的所有解》。《Phys. Lett. A》165.3 (1992), 245–251. doi: 10.1016/0375-9601(92)90044-M.

[HMR24] J. Hietarinta、P. Martin 和 E. C. Rowell。《常数杨–巴克斯特方程的解：三维中的加性荷守恒》（2024年11月）。doi:10.1098/rspa.2023.0810.[Jon83] V. F. R. Jones。《子因子的指标》。《数学发明》72.1 (1983年), 1–25. doi:10.1007/BF01389127.[Jon87] V. F. R. Jones。《辫群的 Hecke 代数表示与链环多项式》。《数学年刊》126 (1987年), 335–388.[Jon89a] V. F. R. Jones。《关于与某些统计力学模型相关的结不变量》。《太平洋数学杂志》137.2 (1989年), 311–334. doi: 10.2140/pjm.1989.137.311.[Jon89b] V. F. R. Jones。《关于考夫曼多项式的某个取值》。《数学物理通讯》125.3 (1989年), 459–467. doi: 10.1007/BF01218412.[Lec25] G. Lechner。《酉 R 矩阵，多数具有两个特征值》。《奥伯沃尔法赫报告》（小型研讨会：Yang-Baxter 方程与辫群表示）49/2025 (2025年)。doi: 10.4171/OWR/2025/49.[LPW19] G. Lechner、U. Pennig 和 S. Wood。《无限对称群的 Yang-Baxter表示》。《数学进展》355 (2019年), 106769. doi: 10.1016/j.aim.2019.106769.[Ram91] A. Ram。《Hecke代数的特征标的 Frobenius公式》。《数学发明》106 (1991年), 461–488.[RW12] E. C. Rowell 和 Z. Wang。《酉辫群表示的局部化》。《数学物理通讯》311.3 (2012年), 595–615. doi: 10.1007/s00220-011-1386-7.[RW17] E. C. Rowell 和 Z. Wang。《拓扑量子计算数学》。2017年12月.[Tur88] V. G. Turaev。《Yang-Baxter 方程与链环不变量》。《数学发明》92.3 (1988年), 527–553. doi: 10.1007/BF01393746.[Wen88] H. Wenzl。《A_n 型 Hecke代数与子因子》。《数学发明》92.2 (1988年), 349–383.[Wen90] H. Wenzl。《辫群表示与量子杨–巴克斯特方程》。《太平洋数学杂志》145.1 (1990年), 153–180.