arXiv:2603.20203v1 [math.RA] 26 Feb 2026

热带代数特征值的广义特征向量与瑞利界

Dariush Kiani [1] 和 Hanieh Tavakolipour [2]

Abstract. 本文回顾了热带代数背景下的特征对问题。热带代数的谱理论中有一个重要事实一直被广泛忽视：由特征多项式得到的热带代数特征值，可能与满足标准特征值-特征向量方程的热带特征向量并不对应。为解决这一问题，我们借助热带数值域，定义了一种广义热带特征值-特征向量关系。我们将满足该方程的任意非零向量定义为广义热带特征向量。我们证明，对于任意给定的热带代数特征值，广义热带特征向量总是存在。我们提出了一种计算成本低廉的方法来构造这些向量。此外，我们利用热带瑞利商证明了热带矩阵的代数特征值的一个上界。

[2020]美国数学会分类：15A60, 15A18, 15A42, 14T10
极大加代数、热带代数、热带代数特征值、热带特征向量、热带数值域

1. Introduction

1.1. 动机。 热带半环是集合 $\mathbb{R}_{\max} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，其上定义了加法 $a \oplus b = \max\{a, b\}$ 和乘法 $a \otimes b = a + b$，加法的单位元为 $\varepsilon := -\infty$。这种代数结构有多种名称，包括极大加代数或极大代数。一般而言，热带代数研究以最大值或最小值代替加法的代数系统。有关热带代数及其在离散事件系统、组合优化与调度、数学建模以及代数几何中的应用，更多信息请参见 [BCOQ92, But10, MS15, HOvdW06, ABG06]。

对于任意方形热带矩阵，都存在两种不同类型的热带特征值：几何特征值和代数特征值。热带几何特征值 是满足标准特征值—特征向量方程的值。矩阵的热带几何特征值数量不超过其关联有向图的强连通分量数量 [But10]。另一方面，热带代数特征值是该矩阵的热带特征多项式的热带根 。每个 $n \times n$ 热带矩阵都有 n 个热带代数特征值（按重数计算）[ABG06]。由于热带半环中不存在加法逆元，这两个概念并不等价，尽管它们之间存在一些联系。特别地，每个热带几何特征值也是热带代数特征值，而且最大的热带几何特征值与最大的热带代数特征值相同 [CG83]。

热带代数特征值十分重要，因为许多结果揭示了矩阵的经典特征值与热带代数特征值之间的关系。事实上，热带代数特征值能够对矩阵经典特征值的模作数量级近似。近年来，随着热带代数领域的现代发展，这类结果日益受到关注

(1,2) Amirkabir University of Technology, Department of Mathematics and Computer Science
E-mail addresses: (1) dkiani@aut.ac.ir, (2) h.tavakolipour@aut.ac.ir.*Date*: 2026年3月24日。本研究由伊朗国家科学基金会（INSF）资助（资助编号 99023636）。

和数值分析 [ABG05, AGM14, TS20, Mar15, TS18]。尽管这与本文的研究没有直接关系，但值得指出的是，热带根在数值计算中具有相当重要的意义，因为它们计算效率高，而且广泛用于近似矩阵多项式特征值的模 [ABG04, NST15, BNS13, ABG16, Sha11]。

如前所述，与经典线性代数不同，对于 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ 和热带代数特征值 λ，不一定存在向量 $x \neq (\varepsilon,\ldots,\varepsilon)^T$ 满足经典的特征值-特征向量方程。这是热带线性代数中特征值问题的一项难点。一些作者研究了这个问题，以期为这种代数中的标准特征值-特征向量关系找到一种替代关系。

文献中已经研究了若干与 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的特征值相关的广义特征向量概念。具体而言，Nishida 及其合作者使用了方阵 A的热带特征多项式 P_A 的系数。他们利用了这样一个事实： A 的特征多项式的每个系数都对应于其关联图中某个多回路的权。他们将对应项达到 P_A（λ）最大值的多回路称为 λ-极大多回路。矩阵满足这种条件的基本要求是，对于每个$\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$，任意两个不同的 λ-极大多回路的长度都不相同；这给对称矩阵带来了一些挑战 [NWW20, NWW21]。

其他一些作者使用热带半环的某些扩展来定义特征向量的概念。具体而言，Izhakian 和 Rowen 的工作中采用了超热带代数 [IR11]，而 Akian 等人的工作中采用了对称化热带代数 [AGKT25]。

1.2. **广义热带特征向量**。 在 [TS19]，中，作者将热带数值域定义为与通常数值域类似的概念（定理 3.1）。他们证明，热带数值域是一个包含所有热带代数特征值的集合。此外，他们证明，对于 n 阶、由 n 构成的矩阵 A =(a_{ij})，其元素取自 $\mathbb{R}_{\max}$，热带数值域等于闭区间 [$\min_i a_{ii}$, $\max_{i,\ j} a_{ij}$]。

本文利用热带数值域，定义了与热带代数特征值相对应的热带特征向量的一种推广。对于代数热带特征值 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$，存在大小为 $n \times 1$ 的广义热带特征向量 x，以及 $x \neq (\varepsilon,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon)^T$，它们满足广义特征值-特征向量方程

$$x^T \otimes A \otimes x = \lambda \otimes x^T \otimes x,$$

我们证明，对于 A 的每个代数特征值，至少存在一个广义热带特征向量 $x \neq (\varepsilon、\ldots\ldots、\ \varepsilon)^T$，其定义在 $\mathbb{R}_{\max}$ 上。我们提出了一种低复杂度算法来构造这些向量。最后，我们利用热带代数特征值和广义特征向量的性质，证明了一个类似于经典 Rayleigh 商的定理（定理 6.4）。与经典 Rayleigh 定理不同，即使矩阵不是对称的，热带版本仍然成立。

本文其余部分安排如下。第2节回顾必要的预备知识，涵盖热带代数、特征多项式和热带特征值。第3节介绍热带数值域的定义及其性质。第4节介绍广义热带特征向量，并分析其性质。第5节介绍用于计算这些广义特征向量的高效算法。第6节为热带代数特征值建立热带瑞利商上界。最后，第7节总结本文，概述我们的贡献并展望未来工作。

2. 预备知识

本节回顾有关热带代数的基本定义和结果，重点介绍热带多项式及其根。我们进一步讨论热带几何特征值与代数特征值之间的重要区别

。更多信息请参见 [BCOQ92、But10、AGT24]。

2.1. 热带代数、多项式与根。 热带半环记作 $\mathbb{R}_{\max}$，是配备两种运算的集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$：热带加法（$a \oplus b = \max\{a, b\}$）和热带乘法（$a \otimes b = a + b$）。热带加法的单位元（零元，$\varepsilon$）是$-\infty$。以下恒等式是本文的基础：中性元（$\varepsilon$）对 $\otimes$（$a \otimes \varepsilon = \varepsilon$）具有吸收性；热带幂 $a^{\otimes b}$对应于标准乘法（$a \times b$），其中 $a, b \neq \varepsilon$；任意非ε 元素 a 的热带逆元都是其相反数（$a^{\otimes -1} = -a$）。

定义在 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的形式多项式 P（最大值多项式）与经典代数中的定义相同。对于任意次数为 n 的形式多项式 P，我们将其关联到一个多项式函数。

定义 2.1（热带根）。 P 的非ε热带根定义为使相应多项式函数的最大值至少在两处取得的点（即由至少两个不同的单项式取得）。如果 P 没有常数项，则称 P 在 ε处具有一个热带根。

等价地，P的非ε 热带根恰好对应于将相应多项式函数限制在 $\mathbb{R}$上时的不可微点。一个著名结果指出，$\mathbb{R}_{\max}$ 上的每个次数为 n的形式多项式 P 恰有 n 个热带根 [CGM80]。

2.2. 热带矩阵运算与特征多项式。 将热带运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 推广到向量和矩阵后，便可以定义经典线性代数中的构造：矩阵–矩阵、矩阵–向量和矩阵标量乘积，以及矩阵加法；这些运算都与经典线性代数中的相应运算类似。我们用 $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$表示 $\mathbb{R}_{\max}$上的 $m \times n$ 矩阵集合，用 $\mathbb{R}_{\max}^{n}$表示 $n \times 1$向量集合。此外，对于 $n \in \mathbb{N}$，$[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。

定义 2.2（热带代数特征值）。 设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。 A 的热带代数特征值记作 $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$，它们是其热带特征多项式$P_A$的热带根。

这里使用代数 一词，是因为热带代数特征值 λ 不一定满足特征值-特征向量方程 $A \otimes x = \lambda \otimes x$，即不一定存在某个非零向量 $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$使得 $x \neq (\varepsilon, \ldots\ldots, \varepsilon)^T$。

注 2.3。 每个热带几何特征值都是热带代数特征值，但反之并不总是成立。

注 2.4。 最大的热带代数特征值等于最大的热带几何特征值。

3. Tropical numerical range

本节回顾 [TS19] 中的若干重要结果。在以下讨论中，我们使用向量 $v = (v_i) \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ 的最大范数，其中 $v \neq (\varepsilon, \ldots\ldots, \varepsilon)^T$，如 [But10，第 60]，页所引入，其定义为

$$\|v\| = \max\{v_1, \ldots, v_n\} .$$

若满足 $\|v\| = 0$，则称向量 v为缩放。假设 $\max\{v_1, \ldots, v_n\} = v^*$。那么该向量

$$(v^*)^{\otimes -1} \otimes v = (v_1 - v^*, \ldots, v_n - v^*) , \tag{1}$$

表示 v的缩放形式。

定义 3.1（热带数值域）。 假设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。 A 的热带数值域（值域）定义为

$$F_{\max}(A) := \{(x^T \otimes A \otimes x) \otimes (x^T \otimes x)^{\otimes -1} : x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}, x \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T\}.$$

注意,

$$x^T \otimes A \otimes x = \max_{i,j\in[n]} x_i + a_{ij} + x_j. \tag{2}$$

并令 $x^* = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$x^T \otimes x = 2x^*. \tag{3}$$

引理 3.2. 设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。则数值集合 $\{x^T \otimes A \otimes x : \quad x \in \mathbb{R}_{\max}^n, \|x\| = 0\}$ 等于$F_{\max}(A)$。

定理 3.3. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。我们有

$$F_{\max}(A) = \left[\min_{i\in[n]} a_{ii}, \max_{i,j\in[n]} a_{ij}\right].$$

定理 3.4. 如果 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$，那么 A 的每个热带代数特征值都是 $F_{\max}(A)$ 的一个元素 .

4. Generalized tropical eigenvector

本节在陈述定理 4.1 后，定义广义热带特征向量。随后，在定理 5.1 和定理 5.2 中，我们推导出用于确定该广义热带特征向量的明确且计算成本低廉的公式。这些推导出的公式在图1中得到了简明总结。

定理 4.1。 令 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ 为 A的一个热带代数特征值。则存在 $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^n$，使得 $x \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$，并且满足以下方程:

$$x^T \otimes A \otimes x = \lambda \otimes x^T \otimes x \ .$$

此外，令 y 表示 x的缩放形式。则有

$$y^T \otimes A \otimes y = \lambda \ .$$

证明。 根据定理 3.4，保证存在 $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$使得 $x \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$。此外，通过定义 $x^* = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$并应用方程（2）和（3）中的结果，我们得到以下方程

$$\max_{i,j\in[n]} x_i + a_{ij} + x_j = \lambda + 2x^* \ .$$

重新整理各项可得:

$$\max_{i,j\in[n]} x_i + a_{ij} + x_j - 2x^* = \lambda \ .$$

因此，根据方程（1）定义缩放向量 $y = (y_i)$，使得 $y_i = x_i - x^*$，方程变为

$$\max_{i,j\in[n]} (x_i - x^*) + a_{ij} + (x_j - x^*) = \max_{i,j\in[n]} y_i + a_{ij} + y_j = \lambda \ ,$$

从而成功得到所需结果。 □

定义 4.2 （广义热带特征向量）。 设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ 是 A 的热带代数特征值。那么满足以下条件的向量 $x \in \mathbb{R}_{\max}^n, x \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^T$

$$x^T \otimes A \otimes x = \lambda \otimes x^T \otimes x \ ,$$

称为与特征值 λ对应的广义热带特征向量。

5. Computation of generalized tropical eigenvectors

接下来，我们将推导一个显式公式，用于求出与 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$的热带特征值相对应的广义热带特征向量。为清晰易懂起见，我们在图1中简要概括了所有内容。令 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。在定理5.1中，我们考察 A 的所有对角元均小于或等于其热带代数特征值 λ的条件。该定理还要求存在一个元素 a_{pq} ，使得 $a_{pq} \geq \lambda$。我们注意到，这一条件始终成立，因为根据定理 3.3， A 的最大热带代数特征值不超过 A的最大元素。

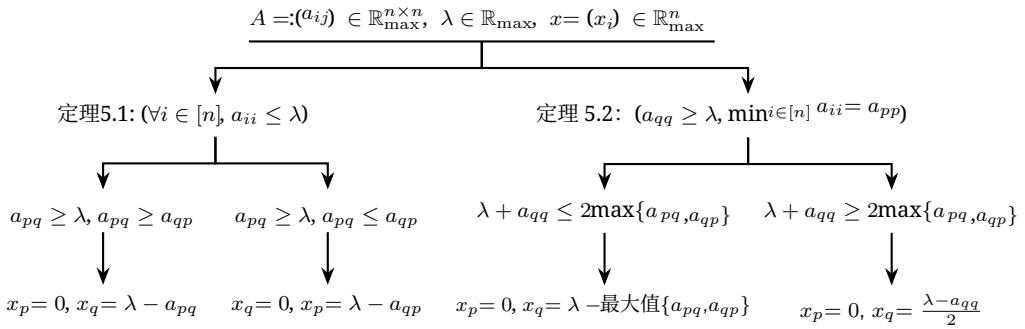

图1。 对应于特征值 λ 的广义热带特征向量的显式公式。

定理5.1。 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ 是一个具有热带特征值 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ 的矩阵，使得 $a_{ii} \leq \lambda$ 对所有 $i \in [n]$ 均成立。

i) 如果 p、$q \in [n]$ 满足 $a_{pq} \geq \lambda$ 和 $a_{pq} \geq a_{qp}$，则通过 $x_p = 0$、$x_q = \lambda - a_{pq}$ 以及 $i \in [n] \setminus p$、q 的 $x_i = \varepsilon$ 定义 $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$。ii) 如果 p、$q \in [n]$ 满足 $a_{pq} \geq \lambda$ 和 $a_{qp} \geq a_{pq}$，则通过 $x_q = 0$、$x_p = \lambda - a_{qp}$ 以及 $i \in [n] \setminus p$、q 的 $x_i = \varepsilon$ 定义 $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$。

在这两种情况下，x 是与 λ 相关联的 $\mathbb{R}_{\max}^{n}$ 中的广义热带特征向量，并且 $\|x\| = 0$.

证明。 第一种情况的证明如下；第二种情况可通过类似的论证得到。根据构造， $x_p = 0$ 和 $x_q \leq 0$（因为 $x_q = \lambda - a_{pq} \leq 0$），而 x 的所有其他项均等于ε。因此， x 的最大项为 0，从而 $\|x\| = 0$。另一方面，根据$p \neq q$ 的公式（2），我们有

$$\begin{aligned} x^T \otimes A \otimes x &= \max_{i,j\in[n]} \{x_i + a_{ij} + x_j\} \\ &= \max\{x_p + x_q + a_{pq}, x_q + x_p + a_{qp}, 2x_p + a_{pp}, 2x_q + a_{qq}, \varepsilon\} \\ &= \max\{\lambda, \lambda - a_{pq} + a_{qp}, a_{pp}, 2\lambda - 2a_{pq} + a_{qq}\} = \lambda, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式源于以下事实

$$\lambda - a_{pq} + a_{qp} \leq \lambda,\ a_{pp} \leq \lambda,\ 2\lambda - 2a_{pq} + a_{qq} \leq \lambda.$$

现在，假设 $p = q$。那么 $a_{pq} = a_{pp} = a_{qq} \geq \lambda$ ，并且 $a_{pq} = a_{pp} = a_{qq} \leq \lambda$，因此

$$a_{pq} = a_{pp} = a_{qq} = \lambda. \tag{4}$$

因此，对于 $i \neq p = q$， $x_p = x_q = 0$ 和 $x_i = \varepsilon$。所以，

$$\begin{aligned} x^T \otimes A \otimes x &= \max_{i,j\in[n]} \{x_i + a_{ij} + x_j\} \\ &= \max\{x_p + x_q + a_{pq}, x_q + x_p + a_{qp}, 2x_p + a_{pp}, 2x_q + a_{qq}, \varepsilon\} \\ &= \max\{a_{pq}, a_{qp}, a_{pp}, a_{qq}, \varepsilon\} = \lambda\,, \end{aligned}$$

最后一个等式由公式（4）得出。由此证明了该结论。 □

在下一个定理中，我们考虑 A 的至少一个对角元素大于或等于 λ 的情形。

定理 5.2. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ 的热带代数特征值为 $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$。假设存在 $q \in [n]$ 使得 $a_{qq} \geq \lambda$，并令 $p \in [n]$ 满足

$$\min_{i\in[n]} a_{ii} = a_{pp}.$$

对所有 $i \in [n] \setminus \{p, q\}$，定义 $x_p = 0$ 和 $x_i = \varepsilon$。为确定 x_q，考虑以下两种情形：

i) 如果 $\lambda + a_{qq} \leq 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\}$，则令

$$x_q = \lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\}.$$

ii) 如果 $\lambda + a_{qq} \geq 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\}$，则令

$$x_q = \frac{\lambda - a_{qq}}{2}.$$

那么，向量 $x = (x_i) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ 是与 λ 相关联的广义热带特征向量，使得 $\|x\| = 0$。

证明。 **第一部分的证明：** 首先令 $p \neq q$。由于 $\lambda + a_{qq} \leq 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\}$ 且 $\lambda \leq a_{qq}$，因此

$$\lambda \leq \max\{a_{pq}, a_{qp}\}. \tag{5}$$

因此，根据 x 的定义，我们有 $x_p = 0$，并由公式（5）

$$x_q = \lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\} \leq 0 \quad ,$$

其余所有分量均等于 ε。因此， x 的最大项为 0，从而 $\|x\| = 0$。此外，

$$\begin{aligned} x^T \otimes A \otimes x &= \max_{i,j\in[n]} \{x_i + a_{ij} + x_j\} \\ &= \max\left\{x_p + x_q + a_{pq},\ x_q + x_p + a_{qp},\ 2x_p + a_{pp},\ 2x_q + a_{qq},\ \varepsilon\right\} \\ &= \max\left\{\lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{pq},\ \lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{qp},\ a_{pp},\ 2\lambda - 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{qq}\right\} \\ &= \lambda \quad , \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由以下事实得出：

$$\lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{pq} \leq \lambda, \qquad \lambda - \max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{qp} \leq \lambda \quad ,$$

并且这两个表达式中至少有一个等于 λ。此外，由定理 3.3 可得

$$\min_{i\in[n]} a_{ii} = a_{pp} \leq \lambda \quad .$$

最后，利用第一部分中的假设，我们得到

$$2\lambda - 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\} + a_{qq} = \lambda + \big(\lambda + a_{qq} - 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\}\big) \leq \lambda.$$

现在假设 $p = q$。那么 $a_{pp} = a_{qq} = a_{pq} = a_{qp}$。由于 $a_{pp} \leq \lambda$ 和 $a_{qq} \geq \lambda$，我们有

$$a_{pp} = a_{qq} = a_{pq} = a_{qp} = \lambda \quad ,$$

并且 $x_p = x_q = 0$。因此 $\|x\| = 0$，并且

$$\begin{aligned} x^T \otimes A \otimes x &= \max_{i,j\in[n]}\{x_i + a_{ij} + x_j\} \\ &= \max\{x_p + x_q + a_{pq},\ x_q + x_p + a_{qp},\ 2x_p + a_{pp},\ 2x_q + a_{qq},\ \varepsilon\} \\ &= \max\{\lambda,\ \varepsilon\} = \lambda \quad , \end{aligned}$$

由此完成了第一部分的证明。

第二部分的证明： 首先，令 $p \neq q$。由于 $\lambda \leq a_{qq}$，我们有 $x_q = \frac{\lambda - a_{qq}}{2} \leq 0$。因此，根据 x 的定义，$x_p = 0$、$x_q \leq 0$，而所有其他项均为 ε。所以，x 的最大项为 0，从而得到 $\|x\| = 0$。此外，

$$\begin{aligned} x^T \otimes A \otimes x &= \max_{i,j\in[n]}\{x_i + a_{ij} + x_j\} \\ &= \max\{x_p + x_q + a_{pq}, x_q + x_p + a_{qp}, 2x_p + a_{pp}, 2x_q + a_{qq}, \varepsilon\} \\ &= \max\{\frac{\lambda - a_{qq} + 2a_{pq}}{2}, \frac{\lambda - a_{qq} + 2a_{qp}}{2}, a_{pp}, \lambda, \varepsilon\} = \lambda, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由以下事实得出：$a_{pp} \leq \lambda$，并且还因为

$$\lambda + a_{qq} \geq 2\max\{a_{pq}, a_{qp}\} \quad ,$$

因此

$$2\max\{a_{pq}, a_{qp}\} - a_{qq} \leq \lambda \quad . \tag{6}$$

因此，由方程 (6) 可得，

$$\max\{\frac{\lambda - a_{qq} + 2a_{pq}}{2}, \frac{\lambda - a_{qq} + 2a_{qp}}{2}\} \leq \frac{\lambda + (2\max\{a_{pq}, a_{qp}\} - a_{qq})}{2} \leq \frac{2\lambda}{2} = \lambda \quad .$$

因此结论得证。对于 $p = q$ 的情形，证明与第一部分类似。

□

推论 5.3. 设 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$。根据定理 *5.1* 和定理 *5.2*，对于每个代数热带特征值$\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$，都可以显式构造一个与 λ 相关联的广义热带特征向量。

例 5.4. 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

A 的代数热带特征值为

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 5\ .$$

i）（与 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量）为了求与 λ_1 相关联的广义热带特征向量，我们应用定理 5.2。我们有 $\min_{i\in[4]} a_{ii} = a_{33} = 0$。取 $p = 3$ 和 $q = 4$。于是

$$\lambda_1 + a_{qq} = 0 + 5 \leq 2\max\{a_{34}, a_{43}\} = 2 \times 3 = 6\ ,$$

根据定理 5.2 的第一部分，我们得到

$$x_q = 0 - \max\{a_{34}, a_{43}\} = 0 - 3 = -3\ .$$

因此 $x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & -3 \end{pmatrix}^T$。

ii)（特征向量 或对应于 $\lambda_2 = 2$) 再次应用定理 5.2，其中 $p = 3$ 和 $q = 4$:

$$\lambda_2 + a_{qq} = 2 + 5 \geq 2\max\{a_{34}, a_{43}\} = 2 \times 3 = 6\ .$$

因此，根据定理 5.2 的第二部分

$$x_q = \frac{2-5}{2} = -1.5.$$

所以，$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & -1.5 \end{pmatrix}^T$。

iii)（对应于 $\lambda_3 = 4$ 的特征向量）对 $p = 3$ 和 $q = 4$ 采用相同步骤，并使用定理 5.2，可得

$$\lambda_3 + a_{qq} = 4 + 5 \geq 2\max\{a_{34}, a_{43}\} = 2 \times 3 = 6\ .$$

根据定理 5.2 的第二部分

$$x_q = \frac{4-5}{2} = -0.5.$$

因此，$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & -0.5 \end{pmatrix}^T$。

iv)（与 $\lambda_4 = 5$ 对应的特征向量）最后，我们将定理5.1应用于 $a_{pq} = a_{14} = 5$。根据定理5.1的第一部分，我们有

$$x_p = x_1 = 0,\ x_q = x_4 = 5 - 5 = 0.$$

因此，$x = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$。

6. Tropical Rayleigh quotient upper bound for λ_k

热带瑞利商方法揭示了热带代数特征值的一个重要性质。尽管经典瑞利商定理的证明需要矩阵为厄米特矩阵这一条件来保证上界，但我们表明，对于热带矩阵，无需作出此类对称性假设。下文中，我们首先回顾经典瑞利商定理，随后给出热带代数上的两个定义，之后将证明一个关于热带广义特征向量的重要性质。

定理 6.1（经典瑞利商定理）。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为厄米特矩阵，且设$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 为其按代数顺序排列的特征值。设 $k \in [n]$，并令 x_i 表示与 λ_i 对应的经典特征向量，且令 $S =$张成空间$\{x_k, \ldots, x_n\}$。则

$$\lambda_k = \min_{\substack{u\in S \\ u\neq(0,\ldots,0)^T}} \frac{u^T A u}{u^T u}$$

定义 6.2 ([但是10])。 向量 $v = (v_1, \cdots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n_{\max}$ 称为$S \subseteq \mathbb{R}^n_{\max}$ 的最大组合，当且仅当 $v = \sum^{\oplus}_{x\in S} \alpha_x \otimes x$， $\alpha_x \in \mathbb{R}_{\max}$，其中只有有限个 α_x 是有限值。

定义 6.3。 [但是10] 所有 S 的最大组合构成的集合记为 span(S)。

我们将经典瑞利商定理推广到热带环境，并利用热带代数特征值和广义特征向量推导出一个新结果。该定理意义重大，因为它对非对称矩阵普遍成立。

定理 6.4。 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$ 是一个矩阵，其热带代数特征值满足 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$。记对应于 λ_i 的缩放的广义热带特征向量为 x_i ，并令 $S =$张成空间$\{x_k, \ldots, x_n\}$。则有以下等式：

$$\min_{\substack{u\in S \\ u\neq(\varepsilon,\ldots,\varepsilon)^T}} \left((u^T \otimes A \otimes u) \otimes (u^T \otimes u)^{\otimes -1}\right) = \lambda_k.$$

证明。 在整个证明中，我们用 $k{:}n$ 表示指标集 $\{k,\dots,n\}$。令 $u\in S$。那么 u 是 S 的最大组合。因此 $u=\sum_{i\in k:\ n}^{\oplus} c_i x_{i_\circ}$ 于是

$$\begin{aligned}
u^T\otimes A\otimes u &= \Big(\sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes x_i^T\Big)\otimes A\otimes\Big(\sum_{j\in k:n}^{\oplus} c_j\otimes x_j\Big)\\
&= \Big(\sum_{i=j,\ i,j\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes x_i^T\otimes A\otimes c_j\otimes x_j\Big)\oplus\Big(\sum_{i\neq j,\ i,j\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes x_i^T\otimes A\otimes c_j\otimes x_j\Big)\\
&= \Big(\sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes c_i\otimes x_i^T\otimes A\otimes x_i\Big)\oplus\Big(\sum_{i\neq j,\ i,j\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes c_j\otimes x_i^T\otimes A\otimes x_j\Big)\\
&= \sum_{i\in k:n} c_i^{\otimes 2}\lambda_i\oplus\Big(\sum_{i\neq j,\ i,j\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes x_i^T\otimes A\otimes c_j\otimes x_j\Big)\\
&\geq \Big(\lambda_k\otimes\sum_{i=k:n} c_i^{\otimes 2}\Big)\oplus\Big(\sum_{i\neq j,i,j\in k:n} c_i\otimes x_i^T\otimes A\otimes x_j\otimes c_j\Big)\\
&\geq \lambda_k\otimes\sum_{i=k:n} c_i^{\otimes 2}.
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式直接由 $\oplus$ 的最大化性质得出。因此我们有

$$u^T\otimes A\otimes u\geq\lambda_k\otimes\sum_{i=k:n} c_i^{\otimes 2}\ . \tag{7}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
u^T\otimes u &= \big(\sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i\otimes x_i^T\big)\otimes\big(\sum_{j\in k:n}^{\oplus} c_j\otimes x_j\big)\\
&= \sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i^{\otimes 2}\oplus\sum_{i\neq j,i,j\in k:n} c_i\otimes x_i^T\otimes c_j\otimes x_j\ ,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的： $\|x_i\|=0$ ，因此 $x_i^T\otimes x_i=0$。由于 $\|x_i\|=\|x_j\|=0$，所以 $q_{ij}:=x_i^T\otimes x_j\leq 0$。因此，

$$\sum_{i\neq j,i,j\in k:n} c_i\otimes x_i^T\otimes c_j\otimes x_j=\max_{i\neq j,i,j\in k:n}\{c_i+c_j+q_{ij}\}\leq\max_{i\in k:n}\{2c_i\}=2\max_{i\in k:n}\{c_i\}=\sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i^{\otimes 2}\ .$$

Thus

$$u^T\otimes u=\sum_{i\in k:n}^{\oplus} c_i^{\otimes 2}. \tag{8}$$

结合定理 6.4 和公式（8）可得

$$\lambda_k\leq\min_{u\in S,u\neq(\varepsilon,\dots,\varepsilon)^T}(u^T\otimes A\otimes u)\otimes(u^T\otimes u)^{\otimes -1}\ . \tag{9}$$

现在，令 $u=x_k$ ，可得

$$(x_k^T\otimes A\otimes x_k)\otimes(x_k^T\otimes x_k)^{\otimes -1}=\lambda_k. \tag{10}$$

最后，结合公式（9）和（10）即可得出结果。 □

References

[ABG04] M Akian、R Bapat 和 S Gaubert。矩阵束特征值的扰动与最优指派问题。 *Comptes Rendus Mathematique*, 339(2):103–108，2004。[ABG05] M Akian、R Bapat 和 S Gaubert。特征值扰动理论中的极小加方法及广义 Lidskii-Vishik-Ljusternik 定理，2005。arXiv:math.SP/0402090。[ABG06] Marianne Akian、Ravindra Bapat、St´ *Handbook of linear algebra* 39 10 14, 2006 ephane Gaubert 等。极大加代数。，: – 。[ABG16] Marianne Akian、Ravindra Bapat 和 St´ephane Gaubert。矩阵多项式特征值的非阿基米德赋值。 *Linear Algebra and its Applications*, 498:592–627，2016。[AGKT25] Marianne Akian、Stephane Gaubert、Dariush Kiani 和 Hanieh Tavakolipour。对称化热带代数和赋值有序域上正定矩阵的谱性质，2025。[AGM14] M Akian 、 S Gaubert 和 A Marchesini。矩阵特征值的热带界。 *Linear Algebra and its Applications* 446 281 303, 2014 ，: – 。[AGT24] Marianne Akian、Stephane Gaubert 和 Hanieh Tavakolipour。对称化热带半环上的多项式因式分解以及有序赋值域上的笛卡尔符号法则，2024。[BCOQ92] Fran¸ *Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems* 1992 cois Baccelli、Guy Cohen、Geert Jan Olsder 和 Jean-Pierre Quadrat。[。John Wiley & Sons Ltd，13] 。 *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 34 4 1708 1727, 2013 BNS[D. A Bini、V Noferini 和 M Sharify。矩阵多项式特征值定位。10] ，( ): – 。 *Max-linear Systems: Theory and Algorithms* *Journal of mathematical analysis and applications* 95 1 110 116, 1983 But[P. Butkovi˘c。83] 。Springer，2010。 CG[Ray A Cuninghame-Green。矩阵的特征极大多项式。80] ，( ): – 。 *Discrete Applied Mathematics* 2 4 267 294, 1980 CGM[R. A. Cuninghame-Green 和 P.F.J. Meijer。分段线性极小极大问题的一种代数。06] ，( ): – 。 *Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications* 13 HOvdW[Bernd Heidergott、Geert Jan Olsder 和 Jacob W van der Woude。11] ，第 *J. Algebra*卷。普林斯顿大学出版社，2006。[IR15] Zur Izhakian 和 Louis Rowen。超热带矩阵代数。III：矩阵幂及其超热带特征值。 *Tropical methods for the localization of eigenvalues and application to their numerical computation* 2015 ，341(1):125–149，2011。[Mar15] Andrea Marchesini。 *Introduction to tropical geometry*。博士论文，巴黎综合理工学院博士生院，[。15] MS *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* Diane Maclagan 和 Bernd Sturmfels。[，第161卷。美国数学学会，2015。20] NST *Appl. Math.* Vanni Noferini、Meisam Sharify 和 Francoise Tisseur。热带根作为矩阵多项式特征值的近似。 *Praha*, 36(1):138–157，2015。[NWW21] Yuki Nishida、Sennosuke Watanabe 和 Yoshihide Watanabe。关于与极大加特征多项式的根相关联的向量。[11] ，65(6):785–805，2020。 *Scaling Algorithms and Tropical Methods in Numerical Matrix Analysis* NWW[Yuki Nishida、Sennosuke Watanabe 和 Yoshihide Watanabe。极大加代数上代数特征向量的线性无关性与正交性，2021。预印本。18] Sha *Linear Algebra and its Applications* M Sharify。[。博士论文，Citeseer，2011。19] TS *Linear and Multilinear Algebra* 67 10 1985 1998, 2019 Hanieh Tavakolipour 和 Fatemeh Shakeri。关于三对角 Toeplitz 矩阵的热带特征值。[，539:198–218，2018。20] TS *Numerical Linear Algebra with Applications* Hanieh Tavakolipour 和 Fatemeh Shakeri。关于热带代数中的数值域。，( ): – 。TSHanieh Tavakolipour 和 Fatemeh Shakeri。指数参数化五对角矩阵的特征值渐近行为。，27(6):e2330，2020。