arXiv:2603.20269v1 [math.AT] 14 Mar 2026

偏序集上由高度差函数导出的交错距离

青木俊孝

Abstract. 交错距离是比较持久模的基础工具，已广泛应用于拓扑数据分析。其定义通常基于指标偏序集上的平移结构（平移运算），但在一般偏序集上，这类结构可能十分稀少，因此限制了这一框架的适用性。

本文针对任意偏序集上的函子范畴，引入一种由 *height-difference function* ρ诱导的新型交错距离。其核心思想是为 ρ 关联一个以$\mathbb{R}_{\geq 0}$为指标的伴随自函子族，该族作用于 $\mathrm{Fun}(P, \mathcal{C})$，发挥广义平移的作用，使我们能够以纯粹的范畴论方式表述交错，并定义称为高度交错距离的距离 d_ρ。特别地，任意高度函数（即实值保序映射）都会规范地诱导出这样的高度差函数，因此我们的框架在有限偏序集上仍然适用。此外，当 $P = \mathbb{R}^d$ 和$\rho = \rho_{\mathrm{diag}}$时，所得距离与多参数持久模的经典交错距离一致。然而，一般而言， d_ρ 不一定满足三角不等式。在适当的假设下（例如，(P, ρ)满足 CIP；当 P 为树形偏序集时，该条件自动成立），我们证明三角不等式在一个由常数 $c(\rho)$界定的加性缺陷范围内成立；特别是，当$c(\rho) = 0$ 时，这就得到一个扩展伪距离。我们还证明了关于高度差函数扰动的稳定性： ρ 的微小变化会导致相应高度交错距离的微小变化。最后，我们在这一框架下研究经典交错中侵蚀型构造的类似形式。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 由高度差函数诱导的交错距离 6 4. 稳定性 12 5. 满足放宽三角不等式的距离 14 6. Vect 上持久模的高度交错$_k$ 217. 讨论与展望 28 附录 A. 伴随的伴随变换对应 28 附录 B. 偏序集的极限、余极限与终性 29 致谢 31 参考文献 31

1. Introduction

持久同调 [ELZ02, ZC05] 是拓扑数据分析中的一种方法，用于研究空间的嵌套滤过过程中拓扑特征（例如连通分支和孔洞）的演变，并将这些信息概括为持久图，即出生–死亡对的多重集。它已应用于多个领域，包括材料科学 [HNH+16]、进化生物学 [CCR13], 、图像分析 [QTT+19] 等 [HKNU17, AAEF19]。在实际应用中，这一框架的一个显著特点是具有稳定性结果：输入的微小扰动会使输出发生可控变化，因此持久

Key words and phrases. 持久模、交错距离、高度差函数、伴随函子、偏序集指标的持久化模。MSC2020：55 N31、16G20、18A40。

同调可用于真实世界数据 [CSEH07, CCSG+09]。从代数的角度看，持久同调产生持久模，即从偏序集到向量空间范畴的函子。交错距离在持久模层面上对这类比较进行形式化，并在建立这些稳定性结果方面发挥关键作用 [CCSG+09, Les15]。随着人们对多参数持久同调兴趣日益浓厚，定量比较也变得愈发重要。

背景：经典交错距离。 交错的概念刻画了范畴中对象之间的接近程度，通常通过一族由 $\epsilon \geq 0$ 参数化的平移运算来定义。 ϵ-交错可视为一种近似同构，而此类 ϵ 的下确界定义了相应的交错距离。特别地，0-交错恰好是同构；而两个不同构的对象可能对任意小的 $\epsilon > 0$ 都 ϵ交错，因此其交错距离可以为零。这一观点已在多种情形中得到表述，包括 [BdSS15 意义下的持久模、带流范畴 [dSMS18]，以及更一般的 2-范畴情形 [MN26]。

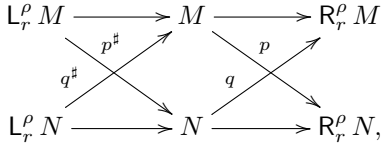
我们聚焦于持久模范畴，更一般地，研究函子范畴 $\mathrm{Fun}(P, \mathcal{C})$，它由偏序集 P 到范畴 $\mathcal{C}$ 的函子组成。在这一情形下，$\mathrm{Fun}(P, \mathcal{C})$ 上的交错距离由作用在 P 上的超线性平移族 Ω 构造而成。该族由平移 $\Omega_\epsilon \colon P \to P$（满足 $p \leq \Omega_\epsilon(p)$ 的保序自映射）组成，其中 $\epsilon \geq 0$，并带有相容的结构 $\Omega_\epsilon \circ \Omega_\delta \leq \Omega_{\epsilon+\delta}$。在 $P = \mathbb{R}^d$ 的情形下（采用乘积序），标准选择是对角移位 $\Omega_\epsilon(x) = x + (\epsilon, \ldots, \epsilon)$。由此得到的交错距离已得到广泛研究，涵盖基本性质 [Les15, GM23, BL20, BS25], 稳定性结果 [BL24, Bje21], 计算复杂度 [BBK20], , 以及与其他距离和不变量的联系 [MP20, CKM24, KS25]。此外，关于偏序集上持久模交错的近期研究，请参阅 [BCM20, EMY23, Bje25, MM17] 。

这种基于平移的交错框架依赖于 P 的内部序结构，而在一般偏序集中，合适的平移可能十分稀缺。特别是，当某个平移具有不动点时（例如在有限偏序集上），交错条件会在该点强制给出一个同构；否则便不可能存在交错，这可能导致无穷大的交错距离。因此，合适平移的可用性在该框架中发挥着关键作用。这自然引出了一个问题：能否发展出一种更灵活的定量比较框架，使其即使在有限偏序集上也仍然有用。

我们的框架与结果。 本文基于一个由 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 索引的自函子伴随族，在 $\mathrm{Fun}(P, \mathcal{C})$ 上引入一种新的交错型距离。输入是定义在 P 上的高度差函数 ρ，即定义在可比对上的非负函数，并满足沿链的超可加性条件（见定义 3.2）。例如，任意高度函数 $\phi \colon P \to \mathbb{R}$（即实值保序映射）都会自然地诱导出一个高度差函数。给定 ρ，我们为每个 $r \geq 0$ 关联一个伴随对 $\mathsf{L}^\rho_r \dashv \mathsf{R}^\rho_r$（命题 3.5），

$$\mathsf{L}^\rho_r \colon \mathrm{Fun}(P, \mathcal{C}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(P, \mathcal{C}) \colon \mathsf{R}^\rho_r .$$

这些函子受到图表的闩锁与匹配构造的启发：L^ρ_r 通过余极限汇集每个点的、由 ρ 控制的下部 r 邻域中的信息，而 R^ρ_r 则通过极限汇集相应上部 r 邻域中的信息。从这个意义上说，它们发挥着尺度为 r 的广义移位的作用。这使我们能够定义 M 与 N 之间关于 ρ 的交错型图表：



其中，$p^\sharp$ 和 $q^\sharp$ 表示在伴随 $\mathsf{L}^\rho_r \dashv \mathsf{R}^\rho_r$ 下 p 和 q 对应的态射，水平箭头是由（余）极限构造导出的典范映射。随后，$d_\rho(M, N)$ 定义为使得此类图表存在的 $r \geq 0$ 的下确界。我们将 d_ρ 称为关于 ρ的高度交错距离。正如我们稍后将要讨论的，它一般未必是真正的距离，因为三角不等式可能不成立。

本文旨在发展高度交错距离，将其作为分析函子范畴 Fun(P, $\mathcal{C}$) 的工具，并研究其基本性质。首先，我们证明，我们的距离能够还原 Fun($\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}$) 上的经典交错距离。事实上，当 $P = \mathbb{R}^d$ 和 $\rho = \rho_{\text{diag}}$时，函子 R_r^ρ 和 L_r^ρ 分别与通常的 r-平移和 $(-r)$-平移一致，因此我们的交错图表与经典交错图表相同，交错距离也就相同（命题 3.11）。

其次，我们为高度交错距离确立了两种稳定性性质，使我们能够比较不同指标偏序集以及不同高度差函数选择下的这一量。拉回稳定性（命题 4.1）表明，高度交错相对于沿保序映射进行的拉回具有函子性；特别是，相关距离在拉回下不会增加。另一方面，我们证明了以下函数稳定性结果：高度差函数的微小变化会导致相关高度交错距离发生微小变化。这里， $\delta(\rho_1, \rho_2)$表示 ρ_1 与 ρ_2之间的畸变。

定理 1.1 （定理 4.4）。赋值 $\rho \mapsto d_\rho$ 相对于 δ是1-利普希茨的。也就是说，对于定义在 P上的任意高度差函数 ρ_1、 ρ_2，

$$\operatorname{dist}_\infty(d_{\rho_1}, d_{\rho_2}) \leq \delta(\rho_1, \rho_2).$$

第三，我们讨论 d_ρ 的三角不等式。在我们的框架中，三角不等式可能不成立，因为将一个 r-高度交错与一个 s-高度交错复合，不一定会得到一个 $(r+s)$-高度交错：底层（余）极限构造之间所需的比较映射未必能以典范方式存在。为解决这一问题，我们采用可加松弛三角不等式，允许存在加性缺陷。我们将所需比较映射的存在性与 (P, ρ) 的连通交性质（CIP）（见定义 5.2）联系起来；该性质提供了一种构造相应自然变换的典范方法。这样，我们便能复合 r-和 s-高度交错，得到一个 $(r+s+c)$-高度交错，其中加性缺陷 c 由常数 $c(\rho)$ 控制。因此，我们得到关于 d_ρ 的以下松弛三角不等式。

定理 1.2 (定理 5.5)。 如果 (P, ρ) 具有连通交性质，那么 d_ρ 满足可加 $c(\rho)$-松弛三角不等式。特别地，如果 $c(\rho) = 0$，那么 d_ρ 定义了一个扩展伪距离。

例如，对于无菱形偏序集上的任意高度差函数，CIP 都成立，其中包括任意定向的之字形偏序集和树偏序集（命题 5.9）；而对于四元素菱形偏序集，采用一种自然的 ρ 选择时，CIP 就可能失效。将函数稳定性（定理 1.1）与定理 1.2 结合，可得如下推论：一旦通过 CIP 为某个给定的高度差函数建立了松弛三角不等式，该不等式便会自动推广到其他高度差函数，误差至多为由畸变控制的加性缺陷。

最后，我们将讨论范围限定在 $\mathcal{C}$ =向量空间范畴$_k$，即域 k 上的向量空间范畴，并研究我们的构造与经典基于平移的交错之间的关系。具体而言，我们展示了经典情形中若干基本性质的类似结果，包括通过侵蚀邻域，从给定持久模的适当子商系统地构造 r-高度交错（定理 6.7），以及比较高度交错距离 d_ρ 与侵蚀邻域距离 $d_{\rho\text{-EN}}$ （定理 6.8）。

综上，这些结果确立了高度交错距离这一分析偏序集指标函子范畴的框架。

贡献与展望。 我们的框架以可比对上的非负输入取代平移结构：高度差函数 ρ。从 ρ出发，我们系统地构造了一个由 $\mathbb{R}_{\geq 0}$指标的自函子伴随族，作用于函子范畴 Fun($P, \mathcal{C}$) 上，并定义了相应的高度交错距离。关键在于，与经典基于平移的交错不同，我们的方法不要求 P上具有丰富的平移结构。事实上，高度函数为此类输入提供了一个标准来源；特别地，该框架适用于有限偏序集，而有限偏序集自然地作为有限维代数表示论中的指标范畴出现。

从拓扑数据分析的角度来看，我们的框架为以偏序集为指标的持久模提供了一种交错型量化。在对 (P, ρ) 作出适当假设（例如 CIP）的条件下，这将导出松弛三角不等式，从而得到一种类似距离的比较。特别是，该框架适用于以之字形偏序集和树形偏序集为指标的持久模，也更一般地适用于以无菱形偏序集为指标的持久模。

相关工作。基于平移的交错如今已在抽象范畴论框架中得到表述，例如通过带流范畴 [dSMS18]，以及更一般的 2-范畴情形 [MN26]。在这些框架中，标准输入是范畴 $\mathcal{X}$ 上的一个余松幺半 $[0,\infty)$-作用（等价地，是一个余松幺半态射 $[0,\infty) \to \mathrm{End}(\mathcal{X})$），它编码平移运算，并自然地在 $\mathcal{X}$ 上诱导出一个作为扩展伪距离的交错距离。相比之下，我们的框架不假设 $\mathcal{X} = \mathrm{Fun}(P,\ \mathcal{C})$ 上存在这样的作用；相反，它以定义在 P 上的高度差函数 ρ 为输入，并构造由伴随 $\mathrm{L}_r^\rho \dashv \mathrm{R}_r^\rho$ 构成的交错图表。我们还指出，L_r^ρ 和 R_r^ρ 的构造在幺半方向上自然是余松 的（见第 3.1 节中的 (3.4)）。

无菱形偏序集自然出现在拓扑数据分析（TDA）及相关领域中，其中包括树偏序集、之字形偏序集，以及圆值持久性中出现的指标偏序集。在 [BBS24], 中，作者研究了有根树偏序集上的 0 维持久同调，并建立了有限型结果。对于之字形持久模，[BL18] 通过将其嵌入二参数框架，证明了代数稳定性定理。从代数角度看，[HIY22] 运用 Auslander–Reiten 理论，在之字形持久模的有界导出范畴上定义并计算距离，并证明了代数稳定性定理。对于圆值持久性，连续循环框架已在~ [HR24、RZ23], 中得到研究，同时还针对类型为 $A\sim$[GZ25] 的连续箭图，给出了相关的等距结果。对于有限非循环定向 A 上的持久模，[BP25] 运用 Auslander–Reiten 平移定义持久模之间的交错，并证明了相应的等距定理。

受多参数持久性中分解的不稳定性启发，Bjerkevik 最近引入了 ϵ-细化以及一种称为剪枝的操作，将其作为研究近似分解的工具 [Bje25]。作为相关基础术语的一部分，研究者还引入了持久模的 ϵ-侵蚀邻域及其关联的侵蚀邻域距离，并将其与经典交错距离进行比较 [Bje25，定理 3.13 和 4.7]。第 6 节的结果受这些思想启发，在高度交错框架下为侵蚀邻域发展了类似的构造。

结构安排。本文结构如下。第 2 节回顾偏序集索引函子范畴以及经典基于平移的交错的基本概念。第 3 节介绍高度差函数，并构造伴随自函子 $\mathrm{L}_r^\rho \dashv \mathrm{R}_r^\rho$，由此得到高度交错及其关联的距离 d_ρ。我们还说明这一框架如何在 $\mathbb{R}^d$ 上还原经典交错距离，并给出说明性示例。第 4 节证明 d_ρ的两种稳定性性质，即拉回稳定性和函数稳定性（定理 1.1）。第 5 节从距离论视角研究 d_ρ 。具体而言，我们引入连通交性质（CIP），并证明它能为d_ρ 导出松弛三角不等式，其加性缺陷由常数 $c(\rho)$ 控制（定理 1.2）。此外，我们讨论通过伽罗瓦嵌入将对象限制到满子偏序集时，松弛三角不等式如何变化。第 6 节专门讨论 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_k$ ，并发展侵蚀型构造，包括侵蚀邻域及其关联距离。最后，我们在第 7 节简要讨论并展望未来。附录汇集了关于伴随（伴随对应）以及极限与余极限的基础内容。

记号。在全文中，设 $\mathcal{C}$ 是一个完备且余完备范畴。读者可以牢记 $\mathcal{C}$ =Vect$_k$ 的情形，即域 k 上的向量空间范畴。对于小范畴 $\mathcal{J}$，我们将 $\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C})$ 记作协变函子 $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 以及它们之间的自然变换所构成的范畴。对于全子范畴 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ 和 $M \in \mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C})$，我们将其限制记为 $M|_{\mathcal{I}}$。我们对 $\mathcal{C}$ 中的极限和余极限使用标准记号，详情参见附录 B.1。特别地，我们将常值图表函子记为 $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{C})$，并使用伴随 $\mathrm{colim} \dashv \Delta \dashv \lim$。

2. Preliminaries

2.1. 偏序集指标函子范畴。我们将偏序集 P 视为一个范畴，其对象是 P的元素，且对于 $a,b \in P$，只要 $a \le b$ 在 P 中，就存在唯一的态射 $a \to b$。我们用 $a^{\uparrow}$ （分别用 $a^{\downarrow}$）表示所有满足 $a \le x$ （分别满足 $x \le a$）的 $x \in P$ 的集合。保序映射$f\colon Q \to P$是满足以下条件的映射：对于所有 Q中的 $x \le y$，均有 $f(x) \le f(y)$。若

此外，若 $f(x) \le f(y)$，则有 $x \le y$；在这种情况下， Q与 f的像作为偏序集同构。注意，任意保序映射都是偏序集之间的函子。

我们考虑函子范畴 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$。在此设定下，函子 $M\colon P \to \mathcal{C}$ 由以下数据构成：

- 它将元素 $a \in P$ 映射为 $\mathcal{C}$中的一个对象 $M(a)$。
- 它将 P中的一个关系 $a \le b$映射为一个态射 $M(a \le b)\colon M(a) \to M(b)$，其中该态射属于 $\mathcal{C}$，

并满足$M(a \le a) = \mathrm{id}_{M(a)}$且 $M(a \le c) = M(b \le c) \circ M(a \le b)$，对所有 $a \le b \le c \in P$均成立。函子范畴 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$中的一个态射 $f\colon M \to N$是一个自然变换，也就是说，它是一个态射族 $(f(a)\colon M(a) \to N(a))_{a \in P}$，属于 $\mathcal{C}$并满足 $N(a \le b) \circ f(a) = f(b) \circ M(a \le b)$，对所有 $a \le b$均成立。

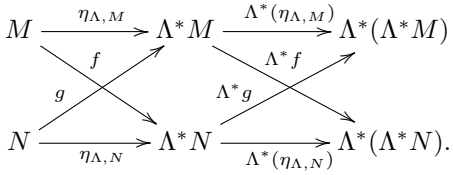
对于保序映射 $f\colon Q \to P$，我们用 $f^*\colon \mathsf{Fun}$ 表示 $(P, \mathcal{C}) \to \mathsf{Fun}$ $(Q, \mathcal{C})$ 由……给出的函子 与 f 前复合。明确地，对于 $M \in \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$，我们定义

$$(f^*M)(x) := M(f(x)), \quad \text{and} \quad (f^*M)(x \le y) := M(f(x) \le f(y)).$$

函子 f^* 称为沿 f 的拉回函子。

2.2. 偏序集平移所诱导的交错背景。偏序集 P 上的一个平移是一个保序映射 $\Lambda\colon P \to P$，并配备一个自然变换 $\mathrm{id}_P \Rightarrow \Lambda$，也就是说，对所有 $x \in P$，均有 $x \le \Lambda(x)$。这给出一个自然变换 $\eta_\Lambda\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Lambda^*$。特别地，对于每个 $M \in \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$，我们都有一个态射 $\eta_{\Lambda, M}\colon M \to \Lambda^* M$，由 $\eta_{\Lambda, M}(x) := M(x \le \Lambda(x))$ 对所有 $x \in P$ 给出。注意，根据定义可知 $\Lambda^*(\eta_{\Lambda, M}) = \eta_{\Lambda, \Lambda^* M}$。

定义 2.1。 对于两个 $M, N \in \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$，若存在态射 $f\colon M \to \Lambda^* N$ 和 $g\colon N \to \Lambda^* M$，使得下图交换，则称 M 和 N 是 Λ-交错的。

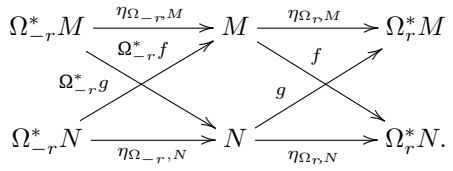


P 上的超线性平移族 Ω 是由平移 $(\Omega_r\colon P \to P)_{r \ge 0}$ 组成的一个族，并配备自然变换 $\Omega_s\Omega_r \Rightarrow \Omega_{s+r}$，对所有 $s, r \ge 0$ 均成立。关于 Ω， M 与 N 之间的交错距离定义为

$$d_\Omega(M, N) := \inf\{r \ge 0 \mid M \text{ and } N \text{ are } \Omega_r\text{-interleaved}\},$$

其中，若不存在使它们 Ω_r-交错的 $r \ge 0$，则令 $d_\Omega(M, N) = \infty$。众所周知（例如参见 [dSMS18] ），d_Ω 在 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 上定义了一个扩展伪距离。也就是说，它满足对称性（即 $d_\Omega(M, N) = d_\Omega(N, M)$）、对角线上为零（即 $d_\Omega(M, M) = 0$），以及三角不等式（即 $d_\Omega(M, N) \le d_\Omega(M, X) + d_\Omega(X, N)$）。

如果每个 Ω_r 都是同构，且其逆为 Ω_{-r}，并且结构映射 $\Omega_s\Omega_r \Rightarrow \Omega_{s+r}$ 都是自然同构，则称 Ω 强。在这种情况下，对所有 x，我们都有 $\Omega_{-r}(x) \le x$，也就是说，有一个自然变换 $\Omega_{-r} \Rightarrow \mathrm{id}_P$，从而得到一个自然变换 $\eta_{\Omega_{-r}}\colon \Omega_{-r}^* \Rightarrow \mathrm{id}$。采用这一记号， M 与 N 之间的 Ω_r-交错可表述如下：



现在，我们简要回顾 $\mathbb{R}^d$ 上经典的交错概念。我们将 $\mathbb{R}^d$ 视为配备乘积序的偏序集。给定实数 $r \in \mathbb{R}$，我们用 $\vec{r} = (r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^d$表示其各坐标均等于 r 的对角向量。于是，映射 $a \mapsto a + \vec{r}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上定义了一个平移。该映射通过拉回在 $\mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 上诱导出一个自函子，称为 r- 移位函子。具体而言，对于 $M \in \mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$，其 r- 移位 $M(r)$ 定义为

$$(M(r))(a) := M(a + \vec{r}) \quad \text{and} \quad (M(r))(a \le b) := M(a + \vec{r} \le b + \vec{r}).$$

由 r-移位构成的族（其中 $r \geq 0$ ）是在 $\mathbb{R}^d$ 上的强超线性平移族。因此，若两个函子 $M, N \in \mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 关于 r-移位函子交错，我们就称它们是 r-交错的。相应的交错距离记为

$$d_I(M,N) := \inf\{r \geq 0 \mid M \text{ and } N \text{ are } r\text{-interleaved}\}.$$

3. Interleaving distances induced by height-difference functions

本节介绍由高度差函数诱导的交错距离。一个关键要素是函子范畴 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 上由 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 索引的伴随自函子族，该族通过起始函子与匹配型运算定义。

3.1. 由高度差函数诱导的起始函子与匹配函子。

我们的动机背景是定义在 P 上的高度函数。

定义 3.1. 偏序集 P 上的高度函数是一个保序映射 $\phi\colon P \to \mathbb{R}$。

给定这样的 ϕ，我们可以考虑其在可比对上关联的高度差，

$$\rho_\phi(a,b) := \phi(b) - \phi(a) \qquad (a \leq b). \tag{3.1}$$

In 接下来，我们引入偏序集上的高度差函数这一公理化概念。

定义 3.2. 设 P 为一个偏序集。 P 上的高度差函数 是一个函数

$$\rho : \{(a,b) \in P \times P \mid a \leq b\} \to [0,\infty]$$

such 使得 $\rho(a,a) = 0$ 对所有 $a \in P$成立，并满足以下沿着.....的超可加性条件 g chains:

$$\rho(a,c) \geq \rho(a,b) + \rho(b,c) \tag{3.2}$$

对每个 $a \leq b \leq c$ 属于 P成立。

任意高度函数 ϕ 都按照（3.1）定义一个高度差函数 ρ_ϕ 。因此，

$$\{\rho_\phi \mid \phi \text{ a height function}\} \subseteq \{\rho \mid \rho \text{ a height-difference function}\}.$$

设 ρ 为 P上的高度差函数。对于 $a \in P$和 $r \geq 0$，我们定义

$$a^{\downarrow^\rho_r} := \{x \in P \mid x \leq a,\ \rho(x,a) \geq r\} \quad \text{and} \quad a^{\uparrow^\rho_r} := \{x \in P \mid x \geq a,\ \rho(a,x) \geq r\}.$$

当上下文明确时，我们在记号中省略 ρ 。

引理 3.3. 以下结论成立。

(1) 我们有 $a^{\downarrow_0} = a^\downarrow$ 和 $a^{\uparrow_0} = a^\uparrow$。(2) 对任意 $a \leq b$属于 P，我们有 $a^{\downarrow_r} \subseteq b^{\downarrow_r}$和 $b^{\uparrow_r} \subseteq a^{\uparrow_r}$。(3) 对任意 $s \geq r$，我们有 $a^{\downarrow_s} \subseteq a^{\downarrow_r}$ 和 $a^{\uparrow_s} \subseteq a^{\uparrow_r}$。(4) $b \in a^{\downarrow_r}$ 成立，当且仅当 $a \in b^{\uparrow_r}$ 成立。

证明。 这直接由定义可得。 □

给定函子 $M\colon P \to \mathcal{C}$和 $a \in P$，令

$$\mathsf{L}^\rho_r M(a) := \operatorname{colim} M|_{a^{\downarrow_r}}.$$

我们将 $\alpha_{a,M}\colon M|_{a^{\downarrow_r}} \to \Delta(\mathsf{L}^\rho_r M(a))$ 记作余极限 $\dashv \Delta$的单位（见记号）。此外，对于$a \leq b$ 属于 P，余极限的泛性质给出唯一的态射

$$\mathsf{L}^\rho_r M(a \leq b) := \left(\operatorname{colim} M|_{a^{\downarrow_r}} \to \operatorname{colim} M|_{b^{\downarrow_r}}\right)$$

由 $a^{\downarrow_r} \subseteq b^{\downarrow_r}$ 按照引理 3.3(2) 所述。然后，它们组装成一个函子 $\mathsf{L}^\rho_r M\colon\ P \to \mathcal{C}$。

另一方面，对于态射 $f\colon M \to N$ in $\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$，我们有一个态射 $\mathsf{L}^\rho_r f\colon \mathsf{L}^\rho_r M \to \mathsf{L}^\rho_r N$，其中，对于 $a \in P$，分量 $(\mathsf{L}^\rho_r f)(a)$ 是由余极限的泛性质确定的唯一映射 $\operatorname{colim} M|_{a^{\downarrow_r}} \to \operatorname{colim} N|_{a^{\downarrow_r}}$。事实上，这是因为族 $\left(M(x) \xrightarrow{f(x)} N(x) \xrightarrow{\alpha_{a,N}(x)} \mathsf{L}^\rho_r N(a)\right)_{x \in a^{\downarrow_r}}$ 在图表 $M|_{a^{\downarrow_r}}$ 上构成一个余锥。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{L}^\rho_r M(a) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^\rho_r f)(a)} & \mathsf{L}^\rho_r N(a) \\ {\scriptstyle \alpha_{a,M}(x)}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \alpha_{a,N}(x)} \\ M(x) & \xrightarrow{f(x)} & N(x). \end{array}$$

这个构造关于 a 是自然的，因此映射 $(\mathsf{L}_r^\rho f)(a)$ 导出一个态射 $\mathsf{L}_r^\rho f\colon \mathsf{L}_r^\rho M \to \mathsf{L}_r^\rho N$。最后，由于赋值 $M \mapsto \mathsf{L}_r^\rho M$ 具有函子性，它定义了一个自函子 $\mathsf{L}_r^\rho\colon \mathsf{Fun}(P,\mathcal{C}) \to \mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$。

对偶地，我们利用极限得到一个自函子 R_r^ρ: 函子范畴$(P,\mathcal{C}) \to$ 函子范畴$(P,\mathcal{C})$。更明确地，对于 $M \in$ 函子范畴$(P,\mathcal{C})$ 和 $a \in P$，我们定义

$$\mathsf{R}_r^\rho M(a) := \lim M|_{a^{\uparrow r}}$$

a并将 $\beta_{a,M}\colon \Delta(\mathsf{R}_r^\rho M(a)) \to M|_{a^{\uparrow r}}$记作 $\Delta \dashv \lim$ 的余单位。对于 $a \le b$属于 P，态射 sm

$$\mathsf{R}_r^\rho M(a \le b) := \left(\lim M|_{a^{\uparrow r}} \to \lim M|_{b^{\uparrow r}}\right)$$

这是利用包含 $b^{\uparrow r} \subseteq a^{\uparrow r}$，由极限的泛性质诱导出的唯一态射。对于函子范畴$(P,\mathcal{C})$ 中的态射 g: $M \to N$，我们如下定义态射 $\mathsf{R}_r^\rho g\colon \mathsf{R}_r^\rho M \to \mathsf{R}_r^\rho N$: 对于每个 $a \in P$，态射族 $\left(\mathsf{R}_r^\rho M(a) \xrightarrow{\beta_{a,M}(y)} M(y) \xrightarrow{g(y)} N(y)\right)_{y \in a^{\uparrow r}}$构成图表 $N|_{a^{\uparrow r}}$ 上的一个锥，因此诱导出唯一态射 $(\mathsf{R}_r^\rho g)(a) : \mathsf{R}_r^\rho M(a) \to \mathsf{R}_r^\rho N(a)$。

$$\begin{array}{ccc} M(y) & \xrightarrow{\quad g(y) \quad} & N(y) \\ {\scriptstyle \beta_{a,M}(y)}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \beta_{a,N}(y)} \\ \mathsf{R}_r^\rho M(a) & \xrightarrow{(\mathsf{R}_r^\rho g)(a)} & \mathsf{R}_r^\rho N(a). \end{array}$$

定义 3.4。对于 $r \ge 0$，我们称 L_r^ρ（分别地，R_r^ρ）为关于 ρ 的 $\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$ 上的 r-脏腿（分别地，r-匹配）函子范畴。若上下文明确，我们将 L_r 和 R_r 简写为 L_r^ρ 和 R_r^ρ。

以下结果是本文的核心。

命题 3.5。对于每个 $r \ge 0$，我们有一个伴随 $\mathsf{L}_r^\rho \dashv \mathsf{R}_r^\rho$。

$$\text{函子范畴}(P,\mathcal{C}) \underset{\mathsf{R}_r^\rho}{\overset{\mathsf{L}_r^\rho}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \text{函子范畴}(P,\mathcal{C})。$$

证明。固定 $r \ge 0$。为证明 L_r^ρ 是 R_r^ρ 的左伴随，我们构造关于 M 和 N 自然的互逆双射，

$$(-)^\flat\colon \mathrm{Hom}(\mathsf{L}_r^\rho M, N) \leftrightarrows \mathrm{Hom}(M, \mathsf{R}_r^\rho N)\colon (-)^\sharp. \tag{3.3}$$

对于 x，$a \in P$，根据引理 3.3，回顾可知，$x \in a^{\downarrow r}$ 成立当且仅当 $a \in x^{\uparrow r}$。在此情况下，我们得到了典范态射 $\alpha_{a,\,M}(x)\colon M(x) \to \mathsf{L}_r^\rho M(a)$，以及 $\beta_{x,\,M}(a)\colon \mathsf{R}_r^\rho M(x) \to M(a)$。

设 $g\colon M \to \mathsf{R}_r^\rho N$ 是 $\mathsf{Fun}(P,\ \mathcal{C})$ 中的一个态射。则，态射族 $\left(M(x) \xrightarrow{g(x)} \mathsf{R}_r^\rho N(x) \xrightarrow{\beta_{x,\ N}(a)} N(a)\right)_{x \in a^{\downarrow r}}$ 构成图表 $M|_{a^{\downarrow r}}$ 上的一个余锥，因此，由余极限的泛性质可得到唯一的态射 $g^\sharp(a)\colon \mathsf{L}_r^\rho M(a) \to N(a)$。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{L}_r^\rho M(a) & \xrightarrow{\quad g^\sharp(a) \quad} & N(a) \\ {\scriptstyle \alpha_{a,M}(x)}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \beta_{x,N}(a)} \\ M(x) & \xrightarrow{g(x)} & \mathsf{R}_r^\rho N(x). \end{array}$$

这一构造关于 a 是自然的，因此映射 $g^\sharp(a)$ 唯一确定一个态射 $g^\sharp\colon \mathsf{L}_r^\rho M \to N$。反过来，我们利用极限通过对偶论证定义映射 $(-)^\flat$。具体而言，给定一个态射 $f\colon \mathsf{L}_r^\rho M \to N$，我们如下定义一个态射 $f^\flat\colon M \to \mathsf{R}_r^\rho N$: 对于每个 $a \in P$，态射族 $\left(M(a) \xrightarrow{\alpha_{y,\ M(a)}} \mathsf{L}_r^\rho M(y) \xrightarrow{f(y)} N(y)\right)_{y \in a^{\uparrow r}}$构成图表 $N|_{a^{\uparrow r}}$上的一个锥。于是，极限的泛性质给出唯一的态射 $f^\flat(a) : M(a) \to \mathsf{R}_r^\rho N(a)$。

这些态射定义了一个态射 $f^\flat\colon M \to \mathsf{R}^\rho_r N$。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{L}^\rho_r M(y) & \xrightarrow{f(y)} & N(y) \\ {\scriptstyle \alpha_{y,M}(a)}\uparrow & \circlearrowleft\ \beta_{a,N}(y) & \uparrow{\scriptstyle \beta_{a,N}(y)} \\ M(a) & \xrightarrow{f^\flat(a)} & \mathsf{R}^\rho_r N(a). \end{array}$$

由极限和余极限的泛性质所诱导的态射的唯一性可知，$(\text{–})^\flat$ 和 $(\text{–})^\sharp$ 互为逆映射。此外，可以验证这些对应关系关于 M 和 N 是自然的。这就完成了证明。□

在本文余下部分中，我们将直接使用记号 $f^\flat$ 和 $g^\sharp$，表示如 (3.3) 中由伴随 $\mathsf{L}^\rho_r \dashv \mathsf{R}^\rho_r$ 所诱导的双射。

对于 P 上的高度差函数 ρ，自函子族 $\{\mathsf{L}_r, \mathsf{R}_r\}_{r\geq 0}$ 满足以下相容性性质。

- 存在自函子上的自然同构 $\mathsf{L}_0 \simeq \mathsf{id} \simeq \mathsf{R}_0$，其定义在 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 上。
- 对于 $s \geq r$，存在自然变换 $\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_s \Rightarrow \mathsf{L}_r$ 和 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}\colon \mathsf{R}_r \Rightarrow \mathsf{R}_s$，它们相容，具体而言：

$$\eta^{\mathsf{L}}_{r,t} = (\mathsf{L}_t \overset{\eta^{\mathsf{L}}_{t,s}}{\Rightarrow} \mathsf{L}_s \overset{\eta^{\mathsf{L}}_{s,r}}{\Rightarrow} \mathsf{L}_r) \quad \text{and} \quad \eta^{\mathsf{R}}_{r,t} = (\mathsf{R}_r \overset{\eta^{\mathsf{R}}_{r,s}}{\Rightarrow} \mathsf{R}_s \overset{\eta^{\mathsf{R}}_{s,t}}{\Rightarrow} \mathsf{R}_t)$$

  对所有 $t \geq s \geq r$。
- 对于任意 $s,\ r \geq 0$，存在自然变换

$$\mu^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon \mathsf{L}_s \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{L}_{s+r} \quad \text{and} \quad \mu^{\mathsf{R}}_{r,s}\colon \mathsf{R}_{s+r} \Rightarrow \mathsf{R}_r \mathsf{R}_s\,. \tag{3.4}$$

事实上，对于上文的 $s \geq r$，自然变换 $\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_s \Rightarrow \mathsf{L}_r$ 是由包含$a^{\downarrow_s} \subseteq a^{\downarrow_r}$诱导的。另一方面，令 $s,\ r \geq 0$ 和 $a \in P$。对于每个 $x \in a^{\downarrow_s}$，由 (3.2) 可得 $x^{\downarrow_r} \subseteq a^{\downarrow_{s+r}}$。因此，余极限的泛性质给出一个典范态射 $\operatorname{colim} M|_{x^{\downarrow_r}} \to \operatorname{colim} M|_{a^{\downarrow_{s+r}}}$。这些映射关于 x 自然，因而构成图表 $\left(\operatorname{colim} M|_{x^{\downarrow_r}} \to \operatorname{colim} M|_{a^{\downarrow_{s+r}}}\right)_{x\in a^{\downarrow_s}}$ 上的一个余锥。因此，根据余极限的泛性质，它们诱导出一个典范态射 $(\mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r M))(a) \to (\mathsf{L}_{s+r} M)(a)$。关于 a 和 M 的自然性给出一个自然变换$\mu^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_s \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{L}_{s+r}$。$\eta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 和 $\mu^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 的构造可对偶地得到，即用极限代替余极限。

此外，对于 $s \geq r$，由 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$ 我们有伴随对应

$$\mathrm{Nat}(\mathsf{L}_s, \mathsf{L}_r) \cong \mathrm{Nat}(\mathsf{R}_r, \mathsf{R}_s)$$

（详情参见附录 A.2），在该对应下，$\eta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 与 $\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$ 的伴随变换一致。

另一方面，对于 $s,\ r \geq 0$，利用复合伴随 $\mathsf{L}_s \mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r \mathsf{R}_s$，我们有

$$\mathrm{Nat}(\mathsf{L}_s \mathsf{L}_r, \mathsf{L}_{s+r}) \cong \mathrm{Nat}(\mathsf{R}_{s+r}, \mathsf{R}_r \mathsf{R}_s),$$

在该对应下，$\mu^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 与 $\mu^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$ 的伴随变换一致。

我们常分别用 η^{L}_r 和 η^{R}_r 表示 $\eta^{\mathsf{L}}_{r,\,0}$ 和 $\eta^{\mathsf{R}}_{0,\,r}$。此外，我们定义一个自然变换

$$e_r := \eta^{\mathsf{R}}_r \circ \eta^{\mathsf{L}}_r\colon \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{R}_r$$

作为垂直复合。也就是说，它在 M 处的分量为

$$e_{r,M}:\ \mathsf{L}_r M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}} M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}} \mathsf{R}_r M. \tag{3.5}$$

注 3.6. 我们的闩函子/匹配函子受到 Reedy型构造的启发，但与经典闩函子/匹配函子有所不同。这里，我们回顾 [Hov99]中的定义：函子 $M\colon P \to \mathcal{C}$ 在 $a \in P$处的闩空间定义为 $\mathcal{C}$中的对象余极限 $M|_{a^\downarrow \setminus \{a\}}$。与定义 3.4 类似，可以在 $\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$ 上定义自函子 L：将每个 M 映射为函子 $\mathsf{L}M\colon P \to \mathcal{C}$，该函子将 $a \in P$映射为 M 在 a处的闩空间。我们有 $\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$ 上自函子的一个自然变换 $\mathsf{L} \Rightarrow \mathsf{id}$。根据构造，对于 P和 $r > 0$上的任意高度差函数 ρ，这给出了一个分解 $\mathsf{L}^\rho_r \Rightarrow \mathsf{L} \Rightarrow \mathsf{id}$。

对偶地，在 $\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$ 上有一个自函子 R，它通过对 $a^\uparrow \setminus \{a\}$ 取极限来定义，并且类似地可以得到一个分解 $\mathsf{id} \Rightarrow \mathsf{R} \Rightarrow \mathsf{R}^\rho_r$。

为便于后续使用，我们记录 L_r 和 R_r 关于 Kan 延拓的逐点描述（Kan 延拓的基础知识参见 [ML78]）。固定 $r \geq 0$ 和 $a \in P$。我们将 $i_a\colon a^{\downarrow_r} \hookrightarrow P$ 和 $j_a\colon a^{\uparrow_r} \hookrightarrow P$ 记为典范包含。令 Lan_{i_a}（分别地，Ran_{j_a}）为沿着 i_a（分别地，j_a）的左（分别地，右）Kan 延拓。于是，对于任意 $M \in \mathrm{Fun}(P,\mathcal{C})$，都有典范同一

$$\mathsf{L}_r\, M(a) \cong (\mathrm{Lan}_{i_a}(M|_{a^{\downarrow_r}}))(a) \quad \text{and} \quad \mathsf{R}_r\, M(a) \cong (\mathrm{Ran}_{j_a}(M|_{a^{\uparrow_r}}))(a). \tag{3.6}$$

换言之，$\mathsf{L}_r\, M(a)$ 和 $\mathsf{R}_r\, M(a)$ 的值是作为 a 处的 Kan 延拓值给出的。不过请注意，索引包含 i_a，j_a 取决于 a，因此这只给出了逐点描述；它并未将自函子 L_r，$\mathsf{R}_r\colon$ 函子范畴$(P,\ \mathcal{C}) \to$ 函子范畴$(P,\ \mathcal{C})$ 表示为沿某个固定包含的单个 Kan 延拓，且该包含与 a 无关。

我们可以不使用 (3.6)，而改用全子偏序集

$$U_a := a^{\downarrow_r} \cup a^{\uparrow_r} \subseteq P$$

以及典范包含 $u_a\colon U_a \hookrightarrow P$。由于 $U_a \cap a^{\downarrow} = a^{\downarrow_r}$和 $U_a \cap a^{\uparrow} = a^{\uparrow_r}$，我们还得到逐点描述

$$\mathsf{L}_r\, M(a) \cong (\mathrm{Lan}_{u_a}(M|_{U_a}))(a) \quad \text{and} \quad \mathsf{R}_r\, M(a) \cong (\mathrm{Ran}_{u_a}(M|_{U_a}))(a). \tag{3.7}$$

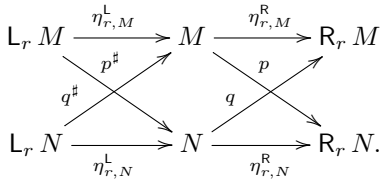
3.2. 高度交错距离。 本节中，我们使用上一节中的伴随自函子 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$ 引入交错的概念。

令 ρ 为偏序集 P 上的高度差函数。

定义 3.7。 设 $M, N \in \mathrm{Fun}(P,\mathcal{C})$。对于 $r \geq 0$，相对于 ρ，M 与 N 之间的 r-高度交错 是指一对态射 $p\colon M \to \mathsf{R}_r\, N$ 和 $q\colon N \to \mathsf{R}_r\, M$，满足

$$e_{r,M} = q \circ p^\sharp \quad \text{and} \quad e_{r,N} = p \circ q^\sharp,$$

其中 $p^\sharp\colon \mathsf{L}_r\, M \to N$ 和 $q^\sharp\colon \mathsf{L}_r\, N \to M$ 分别表示在伴随 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$ 下与 p 和 q 对应的态射。等价地，下图交换；注意，由于 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$，两个伴随方块的交换性是自动成立的。



在这种情况下，我们称 M 和 N 是 r-高度交错 的（相对于 ρ），并记作 $M \overset{\rho}{\sim} N$.$_r$我们定义 ρ-交错距离，即 M 与 N 之间的距离，为

$$d_\rho(M,N) := \inf\{r \geq 0 \mid M,\ \text{且}\ N\ \text{相对于}\ \rho\},\ \text{与}\ r\ \text{高度交错}$$

其中，如果不存在这样的 r，我们令 $d_\rho(M,\ N) = \infty$。

约定 3.8。 设 $\phi\colon\ P \to \mathbb{R}$ 是一个高度函数，并令 ρ_ϕ 为如（3.1）中所述的相关高度差函数。每当 $\rho = \rho_\phi$ 时，我们记作

$$\mathsf{L}_r^\phi := \mathsf{L}_r^{\rho_\phi}, \qquad \mathsf{R}_r^\phi := \mathsf{R}_r^{\rho_\phi}, \qquad e_r^\phi := e_r^{\rho_\phi}, \qquad d_\phi := d_{\rho_\phi}.$$

在此情形下，我们也称 r-高度交错（相对于 ϕ，意指相对于 ρ_ϕ 的 r-高度交错。

虽然 d_ρ 具有对称性，并且在对角线上消失，但一般不满足三角不等式，即使 $\rho = \rho_\phi$ 由高度函数 ϕ 诱导也是如此（见小节 3.4 中的例（2））。因此，在第5节中，我们将讨论三角不等式的一个放宽版本，允许存在加性缺陷。

正如对交错类型的距离所预期的那样，我们的高度交错概念具有如下单调性。

引理 3.9。 若 M 和 N 关于 ρ 是 r-高度交错的，则对于所有 $s \geq r$，它们关于 s 都是高度交错的。

证明。 这可直接由自然变换 $\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_s \Rightarrow \mathsf{L}_r$ 和 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}\colon \mathsf{R}_r \Rightarrow \mathsf{R}_s$ 得出，它们使我们能够将一个 r-交错复合为一个 s-交错。□

引理 3.10。设 $M \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$ 且 $r \geq 0$。那么， M 相对于 ρ，与 $\mathsf{L}_r M$ 和 $\mathsf{R}_r M$ 中的每一个都是 r-高度交错的。

证明。我们证明关于 $\mathsf{R}_r M$ 的断言。关于 $\mathsf{L}_r M$ 的陈述可由对偶性得到。定义

$$p := (e_{r,M})^\flat \colon M \to \mathsf{R}_r(\mathsf{R}_r M) \quad \text{and} \quad q := \mathrm{id}_{\mathsf{R}_r M} \colon \mathsf{R}_r M \to \mathsf{R}_r M.$$

那么，利用 η^{R}_r 的自然性和伴随 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$，$(p, q)$ 构成 r-高度交错，将 M 与 $\mathsf{R}_r M$ 联系起来。□

3.3. 恢复 $\mathbb{R}^d$ 上的经典交错距离。回顾一下，$\mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 上的经典交错距离 d_I 是通过 r-平移函子定义的（见第 2.2 节）。现在，通过将偏序集取为 $P = \mathbb{R}^d$，并采用以下高度差函数，我们从高度交错距离中恢复d_I：

$$\rho_{\mathrm{diag}}(a, b) := \min_{1 \leq i \leq d} (b_i - a_i) \qquad (a \leq b). \tag{3.8}$$

命题 3.11。设 $\rho := \rho_{\mathrm{diag}}$ 如上定义。那么以下陈述成立。
(1) 对所有 $r \geq 0$，存在自然同构 $\mathsf{L}^\rho_r \simeq (-r)$ 和 $\mathsf{R}^\rho_r \simeq (r)$。(2) 在(1)中的识别下，由 r-平移函子诱导的 r-交错概念，与在 $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 上相对于 ρ 的 r-高度交错概念一致。(3) 距离 d_ρ 与 $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 上的交错距离 d_I 一致。

证明。(1) 设 $r \geq 0$ 和 $a \in \mathbb{R}^d$。对于 $\rho = \rho_{\mathrm{diag}}$，子集 $a^{\downarrow_r}$ 和 $a^{\uparrow_r}$ 定义为

$$a^{\downarrow_r} = (a - \vec{r})^{\downarrow} \quad \text{and} \quad a^{\uparrow_r} = (a + \vec{r})^{\uparrow},$$

其中 $\vec{r} = (r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^d$。事实上，对于 $x \leq a$，有 $\rho(x, a) = \min_i(a_i - x_i)$，因此 $\rho(x, a) \geq r$ 当且仅当 $x \leq a - \vec{r}$。第二个恒等式类似。

设 $M \in$ 为函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$。由于 $(a - \vec{r})$ 是 $(a - \vec{r})^{\downarrow}$ 的唯一极大元，我们得到

$$\mathsf{L}^\rho_r M(a) = \mathsf{colim}\, M|_{(a-\vec{r})^{\downarrow}} \cong M(a - \vec{r}) = (M(-r))(a).$$

类似地，由于 $(a + \vec{r})$ 是 $(a + \vec{r})^{\uparrow}$ 的唯一极小元，我们有

$$\mathsf{R}^\rho_r M(a) = \mathsf{lim}\, M|_{(a+\vec{r})^{\uparrow}} \cong M(a + \vec{r}) = (M(r))(a).$$

这些识别关于 M 是自然的，因此给出自然同构 $\mathsf{L}^\rho_r \simeq (-r)$ 和 $\mathsf{R}^\rho_r \simeq (r)$。断言 (2) 和 (3) 由 (1) 得出。□

当 $d = 1$、ρ_{diag} 与由高度函数 $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$诱导的高度差一致时。然而，对于$d \geq 2$，ρ_{diag} 并非由任何高度函数 $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$诱导。

3.4. 例。在本小节中，我们通过 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 中的一些小例子说明函子 L_r 和 R_r，以及高度交错距离，其中 $\mathcal{C} = \mathsf{Vect}_k$，且高度差函数由明确选定的高度函数诱导。特别地，例（2）展示了函子 M, X, N以及 ϕ的一种选择，使得相应的距离 d_ϕ 不满足三角不等式。

下面的记号将在后文使用。若 $J \subseteq P$ 满足：$x \leq y \leq z$ 属于 P 且$x, z \in J$蕴含 $y \in J$，则称其为凸 子集。对于这样的子集 J，我们将 $k_J \in \mathsf{Fun}(P, \mathsf{Vect}_k)$记作由以下方式给出的函子：对 $x \in J$，$k_J(x) = k$；否则，$k_J(x) = 0$，其中所有结构映射均由恒等映射诱导。

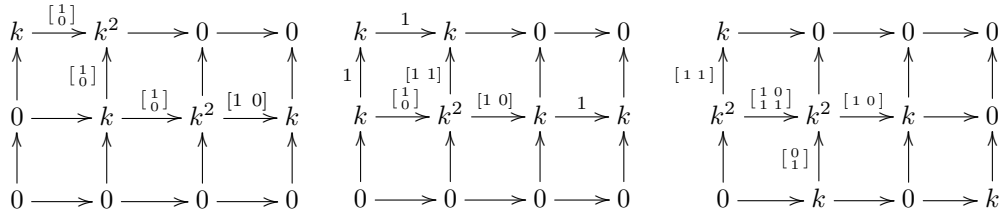
(1) 设 $P := \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ 为带有乘积序的 4×3 网格偏序集，即

$$(i, j) \leq (i', j') \iff i \leq i' \text{ and } j \leq j'.$$

记作 $v_{ij} = (i, j)$。在这个偏序集上定义高度函数 ϕ：$\phi(v_{ij}) := i + j$。

考虑由 (3.9) 中间的图表给出的函子 $M \in \mathsf{Fun}(P, \mathsf{Vect}_k)$，它是不可分解的。直接计算可得，$\mathsf{L}_1 M$ 和 $\mathsf{R}_1 M$ 分别由 (3.9) 中左侧和右侧的图表给出。注意，根据我们对 $\phi(v_{ij}) = i + j$ 的选择，指标集 $(v_{ij})^{\downarrow_1}$ 和 $(v_{ij})^{\uparrow_1}$ 分别恰为 v_{ij} 的严格主下集和上集。

$\mathsf{L}_1 M$ M $\mathsf{R}_1 M$



(3.9)

现在我们详细演示如何计算 $(\mathsf{L}_1 M)(v_{22})$。根据定义，

$$(\mathsf{L}_1 M)(v_{22}) = \mathsf{colim}\big(M|_{(v_{22})^{\downarrow_1}}\big).$$

令 $J := \{v_{11}, v_{21}, v_{12}\} \subset (v_{22})^{\downarrow_1}$。由于偏序集 $J \cap x^{\uparrow}$ 对每个 $x \in (v_{22})^{\downarrow_1}$都有最小元，上述余极限自然同构于 $\mathsf{colim}\ M|_J$。因此

$$(\mathsf{L}_1 M)(v_{22}) \cong \mathsf{colim} \begin{pmatrix} & k & \\ {\scriptstyle [1\ 1]}\uparrow & & \\ k^2 & \xrightarrow{[1\ 0]} & k \end{pmatrix} \cong \mathsf{colim} \begin{pmatrix} k & \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & \\ k & \longrightarrow 0 \end{pmatrix} \oplus \mathsf{colim} \begin{pmatrix} 0 & \\ \uparrow & \\ k & \xrightarrow{1} k \end{pmatrix} \cong 0.$$

类似的计算也适用于 P 的其他顶点。

此外，上述 $\mathsf{L}_1 M$ 和 $\mathsf{R}_1 M$ 分解为

$$\mathsf{L}_1 M \cong k_{J_1} \oplus k_{\{(1,2)\}} \oplus k_{\{(2,1)\}}, \quad \text{and} \quad \mathsf{R}_1 M \cong k_{J_2} \oplus k_{J_3} \oplus k_{\{(3,0)\}}$$

其中 J_1, J_2, J_3 是以下凸子集：

$$J_1 = \{(0,2),(1,2),(1,1),(2,1),(3,1)\},\ J_2 = \{(0,1),(1,1),(2,1)\},\ J_3 = \{(1,0),(0,1),(1,1),(0,2)\}.$$

(2) 令 $P = \{a < b < c < d\}$ 为四点链。固定一个常数 $C > 1$，并定义高度函数 $\phi\colon P \to \mathbb{R}$：

$$\phi(a) = 0, \qquad \phi(b) = 1, \qquad \phi(c) = C + 1, \qquad \phi(d) = 2C + 1.$$

考虑函子 $M, X, N \in$ 函子范畴(P,向量空间范畴$_k$):

$$M = (k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k), \qquad X = (k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \to 0), \qquad N = (k \xrightarrow{1} k \to 0 \to 0).$$

我们断言

$$d_\phi(M, X) = 0, \qquad d_\phi(X, N) = 0, \qquad d_\phi(M, N) = C. \tag{3.10}$$

特别地，d_ϕ 的三角不等式不成立。

固定 $0 < \epsilon < 1$。首先注意到我们有

$$a^{\uparrow_\epsilon} = \{b, c, d\}, \qquad b^{\uparrow_\epsilon} = \{c, d\}, \qquad c^{\uparrow_\epsilon} = \{d\}, \qquad d^{\uparrow_\epsilon} = \emptyset.$$

直接计算这些上集上的极限可得

$$\mathsf{R}_\epsilon M = (k \to k \to k \to 0), \quad \mathsf{R}_\epsilon X = (k \to k \to 0 \to 0), \quad \mathsf{R}_\epsilon N = (k \to 0 \to 0 \to 0).$$

类似地，我们有

$$a^{\downarrow_\epsilon} = \emptyset, \qquad b^{\downarrow_\epsilon} = \{a\}, \qquad c^{\downarrow_\epsilon} = \{a, b\}, \qquad d^{\downarrow_\epsilon} = \{a, b, c\}$$

以及

$$\mathsf{L}_\epsilon M = (0 \to k \to k \to k), \qquad \mathsf{L}_\epsilon X = (0 \to k \to k \to k), \qquad \mathsf{L}_\epsilon N = (0 \to k \to k \to 0).$$

我们定义态射 $f\colon M \to \mathsf{R}_\epsilon X$ 和 $g\colon X \to \mathsf{R}_\epsilon M$ 如下：

$$f(a) = f(b) = 1, \quad f(c) = f(d) = 0, \qquad g(a) = g(b) = g(c) = 1, \quad g(d) = 0.$$

设 $f^\sharp\colon \mathsf{L}_\epsilon M \to X$和 $g^\sharp\colon \mathsf{L}_\epsilon X \to M$为$\mathsf{L}_\epsilon \dashv \mathsf{R}_\epsilon$下的左伴随。那么，由下列图表的交换性，$(f,\ g)$ 给出了 M 与 X 之间的ϵ-高度交错：

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{L}_\epsilon X & (0 \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle g^\sharp}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1} \\
M & (k \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle f}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathsf{R}_\epsilon X & (k \longrightarrow k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)
\end{array}
\quad \text{and} \quad
\begin{array}{ccc}
\mathsf{L}_\epsilon M & (0 \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle f^\sharp}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1} \\
X & (k \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow 0) \\
{\scriptstyle g}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathsf{R}_\epsilon M & (k \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow 0)
\end{array}$$

Simi因此，可得到 ϵ-高度交错，使 X 与 N交错；细节从略。由于 ce $0 < \epsilon < 1$是任意的，我们得出 $d_\phi(M,\ X) = d_\phi(X,\ N) = 0$。

接下来，我们计算 $d_\phi(M,\ N)$。对于 $s := C + \epsilon$，有

$$a^{\uparrow_s} = \{c, d\}, \qquad b^{\uparrow_s} = \{d\}, \qquad c^{\uparrow_s} = d^{\uparrow_s} = \emptyset$$

and

$$a^{\downarrow_s} = b^{\downarrow_s} = \emptyset, \qquad c^{\downarrow_s} = \{a\}, \qquad d^{\downarrow_s} = \{a, b\}$$

在这种情况下， M 与 N 之间存在如下的 s-高度交错对 $(u,\ v)$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{L}_s N & (0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle v^\sharp}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1} \\
M & (k \longrightarrow k \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle u}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathsf{R}_s N & (0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)
\end{array}
\quad \text{and} \quad
\begin{array}{ccc}
\mathsf{L}_s M & (0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k \longrightarrow k) \\
{\scriptstyle u^\sharp}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1} \\
N & (k \longrightarrow k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0) \\
{\scriptstyle v}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 1}\ \downarrow{\scriptstyle 0}\ \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathsf{R}_s M & (k \longrightarrow k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)
\end{array}$$

因此， $d_\phi(M,\ N) \leq s = C + \epsilon$。由于 $0 < \epsilon < 1$是任意的，可得 $d_\phi(M,\ N) \leq C$。

另一方面，我们证明 M 和 N 并非不 C-高度交错。由于 $c^{\uparrow_C} = \{d\}$ 和$c^{\downarrow_C} = \{a, b\}$，我们有

$$(\mathsf{L}_C M)(c) \cong k, \qquad M(c) \cong k, \qquad (\mathsf{R}_C M)(c) \cong k,$$

并且典范态射 $e_{C,\ M}(c) : (\mathsf{L}_C M)(c) \to (\mathsf{R}_C M)(c)$ 非零。然而， $N(c) = 0$迫使任何复合态射 $(\mathsf{L}_C M)(c) \to N(c) \to (\mathsf{R}_C M)(c)$ 都为零。因此， M和 N并非C-高度交错。

由引理 3.9，这意味着对于任意 $r \leq C$，它们都不是 r-高度交错。因此，根据 d_ϕ 作为下确界的定义，我们有 $d_\phi(M,\ N) \geq C$。

综合以上结果可得 $d_\phi(M,\ N) = C$，证毕。

4. Stability properties

本节我们讨论高度交错的稳定性性质及其相关距离d_ρ。这些结果进一步说明，使用高度交错距离分析函子范畴是有意义的。

4.1. 拉回稳定性。 我们首先证明，高度交错相对于沿保序映射的拉回是函子性的；特别地，相关距离在拉回下稳定。

设 ρ 是偏序集 P 上的高度差函数。对于保序映射 $f\colon Q \to P$，我们将其在 Q 上诱导的高度差函数记为 $f^*\rho$ ，定义如下：

$$(f^*\rho)(q, q') := \rho(f(q), f(q')) \qquad (q \leq q').$$

命题 4.1。 设 ρ 是偏序集 P 上的高度差函数，并设 $f\colon\ Q \to P$ 是保序映射。那么对于任意 $M,\ N \in$函子范畴$(P, \mathcal{C})$，有

$$d_{f^*\rho}(f^*M, f^*N) \leq d_\rho(M, N).$$

为了证明这一点，我们需要以下观察。

引理 4.2。 设 ρ 为偏序集 P上的一个高度差函数，且 $f\colon\ Q \to P$为一个保序映射。则以下陈述对 $r \geq 0$成立。

(1) 对于任意 $q \in Q$，我们有

$$f\big(q^{\downarrow_r^{f^*\rho}}\big) \subseteq (f(q))^{\downarrow_r^{\rho}} \quad and \quad f\big(q^{\uparrow_r^{f^*\rho}}\big) \subseteq (f(q))^{\uparrow_r^{\rho}}.$$

(2) 存在自然变换

$$\xi_r^{\mathsf{L}} \colon \mathsf{L}_r^{f^*\rho} f^* \Rightarrow f^* \mathsf{L}_r^{\rho} \quad and \quad \xi_r^{\mathsf{R}} \colon f^* \mathsf{R}_r^{\rho} \Rightarrow \mathsf{R}_r^{f^*\rho} f^*.$$

证明。 (1) 根据定义，

$$f\big(q^{\downarrow_r^{f^*\rho}}\big) = \{f(y) \mid y \le q,\ \rho(f(y), f(q)) \ge r\},$$

and

$$(f(q))^{\downarrow_r^{\rho}} = \{x \in P \mid x \le f(q),\ \rho(x, f(q)) \ge r\}.$$

设 $x \in f\big(q^{\downarrow_r^{f^*\rho}}\big)$。那么对于某个 $y \le q$，有 $x = f(y)$，且 $\rho(f(y)\ f(q)) \ge r$。一方面，由于 f 是保序的，我们有 $x = f(y) \le f(q)$。此外，我们有 $\rho(x, f(q)) = \rho(f(y)\ f(q)) \ge r$。因此 $x \in (f(q))^{\downarrow_r^{\rho}}$，从而证明了 $f(q^{\downarrow_r^{f^*\rho}}) \subseteq (f(q))^{\downarrow_r^{\rho}}$。上集的包含关系类似。

(2) 设 $M \in \mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 且 $q \in Q$。我们计算

$$(\mathsf{L}_r^{f^*\rho}(f^*M))(q) = \operatorname*{colim}_{y \in q^{\downarrow_r^{f^*\rho}}} M(f(y)) \quad \text{and} \quad (f^*(\mathsf{L}_r^{\rho} M))(q) = (\mathsf{L}_r^{\rho} M)(f(q)) = \operatorname*{colim}_{x \in (f(q))^{\downarrow_r^{\rho}}} M(x).$$

根据 (1)，赋值 $y \mapsto f(y)$ 定义了一个保序映射 $q^{\downarrow_r^{f^*\rho}} \to (f(q))^{\downarrow_r^{\rho}}$。因此，根据余极限的泛性质，它诱导出一个典范态射

$$(\xi_{r,M}^{\mathsf{L}})(q) \colon (\mathsf{L}_r^{f^*\rho}(f^*M))(q) \to (f^*(\mathsf{L}_r^{\rho} M))(q).$$

这些映射关于 q和 M是自然的，从而得到一个自然变换 $\xi_r^{\mathsf{L}} \colon \mathsf{L}_r^{f^*\rho} f^* \Rightarrow f^* \mathsf{L}_r^{\rho}$。

对偶地，利用极限和 (1) 中的包含，我们得到一个自然变换 $\xi^{\mathsf{R}} \colon f^* \mathsf{R}_r^{\rho} \Rightarrow \mathsf{R}_r^{f^*\rho} f^*$。 □

命题 *4.1* 的证明。 假设 M 和 N 关于 ρ是 r-高度交错的，其交错态射为 $p \colon M \to \mathsf{R}_r^{\rho} N$和 $q \colon N \to \mathsf{R}_r^{\rho} M$。

令 $\xi_r^{\mathsf{L}} \colon \mathsf{L}_r^{f^*\rho} f^* \Rightarrow f^* \mathsf{L}_r^{\rho}$和 $\xi_r^{\mathsf{R}} \colon f^* \mathsf{R}_r^{\rho} \Rightarrow \mathsf{R}_r^{f^*\rho} f^*$如引理 4.2(2) 中所述。定义

$$u := \xi_{r,N}^{\mathsf{R}} \circ f^*(p) \colon f^*M \to \mathsf{R}_r^{f^*\rho}(f^*N), \qquad v := \xi_{r,M}^{\mathsf{R}} \circ f^*(q) \colon f^*N \to \mathsf{R}_r^{f^*\rho}(f^*M).$$

于是，根据 ξ_r^{L}的 ξ_r^{R}自然性以及 u的定义 v，我们得到

$$u^{\sharp} = f^*(p^{\sharp}) \circ \xi_{r,M}^{\mathsf{L}}, \qquad v^{\sharp} = f^*(q^{\sharp}) \circ \xi_{r,N}^{\mathsf{L}}.$$

这意味着

$$e_{r,f^*M}^{f^*\rho} = v \circ u^{\sharp} \quad \text{and} \quad e_{r,f^*N}^{f^*\rho} = u \circ v^{\sharp}.$$

因此，$(u,\ v)$构成了一个相对于 $f^*\rho$的、介于 f^*M和 f^*N之间的 r-高度交错。 □

4.2. 函数稳定性。 接下来，我们证明高度交错距离在高度差函数的扰动下是稳定的（定理 4.4）。为陈述这一结果，我们先记录赋值 $\rho \mapsto d_{\rho}$的一个基本单调性性质。

命题 4.3。 设 P上的 ρ_1、ρ_2 为高度差函数，且满足 $\rho_1 \le \rho_2$。那么，对于任意M、$N \in$函子范畴$(P$、$\mathcal{C})$，

$$d_{\rho_1}(M, N) \le d_{\rho_2}(M, N).$$

证明。 假设 $\rho_1 \le \rho_2$，则有

$$a^{\downarrow_r^{\rho_1}} \subseteq a^{\downarrow_r^{\rho_2}} \quad \text{and} \quad a^{\uparrow_r^{\rho_1}} \subseteq a^{\uparrow_r^{\rho_2}}$$

对所有 $a \in P$和 $r \ge 0$均成立。因此，沿这些包含进行限制会诱导出自然变换

$$\mathsf{L}_r^{\rho_1} \Rightarrow \mathsf{L}_r^{\rho_2} \quad \text{and} \quad \mathsf{R}_r^{\rho_2} \Rightarrow \mathsf{R}_r^{\rho_1}.$$

如果相对于 ρ_2，M 和 N 是 r-高度交错的，那么将交错态射与 $\mathsf{R}_r^{\rho_2} \Rightarrow \mathsf{R}_r^{\rho_1}$复合，就能得到相对于 ρ_1，M 和 N 之间的 r-高度交错。因此$d_{\rho_1}(M, N) \le d_{\rho_2}(M, N)$。□

对于 $a,b\in[0,\infty]$，我们定义

$$|a-b|_\infty := \begin{cases} |a-b| & a,b<\infty,\\ 0 & a=b=\infty,\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意，对于 $r\geq 0$，不等式 $|a-b|_\infty\leq r$ 等价于：

$$a\leq b+r \quad\text{and}\quad b\leq a+r.$$

F对于 P 上的两个高度差函数 ρ_1，ρ_2，我们定义 ρ_1 与 ρ_2 b 之间的畸变 y

$$\delta(\rho_1,\rho_2) := \inf\Big\{r\geq 0 \;\Big|\; |\rho_1(a,b)-\rho_2(a,b)|_\infty\leq r \text{ for all } a\leq b\Big\}, \tag{4.1}$$

并将相关高度交错距离 d_{ρ_1} 与 d_{ρ_2} 之间的畸变定义为

$$\mathrm{dist}_\infty(d_{\rho_1},d_{\rho_2}) := \inf\Big\{r\geq 0 \;\Big|\; |d_{\rho_1}(M,N)-d_{\rho_2}(M,N)|_\infty\leq r \text{ for all } M,N\in \mathrm{Fun}(P,\mathcal{C})\Big\}.$$

我们的结果如下。

定理 4.4。映射 $\rho\mapsto d_\rho$ 关于 δ 是1-利普希茨的。也就是说，对于 P 上的任意高度差函数 ρ_1、ρ_2，

$$\mathrm{dist}_\infty(d_{\rho_1},d_{\rho_2})\leq \delta(\rho_1,\rho_2).$$

证明。若 $\delta(\rho_1,\rho_2)=\infty$，则结论显然成立。假设 $\delta(\rho_1,\rho_2)<\infty$。在这种情况下，我们可以将 (4.1) 写为

$$\delta(\rho_1,\rho_2)=\sup_{a\leq b}\big|\rho_1(a,b)-\rho_2(a,b)\big|_\infty.$$

令 $r:=\delta(\rho_1,\rho_2)$。于是，对所有 $a\leq b$，

$$\rho_2(a,b)\leq \rho_1(a,b)+r \quad\text{and}\quad \rho_1(a,b)\leq \rho_2(a,b)+r$$

固定 $M,N\in\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$。假设 M和 N相对于 ρ_1是 $s\geq 0$-高度交错的。由于对所有 $a\leq b$，$\rho_2(a,b)\leq\rho_1(a,b)+r$，利用命题 4.3 中的相同构造，可得到 M与 N之间相对于 ρ_2的 $(s+r)$-高度交错。因此，$d_{\rho_2}(M,N)\leq s+r$。对这样的 s取下确界可得，$d_{\rho_2}(M,N)\leq d_{\rho_1}(M,N)+r$。由对称性，同样有 $d_{\rho_1}(M,N)\leq d_{\rho_2}(M,N)+r$。因此，

$$|d_{\rho_1}(M,N)-d_{\rho_2}(M,N)|_\infty\leq r.$$

由于这对所有 $M,N\in$ 函子范畴$(P,\mathcal{C})$ 都成立，我们得到

$$\mathrm{dist}_\infty(d_{\rho_1},d_{\rho_2})\leq r=\delta(\rho_1,\rho_2),$$

正如所需。 □

5. Distances with relaxed triangle inequalities

回顾一下，高度交错距离 d_ρ 具有对称性，且在对角线上为零，但可能不满足三角不等式。因此，我们引入以下术语。若 d_ρ 满足以下（可加） c-松弛三角不等式，则称之为

$$d_\rho(M,N)\leq d_\rho(M,X)+d_\rho(X,N)+c \quad\text{for all } M,N,X\in\mathrm{Fun}(P,\mathcal{C}). \tag{5.1}$$

我们将这样的常数 c 称为（三角不等式的）缺陷 。

当 $c=0$时， c-松弛三角不等式便退化为通常的三角不等式，这意味着 d_ρ 连同 $c=0$ 构成一个真正的扩展伪距离。

c-松弛三角不等式通常出现在如下情形：复合一个 s-高度交错和一个 r-高度交错后，得到一个（$s+r+c$）-高度交错。为使这一点形式化，假设对所有 $s,r\geq 0$，都存在自然变换

$$\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon \mathsf{L}_{s+r+c}\Longrightarrow \mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r \qquad (s,r\geq 0) \tag{5.2}$$

提供分解的

$$\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,s+r} \;=\; \left(\mathsf{L}_{s+r+c}\xRightarrow{\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}}\mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r\xRightarrow{\mu^{\mathsf{L}}_{s,r}}\mathsf{L}_{s+r}\right). \tag{5.3}$$

根据两个伴随之间的伴随对应（附录 A.2）

$$\mathrm{Nat}(\mathsf{L}_{s+r+c}, \mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r) \;\cong\; \mathrm{Nat}(\mathsf{R}_r\,\mathsf{R}_s, \mathsf{R}_{s+r+c}), \tag{5.4}$$

每个自然变换 $\sigma^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_{s+r+c} \Rightarrow \mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r$ 都唯一确定一个相应的自然变换 $\sigma^{\mathsf{R}}_{r,\,s}\colon \mathsf{R}_r\,\mathsf{R}_s \Rightarrow \mathsf{R}_{s+r+c}$。将 (5.4) 中的 s 和 r 互换后，我们还将 $\sigma^{\mathsf{R}}_{s,\,r}\colon \mathsf{R}_s\,\mathsf{R}_r \Rightarrow \mathsf{R}_{s+r+c}$ 记作 $\sigma^{\mathsf{L}}_{r,\,s}$ 的伴随变换。按照这一选择，它给出了一个分解

$$\eta^{\mathsf{R}}_{r+s,r+s+c} = \Big(\mathsf{R}_{s+r} \xrightarrow{\mu^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{R}_r\,\mathsf{R}_s \xrightarrow{\sigma^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{R}_{s+r+c}\Big). \tag{5.5}$$

现在，我们假设 M 和 X 通过 $p\colon M \to \mathbf{R}_s\,X$ 和 $q\colon X \to \mathbf{R}_s\,M$ 实现 s-高度交错，并且 X 和 N 通过 $u\colon X \to \mathbf{R}_r\,N$ 和 $v\colon N \to \mathbf{R}_r\,X$ 实现 r- 高度交错。于是，我们定义态射

$$\begin{aligned} f &:= M \xrightarrow{p} \mathsf{R}_s\,X \xrightarrow{\mathsf{R}_s(u)} \mathsf{R}_s\,\mathsf{R}_r\,N \xrightarrow{\sigma^{\mathsf{R}}_{s,r,N}} \mathsf{R}_{s+r+c}\,N,\\ g &:= N \xrightarrow{v} \mathsf{R}_r\,X \xrightarrow{\mathsf{R}_r(q)} \mathsf{R}_r\,\mathsf{R}_s\,M \xrightarrow{\sigma^{\mathsf{R}}_{r,s,M}} \mathsf{R}_{s+r+c}\,M, \end{aligned}$$

并令 $f^\sharp\colon \mathsf{L}_{s+r+c}\,M \to N$ 和 $g^\sharp\colon \mathsf{L}_{s+r+c}\,N \to M$ 为它们的左伴随。利用分解 (5.3) 和 (5.5)，可以验证

$$e_{s+r+c,M} = g \circ f^\sharp, \qquad e_{s+r+c,N} = f \circ g^\sharp,$$

因此，数对 (f, g) 构成了 M 与 N 之间的 $(s+r+c)$-高度交错。因此，对于所有 $M, N, X \in$ 函子范畴 $(P, \mathcal{C})$，(5.1) 均成立；也就是说， d_ρ 满足一个 c-松弛三角不等式。

5.1. **CIP 下的松弛三角不等式**。在本小节中，我们证明，对于 (P, ρ)，连通交性质（CIP）（定义 5.2）提供了一种构造自然变换族 (5.2) 的规范方法，其产生的缺陷 c 可以由一个由 ρ决定的常数界定（定理 5.5）。

设 P 是一个带有高度差函数 ρ 的偏序集。固定 $a \in P$ 和 $s, r \geq 0$。我们定义

$$a^{\downarrow_s\downarrow_r} := \bigcup_{x \in a^{\downarrow_s}} x^{\downarrow_r} \subseteq a^{\downarrow_{s+r}} \quad \text{and} \quad a^{\uparrow_r\uparrow_s} := \bigcup_{x \in a^{\uparrow_r}} x^{\uparrow_s} \subseteq a^{\uparrow_{s+r}}. \tag{5.8}$$

(5.8) 中的包含关系由 (3.2) 得出。

这些子集具有与引理 3.3 类似的性质：

- 对于 P 中的任意 $a \leq b$，都有 $a^{\downarrow_s\downarrow_r} \subseteq b^{\downarrow_s\downarrow_r}$ 和 $b^{\uparrow_r\uparrow_s} \subseteq a^{\uparrow_r\uparrow_s}$。
- 对于任意 $s' \geq s$ 和 $r' \geq r$，我们有 $a^{\downarrow_{s'}\downarrow_{r'}} \subseteq a^{\downarrow_s\downarrow_r}$ 和 $a^{\uparrow_{r'}\uparrow_{s'}} \subseteq a^{\uparrow_r\uparrow_s}$。
- 当且仅当 $a \in b^{\uparrow_r\uparrow_s}$ 时，我们有 $b \in a^{\downarrow_s\downarrow_r}$。

接下来，对于 $M \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$ 和 $a \in P$，我们定义

$$\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}\,M(a) := \mathsf{colim}\,M|_{a^{\downarrow_s\downarrow_r}} \quad \text{and} \quad \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s}\,M(a) := \mathsf{lim}\,M|_{a^{\uparrow_r\uparrow_s}}. \tag{5.9}$$

根据上面的前两项，赋值 (5.9) 定义了自函子

$$\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r},\ \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s}\colon \mathrm{Fun}(P, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(P, \mathcal{C}).$$

我们有一个伴随 $\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r} \dashv \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s}$，其证明方式与 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$ 相同，利用等价关系$b \in a^{\downarrow_s\downarrow_r}$ 当且仅当 $a \in b^{\uparrow_r\uparrow_s}$。

此外，自然变换 $\mu^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 和 $\mu^{\mathsf{R}}_{r,s}$ 通过这些函子分解为

$$\mu^{\mathsf{L}}_{s,r} = \Big(\mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r \xRightarrow{\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r}} \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r} \xRightarrow{\tau^{\mathsf{L}}_{s,r}} \mathsf{L}_{s+r}\Big) \quad \text{and} \quad \mu^{\mathsf{R}}_{r,s} = \Big(\mathsf{R}_{r+s} \xRightarrow{\tau^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s} \xRightarrow{\kappa^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{R}_r\,\mathsf{R}_s\Big). \tag{5.10}$$

事实上，自然变换 $\tau^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,\,r} \Rightarrow \mathsf{L}_{s+r}$ 是由包含 $a^{\downarrow_s\downarrow_r} \subseteq a^{\downarrow_{s+r}}$ 诱导的。自然变换 $\kappa^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$ 可通过与 $\mu^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$ 相同的论证得到，其中对 $x \in a^{\downarrow_s}$ 使用包含 $x^{\downarrow_r} \subseteq a^{\downarrow_s\downarrow_r}$。$\tau^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 和 $\kappa^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 的构造是对偶的。

5.1.1. 关于 κ 的 *Fubini* 型终局性判据。固定 $a \in P$ 以及 $s, r \geq 0$。令

$$I := a^{\downarrow_s}, \qquad F(x) := x^{\downarrow_r} \subseteq P \quad (x \in I), \qquad Q := \bigcup_{x \in I} F(x) = a^{\downarrow_s \downarrow_r}.$$

对于函子 $D \in$ 函子范畴$(Q,\ \mathcal{C})$，考虑典范态射

$$\mathsf{colim}_{x \in I}\ \mathsf{colim}\, D|_{F(x)} \ \longrightarrow\ \mathsf{colim}\, D, \tag{5.11}$$

在 D 中自然（见附录 B.2）。将其应用于 $D = M|_Q$，这恰好就是分量

$$\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r,M}(a) \colon (\mathsf{L}_s\, \mathsf{L}_r\, M)(a) \longrightarrow (\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}\, M)(a). \tag{5.12}$$

命题 5.1。 在上述设定中，若对于每个 $q \in Q$，子偏序集

$$I_{s,r}(a, q) := a^{\downarrow_s} \cap q^{\uparrow_r}$$

连通，则自然态射 (5.11) 对于任意 $D \in$ 函子范畴$(Q,\ \mathcal{C})$都是同构 .

证明。 设 $D \in$ 函子范畴$(Q,\ \mathcal{C})$ 是一个函子。取如上所述的 I，F，Q，则态射 (5.11) 与附录 B.2 中的典范映射 (B.3) 一致。此外，对于 $q \in Q$，相应的指标子偏序集为

$$I_q = \{x \in I \mid q \in F(x)\} = \{x \in a^{\downarrow_s} \mid q \in x^{\downarrow_r}\} = a^{\downarrow_s} \cap q^{\uparrow_r} = I_{s,r}(a, q).$$

因此，根据命题 B.2（附录 B.2 中的终局性判据），如果对每个 $q \in Q$，$I_{s,r}(a, q)$ 都是连通的，那么 (5.11) 就是一个同构。□

现在，我们引入以下术语。

定义 5.2。 如果对于任意 $a, q \in P$ 和 $s, r \geq 0$，集合 $I_{s,r}(a, q)$ 要么为空，要么是连通的，则称 $(P,\ \rho)$ 具有连通交性质 (CIP)。注意，$I_{s,r}(a, q)$ 非空当且仅当 $q \in a^{\downarrow_s \downarrow_r}$，也当且仅当 $a \in q^{\uparrow_r \uparrow_s}$。

推论 5.3。 如果(P, ρ) 满足 *CIP*，那么对于所有 $s, r \geq 0$，(5.10) 中的自然变换 $\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r} \colon \mathsf{L}_s\, \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 和 $\kappa^{\mathsf{R}}_{r,s} \colon \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s} \Rightarrow \mathsf{R}_r\, \mathsf{R}_s$ 都是同构。

证明。 固定 $s, r \geq 0$ 以及 $M \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$。对于每个 $a \in P$，根据 CIP，我们可以将命题 5.1 应用于函子 $D = M|_Q$ 的典范态射 (5.11)，其中 $Q = a^{\downarrow_s \downarrow_r}$。因此，(5.12) 中的分量$\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r,M}(a)$ 是一个同构。由于 (5.11) 关于 D 自然，这些同构关于 M （以及关于 a）自然，因此 $\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 是一个自然同构。关于 $\kappa^{\mathsf{R}}_{r,s}$ 的结论可对偶地得到。□

5.1.2. 缺陷常数与比较态射。 根据推论 5.3，在 CIP 条件下，我们可以分别通过同构 $\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 和 $\kappa^{\mathsf{R}}_{r,s}$，将 $\mathsf{L}_s\mathsf{L}_r$ 和 $\mathsf{R}_r\, \mathsf{R}_s$ 替换为 $\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 和 $\mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s}$。因此，为了得到 (5.2)，只需比较 L_{s+r+c} 与 $\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}$，并对偶地比较 $\mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s}$ 与 R_{s+r+c}。

为此，我们考虑 ρ 的以下近似介值性质。

(IV$_c$): 对于任意 $a \leq b$ 属于 P，以及任意满足 $t \leq \rho(a,\ b)$ 的 $t \in [0, \infty)$，存在 $z \in P$，使得 $a \leq z \leq b$

$$\big|\rho(a, z) - t\big|_\infty \leq \frac{c}{2} \quad \text{and} \quad \big|\rho(z, b) - \big(\rho(a, b) - t\big)\big|_\infty \leq \frac{c}{2}.$$

注意，(IV$_c$) 关于 c 是单调的：如果 (IV$_c$) 成立，那么对每个 $c' \geq c$，(IV$_{c'}$) 也成立。我们将与 ρ 相关联的常数定义为

$$c(\rho) := \inf\{\, c \geq 0 \mid (P, \rho) \text{ satisfies } (\mathrm{IV}_c)\,\}.$$

下一个引理表明，(IV$_c$) 确实给出了所需的比较态射。

引理 5.4。假设 $(P,\ \rho)$ 对 $c \geq 0$ 满足 (IV$_c$)。那么，对于任意 s、$r \geq 0$，存在自然变换

$$\theta^{\mathsf{L}}_{s,r} \colon \mathsf{L}_{s+r+c} \Rightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r} \quad \textit{and} \quad \theta^{\mathsf{R}}_{r,s} \colon \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s} \Rightarrow \mathsf{R}_{s+r+c}$$

满足

$$\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,s+r} = \big(\mathsf{L}_{s+r+c} \xRightarrow{\theta^{\mathsf{L}}_{s,r}} \mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r} \xRightarrow{\tau^{\mathsf{L}}_{s,r}} \mathsf{L}_{s+r}\big) \quad \textit{and} \quad \eta^{\mathsf{R}}_{s+r,s+r+c} = \big(\mathsf{R}_{s+r} \xRightarrow{\tau^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{T}^{\mathsf{R}}_{r,s} \xRightarrow{\theta^{\mathsf{R}}_{r,s}} \mathsf{R}_{s+r+c}\big).$$

证明。 我们构造$\theta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$并证明关于$\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,\,s+r}$的所述恒等式。关于$\theta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$以及$\eta^{\mathsf{R}}_{s+r,\,s+r+c}$的陈述可由对偶性推出。

固定 $s,\ r\ge 0$, $M\in$函子范畴$(P,\ \mathcal{C})$，以及 $a\in P$。我们首先证明包含关系

$$a^{\downarrow_{s+r+c}}\subseteq a^{\downarrow_s\downarrow_r}. \tag{5.13}$$

取 $y\in a^{\downarrow_{s+r+c}}$。根据定义，有 $y\le a$ and $\rho(y,\ a)\ge s+r+c$。若 $\rho(y,\ a)<\infty$，令$t:=\rho(y,\ a)-s-c/2\in[0,\rho(y,\ a)]$。将 (IV$_c$) 应用于 $y\le a$ and 这个 t，则存在 z with$y\le z\le a$ 使得

$$\rho(y,z)\ge t-\frac{c}{2}\quad\text{and}\quad\rho(z,a)\ge(\rho(y,a)-t)-\frac{c}{2}.$$

由于 $\rho(y,\ a)-t=s+c/2$，我们有 $\rho(z,\ a)\ge s$，因此 $z\in a^{\downarrow_s}$。此外，

$$\rho(y,z)\ge t-\frac{c}{2}=\rho(y,a)-s-c\ge r,$$

因此 $y\in z^{\downarrow_r}$。于是 $y\in a^{\downarrow_s\downarrow_r}$。否则，将 (IV$_c$) 应用于 $y\le a$ with $t:=r+c$。那么存在$y\le z\le a$使得 $\rho(y,\ z)\ge t-c/2\ge r$。由于 $\rho(y,\ a)=\infty$，(IV$_c$) 中的第二个不等式迫使$\rho(z,\ a)=\infty$，特别是 $\rho(z,\ a)\ge s$。因此 $y\in z^{\downarrow_r}$ and $z\in a^{\downarrow_s}$，所以 $y\in a^{\downarrow_s\downarrow_r}$。这就证明了包含关系 (5.13)。

沿着包含 (5.13) 作限制，我们得到一个典范态射

$$(\mathsf{L}_{s+r+c}\,M)(a)=\operatorname{colim}M|_{a^{\downarrow_{s+r+c}}}\ \longrightarrow\ \operatorname{colim}M|_{a^{\downarrow_s\downarrow_r}}=(\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}\,M)(a).$$

这些映射关于 a 和 M 自然，因此定义了一个自然变换 $\theta^{\mathsf{L}}_{s,\,r}\colon \mathsf{L}_{s+r+c}\Rightarrow\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,\,r}$。最后，对于每个 a，复合态射

$$(\mathsf{L}_{s+r+c}\,M)(a)\xrightarrow{\theta^{\mathsf{L}}_{s,r,M}(a)}(\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}\,M)(a)\xrightarrow{\tau^{\mathsf{L}}_{s,r,M}(a)}(\mathsf{L}_{s+r}\,M)(a)$$

恰好是由包含关系链 $a^{\downarrow_{s+r+c}}\subseteq a^{\downarrow_s\downarrow_r}\subseteq a^{\downarrow_{s+r}}$ 诱导的态射，因此与 $\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,\ s+r,\ M}(a)$ 一致。

$\theta^{\mathsf{R}}_{r,\,s}$ 的构造以及 $\eta^{\mathsf{R}}_{s+r,\ s+r+c}$ 的恒等式可对偶地得到，使用由 (IV$_c$) 诱导的包含 $a^{\uparrow_{s+r+c}}\subseteq a^{\uparrow_r\uparrow_s}$。□

结合此引理与推论 5.3，我们得到以下结果。

定理 5.5。若 (P,ρ) 具有 *CIP*，则 d_ρ 满足 $c(\rho)$ 松弛三角不等式。特别地，若 $c(\rho)=0$，则 d_ρ 是扩展伪距离。

证明。 固定 $c\ge 0$，并假设 (P,ρ) 满足 (IV$_c$)。

令 $s,r\ge 0$。由推论 5.3，自然变换 $\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon \mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r\Rightarrow\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 是一个同构。由引理 5.4，我们还得到一个自然变换 $\theta^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon \mathsf{L}_{s+r+c}\Rightarrow\mathsf{T}^{\mathsf{L}}_{s,r}$，满足 $\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,s+r}=\tau^{\mathsf{L}}_{s,r}\circ\theta^{\mathsf{L}}_{s,r}$。

定义自然变换$\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 如下:

$$\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}:=(\kappa^{\mathsf{L}}_{s,r})^{-1}\circ\theta^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon\ \mathsf{L}_{s+r+c}\Longrightarrow\mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r\,. \tag{5.14}$$

于是，根据构造，我们得到分解

$$\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,s+r}=\Big(\mathsf{L}_{s+r+c}\xrightarrow{\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}}\mathsf{L}_s\,\mathsf{L}_r\xrightarrow{\mu^{\mathsf{L}}_{s,r}}\mathsf{L}_{s+r}\Big),$$

也就是说，$\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 满足 (5.3)。对偶地，我们得到自然变换 $\sigma^{\mathsf{R}}_{r,s}\colon \mathrm{R}_r\,\mathrm{R}_s\ \Rightarrow\mathrm{R}_{r+s+c}$。根据构造，它们与 $\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 在双射 (5.4) 下的伴随态射相一致。

因此，本小节开头的讨论适用于这些变换 $\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 及其伴随态射 $\sigma^{\mathsf{R}}_{r,s}$，并表明，对于任意 $M,X,N\in\mathsf{Fun}(P,\mathcal{C})$，将 M 与 X 之间的一个 s-高度交错，与 X 和 N 之间的一个 r-高度交错复合，得到 M 与 N 之间的一个 $(s+r+c)$-高度交错。因此，d_ρ 满足 c-松弛三角不等式。

最后，由于 (IV$_c$) 关于 c 是单调的，同样的结论对每个 $c>c(\rho)$ 都成立。对这类 c取下确界，可得 d_ρ 满足 $c(\rho)$-松弛三角不等式。特别地，如果$c(\rho)=0$，那么 d_ρ 就是一个扩展伪距离。□

以下推论是定理 5.5 和函数稳定性的直接结果：一旦通过 CIP 为给定的高度差函数建立了松弛三角不等式，它就会自动推广到任何其他高度差函数，至多相差一个由它们的畸变控制的加性缺陷。

推论 5.6。 设 ρ_1, ρ_2 是偏序集 P 上的高度差函数。如果 (P, ρ_1) 具有 *CIP*，则 d_{ρ_2} 满足 $(c(\rho_1) + 3\delta(\rho_1, \rho_2))$-松弛三角不等式。

证明。 根据定理 5.5， d_{ρ_1} 满足 $c(\rho_1)$-松弛三角不等式。如果 $\delta(\rho_1, \rho_2) = \infty$，则无需证明；设 $\delta(\rho_1, \rho_2) < \infty$。

令 $r := \mathrm{dist}_\infty(d_{\rho_1}, d_{\rho_2})$。根据定理 4.4， $r \leq \delta(\rho_1, \rho_2)$。令 $\epsilon > 0$。根据 r 的定义，对于所有 $A, B \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$，有

$$d_{\rho_2}(A, B) \leq d_{\rho_1}(A, B) + r + \epsilon \quad \text{and} \quad d_{\rho_1}(A, B) \leq d_{\rho_2}(A, B) + r + \epsilon.$$

因此，对于 $M, X, N \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} d_{\rho_2}(M, N) &\leq d_{\rho_1}(M, N) + r + \epsilon \\ &\leq d_{\rho_1}(M, X) + d_{\rho_1}(X, N) + c(\rho_1) + r + \epsilon \\ &\leq \big(d_{\rho_2}(M, X) + r + \epsilon\big) + \big(d_{\rho_2}(X, N) + r + \epsilon\big) + c(\rho_1) + r + \epsilon \\ &= d_{\rho_2}(M, X) + d_{\rho_2}(X, N) + c(\rho_1) + 3(r + \epsilon). \end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，令 $\epsilon \to 0$，得到

$d_{\rho_2}(M, N) \leq d_{\rho_2}(M, X) + d_{\rho_2}(X, N) + c(\rho_1) + 3r \leq d_{\rho_2}(M, X) + d_{\rho_2}(X, N) + c(\rho_1) + 3\delta(\rho_1, \rho_2)$，如所要求。 □

我们以几条将在后文中一直使用的备注和约定结束本小节。

约定 5.7。 我们沿用约定 3.8 中的记号。在下文中，每当 $\rho = \rho_\phi$ 由一个高度函数 ϕ诱导时，我们将使用 ϕ 表示相关的概念和构造。例如，我们称 (P, ϕ) 满足 CIP，如果 (P, ρ_ϕ) 满足 CIP。此外，对于ρ_ϕ 而言，条件 (IV_c) 等价于以下条件：

- 对于 P 中的任意 $a \leq b$ 以及任意 $p \in [\phi(a)\ \phi(b)]$, , 存在 $z \in P$，使得 $a \leq z \leq b$，且$|\phi(z) - p| \leq c/2$。

因此， $c(\phi) := c(\rho_\phi)$ 恰为满足上述条件的 $c \geq 0$ 的下确界。 此外，若 P 局部有限（即每个区间 $[a, b]$ 都是有限的），那么

$$c(\phi) = \sup_{a \lessdot b} (\phi(b) - \phi(a)),$$

其中，上确界取遍 P 中所有的覆盖关系 $a \lessdot b$。特别地，这对任意有限偏序集都成立。

一般而言，定理 5.5 中的加性缺陷是最佳可能的，以下备注将对此作出解释。

Rem备注 5.8。 (1) 定理 5.5 中的加性缺陷 $c(\rho)$ 是尖锐的，意即它无法得到改进且无法在 CIP 条件下统一改进。

事实上，设 (P, ϕ) 和 $M, X, N \in \mathrm{Fun}(P, \mathrm{Vect}_k)$ 如第 3.4 小节的例（2）所述。在此情形下，(P, ϕ) 满足 CIP，且有 $c(\phi) = C$。此外，由 (3.10) 可知， $d_\phi(M, X) = d_\phi(X, N) = 0$ 且 $d_\phi(M, N) = C$。因此，任何形如

$$d_\phi(M, N) \leq d_\phi(M, X) + d_\phi(X, N) + c$$

的 不等式都会推出 $c \geq C$。

(2) 此外，若不假设 CIP，距离 d_ρ 可能不满足 $c(\rho)$-松弛三角不等式。事实上，对于例 5.11 中的对 (B, ϕ)，它不满足 CIP，存在 $M, M_1, N \in \mathrm{Fun}(B, \mathrm{Vect}_k)$，使得

$$d_\phi(M, N) > d_\phi(M, M_1) + d_\phi(M_1, N) + c(\phi).$$

接下来，我们讨论可以验证 CIP 的情形，从而使定理 5.5 得以适用。

5.1.3. 无菱形偏序集的情形。 若偏序集 P 不含与四元素菱形偏序集同构的全子偏序集，即 $\{a<b,\ a<c,\ b<d,\ c<d\}$，则称其为无菱形的 。注意，这等价于要求 P 中的每个区间 $[a,b]$ 都是全序。此类偏序集自然包括（取任意定向的）之字形偏序集，也包括其哈斯~图表为树或无可交换路径的仿射 A-型的有限偏序集。

命题 5.9。 若 P 不含菱形，则对于 P上的任意高度差函数 ρ，P与 ρ) 具有 *CIP*。特别地，距离 d_ρ 满足一个 $c(\rho)$-松弛三角不等式。

证明。 固定 $s,r\geq 0$和 $a,q\in P$。根据定义，集合 $I_{s,r}(a,q):=a^{\downarrow_s}\cap q^{\uparrow_r}$在非空时是区间 $[q,a]$的一个全子偏序集。根据假设，区间 $[q,a]$是全序的。因此，其全子偏序集 $I_{s,r}(a,q)$ 也是全序的，因而是连通的。这验证了 (P,ρ) 具有 CIP。 □

下面的例子给出了一个连续之字形偏序集 Z，命题 5.9 适用于该偏序集。 s.

例 5.10。 令 Z 为集合 $\mathbb{R}$，并赋予如下定义的偏序 $\leq_Z$。若$x,y\in[n,n+1]$对某个 $n\in\mathbb{Z}$成立，则

$$x\leq_Z y \iff \begin{cases} x\leq y & \text{if } n \text{ is even},\\ x\geq y & \text{if } n \text{ is odd}.\end{cases}$$

否则， x 和 y 不可比较。于是，每个偶整数 $2k$ 都是极小元，每个奇整数 $2k+1$ 都是 Z的极大元。显然， Z 不含菱形。

定义高度函数 ϕ: $Z\to\mathbb{R}$ 如下：若存在某个 $n\in\mathbb{Z}$使得 $x\in[n,n+1]$，则

$$\phi(x)=\begin{cases} x-n & \text{if } n \text{ is even},\\ n+1-x & \text{if } n \text{ is odd}.\end{cases}$$

特别地，对所有 $k\in\mathbb{Z}$， $\phi(2k)=0$ 且 $\phi(2k+1)=1$。由于 $c(\phi)=0$，命题 5.9 表明， d_ϕ 是 Fun$(Z,\mathcal{C})$上的扩展伪距离。

令 $M:=k_{[-1,2]}$且 $N:=k_{[-1,0)}\oplus k_{(0,2]}$。那么可以验证，相对于上述 ϕ， $d_\phi(M,N)=0$。

另一方面，相对于任意平移 Λ: $Z\to Z$， M 和 N 都不交错。事实上，每个平移 Λ 都会固定每个极小元，因此特别地， $\Lambda(0)=0$。所以，典范映射 $M(0)\to(\Lambda^*\Lambda^*M)(0)=M(0)$是恒等映射；而$(\Lambda^*N)(0)=N(\Lambda(0))=N(0)=0$则迫使任意复合态射 $M(0)\to(\Lambda^*N)(0)\to(\Lambda^*\Lambda^*M)(0)$为零。这表明 M和 N不是 Λ-交错的。

因此，对于任意超线性平移族 Ω，根据上述论证，模 M 和 N 对于任意 $r\geq 0$都不是 Ω_r-交错的。因此 $d_\Omega(M,N)=\infty$。

接下来，我们给出一个偏序集及其高度函数的例子，该高度函数不满足 CIP。

例 5.11. 令 S^1为圆，并固定两个特殊点 s， $t\in S^1$。移除 $\{s,t\}$后， S^1分解为两个开弧，其闭包记为 Q^1和 Q^2。于是 $Q^1\cap Q^2=\{s,t\}$和 $Q^1\cup Q^2=S^1$。令 B为 S^1，赋予如下偏序：每个 Q^i 都是一条从s 到 t的链，且除此之外没有其他可比关系。这个偏序集在偏序集同构意义下，就是 [Tad25] 中所研究的那个偏序集（按其术语称为双路径偏序集）。

固定 $G>4$。我们通过偏序集同构，将每条链 Q^i 与区间 $[0,G]$ 对应起来。因此，我们记

$$Q^1=\{c_z\}_{z\in[0,G]}\quad\text{and}\quad Q^2=\{d_z\}_{z\in[0,G]},$$

其中 $c_0=d_0=s$ 和 $c_G=d_G=t$。定义高度函数 ϕ: $B\to\mathbb{R}$，使得对所有 $z\in[0,G]$， $\phi(c_z)=\phi(d_z)=z$。容易验证，$(B,\ \phi)$ 不满足 CIP，而 $c(\phi)=0$。

令 $M:=k_B$，并定义 $M_1:=\mathrm{L}_1M$ 和 $N:=\mathrm{L}_1M_1=\mathrm{L}_1(\mathrm{L}_1M)$。我们断言

$$d_\phi(M,M_1)=1,\qquad d_\phi(M_1,N)=1,\quad\text{and}\quad d_\phi(M,N)=G/2.$$

特别地，这表明 $c(\phi)$-松弛三角不等式对于三元组 $(M,\ M_1,\ N)$ 不成立。直接计算可得

$$M_1\cong k_{[c_1,t]\cup[d_1,t]}\quad\text{and}\quad N\cong k_{[c_2,t]}\oplus k_{[d_2,t]}.$$

由引理 3.10，M 和 M_1（分别地，M_1 和 N）关于 ϕ 是 1-高度交错的。由于对于任何 $r<1$，它们都不是 r-高度交错的，因此可得 $d_\phi(M,\ M_1)=1$，且 $d_\phi(M_1,\ N)=1$。

为了计算 $d_\phi(M,\ N)$，我们记录如下：

$$\mathsf{L}_r\, M \cong \begin{cases} k_{[c_r,t]\cup[d_r,t]} & 0\le r\le G,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

特别地，对于所有 $0\le r<G$，$\mathrm{Hom}(\mathsf{L}_r M,\ N)=0$。另一方面，对于$r\le G/2$，有 $e_{r,\ M}\neq 0$；而对于 $r>G/2$，则有 $e_{r,\ M}=0$。因此，当 $r\le G/2$ 时，M 和 N 并非 r-高度交错；但对于每个 $r>G/2$，它们都是 r-高度交错。因此，$d_\phi(M,\ N)=G/2$。

5.1.4. 多参数情形。现在我们转向多参数设定 $P=\mathbb{R}^d$。令 ρ_{diag} 为 $\mathbb{R}^d$ 上由 (3.8) 定义的高度差函数。如命题 3.11 所示，高度交错距离 $d_{\rho_{\mathrm{diag}}}$ 与 $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d,\ \mathcal{C})$ 上的经典交错距离 d_I 相一致。为完整起见，我们记录下这与定理 5.5 相符。

命题 5.12。这对 $(\mathbb{R}^d,\rho_{\mathrm{diag}})$ 满足 *CIP* 和 (IV_0)。特别地，$c(\rho_{\mathrm{diag}})=0$ 和$d_{\rho_{\mathrm{diag}}}$ 是扩展伪距离。

证明。令 $a,q\in\mathbb{R}^d$ 和 $s,r\ge 0$。我们有

$$a^{\downarrow_s}=(a-\vec{s})^{\downarrow}=\prod_{i=1}^{d}(-\infty,a_i-s]\quad\text{and}\quad q^{\uparrow_r}=(q+\vec{r})^{\uparrow}=\prod_{i=1}^{d}[q_i+r,\infty),$$

因此

$$I_{s,r}(a,q)=a^{\downarrow_s}\cap q^{\uparrow_r}=\prod_{i=1}^{d}[q_i+r,\ a_i-s],$$

它要么为空，要么有一个最小元。因此 $(\mathbb{R}^d,\rho_{\mathrm{diag}})$ 满足 CIP。

接下来，令 $a\le b$，并设 $m:=\rho_{\mathrm{diag}}(a,\dots,b)=\min_i(b_i-a_i)$。对于任意 $t\in[0,m]$，令 $z:=a+(t,\dots,t)$。那么 $a\le z\le b$，并且

$$\rho_{\mathrm{diag}}(a,z)=t\quad\text{and}\quad\rho_{\mathrm{diag}}(z,b)=m-t=\rho_{\mathrm{diag}}(a,b)-t.$$

这验证了 (IV_0)。□

命题 5.12 还允许我们用高度差函数来表述与 d_I 的比较，由此引出以下术语。

定义 5.13. 令 $P=\mathbb{R}^d$ 带有乘积序，并令 ρ 为 P 上的高度差函数。若对所有 $a\in P$ 和 $r\ge 0$，ρ 支配对角平移，

$$\rho(a,a+\vec{r})\ge r\quad\text{and}\quad\rho(a-\vec{r},a)\ge r.$$

命题 5.14. 假设 ρ 支配对角平移。那么对于任意 M、$N\in$ 函子范畴$(\mathbb{R}^d,\mathcal{C})$，

$$d_I(M,N)\le d_\rho(M,N).$$

证明. 我们先证明 $\rho_{\mathrm{diag}}\le\rho$。固定 $a\le b$，并令 $r:=\rho_{\mathrm{diag}}(a,b)=\min_i(b_i-a_i)$。于是 $a+\vec{r}\le b$。由于 ρ 支配对角平移，我们有 $\rho(a,a+\vec{r})\ge r$。由 (3.2)，可得

$$\rho(a,b)\ge\rho(a,a+\vec{r})+\rho(a+\vec{r},b)\ge r=\rho_{\mathrm{diag}}(a,b).$$

因此 $\rho_{\mathrm{diag}}\le\rho$。

由命题 4.3 可知 $d_{\rho_{\mathrm{diag}}}\le d_\rho$。由于根据命题 3.11 有 $d_{\rho_{\mathrm{diag}}}=d_I$，结论成立。□

5.2. **通过伽罗瓦嵌入继承松弛三角不等式**。设 P,P' 为偏序集。一对保序映射 $\iota\colon P\to P'$ 和 $\pi\colon P'\to P$称为伽罗瓦嵌入，若 $\iota\dashv\pi$ 且ι 是序嵌入。我们通过 ι 将 P 与其像 $\iota(P)$ 等同，并将其视为 P' 的全子偏序集。

定理 5.15。设 ρ' 是偏序集 P' 上的高度差函数。设 $(\iota,\ \pi)$ 是一个伽罗瓦嵌入$P\rightleftarrows P'$，且 $\rho:=\iota^*\rho'$ 是 ρ 在 P 上的限制。则以下陈述成立。

(1) 对于任意 $M,N\in$ 函子范畴$(P,\mathcal{C})$，有

$$d_\rho(M,N)\le d_{\rho'}(\pi^*M,\pi^*N)\le d_\rho(M,N)+\delta(\rho',\pi^*\rho).\tag{5.15}$$

（2）如果 （P'、 ρ'） 具有 *CIP*，则 d_ρ 满足 $\big(c\,(\rho')\,+2\delta\,(\rho'、\,\pi^*\rho)\,\big)$-松弛三角不等式。

证明。 由于 $\iota \dashv \pi$，对于 $a \in P$ 和 $x \in P'$，我们有 $\iota(a) \le x$ 当且仅当 $a \le \pi(x)$。特别地，对于所有 $x \in P'$，$\iota(\pi(x)) \le x$。

(1) 利用 $\pi\iota = \mathrm{id}_P$，我们有 $\iota^*\pi^* \simeq \mathrm{id}^{\mathrm{Fun}(P,\mathcal{C})}$，因此根据拉回稳定性，

$$d_\rho(M,N) = d_{\iota^*\rho'}(\iota^*\pi^*M, \iota^*\pi^*N) \le d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*N),$$

这给出了 (5.15) 中的不等式左侧。

另一方面，由于根据 $\pi\iota = \mathrm{id}_P$，$\rho = (\pi\iota)^*\rho = \iota^*(\pi^*\rho)$，两次应用拉回稳定性可得

$$d_\rho(M,N) = d_{\iota^*(\pi^*\rho)}(\iota^*\pi^*M, \iota^*\pi^*N) \le d_{\pi^*\rho}(\pi^*M, \pi^*N) \le d_\rho(M,N),$$

因此

$$d_{\pi^*\rho}(\pi^*M, \pi^*N) = d_\rho(M,N).$$

现在，将函数稳定性（定理 4.4）应用于 P'，

$$|d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*N) - d_{\pi^*\rho}(\pi^*M, \pi^*N)|_\infty \le \delta(\rho', \pi^*\rho).$$

特别地，

$$d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*N) \le d_{\pi^*\rho}(\pi^*M, \pi^*N) + \delta(\rho', \pi^*\rho) = d_\rho(M,N) + \delta(\rho', \pi^*\rho),$$

这就是 (5.15) 中右侧的不等式。

(2) 假设 (P', ρ') 具有 CIP。根据定理 5.5，$d_{\rho'}$ 满足一个 $c(\rho')$-松弛三角不等式 y. For $M, X, N \in$ 函子范畴$(P, \mathcal{C})$，由 (1) 可得

$$d_\rho(M,N) \le d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*N) \le d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*X) + d_{\rho'}(\pi^*X, \pi^*N) + c(\rho').$$

再次将 (1) 应用于每一项，得到

$$d_{\rho'}(\pi^*M, \pi^*X) \le d_\rho(M,X) + \delta(\rho', \pi^*\rho) \quad \text{and} \quad d_{\rho'}(\pi^*X, \pi^*N) \le d_\rho(X,N) + \delta(\rho', \pi^*\rho).$$

合并这些不等式可得

$$d_\rho(M,N) \le d_\rho(M,X) + d_\rho(X,N) + \big(c(\rho') + 2\delta(\rho', \pi^*\rho)\big),$$

如所需。 □

6. Height-interleavings for persistence modules over 向量空间范畴$_k$

本节中，我们将注意力限制在 $\mathcal{C}$ =Vect$_k$ 的情形，并聚焦于持久模范畴。因此，我们在阿贝尔范畴 Rep$_k(P)$:= Fun$(P,$ Vect$_k)$ 中进行讨论，并将其对象视为 P-持久模。回顾一下，Rep$_k(P)$ 中的核、余核和像都是逐点计算的。特别地，Rep$_k(P)$ 中的态射是单态射/满态射，当且仅当它在每个 $a \in P$ 处都是如此。

设 F, G: Rep$_k(P)$ $\to$Rep$_k(P)$ 为自函子。若存在自然变换 $F \Rightarrow G$，使得对于每个 M，其分量 $F(M) \to G(M)$ 都是单同态（分别为满态射），则称 F 是 G 的子函子 （分别为商函子）。此外，若存在自函子 H: Rep$_k(P)$ $\to$Rep$_k(P)$，使得 H 是 G 的子函子，且 F 是 H 的商函子，则称 F 是 G 的子商。此时，$F(M)$ 在函子意义下是 $G(M)$ 的子商，其中变量为 M。最后，对于给定的自然变换 α: $F \Rightarrow G$，我们用 im(α) （分别用 ker(α) ）表示逐点取像（分别取核）所得到的自函子。

6.1. 侵蚀函子。 固定定义在 P 和 $r \ge 0$上的高度差函数 ρ。我们已经在 Rep$_k(P)$ 上定义了自函子 L$_r$ 和 R$_r$，以及自然变换 η_r^{L}: L$_r$ $\Rightarrow$ id 和η_r^{R}: id $\Rightarrow$R$_r$。注意，L$_r$ 和 R$_r$ 都是可加的。

命题 6.1。 L$_r$ 是右正合的，而R$_r$ 是左正合的。

证明。 由于 Rep$_k(P)$ 是阿贝尔范畴，任何左伴随函子都是右正合的，任何右伴随函子都是左正合的。因此，结论由命题 3.5 得出。□

现在我们引入第三个自函子，称为 r-侵蚀函子，它介于 L$_r$ 和 R$_r$之间。关于这一术语的动机和背景，请参见注 6.4。

定义 6.2. 对于 $r \geq 0$，我们定义一个自函子

$$\mathsf{E}_r := \mathrm{im}\big(e_r \colon \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{R}_r\big) \colon \mathsf{Rep}_k(P) \to \mathsf{Rep}_k(P)$$

并将其称为 r侵蚀函子 （相对于 ρ）。

具体而言，对于 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$，定义

$$\mathsf{E}_r\, M := \mathrm{im}\big(e_{r,M} \colon \mathsf{L}_r\, M \to \mathsf{R}_r\, M\big) \subseteq \mathsf{R}_r\, M.$$

对于态射 $f \colon M \to N$， e_r 的自然性导出交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{L}_r\, M & \xrightarrow{e_{r,M}} & \mathsf{R}_r\, M \\ {\scriptstyle \mathsf{L}_r(f)}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}_r(f)} \\ \mathsf{L}_r\, N & \xrightarrow{e_{r,N}} & \mathsf{R}_r\, N \end{array}$$

而 $\mathsf{R}_r(f)$ 在 $\mathsf{E}_r\, M$上的限制定义了一个态射 $\mathsf{E}_r(f) : \mathsf{E}_r\, M \to \mathsf{E}_r\, N$。

此外，与 L_r 和 R_r类似，侵蚀函子 E_r 也与中间延拓 [BBD82, Kuh94]有关（另见 [AET25]，其中讨论了其在持久模中的应用）；而 L_r 和 R_r可分别用左、右 Kan 延拓逐点描述。更确切地说，对于每个 $a \in P$，考虑全子偏序集 $U_a := a^{\downarrow_r} \cup a^{\uparrow_r} \subseteq P$及其典范包含 $u_a \colon U_a \to P$。回顾（3.7），对于 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$，对象 $\mathsf{L}_r\, M(a)$ 和 $\mathsf{R}_r\, M(a)$ 可分别表示为沿 u_a的逐点 Kan 延拓。根据这些对应，$\mathsf{E}_r\, M(a)$ 可表示为典范映射的像

$$(\mathrm{Lan}_{u_a}(M|_{U_a}))(a) \longrightarrow (\mathrm{Ran}_{u_a}(M|_{U_a}))(a)$$

由伴随三元组 $\mathsf{Lan}_{u_a} \dashv u_a^* \dashv \mathsf{Ran}_{u_a}$诱导。这使 E_r 成为 L_r 与 R_r之间的逐点中间延拓。

命题 6.3. 对于 r、 $s \geq 0$，有如下结论。
(1) E_r 保单态射和满态射。(2) 对于 $s \geq r$，E_s 是E_r的子商。(3) 对于所有 s、 $r \geq 0$，$\mathsf{E}_s\, \mathsf{E}_r$ 是E_{s+r}的子商。

证明。 (1) 我们回顾一个基本事实：对于阿贝尔范畴上的自函子之间的自然变换 $\alpha \colon F \Rightarrow G$，只要 F 保持满态射，其像就保持满态射；只要 G 保持单态射，其像就保持单态射。

根据命题 3.5，L_r 是右正合的，R_r 是左正合的。特别地，L_r 保持满态射，R_r 保持单态射。因此，将上述事实应用于自然变换 $e_r \colon \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{R}_r$ 即得所述结论。

(2) 设 $s \geq r$。回忆典范分解

$$\mathsf{L}_s\, M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s,r,M}} \mathsf{L}_r\, M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}} M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}} \mathsf{R}_r\, M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{r,s,M}} \mathsf{R}_s\, M.$$

Let

$$\gamma_{s,r} \colon \mathsf{L}_s \Rightarrow \mathsf{R}_r \quad \text{and} \quad H_{s,r} := \mathrm{im}(\gamma_{s,r}).$$

于是，对每个 M，上述分解表明 $H_{s,\,r}M$ 是 $\mathsf{E}_r\, M$ 的子对象，并且 $\mathsf{E}_s\, M$ 是 $H_{s,\,r}M$ 的商对象。由于这些构造关于 M 是自然的，我们得出 E_s 是 E_r 的子商。

(3) 设 s， $r \geq 0$ 和 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$。记

$$\mathsf{L}_r\, M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathsf{E}_r\, M \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathsf{R}_r\, M$$

对于典范满射和包含。应用 L_s 和 R_s 得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\, M) & \xrightarrow{\mu^{\mathsf{L}}_{s,r,M}} & \mathsf{L}_{s+r}\, M & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s+r,M}} & M & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{s+r,M}} & \mathsf{R}_{s+r}\, M & \xrightarrow{\mu^{\mathsf{R}}_{s,r,M}} & \mathsf{R}_s(\mathsf{R}_r\, M) \\ {\scriptstyle \mathsf{L}_s(\pi)}\downarrow & & & \circlearrowleft & & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{R}_s(\iota)} \\ \mathsf{L}_s(\mathsf{E}_r\, M) & & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s,\mathsf{E}_r\, M}} & & \mathsf{E}_r\, M & & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{s,\mathsf{E}_r\, M}} & & \mathsf{R}_s(\mathsf{E}_r\, M). \end{array}$$

由于 $\mathsf{L}_s(\pi)$ 是满态射，而 $\mathsf{R}_s(\iota)$ 是单同态，我们得到一个同构

$$\mathsf{E}_s(\mathsf{E}_r\,M) := \operatorname{im}\big(\mathsf{L}_s(\mathsf{E}_r\,M) \to \mathsf{R}_s(\mathsf{E}_r\,M)\big) \cong \operatorname{im}\big(\mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\,M) \to \mathsf{R}_s(\mathsf{R}_r\,M)\big).$$

By t与（2）中的论证相同，我们得出 $\mathsf{E}_s(\mathsf{E}_r\,M)$ 是 $\mathsf{E}_{s+r}\,M$ 的子商。因为 th e cons该构造关于 M 是自然的，因此自函子 $\mathsf{E}_s\,\mathsf{E}_r$ 是 E_{s+r} 的子商。 □

注 6.4。我们的 r-侵蚀概念类似于 [Bje25] 中针对超线性平移族定义的概念。设 $\Omega = (\Omega_r)_{r\geq 0}$ 是 P 上的强超线性平移族。对于一个 P-持久模 M，相对于 Ω 的 r-侵蚀定义为典范映射 $(\Omega_{-r}^{*}M \to M \to \Omega_r^* M)$ 的像。

特别地，当 $P = \mathbb{R}^d$ 和 $\rho = \rho_{\mathrm{diag}}$ 时，根据命题 3.11(1)，我们的 r-侵蚀与 $\mathsf{Rep}_k(\mathbb{R}^d)$ 上的 r-平移函子所对应的 r-侵蚀一致。

6.2. **侵蚀邻域**。在经典基于平移的交错框架下，ϵ-侵蚀邻域及其相关的侵蚀邻域距离这一概念由 [Bje25] 引入。受此启发，我们引入高度交错的对应概念（定义 6.6），并建立相应的基本性质，包括由侵蚀邻域构造 r-高度交错（定理 6.7），以及高度交错距离 d_ρ 与侵蚀邻域距离 $d_{\rho\text{-EN}}$ 之间的比较结果（定理 6.8）。

为表述侵蚀邻域，我们首先引入与典范映射 η_r^{L} 和 η_r^{R} 相关联的像函子和核函子。我们将由自然变换 $\eta_r^{\mathsf{L}}\colon \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{id}$ 和 $\eta_r^{\mathsf{R}}\colon \mathsf{id} \Rightarrow \mathsf{R}_r$ 的像和核分别定义的自函子记为 $\mathsf{Im}_r, \mathsf{Ker}_r\colon \mathsf{Rep}_k(P) \to \mathsf{Rep}_k(P)$。具体而言，对于 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$，令

$$\operatorname{Im}_r M := \operatorname{im}(\eta_{r,M}^{\mathsf{L}}\colon \mathsf{L}_r\,M \to M) \subseteq M, \quad \text{and} \quad \operatorname{Ker}_r M := \ker(\eta_{r,M}^{\mathsf{R}}\colon M \to \mathsf{R}_r\,M) \subseteq M$$

视为 M 的子模。

我们给出这些函子的基本性质。

命题 6.5。以下陈述成立。

(1) 核$_r$ 是左正合的。(2) 像$_r$ 保持单态射和满态射。(3) 对于 $s \geq r$，我们有 核$_r \subseteq$ 核$_s$ 和 像$_s \subseteq$像$_r$，它们是子函子。(4) 对于任意 s、$r \geq 0$，像$_s$像$_r$ 是 像$_{s+r}$ 的子函子。(5) 对于任意 $M \in$ 函子范畴$_k(P)$，我们有 核$_r\,M = M$ 当且仅当 像$_r M = 0$。

证明。(1) 该断言由以下事实可得：Ker_r 定义为 η_r^{R} 的核：$\mathsf{id} \Rightarrow \mathsf{R}_r$，且左正合函子之间的自然变换的核是左正合的。

(2) 回忆一下，Im_r 定义为自然变换 $\eta_r^{\mathsf{L}}\colon \mathsf{L}_r \Rightarrow \mathsf{id}$ 的像。于是，该断言可由与命题 6.3(1) 的证明类似的论证得出。

(3) 对于 $s \geq r$，自然变换 $\eta_s^{\mathsf{L}} = \eta_r^{\mathsf{L}} \circ \eta_{s,\,r}^{\mathsf{L}}$ 和 $\eta_s^{\mathsf{R}} = \eta_{r,\,s}^{\mathsf{R}} \circ \eta_r^{\mathsf{R}}$ 存在分解。取像和核可得，对所有 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$，均有 $\mathsf{Im}_s M \subseteq \mathsf{Im}_r M$ 和 $\mathsf{Ker}_r\,M \subseteq \mathsf{Ker}_s\,M$，如所述。

(4) 设 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$。记

$$\mathsf{L}_r\,M \xrightarrow{\pi} \operatorname{Im}_r M \xrightarrow{\iota} M$$

为 典范满射和包含。于是，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\,M) & \xrightarrow{\mathsf{L}_s(\pi)} & \mathsf{L}_s(\operatorname{Im}_r M) & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s,\operatorname{Im}_r M}} & \operatorname{Im}_r M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^{\mathsf{L}}_{s,r,M}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{L}_s(\iota)} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathsf{L}_{s+r}\,M & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s+r,s,M}} & \mathsf{L}_s\,M & \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s,M}} & M. \end{array} \tag{6.1}$$

由于 L_s 是右正合的，$\mathsf{L}_s(\pi)$ 是满态射。因此，我们将 $\mathsf{Im}_s(\mathsf{Im}_r M)$ 视为 $\mathsf{im}(\mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\,M) \to M)$。由交换性，态射 $\mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\,M) \to M$ 可分解通过 $\mathsf{L}_{s+r}\,M \to M$，因此，

$$\operatorname{Im}_s(\operatorname{Im}_r M) = \operatorname{im}(\mathsf{L}_s(\mathsf{L}_r\,M) \to M) \subseteq \operatorname{im}(\mathsf{L}_{s+r}\,M \to M) = \operatorname{Im}_{s+r} M.$$

此包含关于 M 是自然的，因此定义了一个自然变换 $\mathsf{Im}_s\mathsf{Im}_r \Rightarrow \mathsf{Im}_{s+r}$，其分量都是单同态。

(5) 根据定义， $M = \mathrm{Ker}_r M$ 成立，当且仅当 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}\colon M \to \mathsf{R}_r M$ 是零态射。此外，$\mathrm{Im}_r M = 0$ 成立，当且仅当 $\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}\colon \mathsf{L}_r M \to M$ 是零态射。在伴随 $\mathsf{L}_r \dashv \mathsf{R}_r$ 下，态射 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}$ 和 $\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}$ 互为伴随变换。因此，$\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} = 0$ 当且仅当 $\eta^{\mathsf{L}}_{r,M} = 0$。□

根据定义， r-侵蚀 $\mathsf{E}_r M$ 由复合态射 (3.5) 的像给出，因此是 M 的一个子商。具体而言，存在一个同构

$$\mathsf{E}_r M \cong \mathrm{Im}_r M / (\mathrm{Im}_r M \cap \mathrm{Ker}_r M). \tag{6.2}$$

鉴于 (6.2)，自然可以考虑通过扩张 $\mathrm{Im}_r M$ 和/或缩小 $\mathrm{Ker}_r M$，得到 M 的更一般的子商。这引出了以下定义。

定义 6.6. 设 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$ 且 $r \geq 0$。 r-侵蚀邻域 是 M 的一个子商，形式为 M_1/M_2，其中 $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$ 是满足 $\mathrm{Im}_r M \subseteq M_1$ 且 $M_2 \subseteq \mathrm{Ker}_r M$ 的子模。我们用 $\mathsf{EN}_r(M)$ 表示 M 的 r-侵蚀邻域的同构类集合。

我们的结果如下。

定理 6.7. 设 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$ 且 $r \geq 0$。
(1) $\mathsf{E}_r M$ 是 M 的 r-侵蚀邻域。(2) 令 $N \in \mathrm{EN}_r(M)$。那么 M 和 N 关于 ρ 是 r-高度交错的。特别地， M 和 $\mathsf{E}_r M$ 关于 ρ 是 r-高度交错的。

证明。 (1) 这可直接由 (6.2) 得出。

(2) 假设 $N \cong M_1/M_2 \in \mathsf{EN}_r(M)$，其中 $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$ 满足 $\mathrm{Im}_r M \subseteq M_1$ 且 $M_2 \subseteq \mathrm{Ker}_r M$。令 $\iota\colon M_1 \hookrightarrow M$ 和 $\pi\colon M_1 \twoheadrightarrow N$，于是

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

是正合的。

定义 $\alpha\colon \mathsf{L}_r M \to N$ 为

$$\alpha\colon \mathsf{L}_r M \twoheadrightarrow \mathrm{Im}_r M \hookrightarrow M_1 \xrightarrow{\pi} N.$$

于是我们有 $\alpha \circ \mathsf{L}_r(\iota) = \pi \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1}$。此外，由于 $M_2 \subseteq \mathrm{Ker}_r M$，复合态射 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \circ \iota\colon M_1 \to \mathsf{R}_r M$ 在 M_2 上为零，因此唯一地经由 π 分解。令 $\beta\colon N \to \mathsf{R}_r M$ 为诱导态射，使得 $\beta \circ \pi = \eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \circ \iota$。

我们断言，$(\alpha^\flat, \beta)$ 构成了 r-高度交错，将 M 与 N 联系起来。根据构造，

$$\beta \circ \alpha = \eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M} = e_{r,M}.$$

还需证明 $\alpha^\flat \circ \beta^\sharp = e_{r,N}$。由于 L_r 是右正合的，对 π 应用 L_r 得到一个满态射 $\mathsf{L}_r(\pi) : \mathsf{L}_r M_1 \twoheadrightarrow \mathsf{L}_r N$。因此，只需证明

$$(\alpha^\flat \circ \beta^\sharp) \circ \mathsf{L}_r(\pi) = e_{r,N} \circ \mathsf{L}_r(\pi).$$

根据 $\beta^\sharp$ 的定义（它是 β 的左伴随）以及关系 $\beta \circ \pi = \eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \circ \iota$，我们有

$$\beta^\sharp \circ \mathsf{L}_r(\pi) = \eta^{\mathsf{L}}_{r,M} \circ \mathsf{L}_r(\iota) = \iota \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1}\colon \mathsf{L}_r M_1 \to M. \tag{6.3}$$

此外，由于 $\alpha^\flat$ 是 α 的右伴随，关系 $\alpha \circ \mathsf{L}_r(\iota) = \pi \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1}$ 蕴含

$$\alpha^\flat \circ \iota = \eta^{\mathsf{R}}_{r,N} \circ \pi\colon M_1 \to \mathsf{R}_r N. \tag{6.4}$$

结合以上结果可得

$$(\alpha^\flat \circ \beta^\sharp) \circ \mathsf{L}_r(\pi) \overset{(6.3)}{=} (\alpha^\flat \circ \iota) \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1} \overset{(6.4)}{=} \eta^{\mathsf{R}}_{r,N} \circ \pi \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1}.$$

根据 η^{L}_r 的自然性，我们有

$$\pi \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M_1} = \eta^{\mathsf{L}}_{r,N} \circ \mathsf{L}_r(\pi).$$

因此，

$$(\alpha^\flat \circ \beta^\sharp) \circ \mathsf{L}_r(\pi) = \eta^{\mathsf{R}}_{r,N} \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,N} \circ \mathsf{L}_r(\pi) = e_{r,N} \circ \mathsf{L}_r(\pi),$$

正如所期望的。 □

因此，定理 6.7 提供了一种系统的方法，可以从 M 的适当子商构造出 r-高度交错。

我们通过定义一种基于侵蚀邻域的距离来结束本小节。对M， $N \in \mathsf{Rep}_k(P)$，令

$$d_{\rho\text{-EN}}(M,N) := \inf\{\, r \geq 0 \mid \mathrm{EN}_r(M) \cap \mathrm{EN}_r(N) \neq \emptyset \,\}.$$

以下结果将 $d_{\rho\text{-EN}}$ 与高度交错距离 d_ρ联系起来。

定理 6.8. 设 P 为一个配备了高度差函数 ρ的偏序集。

(1) 若 M和 N关于 ρ是 r-高度交错的，则存在 $Q \in \mathrm{EN}_r(M)\cap\mathrm{EN}_r(N)$。特别地，

$$d_{\rho\text{-}EN}(M,N) \leq d_\rho(M,N). \tag{6.5}$$

(2) 假设(P,ρ) 具有 ***CIP***。则 $d_{\rho\text{-}EN}$ 满足一个 $c(\rho)$-松弛三角不等式，并且对所有$M, N \in \mathsf{Rep}_k(P)$，有

$$d_{\rho\text{-}EN}(M,N) \leq d_\rho(M,N) \leq 2\, d_{\rho\text{-}EN}(M,N) + c(\rho). \tag{6.6}$$

特别地，若 $c(\rho) = 0$，则 $d_{\rho\text{-}EN}$ 是扩展伪距离，且

$$d_{\rho\text{-}EN}(M,N) \leq d_\rho(M,N) \leq 2\, d_{\rho\text{-}EN}(M,N).$$

定理 6.8 的证明依赖于以下陈述的三个引理（引理 6.9–6.11）。其证明见小节 6.3–6.5。

引理 6.9。 设 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$ 且 $r \geq 0$。每个形如以下形式的模 N

$$N \cong \mathrm{im}\Big(\mathsf{L}_r\, M \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{L}}_{r,M} & f\end{bmatrix}} M \xrightarrow{\begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \\ g\end{bmatrix}} \mathsf{R}_r\, M \oplus Y\Big) \tag{6.7}$$

属于 $\mathrm{EN}_r(M)$。此外， M 的任意 r-侵蚀邻域都可以写成这种形式。

引理 6.10。 假设 (P,ρ) 具有 ***CIP***，且对某个 $c \geq 0$ 满足 (IV_c)。设 $s, r \geq 0$。若$N \in \mathrm{EN}_r(M)$ 且 $Q \in \mathrm{EN}_s(N)$，则 $Q \in \mathrm{EN}_{s+r+c}(M)$。

引理 *6.11*。假设 *(P,ρ)* 具有 ***CIP***，且对某个 $c \geq 0$ 满足 ***(IV_c)***。设 $s, r \geq 0$。若$Q_1 \in \mathit{EN}_r(M) \cap \mathit{EN}_r(X)$ 且 $Q_2 \in \mathit{EN}_s(X) \cap \mathit{EN}_s(N)$，则存在 $Q_3 \in \mathit{EN}_s(Q_1) \cap \mathit{EN}_r(Q_2)$。

有了上述引理，我们现在完成证明。

定理 *6.8* 的证明。 (1) 设 M 和 N 关于 ρ 通过态射$p\colon M \to \mathsf{R}_r\, N$和 $q\colon N \to \mathsf{R}_r\, M$实现了 r-高度交错。

定义

$$Q := \mathrm{im}\Big(\mathsf{L}_r\, M \oplus \mathsf{L}_r\, N \xrightarrow{\begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{L}}_{r,M} & q^\sharp\end{bmatrix}} M \xrightarrow{\begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \\ p\end{bmatrix}} \mathsf{R}_r\, M \oplus \mathsf{R}_r\, N\Big).$$

由引理 6.9 可知，这表明 $Q \in \mathrm{EN}_r(M)$。

利用交错恒等式和伴随方块 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \circ q^\sharp = q \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,N}$ 以及 $p \circ \eta^{\mathsf{L}}_{r,M} = \eta^{\mathsf{R}}_{r,N} \circ p^\sharp$，我们计算得

$$\begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \\ p\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}\eta^{\mathsf{L}}_{r,M} & q^\sharp\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \eta^{\mathsf{R}}_{r,N}\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p^\sharp & \eta^{\mathsf{L}}_{r,N}\end{bmatrix}.$$

因此，这两个复合态射定义了相同的态射 $\mathsf{L}_r\, M \oplus \mathsf{L}_r\, N \to \mathsf{R}_r\, M \oplus \mathsf{R}_r\, N$，所以它们的像相同。特别地，

$$Q \cong \mathrm{im}\Big(\mathsf{L}_r\, M \oplus \mathsf{L}_r\, N \xrightarrow{\begin{bmatrix} p^\sharp & \eta^{\mathsf{L}}_{r,N}\end{bmatrix}} N \xrightarrow{\begin{bmatrix} q \\ \eta^{\mathsf{R}}_{r,N}\end{bmatrix}} \mathsf{R}_r\, M \oplus \mathsf{R}_r\, N\Big),$$

因此 $Q \in \mathrm{EN}_r(N)$。由此可得， $Q \in \mathrm{EN}_r(M) \cap \mathrm{EN}_r(N)$。

(2) 假设 (P,ρ) 具有 CIP。若 $c(\rho) = \infty$，则无需证明。否则，取$c > c(\rho)$。则 (P,ρ) 满足 (IV_c)。(6.6) 中的左侧不等式即为 (6.5)。对于右侧不等式，令 $r > d_{\rho\text{-EN}}(M,N)$。根据 $d_{\rho\text{-EN}}$ 的定义，存在 $Q \in \mathrm{EN}_r(M) \cap \mathrm{EN}_r(N)$。由

根据定理 6.7(2)， Q 与 M 和 N 均为 r-高度交错。因此， M 和 N 是 $(2r+c)$-高度交错。对所有这样的 r 取下确界，得到

$$d_{\rho\text{-EN}}(M,N) \le d_\rho(M,N) \le 2\, d_{\rho\text{-EN}}(M,N) + c.$$

最后，由于 $c > c(\rho)$ 是任意的，因此可得

$$d_{\rho\text{-EN}}(M,N) \le d_\rho(M,N) \le 2\, d_{\rho\text{-EN}}(M,N) + c(\rho),$$

如所要求的那样。

还需证明，对于每个 $c > c(\rho)$， $d_{\rho\text{-EN}}$ 满足一个 c-松弛三角不等式。取 $Q_1 \in \mathsf{EN}_r(M) \cap \mathsf{EN}_r(X)$ 以及 $Q_2 \in \mathsf{EN}_s(X) \cap \mathsf{EN}_s(N)$。由引理 6.11，存在 $Q_3 \in \mathsf{EN}_s(Q_1) \cap \mathsf{EN}_r(Q_2)$。由于 $Q_1 \in \mathsf{EN}_r(M)$ 且 $Q_2 \in \mathsf{EN}_s(N)$，引理 6.10 给出 $Q_3 \in \mathsf{EN}_{s+r+c}(M) \cap \mathsf{EN}_{s+r+c}(N)$。至此证明完成。□

在本小节的其余部分，我们证明引理 6.9–6.11。

6.3. 引理 6.9 的证明。 对于给定的 f， g，令

$$\tilde f := [\eta^{\mathsf{L}}_{r,M} \quad f] \colon \mathsf{L}_r M \oplus X \to M, \qquad \tilde g := \begin{bmatrix} \eta^{\mathsf{R}}_{r,M} \\ g \end{bmatrix} \colon M \to \mathsf{R}_r M \oplus Y.$$

在阿贝尔范畴 $\mathsf{Rep}_k(P)$ 中，我们有一个同构

$$\operatorname{im}(\tilde g \circ \tilde f) \;\cong\; \operatorname{im}\tilde f \big/ (\operatorname{im}\tilde f \cap \ker \tilde g). \tag{6.8}$$

设 $N \cong M_1/M_2$ 为子模 $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$，满足 $\mathsf{Im}_r M \subseteq M_1$ 且 $M_2 \subseteq \mathsf{Ker}_r M$。取 $X := M_1$，并令 $f\colon X = M_1 \hookrightarrow M$ 为包含。取 $Y := M/M_2$，并令 $g\colon M \twoheadrightarrow M/M_2$ 为商映射。则 $\operatorname{im}\tilde f = \operatorname{im}(\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}) + \operatorname{im}(f) = \mathsf{Im}_r M + M_1 = M_1$。此外，

$$\ker \tilde g = \ker(\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}) \cap \ker(g) = \operatorname{Ker}_r M \cap M_2 = M_2,$$

因为根据假设， $M_2 \subseteq \mathsf{Ker}_r M$。因此，(6.8) 给出

$$\operatorname{im}(\tilde g \circ \tilde f) \;\cong\; M_1/(M_1 \cap M_2) = M_1/M_2 \;\cong\; N,$$

这就是 (6.7)。

假设 (6.7) 成立。令 $M_1 := \operatorname{im} f \subseteq M$，且 $M_2 := M_1 \cap \ker \tilde g \subseteq M_1$。于是 (6.8) 得到 $N \cong M_1/M_2$。此外，$\mathsf{Im}_r M = \operatorname{im}(\eta^{\mathsf{L}}_{r,M}) \subseteq \operatorname{im} \tilde f = M_1$。又有 $M_2 \subseteq \ker \tilde g \subseteq \ker(\eta^{\mathsf{R}}_{r,M}) = \mathsf{Ker}_r M$。因此 $N \in \mathsf{EN}_r(M)$。

6.4. 引理 6.10 的证明。 假设 (P,ρ) 具有 CIP，且对某个 $c \ge 0$ 满足 (IV$_c$)。令 $s, r \ge 0$。我们首先断言，$\mathsf{Im}_{s+r+c} \subseteq \mathsf{Im}_s \mathsf{Im}_r$ 是一个子函子。将自然变换 (5.14) 记为 $\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}\colon \mathsf{L}_{s+r+c} \Rightarrow \mathsf{L}_s \mathsf{L}_r$。令 $M \in \mathsf{Rep}_k(P)$。由 $\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r}$ 的分解性质 (5.3)，结构映射 $\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,M}\colon \mathsf{L}_{s+r+c} M \to M$ 可分解为

$$\mathsf{L}_{s+r+c} M \xrightarrow{\sigma^{\mathsf{L}}_{s,r,M}} \mathsf{L}_s \mathsf{L}_r M \xrightarrow{\mu^{\mathsf{L}}_{s,r,M}} \mathsf{L}_{s+r} M \xrightarrow{\eta^{\mathsf{L}}_{s+r,M}} M.$$

另一方面，由 (6.1)，复合态射 $\eta^{\mathsf{L}}_{s+r,M} \circ \mu^{\mathsf{L}}_{s,r,M}\colon \mathsf{L}_s \mathsf{L}_r M \to M$ 的像与 $\mathsf{Im}_s(\mathsf{Im}_r M) \subseteq M$ 相对应。因此，

$$\mathsf{Im}_{s+r+c} M = \operatorname{im}(\eta^{\mathsf{L}}_{s+r+c,M}) \subseteq \mathsf{Im}_s(\mathsf{Im}_r M). \tag{6.9}$$

关于 M 的自然性给出了所声称的子函子包含关系。

现在，我们对固定的 M, N, Q 证明这一断言。令 $N \cong M_1/M_2$ 满足 $\mathsf{Im}_r M \subseteq M_1$ 且 $M_2 \subseteq \mathsf{Ker}_r M$，并令 $Q \cong N_1/N_2$ 满足 $\mathsf{Im}_s N \subseteq N_1$ 且 $N_2 \subseteq \mathsf{Ker}_s N$。令 $f\colon M_1 \twoheadrightarrow N \cong M_1/M_2$ 为典范满射，并设 $M_1' := f^{-1}(N_1)$ 以及 $M_2' := f^{-1}(N_2)$。于是 $Q \cong N_1/N_2 \cong M_1'/M_2'$。为了证明 $Q \in \mathsf{EN}_{s+r+c}(M)$，还需证明 $\mathsf{Im}_{s+r+c} M \subseteq M_1'$ 且 $M_2' \subseteq \mathsf{Ker}_{s+r+c} M$。

我们首先证明 $\mathsf{Im}_{s+r+c} M \subseteq M_1'$。根据假设，$\mathsf{Im}_r M \subseteq M_1$，由 Im_s 的函子性可得

$$\mathsf{Im}_s(\mathsf{Im}_r M) \subseteq \mathsf{Im}_s(M_1).$$

另一方面，由 $\mathsf{Im}_s N \subseteq N_1$ 我们得到 $\mathsf{Im}_s(M_1) \subseteq M_1'$：事实上，$\eta^{\mathsf{L}}_s$ 的自然性给出 $f(\mathsf{Im}_s(M_1)) \subseteq \mathsf{Im}_s(N) \subseteq N_1$，因此 $\mathsf{Im}_s(M_1) \subseteq f^{-1}(N_1) = M_1'$。结合 (6.9)，我们得出 $\mathsf{Im}_{s+r+c} M \subseteq M_1'$。

接下来，我们证明 $M_2' \subseteq \mathsf{Ker}_{s+r+c} M$。取上述的 f和 M_2'，限制映射 $f' := f|_{M_2'} \colon M_2' \twoheadrightarrow N_2$ 是满射。由于 $N_2 \subseteq \mathsf{Ker}_s(N)$，我们有 $\eta^{\mathsf{R}}_{s,\,N_2} = 0$，因此由命题 6.5(5) 得 $\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,N_2} = 0$。

将 L_s 应用于 f'，得到一个满态射 $\mathsf{L}_s(f') : \mathsf{L}_s(M_2') \twoheadrightarrow \mathsf{L}_s(N_2)$，而自然性给出

$$f' \circ \eta^{\mathsf{L}}_{s,M_2'} = \eta^{\mathsf{L}}_{s,N_2} \circ \mathsf{L}_s(f') = 0.$$

特别地，$\eta^{\mathsf{L}}_{s,\,M_2'}$ 的像为 $\mathsf{Im}_s(M_2')$，因此

$$\mathrm{Im}_s(M_2') = \mathrm{im}(\eta^{\mathsf{L}}_{s,M_2'}) \subseteq \ker(f') = \ker(f) = M_2.$$

由于 $M_2 \subseteq \mathsf{Ker}_r(M)$，可知 $\eta^{\mathsf{R}}_{r,\,M_2'}$在 $\mathsf{Im}_s(M_2')$ 上为零，因此

$$\eta^{\mathsf{R}}_{r,M_2'} \circ \eta^{\mathsf{L}}_{s,M_2'} \colon \mathsf{L}_s(M_2') \longrightarrow \mathsf{R}_r(M_2')$$

为零。在 $\mathsf{L}_s \dashv \mathsf{R}_s$ 下，该态射的右伴随为

$$M_2' \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{r,M_2'}} \mathsf{R}_r(M_2') \xrightarrow{\eta^{\mathsf{R}}_{s,\mathsf{R}_r(M_2')}} \mathsf{R}_s\,\mathsf{R}_r(M_2'),$$

因此这个复合态射为零。将其与 $\sigma^{\mathsf{R}}_{s,\,r,\,M_2'} : \mathsf{R}_s\,\mathsf{R}_r(M_2') \to \mathsf{R}_{s+r+c}(M_2')$ 复合，并使用分解 (5.5)，得到 $\eta^{\mathsf{R}}_{s+r+c,\,M_2'} = 0$。因此 $M_2' \subseteq \mathsf{Ker}_{s+r+c}(M_2') \subseteq \mathsf{Ker}_{s+r+c}(M)$。证明完毕。

6.5. 引理 6.11 的证明。 取 $Q_1 \in \mathsf{EN}_r(M) \cap \mathsf{EN}_r(X)$ 和 $Q_2 \in \mathsf{EN}_s(X) \cap \mathsf{EN}_s(N)$。我们可以选取子模

$$X_1' \subseteq X_1 \subseteq X \quad \text{and} \quad X_2' \subseteq X_2 \subseteq X$$

使得

$$Q_1 \cong X_1/X_1', \qquad \mathrm{Im}_r X \subseteq X_1, \qquad X_1' \subseteq \mathrm{Ker}_r\, X,$$

and

$$Q_2 \cong X_2/X_2', \qquad \mathrm{Im}_s X \subseteq X_2, \qquad X_2' \subseteq \mathrm{Ker}_s\, X.$$

Set

$$X_3 := X_1 \cap X_2 \quad \text{and} \quad X_3' := (X_1' + X_2') \cap X_3 \subseteq X_3, \qquad Q_3 := X_3/X_3'.$$

我们将证明 $Q_3 \in \mathsf{EN}_s(Q_1)$。

令 $\pi_1 \colon X_1 \twoheadrightarrow Q_1 := X_1/X_1'$ 为典范满态射。由于 $X_1' \cap X_3 \subseteq X_3'$，我们得到

$$Q_3 = X_3/X_3' \;\cong\; (X_3 + X_1')/(X_3' + X_1') \;=\; \pi_1(X_3)/\pi_1(X_3').$$

因此，要证明 $Q_3 \in \mathsf{EN}_s(Q_1)$，还需证明

$$\mathrm{Im}_s(Q_1) \subseteq \pi_1(X_3) \quad \text{and} \quad \pi_1(X_3') \subseteq \mathrm{Ker}_s(Q_1).$$

由 η^{L}_s 的自然性，我们有

$$\pi_1 \circ \eta^{\mathsf{L}}_{s,X_1} = \eta^{\mathsf{L}}_{s,Q_1} \circ \mathsf{L}_s(\pi_1).$$

由于 L_s 保持满态射，$\mathsf{L}_s(\pi_1)$ 是满态射，因此

$$\mathrm{Im}_s(Q_1) = \mathrm{im}(\eta^{\mathsf{L}}_{s,Q_1}) = \mathrm{im}\left(\eta^{\mathsf{L}}_{s,Q_1} \circ \mathsf{L}_s(\pi_1)\right) = \mathrm{im}\left(\pi_1 \circ \eta^{\mathsf{L}}_{s,X_1}\right) = \pi_1\big(\mathrm{Im}_s(X_1)\big).$$

此外，由于 Im_s 保持单态射，我们得到 $\mathsf{Im}_s(X_1) \subseteq \mathsf{Im}_s(X) \subseteq X_2$。因此

$$\mathrm{Im}_s(X_1) \subseteq X_1 \cap \mathrm{Im}_s(X) \subseteq X_1 \cap X_2 = X_3,$$

因此 $\mathsf{Im}_s(Q_1) = \pi_1(\mathsf{Im}_s(X_1)) \subseteq \pi_1(X_3)$。

另一方面，由 η^{R}_s 的自然性可知

$$\eta^{\mathsf{R}}_{s,Q_1} \circ \pi_1 = \mathsf{R}_s(\pi_1) \circ \eta^{\mathsf{R}}_{s,X_1}.$$

因此，

$$\pi_1\big(\mathrm{Ker}_s(X_1)\big) \subseteq \mathrm{Ker}_s(Q_1). \tag{6.10}$$

接下来，由于 $X_3 \subseteq X_1$ 和 $X_1' \subseteq X_1$，我们得到

$$X_3' = (X_1' + X_2') \cap X_3 \subseteq (X_1' + X_2') \cap X_1 \subseteq X_1' + (X_2' \cap X_1).$$

此外，由于 $X_2' \subseteq \mathsf{Ker}_s(X)$，且 Ker_s 保持单态射，我们有

$$X_2' \cap X_1 \subseteq \mathrm{Ker}_s(X) \cap X_1 = \mathrm{Ker}_s(X_1).$$

综合上述结果可得

$$X_3' \subseteq X_1' + \mathrm{Ker}_s(X_1). \tag{6.11}$$

将 π_1 应用于 (6.11)，并利用 (6.10)，我们得出

$$\pi_1(X_3') \subseteq \pi_1(X_1') + \pi_1(\mathrm{Ker}_s(X_1)) = 0 + \pi_1(\mathrm{Ker}_s(X_1)) \subseteq \mathrm{Ker}_s(Q_1),$$

正如所需。

我们已经证明 $Q_3 \in \mathsf{EN}_s(Q_1)$。通过交换 r 和 s 的角色进行同样的论证，我们还得到 $Q_3 \in \mathsf{EN}_r(Q_2)$。

7. Discussion and perspective

与经典交错的进一步联系。 根据命题 3.11，我们的高度交错距离在 $\mathsf{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathcal{C})$ 上恢复了经典交错距离。自然会想到，作为未来工作的一个方向，经典平移型交错理论中的熟悉结果在多大程度上能够表述于我们的框架中。第 6 节的结果为这一方向提供了支持。此外，由于我们构造 r-闩函子/匹配函子的灵感来自模型范畴理论中的思想，探索相关方向或许也很有意义，例如涉及同伦交错的方向。

表示论视角。 对于有限的 P，函子范畴 $\mathsf{Fun}(P, \mathcal{C})$ 可以与相应关联代数的模范畴相识别。在这一框架下，我们的距离 d_ρ 或可为分析模范畴提供定量不变量，并可进一步探讨这些不变量的表示论解释。

在之字形持久性及相关情形中的应用。 我们的框架有望用于定量研究以之字形以及更一般的无菱形偏序集为指标的持久模。在连续情形下，对于适当选择的 ρ，所得的高度交错距离定义了一个扩展伪距离；对于更一般的无菱形偏序集，包括离散或有限的偏序集，同样的构造则提供了一种带有可加缺陷的类距离比较。开发有效的计算方法，并为数据驱动的持久同调构造建立稳定性结果，是未来工作的自然方向。

Appendix A. Mates correspondence for adjunctions

关于范畴论中的基本概念和术语，请参阅 [ML78]。

A.1. **基本的伴随态射对应。** 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为范畴，并设

$$L : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : R$$

为伴随对，记作 $L \dashv R$。我们将单位记为 $\eta\colon \mathsf{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$，将余单位记为 $\varepsilon\colon LR \Rightarrow \mathsf{id}_{\mathcal{B}}$。对于任意 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，记

$$(-)^\flat : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) : (-)^\sharp$$

伴随双射为

设 $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ 和 $G : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ 为函子。存在一个典范双射

$$\mathrm{Nat}(LF, G) \;\cong\; \mathrm{Nat}(F, RG), \tag{A.1}$$

其在 F 和 G 中自然。给定 $\alpha\colon LF \Rightarrow G$，其右伴 $\alpha^\flat\colon F \Rightarrow RG$ 按分量定义为

$$(\alpha^\flat)_x := R(\alpha_x) \circ \eta_{F(x)} \quad (x \in \mathcal{X}).$$

反之，给定 $\beta : F \Rightarrow RG$，其左伴 $\beta^\sharp\colon LF \Rightarrow G$ 按分量定义为

$$(\beta^\sharp)_x := \varepsilon_{G(x)} \circ L(\beta_x) \quad (x \in \mathcal{X}).$$

这些赋值互为逆，因此得到（A.1）。

伴随对应满足以下标准相容性。

引理 A.1。 在双射 (A.1)下：

(1) 设 $\alpha:\ LF \Rightarrow G$ 和 $\beta:\ F \Rightarrow RG$ 为自然变换。对于任意 $\theta:\ F' \Rightarrow F$ 和 $\psi:\ G \Rightarrow G'$, 有

$$(\psi \circ \alpha)^\flat = R\psi \circ \alpha^\flat, \qquad (\alpha \circ L\theta)^\flat = \alpha^\flat \circ \theta,$$

and

$$(R\psi \circ \beta)^\sharp = \psi \circ \beta^\sharp, \qquad (\beta \circ \theta)^\sharp = \beta^\sharp \circ L\theta.$$

(2) id_{LF} 的右伴是单位 $\eta_F\colon F \Rightarrow RLF$。$\mathrm{id}_{RG}\colon RG \Rightarrow RG$ 的左伴是余单位 $\varepsilon_G\colon LRG \Rightarrow G$。特别地，$(\eta, \varepsilon)$ 的三角恒等式恰好表明$(-)^\flat$ 和 $(-)^\sharp$ 互为逆变换。

(3) 自然变换是同构，当且仅当它的伴随变换是同构 .

A.2. **双伴随变体**。我们还需要 (A.1) 的一个变体，用来关联两个伴随。设 $L \dashv R$ 和 $L' \dashv R'$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的伴随。对伴随 $L' \dashv R'$ 应用 (A.1)，取 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$、$F = \mathsf{id}_{\mathcal{A}}$ 和 $G = L$，可得

$$\mathrm{Nat}(L', L) \ \cong\ \mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, R'L).$$

另一方面，对伴随 $L \dashv R$ 应用 (A.1)，取 $\mathcal{X} = \mathcal{B}$、$F = R$ 和 $G = \mathsf{id}_{\mathcal{B}}$，可得

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, R'L) \ \cong\ \mathrm{Nat}(R, R').$$

复合这些典范双射可得到以下对应关系。

推论 A.2. 设 $L \dashv R$ 和 $L' \dashv R'$ 是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$之间的伴随。则存在一个典范双射

$$\mathrm{Nat}(L', L) \ \cong\ \mathrm{Nat}(R, R'),$$

它关于 L、L'、R、R'是自然的。

Appendix B. Limits, colimits, and finality for posets

B.1. **极限与余极限**。设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。$\mathcal{C}$ 中形状为 J 的图表是一个函子 $M\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$。指向 M 的一个锥 是一个二元组 (X, γ)，由一个对象 $X \in \mathcal{C}$ 和一个态射族组成

$$\gamma_j\colon X \to M(j) \qquad (j \in \mathcal{J})$$

使得对于 $\mathcal{J}$ 中的每个态射 $u\colon j \to j'$，都有

$$M(u) \circ \gamma_j = \gamma_{j'}.$$

M 的一个极限 是一个对象 $\lim M \in \mathcal{C}$，配备一个锥 $(\lim M, \beta_M)$，

$$\beta_M(j)\colon \lim M \to M(j) \qquad (j \in \mathcal{J}),$$

满足以下泛性质：对于到 M 的每个锥 $(X,\ \gamma)$，存在唯一的态射 $h\colon X \to \lim M$，使得对所有 $j \in \mathcal{J}$ 均有 $\beta_M(j) \circ h = \gamma_j$。

对偶地，从 M 出发的 余锥 是一个偶 $(X,\ \delta)$，由一个对象 $X \in \mathcal{C}$ 和一个态射族组成

$$\delta_j\colon M(j) \to X \qquad (j \in \mathcal{J})$$

使得对于 $\mathcal{J}$ 中的每个态射 $u\colon j \to j'$，都有

$$\delta_{j'} \circ M(u) = \delta_j.$$

M 的一个 余极限 是一个对象 $\mathrm{colim}\ M \in \mathcal{C}$，并配备一个余锥 $(\mathrm{colim}\ M,\ \alpha_M)$，

$$\alpha_M(j)\colon M(j) \to \mathrm{colim}\, M \qquad (j \in \mathcal{J}),$$

满足以下泛性质：对于从 M 出发的每个余锥 $(X,\ \delta)$，存在唯一的态射 $k\colon \mathrm{colim}\ M \to X$，使得对所有 $j \in \mathcal{J}$ 均有 $k \circ \alpha_M(j) = \delta_j$。

记 $\mathsf{Fun}(\mathcal{J},\ \mathcal{C})$ 为函子范畴，并记 $\Delta\colon\ \mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{J},\ \mathcal{C})$ 为常值图表函子。若 $\mathcal{C}$ 是完备且余完备的，则赋值 $M \mapsto \lim M$ 和 $M \mapsto \mathrm{colim}\, M$ 定义了函子

$$\lim\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}, \qquad \mathrm{colim}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C},$$

并且我们有伴随

$$\mathrm{colim} \dashv \Delta \dashv \lim.$$

我们用 $\alpha\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Delta(\mathrm{colim}(-))$ 表示余极限 $\dashv \Delta$ 的单位，用 $\beta\colon \Delta(\lim(-)) \Rightarrow \mathrm{id}$ 表示$\Delta \dashv$极限的余单位。因此，对于每个图表 M，我们都有分量

$$\alpha_M(j)\colon M(j) \to \operatorname{colim} M, \qquad \beta_M(j)\colon \lim M \to M(j) \qquad (j \in \mathcal{J}),$$

它们分别是选定的余极限余锥和极限锥。

If $\mathcal{I}$ 是小范畴，我们将 M 沿包含 $\mathcal{I} \hookrightarrow$ 的限制记为 $M|_{\mathcal{I}}$

使用记号

$$\lim M|_{\mathcal{I}}, \quad \operatorname{colim} M|_{\mathcal{I}} \qquad \text{or equivalently} \qquad \lim_{i\in\mathcal{I}} M(i), \quad \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} M(i).$$

在这种情况下，将极限锥（$\lim M$，β_M）限制到 $\mathcal{I}$后得到一个以 $M|_{\mathcal{I}}$为底的锥，因此诱导出一个典范态射

$$\lim M \longrightarrow \lim M|_{\mathcal{I}}.$$

对偶地，余极限余锥 $(\operatorname{colim} M|_{\mathcal{I}}, \alpha_{M|_{\mathcal{I}}})$ 诱导出一个典范态射

$$\operatorname{colim} M|_{\mathcal{I}} \longrightarrow \operatorname{colim} M.$$

B.2. 偏序集的迭代余极限与格罗滕迪克构造。本小节中，我们回顾偏序集情形下的格罗滕迪克构造（例如，参见 [ML78]），它为我们比较迭代余极限与单个余极限提供了指标偏序集。

设 I 为一个偏序集，并设 $F\colon I \to \mathbf{Poset}$ 是一个从 I 到偏序集范畴 Poset 的函子；也就是说，对每个 $x \in I$，都有一个偏序集 $F(x)$，且对每个 $x \le y$，都有一个保序映射 $F(x \le y)\colon F(x) \to F(y)$。

我们如下定义一个偏序集 $\int_I F$：其元素是满足 $x \in I$ 和 $q \in F(x)$ 的有序对 (x, q)，并令

$$(x,q) \le (y,u) \iff x \le y \text{ in } I \text{ and } F(x \le y)(q) \le u \text{ in } F(y).$$

投影 $\int_I F \to I$，$(x, q) \mapsto x$，是保序的。

现在令 $\mathcal{C}$ 为一个余完备范畴，并令 $D\colon \int_I F \to \mathcal{C}$ 为一个函子。对于每个 $x \in I$，我们记

$$C_x := \operatorname{colim}_{q\in F(x)} D(x,q).$$

对于 $x \le y$，赋值 $q \mapsto (x, q) \le \big(y, F(x \le y)(q)\big)$ 在 $\int_I F$ 中诱导出一个自然变换

$$D(x,-) \Longrightarrow D\big(y, F(x \le y)(-)\big),$$

因此，由余极限的泛性质可得一个典范态射 $C_x \to C_y$。于是 $x \mapsto C_x$ 定义了一个函子 $I \to \mathcal{C}$，并且我们可以构造迭代余极限

$$\operatorname{colim}_{x\in I} C_x = \operatorname{colim}_{x\in I} \operatorname{colim}_{q\in F(x)} D(x,q).$$

另一方面，对于每个 $(x, q) \in \int_I F$，结构态射 $D(x, q) \to$ 余极限$_{(y,u)\in\int_I F} D(y, u)$ 构成图表 $q \mapsto D(x, q)$ 上的余锥，该图表由 $F(x)$ 编索引。因此，根据 $C_x =$ 余极限$_{q\in F(x)} D(x, q)$ 的泛性质，它们诱导出一个典范态射

$$C_x \longrightarrow \operatorname{colim}_{(y,u)\in\int_I F} D(y,u).$$

这些态射与 $x \le y$ 相容，因此诱导出一个典范态射

$$\operatorname{colim}_{x\in I} \ \operatorname{colim}_{q\in F(x)} D(x,q) \longrightarrow \operatorname{colim}_{(y,u)\in\int_I F} D(y,u). \tag{B.1}$$

以下结果是余极限的一般格罗滕迪克构造的标准推论。

命题 B.1。典范态射(B.1) 是同构，且关于 D 自然。

B.3. 偏序集的 Fubini 型终局性判据。设 I 和 P 为偏序集。设 $F\colon I \to 2^P$ 是一个映射，使得对于每个 $x \in I$，$F(x)$ 是 P 的下闭集，并且对所有 $x \le y$，$F(x) \subseteq F(y)$。特别地，它定义了一个函子 $F\colon I \to$ 偏序集。令

$$Q := \bigcup_{x\in I} F(x) \subseteq P,$$

视为 P 的全子偏序集。于是存在一个保序映射

$$\pi\colon \int_I F \longrightarrow Q, \qquad (x,q) \longmapsto q.$$

确实，若 $(x,q) \le (y,u)$ 属于 $\int_I F$，则 $x \le y$ 且 $F(x \le y)(q) \le u$ 属于 $F(y)$。由于 $F(x \le y)$ 是包含，这意味着 $q \le u$ 属于 P，因此也属于 Q。

设 $\mathcal{C}$ 是一个余完备范畴，且 $D\colon Q \to \mathcal{C}$ 是一个函子。那么，沿 π 的拉回诱导出一个典范映射

$$\operatorname{colim}_{(x,q)\in\int_I F} D(q) \longrightarrow \operatorname{colim}_{q\in Q} D(q) \tag{B.2}$$

它关于 D是自然的，其中我们使用 $(\pi^* D)(x,\ q) = D(q)$。

命题 B.2。 若对于每个 $q \in Q$，子偏序集

$$I_q := \{x \in I \mid q \in F(x)\} \subseteq I$$

是连通的，则(B.2) 是一个同构。

证明。 固定 $q \in Q$。回顾一下，逗号范畴 $(q \downarrow \pi)$ 是一个偏序集，其元素为配有态射 $q \to \pi(x,\ p) = p$ in Q 的有序对 $(x,\ p) \in \int_I F$。等价地，

$$(q \downarrow \pi) = \{(x,p) \in \int_I F \mid x \in I,\ p \in F(x),\ q \le p\}.$$

根据余极限的标准共尾性论证（例如参见 [ML78, 第九章]），要证明 (B.2) 是一个同构，只需证明 π 是终对象，即对每个 $q \in Q$，$(q \downarrow \pi)$ 都非空且连通。注意，$(q \downarrow \pi)$ 总是非空的：由于 $q \in Q = \bigcup_{x\in I} F(x)$，存在 $x_0 \in I$使得 $q \in F(x_0)$，因此 $(x_0,\ q) \in (q \downarrow \pi)$。

对于每个 $x \in I_q$，考虑由第一坐标为 $x \in I_q$ 的元素构成的全子偏序集

$$(q \downarrow \pi)_x := \{(x,p) \in (q \downarrow \pi)\}$$

令 $(x,\ p) \in (q \downarrow \pi)_x$。那么 $p \in F(x)$，且 $q \le p$属于Q。由于 $F(x)$ 是 Q 中的一个下闭集，因此可得 $q \in F(x)$。于是 $(x,\ q) \in (q \downarrow \pi)_x$。此外，$(x,\ q)$ 是 $(q \downarrow \pi)_x$ 的最小元素，因此 $(q \downarrow \pi)_x$ 连通。由此，$(q \downarrow \pi)$ 连通当且仅当 I_q 连通。根据假设，I_q 连通，所以 $(q \downarrow \pi)$ 连通。□

通过将同构 (B.1) 应用于拉回图表 $\pi^* D\colon \int_I F \to \mathcal{C}$，我们可以将 (B.2) 与典范映射等同起来

$$\operatorname{colim}_{x\in I}\ \operatorname{colim} D|_{F(x)} \longrightarrow \operatorname{colim} D. \tag{B.3}$$

因此，在命题 B.2 的假设下，映射 (B.3) 是一个同构。

Acknowledgements

本研究得到日本学术振兴会转型研究领域（A）科研资助（22H05105）。作者谨向 Shunsuke Tada 致谢，感谢他提出的宝贵意见并参与讨论。

References

[AAEF19] Mehmet Emin Aktas、Esra Akbas 和 Abdoulaye El Fatmaoui。网络的持久同调：方法与应用。 *Applied Network Science*, 4(1):61, 2019。[AET25] 青木俊孝、Emerson G. Escolar 和 Shunsuke Tada。区间覆盖的直和项单射性与区间分解全局维数的单调性。 *J. Appl. Comput. Topol.*, 9 13, 2025 2( ):论文编号 .[BBD82] Alexander A Beilinson、Joseph Bernstein 和 Pierre Deligne。反常层。

Astérisque 100 5 171, , : – .[BBK20] H ◦ 1982
avard Bakke Bjerkevik、Magnus Bakke Botnan 和 Michael Kerber。计算交错距离是NP困难的。 *Found. Comput. Math.*, 20(5):1237–1271, 2020年。[BBS24] Riju Bindua、Thomas Br¨ustle 和 Luis Scoccola。对有根树箭图上的零维持久同调进行分解，2024年。arXiv 预印本 arXiv:2411.19319。[BCM20] Magnus Bakke Botnan、Justin Curry 和 Elizabeth Munch。交错的相对理论，2020年。arXiv 预印本 arXiv:2004.14286。[BdSS15] Peter Bubenik、Vin de Silva 和 Jonathan Scott。广义持久模的度量。

Found. , ( ): *Comput. Math.* 15 6 1501 1531, 2015
– . [Bje21] H ◦ *Discrete Com-* avar *put. Geom.* 66 1 92 121, 2021
d Bakke Bjerkevik。区间可分解持久模的稳定性。 , ( ): – . [Bje25] H◦avard Bakke Bjerkevik。多参数持久模分解的稳定化，2025年。arXiv 预印本 arXiv:2305.15550v3。[BL18] Magnus Bakke Botnan 和 Michael Lesnick。之字形持久模的代数稳定性。

Algebr. , ( ): – . *Geom. Topol.* 18 6 3133 3204, 2018

[BL20] Ulrich Bauer 和 Michael Lesnick。将持久图视为图表：稳定性定理的范畴化。载于 *Topological data analysis—the Abel Symposium 2018*，*Abel Symp.*第15卷，第67–96页。Springer，Cham，2020年。[BL24] Andrew J. Blumberg 和 Michael Lesnick。 2 *Found. Com-* 参数持久同 *put. Math.* 24 2 385 427, 2024
调的稳定性。 , ( ): – . [BP25] Nathan Broomhead 和 Mariam Pirashvili。圆值函数持久同调的等距定理，2025年。arXiv 预印本 arXiv:2506.02999。[BS25] Ulrich Bauer 和 Luis Scoccola。多参数持久模一般不可分解。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5):论文编号 rnaf034, 31, 2025年。[CCR13] Joseph Minhow Chan、Gunnar Carlsson 和 Raul Rabadan。病毒演化的拓扑。 *Proc. Natl.* , ( ): – . [*Acad. Sci. USA* 110 46 18566 18571, 2013
CCSG+09] Fr´ed´eric Chazal、David Cohen-Steiner、Marc Glisse、Leonidas J. Guibas 和 Steve Oudot。持久模及其图表的接近性。载于 *SCG '09*，2009年。[CKM24] Nathaniel Clause、Woojin Kim 和 Facundo M´emoli。广义秩不变量：莫¨比乌斯可逆性、判别能力及其与其他不变量的联系，2024年。arXiv 预印本 arXiv:2207.11591v5。[CSEH07] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久图的稳定性。 *Discrete* *Comput. Geom.* 37 1 103 120, 2007 , ( ): – . [

dSMS18] V. de Silva、E. Munch 和 A. Stefanou。带流范畴上的交错理论。 *Theory Appl.* , :论文编号 – . *Categ.* 33 21, 583 607, 2018
[ELZ02] Herbert Edelsbrunner、David Letscher 和 Afra Zomorodian。拓扑持久性与简化。第28卷，第511–533页。2002年。离散与计算几何及图绘制（南卡罗来纳州哥伦比亚，2001年）。[EMY23] Emerson G. Escolar、Killian Meehan 和 Michio Yoshiwaki。交错与匹配作为表示。 *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 34(6):965–993, 2023年。[GM23] Aziz Burak Gulen 和 Alexander McCleary。持久同调中的伽罗瓦连接，2023年。arXiv 预印本 arXiv:2201.06650v5。[GZ25] Xiaowen Gao 和 Minghui Zhao。类型为 $\tilde{A}$的连续箭图的等距定理，2025年。arXiv 预印本 arXiv:2412.12462v2。[HIY22] Yasuaki Hiraoka、Yuichi Ike 和 Michio Yoshiwaki。之字形持久模导出范畴的代数稳定性定理。 *Journal of Topology and Analysis*, 16(02):555–585, 2022年。[HKNU17] Christoph Hofer、Roland Kwitt、Marc Niethammer 和 Andreas Uhl。利用拓扑特征进行深度学习。载于 *Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NeurIPS 2017)*，第1634–1644页，2017年。[HNH+16] Yasuaki Hiraoka、Takenobu Nakamura、Akihiko Hirata、Emerson G. Escolar、Kaname Matsue 和 Yasumasa Nishiura。用持久同调刻画非晶固体的层级结构。*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(26):7035–7040, 2016年。[Hov99] Mark Hovey。 *Model categories*，*Mathematical Surveys and Monographs*第63卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年。[HR24] Eric J. Hanson 和 Job Daisie Rock。逐点有限维 $\mathbb{S}^1$ 持久模的分解。 *J. Algebra Appl.*, 23(3):论文编号2450054, 24, 2024年。[KS25] Woojin Kim 和 Won Seong。交错距离作为编辑距离，2025年。arXiv 预印本 arXiv:2509.24233。[Kuh94] Nicholas J. Kuhn。有限一般线性群的一般表示与斯廷罗德代数。II。 *K-Theory*, 8(4):395–428, 1994年。[Les15] Michael Lesnick。多维持久模的交错距离理论。*Found. Comput. Math.*, 15(3):613–650, 2015年。[ML78] Saunders Mac Lane。 *Categories for the Working Mathematician*。London Mathematical Society Student Texts。Springer，纽约州纽约市，1978年。[MM17] Killian Meehan 和 David Meyer。广义持久模的等距定理，2017年。arXiv 预印本 arXiv:1710.02858。[MN26] Patrick K. McFaddin 和 Tom Needham。交错距离、幺半作用与2-范畴。*Algebr. Geom. Topol.*, 26(1):227–281, 2026年。[MP20] Alex McCleary 和 Amit Patel。广义持久图的瓶颈稳定性。 *Proc. Amer.* , ( ): –3161, *Math. Soc.* 148 7 3149
2020年。[QTT+19] Talha Qaiser、Yee-Wah Tsang、Daiki Taniyama、Naoya Sakamoto、Kazuaki Nakane、David Epstein 和 Nasir Rajpoot。利用持久同调和深度卷积特征快速准确地分割组织学图像中的肿瘤。 *Medical Image Analysis*, 55:1–14, 2019。[RZ23] Job Daisie Rock 和 Shijie Zhu。连续中山表示。 *Appl. Categ. Structures*, 31 5( ):论文编号44, 25, 2023年。[Tad25] Shunsuke Tada。双路径持久图的稳定性，2025年。arXiv 预印本 arXiv:2503.01614。[ZC05] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson。计算持久同调。 *Discrete Comput. Geom.*, 33 2 249( ): –274, 2005年。

Toshitaka Aoki, Graduate School of Human Development and Environment, Kobe University, 3-11Tsurukabuto, Nada-ku, Kobe 657-8501 Japan*Email address*: toshitaka.aoki@people.kobe-u.ac.jp