EPIsciences

《数学通讯》34 (2026年)，第1期，第15号论文 数字对象唯一标识符：
https://doi.org/10.46298/cm.17612 ©2026年 Ivan Kaygorodov 和
Naurizbay Uzakbaev 本文为开放获取文章，依据知识共享署名 4.0 国际许可
协议授权。

# 积分-导子 Dzhumadildaev 代数：从多项式代数出发

*Ivan Kaygorodov* 和 *Naurizbay Uzakbaev*

**摘要**。 本文介绍并研究了通过导子和积分算子，依照 Dzhumadildaev 在早期著作中提出的方法从多项式代数构造出的代数的一些性质。特别地，我们发现了新的无限维单保守代数类，并描述了秩为 1 和 2 的这些代数的导子。

## 目录

**1 引言** **2**

**2 预备知识** **3**

2.1 IDD 代数的乘法表：由多项式构造 . . . . . 42.2 单、完全与幂零IDD 代数 . 62.3 保守IDD 代数 .8

**3 秩 1 的 IDD 代数的导子** **9**

3.1 IDD($K_n^\times$，1，0) 的导子.93.2 IDD($K_n^\times$，0，$-1$) 的导子.11

---

*2020*年数学学科分类： 17A30（主要）；17A36（次要）。关键词： 导子、Rota-Baxter 算子、保守代数、多项式代数。联系信息：I. Kaygorodov：所属机构： 贝拉内陆大学，葡萄牙。电子邮箱： kaygorodov.ivan@gmail.comN. Uzakbaev：所属机构： Romanovsky 数学研究所和卡拉卡尔帕克国立大学，乌兹别克斯坦。电子邮箱： nn.uzakbaev@gmail.com编辑信息：收稿日期：2026年3月2日 接受日期：2026年3月6日 责任编辑：Pasha Zusmanovich致谢： 本研究获得 FCT 2023.08031.CEECIND 和 UID/00212/2025 的支持。

**4 秩2 IDD 代数的导子** **13**
4.1 IDD($K_n^\times$，2，0) 的导子.13 4.2 IDD($K_n^\times$，1，1) 的导子.16 4.3 IDD($K_n^\times$，1，$-1$) 的导子 .18 4.4 IDD($K_n^\times$，$-1$，$-1$) 的导子 .21 4.5 IDD($K_n^\times$，0，$-2$) 的导子 .28

# 1 引言

通过导数运算从已有对象中构造新对象的思想，在代数中早已为人所知 [2]。这一思想最一般的形式由 Malcev 实现 [21]。设 $M_n$ 是域上 $n$ 阶矩阵构成的代数。假设给定了 $M_n$ 中的某个有限矩阵集合 $\Lambda = \left(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}\right)$。记 $M_n^{(\Lambda)}$为定义在 $M_n$ 中矩阵空间上的代数，其乘法为新的乘法

$$x \cdot_\Lambda y = \sum_{i,j} a_{ij} x b_{ij} y c_{ij}.$$

已证明，每个 $n$维代数都同构于 $M_n^{(\Lambda)}$ [21]的一个子代数。构造初始乘法的其他有趣方式包括拟同构、同伦体和变异 [3,22,25]。拟同构的概念由 Albert 引入 [2]。设代数 A 和 $A_0$ 具有共同的线性空间，其上分别定义了右乘算子 $R_x$ 和$R_x^{(0)}$（分别对应 A 和 $A_0$，）。如果存在可逆线性算子 $\phi, \psi, \xi$ 使得 $R_x^{(0)} = \phi R_{x\psi}\xi.$，则称 A 和 $A_0$ 拟同构。我们称 $A_0$ 为 A 的一个拟同构体。另一种类似的构造出现在诺维科夫代数及其推广的研究中。具体而言，设 A 是一个结合交换代数，且具有一个导子 $d$,那么新的乘法 $x * y = xd(y)$ 赋予其诺维科夫代数的结构 [11]。这一构造被推广到非交换诺维科夫代数 [24]和 $\delta$-诺维科夫代数 [16]的情形。另一方面，带有 Rota-Baxter 算子 $R$ 的结合交换代数，在乘法$x * y = xR(y)$ [11]下具有 Zinbiel代数的结构。最近，Dzhumadildaev 的一篇论文 [11], 提出了将上述两种构造结合起来的思想。本文致力于研究一类非结合代数，我们称之为积分-导子 *Dzhumadildaev*代数（（见定义 1），），它们是通过类似于 [11]中给出的 Dzhumadildaev 构造得到的。

受限多项式代数（也称为零丝状结合代 [1, 10, 15, 19]数）仍然是一个备受关注的研究主题 $n$。本文致力于研究由 $n$维受限多项式代数（及其含幺版本）在导子-积分算子所定义的一种特定乘法下得到的一些代数。具体而言，我们在命题 1 中给出所研究代数的定义，并在定义5中明确给出这些代数的乘法表。命题7 刻画了我们所研究的非平凡代数

，下一小节2.2 则刻画了单代数、完美代数和幂零代数。小节2.3 给出了一些新的单保守代数实例。本文第二部分致力于研究秩1 和2的积分-导子 *Dzhumadildaev* 代数的导子。关于结合代数和非结合代数的导子代数及其推广的描述，是一个经典但至今仍受关注的问题 [4–6, 8, 13, 20]。

**记号** 我们不再给出一些众所周知的定义（，例如李代数、莱布尼茨代数、幂零代数、可解代数等的定义），并请读者参阅此前发表的论文。对于一组向量 $S$，我们用 $\langle S\rangle$ 表示由 $S$. 生成的向量空间。对于一个代数 A 和一个元素 $a \in$ A，我们将 $a$ 上的右乘法记为 $R_{a\cdot}$。一般而言，我们在复数域上工作，但某些结果同样适用于其他域。我们还始终假设所考虑的代数是非平凡的，即它们具有非零乘法。

## 2 预备知识

**定义 1.** 设 K$[x]$ 为一个含幺的多项式代数（，其由 $x^0$），$x$生成；设 S 是元素集合 $\{x^j\}_{j\in J}$，其中 $J \subseteq \mathbb{N}\cup\{0\}$.。则 (S $\diamond$) 是类型为 ($n$，$m$)*，其中 $n$，$m \in \mathbb{Z}$，的积分-导子 Dzhumadildaev 代数，当且仅当

$$x^i \diamond x^j = \begin{cases} T^n(x^i)T^m(x^j), \text{ if } T^n(x^i)T^m(x^j) \text{ is linearly dependent with one } x^l, l \in J; \\ 0, \text{ otherwise,} \end{cases}$$

其中，对于任意正的 $k > 0$，我们定义如下

$$\begin{array}{l} T^k \text{ is the } k\text{th partial derivation "}\partial^k\text{", where } \partial(x^i) = ix^{i-1}; \\ T^0 = \mathrm{Id}, \text{ and} \\ T^{-k} \text{ is the } k\text{th usual integral "} \int\ldots\int\text{", where } \int(x^i) = \frac{1}{i+1}x^{i+1}. \end{array}$$

IDD(S $n$，$m$) 的秩等于 $|n|+|m|$，记作 Rank(IDD(S $n$，$m$))　　.
IDD(S $n$，$m$) 的层级等于 $n+m$，记作 lev(IDD(S $n$，$m$)).

**命题 2**。 IDD(S、n、m) 与 IDD(S、m、n) 互为对立。特别地，IDD(S、n、n) 是交换的。

证明。 由定义 1 以及 K 的交换性可得$[x]$. □

下面，由于 根据命题 2，我们仅考虑代数 IDD(S,n, m)，且满足 $n \geq$　　$m$.

*我们将其记为 IDD(S, n, m)。

**定义 3.** 设 $B=\{b_i\}_{i\in I}$ 是代数 A的一个基。 若 $B$ 是一个乘法基[†] ，则称其为乘法基；$e_i$ 对于任意 $e_j$ 和 $B$，均有 $e_ie_j\in\langle e_k\rangle$ 其中 $k$. 若乘法基 $B=\{b_i\}_{i\in I}$ 是代数 A 的强乘法基，则对于任意 $e_i$ 和 $e_j$，属于$B$，均有 $e_ie_j\neq 0$.

**命题4.** IDD(S,n,m) 有一个乘法基。

证明。 由定义 1 和 3可得。 □

### 2.1 多项式构造的 IDD 代数的乘法表

下面我们将考察由以下集合构造的 IDD 代数

$$\begin{array}{rcl} K_n^k & := & \{x^k=e_k,\ x^{k+1}=e_{k+1},\ \ldots,\ x^n=e_n\};\\ K_\infty^k & := & \{x^k=e_k,\ x^{k+1}=e_{k+1},\ \ldots\}. \end{array}$$

让我们记住，IDD($K_n^1$, $m_1$, $m_2$) (分别，IDD($K_n^0$, $m_1$, $m_2$)) 代数的范围 k 0

分别是 IDD($K_n^1$,0, 0) (和 IDD($K_n^0$,0, 0)) 代数，它们是众所周知的代数 of

受限多项式[‡] (和含单位元的受限多项式)。令 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. 秩 1 代数的乘法表如下:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 1, | 0) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $ie_{i+j-1}$, | $1\leq i+j\leq \mathfrak{n}+1$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 1, | 0) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $ie_{i+j-1}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}+1$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 0, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{j+1}e_{i+j+1}$, | $0\leq i+j\leq \mathfrak{n}-1$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 0, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{j+1}e_{i+j+1}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}-1$ |

秩2代数的乘法表如下:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 2, | 0) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $i(i-1)e_{i+j-2}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}+2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 2, | 0) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $i(i-1)e_{i+j-2}$, | $3\leq i+j\leq \mathfrak{n}+2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 1, | 1) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $ije_{i+j-2}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}+2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 1, | 1) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $ije_{i+j-2}$, | $3\leq i+j\leq \mathfrak{n}+2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 1, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{i}{j+1}e_{i+j}$, | $1\leq i+j\leq \mathfrak{n}$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 1, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{i}{j+1}e_{i+j}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | $-1$, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{(i+1)(j+1)}e_{i+j+2}$, | $0\leq i+j\leq \mathfrak{n}-2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | $-1$, | $-1$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{(i+1)(j+1)}e_{i+j+2}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}-2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^0$, | 0, | $-2$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{(j+1)(j+2)}e_{i+j+2}$, | $0\leq i+j\leq \mathfrak{n}-2$ |
| IDD($K_\mathfrak{n}^1$, | 0, | $-2$) | : | $e_i\diamond e_j$ | = | $\frac{1}{(j+1)(j+2)}e_{i+j+2}$, | $2\leq i+j\leq \mathfrak{n}-2$ |

一般情况下，我们有以下乘法表。

[†]关于具有乘法基的代数，参见 [17] 及其中的参考文献。

[‡]也称为零丝状结合代数。

**命题5.** 设 $l := m_1 + m_2$，则 $\mathrm{IDD}(K_{\mathfrak{n}}^k, m_1, m_2)$ 的乘法表如下：

$$\boxed{\begin{array}{rl}\mathrm{IDD}(K_{\mathfrak{n}}^k, m_1, m_2) & : \quad e_i \diamond e_j \quad = \quad \frac{i!}{(i-m_1)!}\frac{j!}{(j-m_2)!}\, e_{i+j-l}, \\ & \text{其中 最大值}\{k, m_1\} \leq i \leq \mathfrak{n}, \\ & \text{最大值}\{k, m_2\} \leq j \leq \mathfrak{n}, \\ & \text{以及 最大}\{k, k+l\} \leq i+j \leq \mathfrak{n}+l\text{。}\end{array}}$$

**命题 6.** 若 $k \geq m_1 \geq m_2$，则 $\mathrm{IDD}(K_{\infty}^k, m_1, m_2)$ 具有一个强乘法基 $s.$

证明。 由定义 3 和命题 5可得。 □

显然，每个代数 $\mathrm{IDD}(K_{\infty}^k, m_1, m_2)$ 都是非平凡代数。有限维情形更为复杂，我们的首要目标是确定所有满足 $m_1 \geq m_2.$ 的非平凡代数 $\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$

**命题 7.** $\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$ 是平凡的，当且仅当以下条件之一成立

(1) $m_1 > n$; (2) $n \geq m_1$ 且$l > 2n-k$; (3) $n \geq m_1$ 且$l < 2k-n.$

证明。 首先，我们考虑 $m_1 > n.$ 的情形。于是 $m_1 > 0$，对于满足 $k \leq i, j \leq n$ 的每一对 $(i, j)$，，都有 $T^{m_1}(e_i) = 0$ 且 $e_i \diamond e_j = T^{m_1}(e_i)T^{m_2}(e_j) = 0$，也就是说，$\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$ 是平凡的。

其次，若 $n \geq m_1$，则对于每一对 $i$ 和 $j$，，满足 $k \leq i, j \leq n$，时，我们有

$$T^{m_1}(e_i) \in \langle e_{i-m_1} \rangle \text{ and } T^{m_2}(e_j) \in \langle e_{j-m_2} \rangle, \text{ i.e., } T^{m_1}(e_i)T^{m_2}(e_j) \in \langle e_{i+j-l} \rangle.$$

(A) 若 $l > 2n-k$，则 $i+j-l < i+j-2n+k < k$，也就是说，对于 $k \leq i, j \leq n$，$e_i \diamond e_j = 0$ 且 $\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$ 是平凡的。

(B) 若 $l < 2k-n$，则 $i+j-l > i+j-2k+n > n$，也就是说，对于 $k \leq i,\ j \leq n$，$\mathrm{IDD}(K_n^k,\ m_1,\ m_2)$ 是平凡的。

另一方面，若 $2k-n \leq l \leq 2n-k$，则有以下两种情况。

(A) 若 $l = 2n-t$，其中 $k \leq t \leq n$，则 $0 \neq e_n \diamond e_n \in \langle e_t \rangle$，也就是说，$\mathrm{IDD}(K_n^k,\ m_1,\ m_2)$ 是非平凡的。

(B) 若 $2k-n \leq l < n$，那么取 $i = \left[\frac{l+n}{2}\right]$，我们有 $0 \neq e_i \diamond e_i \in \langle e_{n-1},\ e_n \rangle$，即 $\mathrm{IDD}(K_n^k,\ m_1,\ m_2)$ 是非平凡的。 □

从现在起，我们只关注非平凡的 IDD 代数，即 $\mathrm{IDD}(K^k_{\mathfrak{n}},\ m_1,\ m_2)$，使得

$$\boxed{\infty > \mathfrak{n} \geq m_1 \text{ and } 2k-\mathfrak{n} \leq m_1+m_2 \leq 2\mathfrak{n}-k, \text{ or } \mathfrak{n}=\infty.}$$

## 2.2 单、完全及幂零 IDD代数

**命题8.** 若 $n < \mathrm{lev}\big(\mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)\big) \leq 2n-k$，则 $\mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)$ 是幂零的。

证明。 记 $\mathrm{A} := \mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)$ 且 $l := \mathrm{lev}\big(\mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)\big)$, 则

$$\mathrm{A}\diamond\mathrm{A} \subseteq \big\langle e_k, \dots, e_{n+(n-l)}\big\rangle \subset \mathrm{A};$$
$$\mathrm{A}\diamond\big(\mathrm{A}\diamond\mathrm{A}\big) + \big(\mathrm{A}\diamond\mathrm{A}\big)\diamond\mathrm{A} \subseteq \big\langle e_k, \dots, e_{n+2(n-l)}\big\rangle \subset \mathrm{A}\diamond\mathrm{A}.$$

应用数学归纳法，我们得到

$$\mathrm{A}^{\diamond t} := \sum_{i+j=t} \mathrm{A}^{\diamond i}\diamond\mathrm{A}^{\diamond j} \subset \big\langle e_k, \dots, e_{n+(t-1)(n-l)}\big\rangle.$$

由于 $n < l$，存在 $n_0$，使得 $\mathrm{A}^{\diamond n_0} = 0$，即 A 是幂零的。 □

**命题9。** 若$\mathrm{lev}\big(\mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)\big) = n$，则$\mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)$ 是非单完美代数，且恰有 $n-k$ 个真理想。

证明。 记 $\mathrm{A} := \mathrm{IDD}(K^k_n, m_1, m_2)$, 则

$$\mathrm{A}\diamond\mathrm{A} \supseteq \big\langle e_k, \dots, e_n\big\rangle = \mathrm{A}, \text{ i.e., A is perfect.}$$

$_{n_0}$设 $I$ 是 A 的一个理想，且 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得存在 $\mathfrak{i}_0 = \sum \alpha_i e_i \in I$, 其中 $\alpha_{n_0} \neq 0$,$_{i=k}t$, 并且不存在元素 $\mathfrak{i} = \sum \alpha_i e_i \in I$, 使得 $\alpha_t \neq 0$ 且 $t > n_0$. 显然$_{i=k}$ $I = \big\langle e_k, \dots, e_{n_0}\big\rangle$,, 即 A 的理想集合与数集 $\{k, \dots, n\}$. 之间存在一一对应。考虑到理想 $I = \big\langle e_k, \dots, e_n\big\rangle$ 并非真理想，结论得证。

□

命题10. 若 $0 \leq k < \mathrm{lev}\big(\mathrm{IDD}(K^k_{\mathfrak{n}}, m_1, m_2)\big) < \mathfrak{n}$，则 $\mathrm{IDD}(K^k_{\mathfrak{n}}, m_1, m_2)$ 是单的。证明. 设 $I$ 是 $\mathrm{A} := \mathrm{IDD}(K^k_{\mathfrak{n}}, m_1, m_2)$ 的一个非零理想，且 $l := \mathrm{lev}\big(\mathrm{IDD}(K^k_{\mathfrak{n}}, m_1, m_2)\big)$ $_{k_0}$那么存在一个元素 $\mathfrak{i} \in I$，使得 $\mathfrak{i} = \sum \alpha_i e_i$，其中 $k_0 \geq k$ 且 $\alpha_{k_0} \neq$$_{i=k}$0。因此，$0 \neq \mathfrak{i}\mathrm{R}^{k_0-k}_{e_{l-1}} \in \big\langle e_k\big\rangle$，即 $e_k \in I$. 由此可得 $\mathrm{A}\diamond\big\langle e_k\big\rangle \subseteq I$，即$\{e_k, \dots, e_{\mathfrak{n}-l+k}\} \subseteq I$. 若 $\mathfrak{n} = \infty$, 则结论成立。另一方面，若 $\mathfrak{n} < \infty$，我们还需指出 $e_{k+1} \in I$ 且 $0 \neq e_{\mathfrak{n}}\diamond e_{k+1} \in \big\langle e_{\mathfrak{n}-l+k+1}\big\rangle$，即 $e_{k+2} \in I$. 由此可得 $0 \neq e_{\mathfrak{n}}\diamond e_{k+2} \in \big\langle e_{\mathfrak{n}-l+k+2}\big\rangle$，即 $e_{k+3} \in I$，依此类推。最后，我们得到 $\mathrm{A} = I$. 命题得证。

□

**命题 11.** 若 $\operatorname{lev}\big(\mathrm{IDD}(K_{\mathfrak{n}}^k, m_1, m_2)\big) = k$，则 $\mathrm{IDD}(K_{\mathfrak{n}}^k, m_1, m_2)$ 非单、完美，且当 $\mathfrak{n} < \infty$ 时恰有 $\mathfrak{n} - k$ 个真理想，当 $\mathfrak{n} = \infty$ 时有无穷多个真理想。

证明。 记 A 为$= \mathbf{IDD}(K_{\mathfrak{n}}^k,\ m_1,\ m_2)$。 首先，我们考虑有限维情形 $\mathfrak{n} = n \in \mathbb{N}$，然后

$$\mathrm{A} \diamond \mathrm{A} \supseteq \big\langle e_k, \dots, e_n \big\rangle = \mathrm{A}, \text{ i.e., } \mathrm{A} \text{ is perfect.}$$

$_n$设 $I$ 是 A 的一个理想，且 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得存在 $\mathfrak{i}_0 = \sum \alpha_i e_i \in I$，其中 $\alpha_{n_0} \neq 0$，$_{i=n_0}$ $_n$，并且不存在元素 $\mathfrak{i} = \sum \alpha_i e_i \in I$，其中 $\alpha_t \neq 0$ 且 $t < n_0$. 显然$_{i=t}$，$I = \big\langle e_{n_0},\ \dots\dots,\ e_n \big\rangle$，也就是说，A 的理想集与数集 $\{k, \dots, n\}$. 之间存在一一对应关系。考虑到理想 $I = \big\langle e_k,\ \dots\dots,\ e_n \big\rangle$ 不是正规理想，我们便得到了所述结论。

其次，我们考虑无限维情形 $\mathfrak{n} = \infty$，于是

$$\mathrm{A} \diamond \mathrm{A} \supseteq \big\langle e_k, \dots, e_n, \dots \big\rangle = \mathrm{A}, \text{ i.e., } \mathrm{A} \text{ is perfect.}$$

每个元素$e_{n_0}$（其中 $n_0 \geq k$）都生成 A 的一个理想$I_{n_0}$。也就是说，理想$I_{n_0} = \langle e_{n_0}$、…、 $e_n$、..⟩彼此不同且都是真理想，因此 A 有无穷多个真理想。 □

**命题12**。 若 $2k - n \leq \operatorname{lev}\big(\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)\big) < k$，则$\mathrm{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$ 是幂零的。

证明。 记 $\mathrm{A} := \mathbf{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)$，并记 $l := \mathbf{lev}\big(\mathbf{IDD}(K_n^k, m_1, m_2)\big)$，于是

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{A} \diamond \mathrm{A} & \subseteq & \big\langle e_{k+(k-l)}, \dots, e_n \big\rangle & \subset & \mathrm{A}; \\ \mathrm{A} \diamond \big(\mathrm{A} \diamond \mathrm{A}\big) + \big(\mathrm{A} \diamond \mathrm{A}\big) \diamond \mathrm{A} & \subseteq & \big\langle e_{k+2(k-l)}, \dots, e_n \big\rangle & \subset & \mathrm{A} \diamond \mathrm{A}. \end{array}$$

运用数学归纳法，我们得到

$$\mathrm{A}^{\diamond t} := \sum_{i+j=t} \mathrm{A}^{\diamond i} \diamond \mathrm{A}^{\diamond j} \subset \big\langle e_{k+(t-1)(k-l)}, \dots, e_n \big\rangle.$$

由于 $l < k$，存在 $n_0$，使得 $\mathrm{A}^{\diamond n_0} = 0$，即 A 是幂零的。 □

**定义13** （参见 [7]）。 一个无限维代数 A 称为原幂零代数，当且仅当

$$\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}^n = \big\{0\big\}, \text{ where } \mathrm{A}^n := \sum_{i+j=n} \mathrm{A}^i \mathrm{A}^j.$$

**命题14**。 若 $\operatorname{lev}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^k, m_1, m_2)\big) < k$，则 $\mathrm{IDD}(K_\infty^k, m_1, m_2)$ 是原幂零的。证明。 记 $\mathrm{A} := \mathrm{IDD}(K_\infty^k, m_1, m_2)$ 以及 $l := \operatorname{lev}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^k, m_1, m_2)\big)$，则

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{A} \diamond \mathrm{A} & = & \big\langle e_{k+(k-l)}, \dots, e_n, \dots \big\rangle & \subset & \mathrm{A}; \\ \mathrm{A} \diamond \big(\mathrm{A} \diamond \mathrm{A}\big) + \big(\mathrm{A} \diamond \mathrm{A}\big) \diamond \mathrm{A} & = & \big\langle e_{k+2(k-l)}, \dots, e_n, \dots \big\rangle & \subset & \mathrm{A} \diamond \mathrm{A}. \end{array}$$

应用数学归纳法，我们得到

$$\mathrm{A}^{\diamond t} := \sum_{i+j=t} \mathrm{A}^{\diamond i} \diamond \mathrm{A}^{\diamond j} = \left\langle e_{k+(t-1)(k-l)}, \dots, e_n, \dots \right\rangle.$$

由于 $l < k$，我们有 $\mathrm{A}^{\diamond t_1} \subset \mathrm{A}^{\diamond t_2}$，如果 $t_1 > t_2$. 很容易看出 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}^{\diamond n} = \{0\}$，即，A 是原幂零的。 □

### 2.3 保守IDD代数

1972 年，Kantor 将保守代数引入为 Jordan代数的一种推广(此外，参见关于保守代数和超代数研究的综述 [17, 23])。

**定义 15** （见 [14]）。带有乘法 $\cdot$ 的向量空间 V 称为保守代数，如果存在一种新的乘法 $*: \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$，使得

$$\big[L_b^{\cdot}, [L_a^{\cdot}, \cdot]\big] = -\big[L_{a*b}^{\cdot}, \cdot\big], \text{ where } \big[L_c^{\cdot}, \mathrm{F}\big](x,y) = c \cdot \mathrm{F}(x,y) - \mathrm{F}(c \cdot x, y) - \mathrm{F}(x, c \cdot y).$$

换句话说，对于所有 $a$，$b$，$x$，$y \in \mathrm{V}$，以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} &b\big(a(xy) - (ax)y - x(ay)\big) - a\big((bx)y\big) + \big(a(bx)\big)y + (bx)(ay) - \\ &\quad - a\big(x(by)\big) + (ax)(by) + x\big(a(by)\big) = -(a*b)(xy) + \big((a*b)x\big)y + x\big((a*b)y\big). \end{aligned} \quad (1)$$

**Pro位置 16.** $\mathrm{IDD}(K_{\infty}^{k}, m, 0)$，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 是左交换代数。

证明。这由命题 5 得出。 □

**定义 17** （见 [18]）。如果代数 A 存在定义在同一向量空间上的一种乘法 $F$，使得 $a(bx) = F(a, b)x$.，则称 A 为广义结合代数。

**定理18。** 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{IDD}(K_{\infty}^{k}, m, 0)$ 是保守的，其附加乘法为

$$e_i * e_j = \frac{(i+j-2m)!}{(i+j-m)!} \frac{i!}{(i-m)!} \frac{j!}{(j-m)!} e_{i+j-m}.$$

证明。通过直接计算，我们得到 $\mathrm{IDD}(K_{\infty}^{k}, m, 0)$ 是一个广义结合代数，其附加乘法 $e_i * e_j$ 如命题中所述。根据命题 16，$\mathrm{IDD}(K_{\infty}^{k}, m, 0)$ 是左交换的。由 [18], 每个左交换广义结合代数都是保守的，因此 $\mathrm{IDD}(K_{\infty}^{k}, m, 0)$ 是保守的。 □

**注记19.** Cantarini 和 Kac 对所有复线性紧交换及反交换的保守单超代数进行了分类 [9]。代数 IDD($K_{\infty}^{k}, m, 0$)，其中$k < m$，构成了非（反）交换保守单代数的一大类例子。已知 IDD($K_{\infty}^{0}$, 1,0) 是一种诺维科夫代数，而且它似乎最早出现在 [12] 中。

# 3 秩 1 IDD代数的导子

## 3.1 IDD($K_n^\times$，1，0) 的导子

**定理 20.** 若 $1 \leq n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}(\mathrm{IDD}(K_n^0,\ 1,\ 0)) = \langle \varphi,\ \phi \rangle$，其中

$$\varphi(e_i) = (i-1)e_i \ and \ \phi(e_i) = ie_{i-1}.$$

证明。设 $D \in \mathfrak{Der}(\mathrm{IDD}(K_n^0,\ 1,\ 0))$，则我们可以假设

$$D(e_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i,\ D(e_1) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i, \text{ and } D(e_2) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i e_i.$$

首先，我们有

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & D(e_0 \diamond e_0) \ = \ D(e_0) \diamond e_0 + e_0 \diamond D(e_0) \\ & = & \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_0 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i e_{i-1}; \end{array}$$

这立即给出：当 $1 \leq k \leq n$ 且 $D(e_0) = \alpha_0 e_0$. 时，$\alpha_k = 0$。其次，

$$\begin{array}{rcl} D(e_0) & = & D(e_1 \diamond e_0) \ = \ D(e_1) \diamond e_0 + e_1 \diamond D(e_0) \\ & = & \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right) \diamond e_0 + e_1 \diamond (\alpha_0 e_0) \ = \ \sum_{i=0}^{n} i\beta_i e_{i-1} + \alpha_0 e_0 \\ & = & (\alpha_0 + \beta_1)\, e_0 + \sum_{i=2}^{n} i\beta_i e_{i-1}; \end{array}$$

由此立即得到 $\beta_k = 0$，对于 $1 \leq k \leq n$，即 $D(e_1) = \beta_0 e_0$. 第三，

$$\begin{array}{rcl} 2D(e_1) & = & D(e_2 \diamond e_0) \ = \ D(e_2) \diamond e_0 + e_2 \diamond D(e_0) \\ & = & \left(\sum_{i=0}^{n} \gamma_i e_i\right) \diamond e_0 + e_2 \diamond (\alpha_0 e_0) \\ & = & \sum_{i=0}^{n} i\gamma_i e_{i-1} + 2\alpha_0 e_1 \ = \ \gamma_1 e_0 + 2(\alpha_0 + \gamma_2)e_1 + \sum_{i=3}^{n} i\gamma_i e_{i-1}. \end{array}$$

由此立即得到 $\gamma_1 = 2\beta_0$，$\gamma_2 = -\alpha_0$，$\gamma_k = 0$，对于 $3 \leq k \leq n$，即，

$$D(e_2) \ = \ \gamma_0 e_0 + 2\beta_0 e_1 - \alpha_0 e_2.$$

接下来，

$$D(e_2) \ = \ \tfrac{1}{2} D(e_2 \diamond e_1) \ = \ \tfrac{1}{2} \left((\gamma_0 e_0 + 2\beta_0 e_1 - \alpha_0 e_2) \diamond e_1 + e_2 \diamond (\beta_0 e_0)\right) \ = \ 2\beta_0 e_1 - \alpha_0 e_2;$$

由此立即得到 $\gamma_0 = 0$，即 $D(e_0) = \alpha_0 e_0$，$D(e_1) = \beta_0 e_0$，$D(e_2) = 2\beta_0 e_1 - \alpha_0 e_2$.很容易看出，$\varphi(e_i) = (i-1)e_i$ 和 $\phi(e_i) = ie_{i-1}$ 是 IDD($K_n^0$，1，0) 的导子：

$$\begin{array}{rcl} \varphi(e_i \diamond e_j) & = & i(i+j-2)e_{i+j-1} \ = \ i(i-1)e_{i+j-1} + i(j-1)e_{i+j-1} \\ & = & (i-1)e_i \diamond e_j + (j-1)e_i \diamond e_j \ = \ \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j) \end{array}$$

and

$$\begin{aligned}\phi(e_i \diamond e_j) &= i(i+j-1)e_{i+j-2} = i(i-1)e_{i+j-2} + ije_{i+j-2} \\ &= \big(ie_{i-1}\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big(je_{j-1}\big) = \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j).\end{aligned}$$

Th将 $D$ 替换为 $D + \alpha_0\varphi - \beta_0\phi$ 后，我们可以假设 $D(e_1) = D(e_2) = 0.$
此外，使用归纳法，我们证明 $D(e_k) = 0$ 对于 $k \geq 2.$ 。为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{1}{2}D(e_2 \diamond e_k) = \tfrac{1}{2}\big(D(e_2) \diamond e_k + e_2 \diamond D(e_k)\big) = 0.$$

由此可知，$\mathbf{IDD}(K_n^0, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ 的每个导子都是 $\varphi$ 和 $\phi$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。

□

**推论 21.** $\mathfrak{Der}(\mathbf{IDD}(K_\infty^0, \mathbf{1}, \mathbf{0})) = \langle \varphi, \phi \rangle$ , 其中 $\varphi(e_i) = (i-1)e_i$ 且 $\phi(e_i) = ie_{i-1}.$

**定理 22.** 若 $1 \leq n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, 1, 0)\big) = \big\langle \varphi \big\rangle$，其中 $\varphi(e_i) = (i-1)e_i.$

$n$ $n$证明。 设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathbf{IDD}(K_n^1, \mathbf{1}, \mathbf{0})\big)$, 则 $D(e_1) = \sum \alpha_i e_i$ 且 $D(e_2) = \sum \beta_i e_i.$ 首先，

$$D\left(e_1\right) = D\left(e_1 \diamond e_1\right) = D\left(e_1\right) \diamond e_1 + e_1 \diamond \left(e_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i+1\right) \alpha_i e_i,$$

由此立即得到 $\alpha_k = 0$ 对于 $1 \leq k \leq n$ 和 $D(e_1) = 0.$ 其次，我们有

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i &= 2D(e_2) = D(e_2 \diamond e_1) = D(e_2) \diamond e_1 + e_2 \diamond D(e_1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) e_1 = \sum_{i=1}^{n} i\beta_i e_i,\end{aligned}$$

由此立即得到 $\beta_1 = 0, \quad \beta_k = 0$ 对于 $3 \leq k \leq n$ 和 $D(e_2) = \beta_2 e_2.$

容易看出， $\varphi(e_i) = (i-1)e_i$ 是 $\mathbf{IDD}(K_n^1, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ 的一个导子：

$$\begin{aligned}\varphi(e_i \diamond e_j) &= i(i+j-2)e_{i+j-1} = i(i-1)e_{i+j-1} + i(j-1)e_{i+j-1} = \\ &= (i-1)e_i \diamond e_j + (j-1)e_i \diamond e_j = \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j).\end{aligned}$$

然后用 $D - \beta_2\varphi$ 替换 $D$，我们可以假设 $D(e_1) = D(e_2) = 0.$ 此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k) = 0$ 对于 $k \geq 2.$ 为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{1}{2}D(e_2 \diamond e_k) = \tfrac{1}{2}\big(D(e_2) \diamond e_k + e_2 \diamond D(e_k)\big) = 0.$$

由此可知，$\mathbf{IDD}(K_n^1, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ 的每个导子都属于 $\varphi$ 的线性张成，这就完成了证明。

□

### 3.2 IDD($K_n^\times$, 0, −1) 的导子

**定理 23.** 若 $1 \le n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0, 0, -1)\big) = \big\langle \varphi_i \big\rangle_{0 \le i \le n}$，其中

$$\varphi_i(e_k) = (i+1+k)\, e_{k+i},\ for\ k \le n-i.$$

证明。设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0, 0, -1)\big)$，那么我们可以说 $D(e_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$. 首先，

$$\begin{array}{rcl} D(e_1) & = & D(e_0 \diamond e_0) \ = \ \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_0 + e_0 \diamond \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) \ = \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \alpha_i e_{i+1} \ = \ \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{i+2}{i+1} \alpha_i e_{i+1}. \end{array}$$

容易看出，$\varphi_i(e_k) = (i+k+1)\ e_{i+k}$ 是 $\mathrm{IDD}(K_n^0, 0, -1)$ 的导子：

$$\begin{array}{rcl} \varphi_k(e_i \diamond e_j) & = & \frac{k+i+j+2}{j+1} e_{i+j+k+1} \ = \ \frac{i+k+1}{j+1} e_{i+j+k+1} + \frac{j+k+1}{j+k+1} e_{i+j+k+1} \ = \\ & = & (i+k+1)\, e_{i+k} \diamond e_j + (j+k+1)\, e_i \diamond e_{j+k} \ = \ \varphi_k(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi_k(e_j). \end{array}$$

因此，我们可以用 $D - \sum \alpha_i \varphi_i$ 替换 $D$，并假设 $D(e_0) = D(e_1) = 0$.

此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k) = 0$ 对于 $k \ge 2$. 。为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) \ = \ kD(e_1 \diamond e_{k-1}) \ = \ k\big(D(e_1) \diamond e_{k-1} + e_1 \diamond D(e_{k-1})\big) \ = \ 0.$$

由此可知，$\mathrm{IDD}(K_n^0, 0, -1)$ 的每个导子都是 $\varphi_i$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。 □

**推论 24.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0, 0, -1)\big) = \big\langle \varphi_i \big\rangle_{i \ge 0}$, 其中 $\varphi_i(e_k) = (i+1+k)\, e_{k+i}$.

**定理 25.** 若 $3 \le n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, 0, -1)\big) = \big\langle \varphi_i, \phi_1, \phi_2 \big\rangle_{1 \le i \le n}$，其中

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i(e_k)$ | $=$ | $(i+k)\, e_{k+i-1}, \quad k \le 1+n-i$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_2)$ | $=$ | $e_{n-1}$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_2)$ | $=$ | $e_n$ |

证明。设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, 0, -1)\big)$，那么我们可以说

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ and } D(e_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

首先，

$$D(e_3) \ = \ 2D(e_1 \diamond e_1) \ = \ 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) \ =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_{i+2} + \sum_{i=1}^{n-2} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+2} = \sum_{i=1}^{n-2} \tfrac{i+3}{i+1}\alpha_i e_{i+2}.$$

其次,

$$\begin{aligned} D(e_4) &= 3D(e_1 \diamond e_2) = 3\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_2 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-3}\alpha_i e_{i+3} + \sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+2} = \tfrac{3}{2}\beta_1 e_3 + \sum_{i=1}^{n-3}\left(\alpha_i + \tfrac{3}{i+2}\beta_{i+1}\right)e_{i+3}. \end{aligned}$$

第三,

$$\begin{aligned} D(e_4) &= 2D(e_2 \diamond e_1) = 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_1 + e_2 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-2}\beta_i e_{i+2} + \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+3} = \beta_1 e_3 + \sum_{i=1}^{n-3}\left(\beta_{i+1} + \tfrac{2}{i+1}\alpha_i\right)e_{i+3}. \end{aligned}$$

因此，比较 $D(e_4)$，的这两个表达式，我们得到

$$\beta_1 = 0 \text{ and } \beta_k = \tfrac{k+1}{k}\alpha_{k-1}, \quad 3 \le k \le n-2, \text{ i.e.,}$$
$$D(e_2) = \beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-2}\tfrac{i+1}{i}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n \text{ and}$$
$$D(e_4) = (\alpha_1 + \beta_2)\, e_4 + \sum_{i=2}^{n-3}\tfrac{i+4}{i+1}\alpha_i e_{i+3}.$$

现在，我们将考虑 $D(e_5)$ 的两种不同表达式:

$$\begin{aligned} D(e_5) &= 4D(e_1 \diamond e_3) = 4\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_3 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{i+3}{i+1}\alpha_i e_{i+2}\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-4}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=1}^{n-4}\tfrac{4}{i+1}\alpha_i e_{i+4} = 3\alpha_1 e_5 + \sum_{i=2}^{n-4}\tfrac{i+5}{i+1}\alpha_i e_{i+4}; \\ D(e_5) &= 3D(e_2 \diamond e_2) \\ &= 3\Bigg(\left(\beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-2}\tfrac{i+1}{i}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n\right)\diamond e_2 \\ &\qquad + e_2 \diamond \left(\beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-2}\tfrac{i+1}{i}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n\right)\Bigg) \\ &= \beta_2 e_5 + \sum_{i=3}^{n-3}\tfrac{i+1}{i}\alpha_{i-1}e_{i+3} + \beta_2 e_5 + \sum_{i=3}^{n-3}\tfrac{3}{i}\alpha_{i-1}e_{i+3} \\ &= 2\beta_2 e_5 + \sum_{i=2}^{n-4}\tfrac{i+5}{i+1}\alpha_i e_{i+4}. \end{aligned}$$

最后一个给出 $\beta_2 = \frac{3}{2}\alpha_1$，即

$$D(e_2) = \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{i+2}{i+1}\alpha_i e_{i+1} + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n \text{ and } D(e_4) = \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{i+4}{i+1}\alpha_i e_{i+3}.$$

考虑线性映射 $\phi_1(e_2)=e_{n-1}$ 和 $\phi_2(e_2)=e_n$. 显然,

$$\phi_1\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,0,-1)\big)+\phi_2\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,0,-1)\big)\subseteq \mathrm{Ann}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,0,-1)\big),$$

并且 $e_2\notin\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,\ 0,\ -1)\big)^2$, 因此 $\phi_1$和 $\phi_2$是导子。容易看出，由下式定义的线性映射 $\varphi_i$

$$\varphi_i(e_k)=(i+k)\,e_{k+i-1},\ \text{where } k\leq 1+n-i$$

也是 $\mathrm{IDD}(K_n^1,\ 0,\ -1)$ 的导子:

$$\begin{array}{rcl}\varphi_k(e_i\diamond e_j) &=& \frac{k+i+j+1}{k+1}e_{i+k+j}\ =\ \frac{k+i}{j+1}e_{k+i+j}+\frac{k+j}{k+j}e_{k+i+j}\ = \\ &=& (k+i)\,e_{k+i-1}\diamond e_j+(k+j)\,e_i\diamond e_{k+j-1}\ =\ \varphi_k(e_i)\diamond e_j+e_i\diamond\varphi_k(e_j).\end{array}$$

因此，我们可以用 $D-\sum_{i=1}\alpha_i\varphi_i-(\beta_{n-1}-n\alpha_{n-2})\,\phi_1-(\beta_n-(n-1)\ \alpha_{n-1})\ \phi_2$, 替换 $D$，并假设 $D(e_1)\ =\ D(e_2)\ =\ D(e_3)\ =\ D(e_4)\ =\ 0.$

此外，利用归纳法，我们证明了 $D(e_k)=0$ 对 $k\geq 3.$ 成立。为此，考虑

$$D(e_{k+1})\ =\ kD(e_1\diamond e_{k-1})\ =\ k\big(D(e_1)\diamond e_{k-1}+e_1\diamond D(e_{k-1})\big)\ =\ 0.$$

由此可知，$\mathrm{IDD}(K_n^1,\ 0,\ -1)$ 的每个导子都是 $\varphi_i$、 $\phi_1$ 和 $\phi_2$的线性组合，从而完成了该命题的证明。 □

**推论26**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^1,\ 0,\ -1)\big)=\big\langle\varphi_i\big\rangle_{i\geq 1}$, 其中 $\varphi_i(e_k)\ =(i+k)\,e_{k+i-1}.$

## 4 秩2的 IDD 代数的导子

### 4.1 $\mathrm{IDD}(K_n^\times,\ 2,\ 0)$ 的导子

**命题27**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_2^0,\ 2,\ 0)\big)=\big\langle\varphi_i,\ \ \phi_i,\ \ \psi_i\big\rangle_{0\leq i\leq 1}$ 其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i(e_0)=e_i$ | $0\leq i\leq 1$ |
| $\phi_i$ | $\phi_i(e_1)=e_i$ | $0\leq i\leq 1$ |
| $\psi_i$ | $\psi_i(e_2)=e_i$ | $0\leq i\leq 1$ |

**定理28**。 若 $3\leq n<\infty$, 则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0,\ 2,\ 0)\big)=\big\langle\varphi,\phi\big\rangle$, 其中

$$\varphi(e_i)=(i-2)e_i\ and\ \phi(e_i)=ie_{i-1}.$$

证明。 设 $D\in\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0,2,0)\big)$, 则我们可以假设

$$D(e_0)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ie_i,\ D(e_1)=\sum_{i=0}^{n}\beta_ie_i,\ D(e_2)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_ie_i,\ D(e_3)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_ie_i.$$

首先,

$$0 = D(e_0 \diamond e_0) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_0 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\alpha_i e_{i-2},$$

这立即得出 $\alpha_k = 0$, 对于 $2 \leq k \leq n$, 即 $D(e_0) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$. 其次,

$$0 = D(e_1 \diamond e_0) = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right) \diamond e_0 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\beta_i e_{i-2},$$

这 立即给出 $\beta_k = 0$, 对于 $2 \leq k \leq n$, 即 $D(e_1) = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1$. 第三 ,

$$\begin{aligned} D(e_0) &= \tfrac{1}{2} D(e_2 \diamond e_0) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} \gamma_i e_i\right) \diamond e_0 + e_2 \diamond (\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\gamma_i e_{i-2} + \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1, \end{aligned}$$

立即给出 $\gamma_k = 0$, 对于 $2 \leq k \leq n$, 即 $D(e_2) = \gamma_0 e_0 + \gamma_1 e_1$. 接下来,

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \tfrac{1}{6} D(e_3 \diamond e_0) = \tfrac{1}{6}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i\right) \diamond e_0 + e_3 \diamond (\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1)\right) = \\ &= \tfrac{1}{3}\lambda_2 e_0 + (\alpha_0 + \lambda_3) e_1 + (\alpha_1 + 2\lambda_4) e_2 + \tfrac{1}{6} \sum_{i=5}^{n} i(i-1)\lambda_i e_{i-2}, \end{aligned}$$

立即给出 $\lambda_2 = 3\beta_0$, $\lambda_3 = -\alpha_0 + \beta_1$, $\lambda_4 = -\frac{1}{2}\alpha_1$, 以及 $\lambda_k = 0$, 对于 $5 \leq k \leq n$, 即

$$D(e_3) = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + 3\beta_0 e_2 + (-\alpha_0 + \beta_1) e_3 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 e_4.$$

最后,

$$\begin{aligned} D(e_2) &= \tfrac{1}{6} D(e_3 \diamond e_1) = \tfrac{1}{6}\big(\left(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + 3\beta_0 e_2 + (-\alpha_0 + \beta_1) e_3 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 e_4\right) \diamond e_1 + \\ &\quad + e_3 \diamond (\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1)\big) = \beta_0 e_1 + (-\alpha_0 + \beta_1) e_2 - \alpha_1 e_3 + \beta_0 e_1 + \beta_1 e_2 = \\ &= 2\beta_0 e_1 + (-\alpha_0 + \beta_1) e_2 - \alpha_1 e_3, \end{aligned}$$

由此立即得到 $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 2\beta_0$, $\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_0$, 以及 $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{aligned} D(e_3) &= \tfrac{1}{6} D(e_3 \diamond e_2) = \tfrac{1}{6}\big(\left(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + 3\beta_0 e_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_0 e_3\right) \diamond e_2 + e_3 \diamond (2\beta_0 e_1)\big) = \\ &= 3\beta_0 e_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_0 e_3, \end{aligned}$$

由此立即得到 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_1 = 0$, 即,

$D(e_0) = \alpha_0 e_0$, $D(e_1) = \beta_0 e_0 + \frac{1}{2}\alpha_0 e_1$, $D(e_2) = 2\beta_0 e_1$ 以及 $D(e_3) = 3\beta_0 e_2 - \frac{1}{2}\alpha_0 e_3$.

显然, $\varphi(e_i) = (i-2)e_i$ 和 $\phi(e_i) = i e_{i-1}$ 都是 $\mathrm{IDD}(K_n^0, 2, 0)$ 的导子 :

$$\begin{aligned} \varphi(e_i \diamond e_j) &= i(i-1)(i+j-4)e_{i+j-2} = i(i-1)\left((i-2)e_{i+j-2} + (j-2)e_{i+j-2}\right) = \\ &= \big((i-2)e_i\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big((j-2)e_j\big) = \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j); \\ \phi(e_i \diamond e_j) &= i(i-1)(i+j)e_{i+j-3} = i(i-1)ie_{i+j-3} + i(i-1)je_{i+j-3} = \\ &= \big(ie_{i-1}\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big(je_{j-1}\big) = \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j). \end{aligned}$$

那么，用 $D+\alpha_0\varphi-\beta_0\phi$ 替换 $D$ 后，可以假设 $D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = 0$.此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k)=0$ 对于 $k\geq 2$. 为真。为此，我们来考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{1}{6}D(e_3\diamond e_k) = \tfrac{1}{6}\big(D(e_3)\diamond e_k + e_3\diamond D(e_k)\big) = 0.$$

由此可知，$\mathrm{IDD}(K_n^0,2,0)$ 的每个导子都是 $\varphi$ 和 $\phi$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。□

**推论29。** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0,2,0)\big)=\langle\varphi,\phi\rangle$, 其中 $\varphi(e_i) = (i-2)e_i$ 且 $\phi(e_i) = ie_{i-1}$.

**命题30。** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_2^1,2,0)\big)=\langle\varphi,\phi\rangle$ 其中 $\varphi(e_1) = e_1$ 且 $\phi(e_2) = e_1$.

**定理31.** 如果 $3\leq n<\infty$，那么 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1、2、0)\big)=\langle\varphi\rangle$，其中 $\varphi(e_i) = (i-2)e_i$.

证明。设 $D\in\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1，2、0)\big)$，则不妨设

$$D(e_1)=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i,\ D(e_2)=\sum_{i=1}^n\beta_ie_i,\text{ and }D(e_3)=\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i.$$

首先,

$$0 = D(e_1\diamond e_1) = \left(\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right)\diamond e_1+e_1\diamond\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n i(i-1)\alpha_ie_{i-1};$$

这立即给出 $\alpha_k=0$ 对于 $2\leq k\leq n$，即 $D(e_1)=\alpha_1e_1$. 其次,

$$D(e_1) = \tfrac{1}{2}D(e_2\diamond e_1) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n\beta_ie_i\right)\diamond e_1+e_2\diamond(\alpha_1e_1)\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n i(i-1)\beta_ie_{i-1}+\alpha_1e_1;$$

这立即给出 $\beta_k=0$ 对于 $2\leq k\leq n$，即,

$$\begin{aligned}D(e_2) &= \tfrac{1}{6}D(e_3\diamond e_1) = \tfrac{1}{6}\left(\left(\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right)\diamond e_1+e_3\diamond(\alpha_1e_1)\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^n i(i-1)\gamma_ie_{i-1}+\alpha_1e_2 = \tfrac{1}{3}\gamma_2e_1+(\gamma_3+\alpha_1)e_2+\tfrac{1}{6}\sum_{i=4}^n i(i-1)\gamma_ie_{i-1};\end{aligned}$$

由此立即得到 $\gamma_2=3\beta_1,\gamma_3=-\alpha_1$, 以及 $\gamma_k=0$ （ $4\leq k\leq n,$ ），即

$$D(e_3)=\gamma_1e_1+3\beta_1e_2-\alpha_1e_3.$$

接下来,

$$D(e_3) = \tfrac{1}{6}D(e_3\diamond e_2)=\tfrac{1}{6}\big((\gamma_1e_1+3\beta_1e_2-\alpha_1e_3)\diamond e_2+e_3\diamond(\beta_1e_1)\big)=2\beta_1e_2-\alpha_1e_3;$$

由此立即得到 $\beta_1=0$ 和 $\gamma_1=0$，即 $D(e_1)=\alpha_1e_1$，$D(e_2)=0$，$D(e_3)=-\alpha_1e_3$.容易看出，$\varphi(e_i)=(i-2)e_i$ 是 $\mathrm{IDD}(K_n^1，2，0)$ 的一个导子:

$$\begin{aligned}\varphi(e_i\diamond e_j) &= i(i-1)(i+j-4)e_{i+j-2} = i(i-1)\left((i-2)e_{i+j-2}+(j-2)e_{i+j-2}\right) =\\ &= \big((i-2)e_i\big)\diamond e_j+e_i\diamond\big((j-2)e_j\big) = \varphi(e_i)\diamond e_j+e_i\diamond\varphi(e_j).\end{aligned}$$

于是，用 $D+\alpha_1\varphi$ 替换 $D$，我们可以假设 $D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = 0$.

此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k)=0$ 对于 $k\geq 2$. 为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{1}{6}D(e_3\diamond e_k) = \tfrac{1}{6}\big(D(e_3)\diamond e_k + e_3\diamond D(e_k)\big) = 0.$$

由此可知，$\mathbf{IDD}(K_n^1,2,0)$ 的每个导子都是 $\varphi,$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。□

**推论 32.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^1,2,0)\big)=\big\langle\varphi,\phi\big\rangle,$ 其中 $\varphi(e_i) = (i-2)e_i.$

### 4.2 IDD($K_n^\times$, 1,1) 的导子

**定理 33.** 若 $1\leq n<\infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0,1,1)\big)=\big\langle\varphi,\phi\big\rangle$，其中

$$\varphi(e_i)=(i-2)e_i \ and \ \phi(e_i)=ie_{i-1}.$$

证明。令 $D\in\mathfrak{Der}\big(\mathbf{IDD}(K_n^0,1,1)\big),$那么我们可以说

$$D(e_0)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ie_i,\ D(e_1)=\sum_{i=0}^{n}\beta_ie_i,\ D(e_2)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_ie_i, \text{ and } D(e_3)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_ie_i.$$

首先,

$$0 = D(e_0\diamond e_1) = \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_ie_i\right)\diamond e_1 + e_0\diamond\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_ie_i\right) = \sum_{i=0}^{n}i\alpha_ie_{i-1},$$

that 立即给出 $\alpha_k=0,$ 对于 $1\leq k\leq n,$ 即 $D(e_0)=\alpha_0e_0.$ 其次,

$$D(e_0) = D(e_1\diamond e_1) = \left(\sum_{i=0}^{n}\beta_ie_i\right)\diamond e_1 + e_1\diamond\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_ie_i\right) = \sum_{i=0}^{n}2i\beta_ie_{i-1},$$

这立即给出 $\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_0$和 $\beta_k=0,$对于 $2\leq k\leq n,$即 $D(e_1)=\beta_0e_0+\frac{1}{2}\alpha_0e_1.$第三,-

$$\begin{aligned}D(e_1) &= \tfrac{1}{2}D(e_2\diamond e_1) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\gamma_ie_i\right)\diamond e_1 + e_2\diamond\left(\beta_0e_0+\tfrac{1}{2}\alpha_0e_1\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}i\gamma_ie_{i-1}+\alpha_0e_1 = \tfrac{1}{2}\gamma_1e_0+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_0+\gamma_2\right)e_1+\sum_{i=3}^{n}\tfrac{i}{2}\gamma_ie_{i-1};\end{aligned}$$

由此立即得到 $\gamma_1=2\beta_0$ 和 $\gamma_k=0,$ 对于 $2\leq k\leq n,$ 即 $D(e_2)=\gamma_0e_0+2\beta_0e_1.$接下来,

$$\begin{aligned}D(e_2) &= \tfrac{1}{4}D(e_2\diamond e_2) = \tfrac{1}{4}\left((\gamma_0e_0+2\beta_0e_1)\diamond e_2+e_2\diamond(\gamma_0e_0+2\beta_0e_1)\right) = 2\beta_0e_1;\\ D(e_2) &= \tfrac{1}{3}D(e_3\diamond e_1) = \tfrac{1}{3}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_ie_i\right)\diamond e_1+e_3\diamond\left(\beta_0e_0+\tfrac{1}{2}\alpha_0e_1\right)\right) =\\ &= \tfrac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}i\lambda_ie_{i-1}+\tfrac{3}{2}\alpha_0e_2\right) = \tfrac{\lambda_1}{3}e_0+\tfrac{2}{3}\lambda_2e_1+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_0+\lambda_3\right)e_2+\sum_{i=4}^{n}\tfrac{i}{3}\lambda_ie_{i-1};\end{aligned}$$

由此立即得到 $\gamma_0 = 0,\quad \lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 3\beta_0,\quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}\alpha_0$，以及 $\lambda_k = 0$，对于 $4 \leq k \leq n$. 最后，

$$\begin{array}{rcl} D(e_3) & = & \frac{1}{6}D(e_3 \diamond e_2) \ = \ \frac{1}{6}\left(\left(\lambda_0 e_0 + 3\beta_0 e_2 - \frac{1}{2}\alpha_0 e_3\right) \diamond e_2 + e_3 \diamond (2\beta_0 e_1)\right) \ = \\ & = & 3\beta_0 e_2 - \frac{1}{2}\alpha_0 e_3, \end{array}$$

也就是说，$\lambda_0 = 0$. 于是我们得到

$D(e_0) = \alpha_0 e_0,\quad D(e_1) = \beta_0 e_0 + \frac{1}{2}\alpha_0 e_1,\quad D(e_2) = 2\beta_0 e_1$ 以及 $D(e_3) = 3\beta_0 e_2 - \frac{1}{2}\alpha_0 e_3$. 容易看出，$\varphi(e_i) = (i-2)e_i$ 以及 $\phi(e_i) = ie_{i-1}$ 都是 $\mathrm{IDD}(K_n^0, 1,\ 1)$ 的导子：

$$\begin{array}{rcl} \varphi(e_i \diamond e_j) & = & ij(i+j-4)e_{i+j-2} \ = \ ij(i-2)e_{i+j-2} + ij(j-2)e_{i+j-2} \ = \\ & = & \big((i-2)e_i\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big((j-2)e_j\big) \ = \ \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j). \\ \phi(e_i \diamond e_j) & = & ij(i+j)e_{i+j-3} \ = \ ijie_{i+j-3} + ijje_{i+j-3} \ = \\ & = & \big(ie_{i-1}\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big(je_{j-1}\big) \ = \ \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j). \end{array}$$

接着，将 $D$ 替换为 $D + \alpha_0\varphi - \beta_0\phi$，我们可以假设 $D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = 0$.此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k) = 0$ 对于 $k \geq 2$. 为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) \ = \ \frac{1}{3k}D(e_3 \diamond e_k) \ = \ \frac{1}{3k}\big(D(e_3) \diamond e_k + e_3 \diamond D(e_k)\big) \ = \ 0.$$

由此可知，$\mathrm{IDD}(K_n^0, 1, 1)$ 的每个导子都是 $\varphi$ and $\phi$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。 □

**推论 34.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0, 1, 1)\big) = \langle \varphi, \phi \rangle$, 其中 $\varphi(e_i) = (i-2)e_i$ 且 $\phi(e_i) = ie_{i-1}$.

**定理 35.** 若 $2 \leq n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, 1, 1)\big) = \langle \varphi, \phi \rangle$，其中

$$\varphi(e_i) = (i-2)e_i \ and \ \phi(e_i) = (1 - \delta_{1,i})ie_{i-1}.$$

证明。 设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, 1, 1)\big)$, 那么我们可以说

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \ D(e_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,\ \ \text{and } D(e_3) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i.$$

首先，

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & D(e_1 \diamond e_1) \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \ = \\ & = & \sum_{i=2}^{n} i\alpha_i e_{i-1} + \sum_{i=2}^{n} i\alpha_i e_{i-1} \ = \ 2\sum_{i=2}^{n} i\alpha_i e_{i-1}; \end{array}$$

从而立即得到 $D(e_1) = \alpha_1 e_1$. 其次，

$$D(e_1) \ = \ \frac{1}{2}D(e_1 \diamond e_2) \ = \ \frac{1}{2}\left((\alpha_1 e_1) \diamond e_2 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right)\right) \ = \ \alpha_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{2}\beta_i e_{i-1};$$

从而立即得到 $D(e_2) = \beta_1 e_1$. 第三,

$$\begin{aligned} D(e_2) &= \tfrac{1}{3}D(e_1 \diamond e_3) = \tfrac{1}{3}\left((\alpha_1 e_1)\diamond e_3 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i\right)\right) = \\ &= \alpha_1 e_2 + \sum_{i=2}^{n}\tfrac{i}{3}\gamma_i e_{i-1} = \tfrac{2}{3}\gamma_2 e_1 + (\alpha_1+\gamma_3)e_2 + \sum_{i=4}^{n}\tfrac{i}{3}\gamma_i e_{i-1}; \end{aligned}$$

由此立即得到 $D(e_3) = \gamma_1 e_1 + \frac{3}{2}\beta_1 e_2 - \alpha_1 e_3$. 另一方面，我们有

$$\begin{aligned} D(e_3) &= \tfrac{1}{6}D(e_2 \diamond e_3) = \tfrac{1}{6}\left((\beta_1 e_1)\diamond e_3 + e_2 \diamond \left(\gamma_1 e_1 + \tfrac{3}{2}\beta_1 e_2 - \alpha_1 e_3\right)\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\beta_1 e_2 + \tfrac{1}{3}\gamma_1 e_1 + \beta_1 e_2 - \alpha_1 e_3 = \tfrac{1}{3}\gamma_1 e_1 + \tfrac{3}{2}\beta_1 e_2 - \alpha_1 e_3; \end{aligned}$$

即 $\gamma_1 = 0$. 容易看出，由下式定义的线性映射 $\varphi$ 和 $\phi$

$$\varphi(e_i) = (i-2)e_i \text{ and } \phi(e_i) = (1-\delta_{1,i})ie_{i-1}$$

是 IDD($K_n^1$, 1, 1) 的导子:

$$\begin{aligned} \varphi(e_i \diamond e_j) &= ij(i+j-4)e_{i+j-2} = ij(i-2)e_{i+j-2} + ij(j-2)e_{i+j-2} = \\ &= \big((i-2)e_i\big)\diamond e_j + e_i \diamond \big((j-2)e_j\big) = \varphi(e_i)\diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j); \\ \phi(e_i \diamond e_j) &= ij(1-\delta_{1,i+j-2})(i+j-2)e_{i+j-3} = \\ &= (1-\delta_{1,i})i(i-1)je_{i+j-3} + (1-\delta_{1,j})ji(j-1)e_{i+j-3} = \\ &= \big((1-\delta_{1,i})ie_{i-1}\big)\diamond e_j + e_i \diamond \big((1-\delta_{1,j})je_{j-1}\big) = \phi(e_i)\diamond e_j + e_i \diamond \phi(e_j). \end{aligned}$$

我们可以用 $D + \alpha_1\varphi - \frac{\beta_1}{2}\phi$ 替换$D$，并假设 $D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = 0$.此外，利用归纳法，我们证明 $D(e_k) = 0$ 对于 $k \geq 2$. 为此，我们考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{1}{3k}D(e_k \diamond e_3) = \tfrac{1}{3k}\big(D(e_k)\diamond e_3 + e_k \diamond D(e_3)\big) = 0.$$

由此可知，IDD($K_n^1$, 2, 0) 的每个导子都是 $\varphi$ 的线性组合，从而完成了该命题的证明。 □

**推论 36.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^1, 1, 1)\big) = \langle \varphi, \phi \rangle$, 其中

$$\varphi(e_i) = (i-2)e_i \text{ and } \phi(e_i) = (1-\delta_{1,i})ie_{i-1}.$$

### 4.3 IDD($K_n^\times$, 1, −1) 的导子

**定理 37.** 若 $1 \leq n < \infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0, 1, -1)\big) = \langle \varphi \rangle$，其中 $\varphi(e_i) = ie_i$.

$n$ $n$证明。 令 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0, 1, -1)\big)$, 则 $D(e_0) = \sum \alpha_i e_i$ 且 $D(e_1) = \sum \beta_i e_i$. 首先， $i=0$ $i=0$

$$0 = D(e_0 \diamond e_0) = \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_0 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} i\alpha_i e_i,$$

由此立即得到 $\alpha_k = 0$ 对于 $1 \leq k \leq n$, 即 $D(e_0) = \alpha_0 e_0$. 其次,

$$\begin{aligned} D(e_1) &= D(e_1 \diamond e_0) = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right) \diamond e_0 + e_1 \diamond (\alpha_0 e_0) = \sum_{i=0}^{n} i\beta_i e_i + \alpha_0 e_1 = \\ &= (\beta_1 + \alpha_0)\, e_1 + \sum_{i=2}^{n} i\beta_i e_i, \end{aligned}$$

这立即给出 $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, 以及 $\beta_k = 0$ , 其中 $2 \leq k \leq n$, 即,

$$D(e_0) = 0 \text{ and } D(e_1) = \beta_1 e_1.$$

容易看出, $\varphi(e_i) = ie_i$ 是 $\mathrm{IDD}(K_n^0,\ \mathbf{1},\ -1)$ 的导子:

$$\begin{aligned} \varphi(e_i \diamond e_j) &= \tfrac{i}{j+1}(i+j)e_{i+j} = \tfrac{i^2}{j+1}e_{i+j} + \tfrac{ij}{j+1}e_{i+j} = \\ &= \big(ie_i\big) \diamond e_j + e_i \diamond \big(je_j\big) = \varphi(e_i) \diamond e_j + e_i \diamond \varphi(e_j). \end{aligned}$$

接着, 将 $D$ 替换为 $D - \beta_1\varphi$ , 我们可以假设 $D(e_0) = D(e_1) = 0$.

此外, 利用归纳法, 我们证明了 $D(e_k) = 0$ , 其中 $k \geq 2$. 。为此, 我们考虑

$$D(e_{k+1}) = (k+1)\, D(e_1 \diamond e_k) = (k+1)\left(D(e_1) \diamond e_k + e_1 \diamond D(e_k)\right) = 0.$$

由此可知, $\mathrm{IDD}(K_n^0,\ \mathbf{1},\ -1)$ 的每个导子都是 $\varphi$ 的线性组合, 从而完成了该命题的证明。

□

**推论38**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0,\ 1,\ -1)\big) = \langle\varphi\rangle$, 其中 $\varphi(e_i) = ie_i$.

**命题39**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_2^1,\ 1,\ -1)\big) = \langle\varphi_1,\ \varphi_2\rangle$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1) = e_2$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1) = e_1,\ \varphi_1(e_2) = 2e_2$ |

**定理40**。 若 $3 \leq n < \infty$, 则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,\ 1,\ -1)\big) = \langle\varphi,\ \phi_1,\ \phi_2\rangle$, 其中

**Th** $e$

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | $\varphi(e_i) = ie_i$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_1) = ne_{n-1},\ \phi_1(e_2) = (n^2 - n + 2)e_n$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_1) = e_n$ |

$_n$证明。 设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1, \mathbf{1}, -1)\big)$, 那么可以说 $D(e_1) = \sum_{i=1} \alpha_i e_i$. 首先,

$$\begin{aligned} D(e_2) &= 2D(e_1 \diamond e_1) = 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i e_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{i^2+i+2}{i+1}\alpha_i e_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(e_3) &= 3D(e_1\diamond e_2) = 3\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_2 + e_1\diamond\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\tfrac{i^2+i+2}{i+1}\alpha_i e_{i+1}\right)\right) = \\ &= \sum\limits_{i=1}^{n-2} i\alpha_i e_{i+2} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}\tfrac{3(i^2+i+2)}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2} = \sum\limits_{i=1}^{n-2}\tfrac{i^3+6i^2+5i+6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2}. \end{aligned}$$

另一方面:

$$\begin{aligned} D(e_3) &= D(e_2\diamond e_1) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\tfrac{i^2+i+2}{i+1}\alpha_i e_{i+1}\right)\diamond e_1 + e_2\diamond\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \\ &= \sum\limits_{i=1}^{n-2}\tfrac{i^2+i+2}{2}\alpha_i e_{i+2} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+2} = \sum\limits_{i=1}^{n-2}\tfrac{i^3+2i^2+3i+6}{2(i+1)}\alpha_i e_{i+2}. \end{aligned}$$

比较 $D(e_3)$, 的这两种表示，我们有

$$i\big(i^3+2i^2-5i+2\big)\alpha_i = 0 \text{ for } 1\leq i\leq n-2.$$

方程 $i\big(i^3+2i^2-5i+2\big)=0$ 的根为 $0, 1,$ 或 $\frac{1}{2}\big(-3\pm\sqrt{17}\big)$. 接着，我们得到 $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-2}=0.$ 综上，我们得到:

$D(e_1) = \alpha_1 e_1+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\alpha_n e_n$, $D(e_2) = 2\alpha_1 e_2+\frac{n^2-n+2}{n}\alpha_{n-1}e_n$, 以及 $D(e_3) = 3\alpha_1 e_3$.

容易看出，由下式定义的线性映射 $\varphi$, $\phi_1$, 和 $\phi_2$

$$\varphi(e_i) = ie_i,\ \phi_1(e_1) = ne_{n-1},\ \phi_1(e_2) = (n^2-n+2)e_n,\ \phi_2(e_1) = e_n$$

是 IDD($K_n^1$,$1,-1$) 的导子:

$$\begin{aligned} \varphi(e_i\diamond e_j) &= \tfrac{i}{j+1}(i+j)e_{i+j} = i\tfrac{i}{j+1}e_{i+j} + j\tfrac{i}{j+1}e_{i+j} = \\ &= \big(ie_i\big)\diamond e_j + e_i\diamond\big(je_j\big) = \varphi(e_i)\diamond e_j + e_i\diamond\varphi(e_j); \\ \phi_1(e_1\diamond e_1) &= \tfrac{1}{2}\phi_1(e_2) = \tfrac{n^2-n+2}{2}e_n = \tfrac{n^2-n}{2n}e_n + \tfrac{n}{n}e_n = \\ &= (ne_{n-1})\diamond e_1 + e_1\diamond(ne_{n-1}) = \phi_1(e_1)\diamond e_1 + e_1\diamond\phi_1(e_1). \end{aligned}$$

我们可以用 $D-\alpha_1\varphi-\frac{1}{n}\alpha_{n-1}\phi_1-\alpha_n\phi_2$ 替换 $D$，并假设 $D(e_1) = D(e_2) = 0$。此外，利用归纳法，我们可以证明 $D(e_k)=0$，其中 $k\geq 3.$ 。为此，我们来考虑

$$D(e_{k+1}) = \tfrac{2}{k}D(e_k\diamond e_1) = \tfrac{2}{k}\big(D(e_k)\diamond e_1 + e_k\diamond D(e_1)\big) = 0.$$

由此可知，IDD($K_n^1$, $1$, $-1$) 的每个导子都是 $\varphi$, $\phi_1$, 和 $\phi_2$. 的线性组合。至此，命题得证。 □

**推论41**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^1,\ 1,\ -1)\big) = \big\langle\varphi\big\rangle$, 其中 $\varphi(e_i) = ie_i$.

### 4.4 IDD($K_n^{\times}$, $-1$, $-1$) 的导子

**命题 42。** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_2^0,\ -1,\ -1)\big) = \big\langle \varphi_i,\ \phi_j \big\rangle_{0\le i\le 2}^{1\le j\le 2}$，其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i(e_0) = e_i,\quad \varphi_i(e_2) = 2\delta_{0,i}e_2$ | $0\le i\le 2$ |
| $\phi_j$ | $\phi_j(e_1) = e_j$ | $1\le j\le 2$ |

**命题 43.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_3^0,\ -1,\ -1)\big) = \big\langle \varphi_i,\ \phi_j \big\rangle_{1\le i\le 3}^{1\le j\le 3}$，其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i(e_0) = e_i,\quad \varphi_1(e_2) = e_3$ | $1\le i\le 3$ |
| $\phi_j$ | $\phi_j(e_1) = e_j,\quad \phi_1(e_3) = e_3$ | $1\le j\le 3$ |

**命题 44.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_4^0,-1,-1)\big) = \big\langle \varphi_i, \phi_j \big\rangle_{0\le i\le 4}^{2\le j\le 4}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_0) = e_4$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_0) = e_3$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_0) = 3e_2,\quad \varphi_2(e_2) = 2e_4$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_0) = 2e_1,\quad \varphi_1(e_2) = 2e_3,\quad \varphi_1(e_3) = e_4,$ |
| $\varphi_0$ | $\varphi_0(e_0) = 2e_0,\quad \varphi_0(e_1) = 3e_1,\quad \varphi_0(e_2) = 4e_2,\quad \varphi_0(e_3) = 5e_3,\quad \varphi_0(e_4) = 6e_4$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_1) = e_4$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_1) = e_3$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_1) = 3e_2,\quad \phi_2(e_3) = 2e_4$ |

**定理45。** 若 $5\le n<\infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0,-1,-1)\big) = \big\langle \varphi, \phi_i, \psi_j \big\rangle_{0\le i\le 4}^{0\le j\le 2}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | $\varphi(e_i) = (i+2)\,e_i,\quad 0\le i\le n$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_0) = 4(n-1)(n-3)e_{n-4},\ \phi_4(e_1) = (n-2)(n+5)e_{n-3},$<br>$\phi_4(e_2) = 8(n-1)e_{n-2},\ \phi_4(e_3) = 6(n+1)e_{n-1},\ \phi_4(e_4) = 4(n+5)e_n$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_0) = (n-2)e_{n-3},\ \phi_3(e_2) = 2e_{n-1},\ \phi_3(e_3) = e_n$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_0) = (n-1)e_{n-2},\ \phi_2(e_2) = 2e_n$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_0) = e_{n-1}$ |
| $\phi_0$ | $\phi_0(e_0) = e_n$ |
| $\psi_2$ | $\psi_2(e_1) = (n-1)e_{n-2}, \psi_2(e_3) = e_n$ |
| $\psi_1$ | $\psi_1(e_1) = e_{n-1}$ |
| $\psi_0$ | $\psi_0(e_1) = e_n$ |

$^{n}$ $_{n}$证明。设 $D\in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0,-1,-1)\big)$, 则 $D(e_0) = \sum \alpha_i e_i$ 且 $D(e_1) = \sum \beta_i e_i$ .$_{i=0}$ $_{i=0}$首先,

$$D(e_2) = D(e_0\diamond e_0) = \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_0 + e_0\diamond\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-2} \tfrac{1}{i+1}\alpha_i e_{i+2} + \sum_{i=0}^{n-2} \tfrac{1}{i+1}\alpha_i e_{i+2} = \sum_{i=0}^{n-2} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+2};\\
D(e_3) &= 2D(e_0 \diamond e_1) = 2\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_1 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i e_i\right)\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{n-3} \tfrac{1}{i+1}\alpha_i e_{i+3} + \sum_{i=0}^{n-2} \tfrac{2}{i+1}\beta_i e_{i+2} = 2\beta_0 e_2 + \sum_{i=0}^{n-3}\left(\tfrac{1}{i+1}\alpha_i + \tfrac{2}{i+2}\beta_{i+1}\right)e_{i+3}.
\end{aligned}$$

其次，我们得到 $D(e_4)$ 的两个表达式：

$$\begin{aligned}
D(e_4) &= 3D(e_0 \diamond e_2) = 3\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_2 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+2}\right)\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{1}{i+1}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{6}{(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+4} = \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{i+9}{(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+4};\\
D(e_4) &= 4D(e_1 \diamond e_1) = 4\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i e_i\right)\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{n-3} \tfrac{2}{i+1}\beta_i e_{i+3} + \sum_{i=0}^{n-3} \tfrac{2}{i+1}\beta_i e_{i+3} = 4\beta_0 e_3 + \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{4}{i+2}\beta_{i+1} e_{i+4};
\end{aligned}$$

由此立即得到 $\beta_0 = 0$ 和 $\beta_k = \frac{(k+1)\ (k+8)\ 4k}{(k+2)\quad \alpha_{k-1}}$ 对于 $1 \le k \le n-3$，即，

$$\begin{aligned}
D(e_1) &= \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{(i+1)(i+8)}{4i(i+2)}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-2}e_{n-2} + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n;\\
D(e_3) &= \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{3(i+5)}{2(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+3} + (\tfrac{1}{n-2}\alpha_{n-3} + \tfrac{2}{n-1}\beta_{n-2})e_n.
\end{aligned}$$

第三，我们得到了 $D(e_5)$ 的不同表达式：

$$\begin{aligned}
D(e_5) &= 4D(e_0 \diamond e_3) = 4\Big(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_3 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{3(i+5)}{2(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+3}\right)\Big) =\\
&= \sum_{i=0}^{n-5} \tfrac{1}{i+1}\alpha_i e_{i+5} + \sum_{i=0}^{n-5} \tfrac{6(i+5)}{(i+1)(i+3)(i+4)}\alpha_i e_{i+5}\\
&= \sum_{i=0}^{n-5} \tfrac{(i+6)(i+7)}{(i+1)(i+3)(i+4)}\alpha_i e_{i+5};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(e_5) &= 6D(e_1 \diamond e_2) = 6\big(D(e_1)\diamond e_2 + e_1 \diamond D(e_2)\big) =\\
&= 6\Big(\left(\sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{(i+1)(i+8)}{4i(i+2)}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-2}e_{n-2} + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n\right)\diamond e_2 +\\
&\quad e_1 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+2}\right)\Big) =\\
&= \sum_{i=1}^{n-4} \tfrac{i+8}{2i(i+2)}\alpha_{i-1}e_{i+4} + \sum_{i=0}^{n-5} \tfrac{6}{(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+5} =\\
&= \sum_{i=0}^{n-5} \tfrac{i+21}{2(i+1)(i+3)}\alpha_i e_{i+5}.
\end{aligned}$$

比较当前的表达式，我们得到 $\alpha_k = 0$ 对于 $1 \leq k \leq n-5$；也就是说，

$$\begin{array}{rcl} D(e_0) & = & \alpha_0 e_0 + \alpha_{n-4} e_{n-4} + \alpha_{n-3} e_{n-3} + \alpha_{n-2} e_{n-2} + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \alpha_n e_n; \\ D(e_1) & = & \frac{3}{2}\alpha_0 e_1 + \frac{(n-2)(n+5)}{4(n-1)(n-3)} \alpha_{n-4} e_{n-3} + \beta_{n-2} e_{n-2} + \beta_{n-1} e_{n-1} + \beta_n e_n; \\ D(e_2) & = & 2\alpha_0 e_2 + \frac{2}{n-3}\alpha_{n-4} e_{n-2} + \frac{2}{n-2}\alpha_{n-3} e_{n-1} + \frac{2}{n-1}\alpha_{n-2} e_n; \\ D(e_3) & = & \frac{5}{2}\alpha_0 e_3 + \frac{3(n+1)}{2(n-1)(n-3)}\alpha_{n-4} e_{n-1} + \left(\frac{1}{n-2}\alpha_{n-3} + \frac{1}{n-1}\beta_{n-2}\right) e_n; \\ D(e_4) & = & 3\alpha_0 e_4 + \frac{n+5}{(n-1)(n-3)}\alpha_{n-4} e_n; \\ D(e_5) & = & \frac{7}{2}\alpha_0 e_5, \text{ and } D(e_6) \ = \ 4\alpha_0 e_6. \end{array}$$

此外，使用归纳法，我们可以证明 $D(e_k) = \binom{k+2}{2}\alpha_0 e_k$，对于$5 \leq k \leq n$. 为此，我们来考虑

$$\begin{array}{rcl} D(e_{k+2}) & = & (k+1)D(e_k \diamond e_0) \ = \ (k+1)\big(D(e_k) \diamond e_0 + e_k \diamond D(e_0)\big) \ = \\ & = & (k+1)\left(\left(\frac{k+2}{2}\alpha_0 e_k\right) \diamond e_0 + e_k \diamond \left(\alpha_0 e_0 + \sum_{i=n-4}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) \ = \ \frac{k+4}{2}\alpha_0 e_{k+2}. \end{array}$$

结合所有得到的结果，我们看到 $D$ 是映射$\{\varphi, \phi_i, \psi_j\}_{0\leq i\leq 4}^{0\leq j\leq 2}$的线性组合

□

**推论 46.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0, \ -1, \ -1)\big) = \big\langle \varphi \big\rangle$，其中 $\varphi(e_i) = (i+2)\ e_i$.

**命题 47.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_4^1, \ -1, \ -1)\big) = \big\langle \varphi_i, \ \phi_j, \ \psi_j \big\rangle_{1\leq i\leq 4}^{2\leq j\leq 4}$，其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i \ (e_k) \ = \delta_{1,k} e_i + 2\delta_{1,i}\delta_{4,k} e_4$ | $1 \leq i \leq 4$ |
| $\phi_j$ | $\phi_j \ (e_2) \ = e_j$ | $2 \leq j \leq 4$ |
| $\psi_j$ | $\psi_j \ (e_3) \ = e_j$ | $2 \leq j \leq 4$ |

**命题 48.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_5^1, -1, -1)\big) = \big\langle \varphi_i, \phi_j, \psi_k \big\rangle_{1\leq i\leq 5}^{3\leq k\leq 5}$; $_{2\leq j\leq 5}$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_5$ | $\varphi_5 \ (e_1) \ = e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4 \ (e_1) \ = e_4$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3 \ (e_1) \ = e_3$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1) = 3e_2, \quad \varphi_2(e_4) = 4e_5$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1) = e_1, \quad \varphi_1(e_4) = 2e_4, \quad \varphi_1(e_5) = e_5$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2) = e_5$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_2) = e_4$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_2) = e_3$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_2) = e_2, \quad \phi_2(e_5) = e_5,$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3) = e_5$ |
| $\psi_4$ | $\psi_4(e_3) = e_4$ |
| $\psi_3$ | $\psi_3(e_3) = e_3$ |

**命题49.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_6^1,-1,-1)\big)=\big\langle \varphi_i,\phi_j,\psi_k\big\rangle_{1\le i\le 6}^{4\le k\le 6}$; $2\le j\le 6$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_6$ | $\varphi_6(e_1)=e_6$ |
| $\varphi_5$ | $\varphi_5(e_1)=e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_1)=e_4$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_1)=e_3,\quad \varphi_3(e_4)=e_6$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1)=3e_2,\quad \varphi_2(e_4)=4e_5,\quad \varphi_2(e_5)=2e_6$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1)=e_1,\quad \varphi_1(e_3)=-e_3,\quad \varphi_1(e_4)=2e_4,\quad \varphi_1(e_5)=e_5$ |
| $\phi_6$ | $\phi_6(e_2)=e_6$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2)=e_5$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_2)=e_4$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_2)=4e_3,\quad \phi_3(e_5)=3e_6$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_2)=e_2,\quad \phi_2(e_3)=2e_3,\quad \phi_2(e_5)=e_5,\quad \phi_2(e_6)=2e_6$ |
| $\psi_6$ | $\psi_6(e_3)=e_6$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3)=e_5$ |
| $\psi_4$ | $\psi_4(e_3)=e_4$ |

**命题 50。** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_7^1,-1,-1)\big)=\big\langle \varphi_i,\phi_j,\psi_k\big\rangle_{1\le i\le 7}^{5\le k\le 7}$; $3\le j\le 7$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_7$ | $\varphi_7(e_1)=e_7$ |
| $\varphi_6$ | $\varphi_6(e_1)=e_6$ |
| $\varphi_5$ | $\varphi_5(e_1)=e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_1)=5e_4,\quad \varphi_4(e_4)=4e_7$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_1)=2e_3,\quad \varphi_3(e_4)=2e_6,\quad \varphi_3(e_5)=e_7$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1)=6e_2,\quad \varphi_2(e_3)=5e_4,\quad \varphi_2(e_4)=-8e_5,\quad \varphi_2(e_5)=4e_6$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1)=3e_1,\quad \varphi_1(e_2)=4e_2,\quad \varphi_1(e_3)=5e_3,\quad \varphi_1(e_4)=2e_4,$ $\varphi_1(e_5)=7e_5,\quad \varphi_1(e_6)=8e_6,\quad \varphi_1(e_7)=3e_7$ |
| $\phi_7$ | $\phi_7(e_2)=e_7$ |
| $\phi_6$ | $\phi_6(e_2)=e_6$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2)=e_5$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_2)=5e_4,\quad \phi_4(e_5)=3e_7$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_2)=8e_3,\quad \phi_3(e_3)=15e_4,\quad \phi_3(e_5)=6e_6,\quad \phi_3(e_6)=12e_7$ |
| $\psi_7$ | $\psi_7(e_3)=e_7$ |
| $\psi_6$ | $\psi_6(e_3)=e_6$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3)=e_5$ |

**定理 51.** 若 $8\le n<\infty$, 则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,-1,-1)\big)=\big\langle \varphi,\phi_i,\psi_j,\pi_k\big\rangle_{0\le i\le 6}^{0\le k\le 2}$; $0\le j\le 4$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | $\varphi(e_i) \ = (i+2)\, e_i,\ 1 \le i \le n$ |
| $\phi_6$ | $\phi_6(e_1) \ = 18(n-2)(n-5)e_{n-6},\ \phi_6(e_2) \ = 8(n-4)(n+3)e_{n-5},$<br>$\phi_6(e_3) \ = 3(n-3)(n+18)e_{n-4},\quad \phi_6(e_4) \ = 72(n-2)e_{n-3},$<br>$\phi_6(e_5) \ = 60ne_{n-2},\quad \phi_6(e_6) \ = 48(n+3)e_{n-1},\quad \phi_6(e_7) \ = 36(n+8)e_n$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_1) \ = 2(n-4)e_{n-5},\ \phi_5(e_3) \ = (2-n)e_{n-3},\ \phi_5(e_4) \ = 8e_{n-2},\ \phi_5(e_5) \ = 4e_{n-1}$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_1) \ = (n-3)e_{n-4},\ \phi_4(e_4) \ = 4e_{n-1},\ \phi_4(e_5) \ = 2e_n$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_1) \ = (n-2)e_{n-3},\ \phi_3(e_4) \ = 4e_n$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_1) = e_{n-2}$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_1) = e_{n-1}$ |
| $\phi_0$ | $\phi_0(e_1) = e_n$ |
| $\psi_4$ | $\psi_4(e_2) \ = 2(n-3)e_{n-4},\quad \psi_4(e_3) \ = 3(n-2)e_{n-3},\quad \psi_4(e_5) \ = -6e_{n-1},\quad \psi_4(e_6) \ = 12e_n$ |
| $\psi_3$ | $\psi_3(e_2) \ = (n-2)e_{n-3}, \psi_3(e_5) \ = 3e_n$ |
| $\psi_2$ | $\psi_2(e_2) = e_{n-2}$ |
| $\psi_1$ | $\psi_1(e_2) = e_{n-1}$ |
| $\psi_0$ | $\psi_0(e_2) = e_n$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2(e_3) = e_{n-2}$ |
| $\pi_1$ | $\pi_1(e_3) = e_{n-1}$ |
| $\pi_0$ | $\pi_0(e_3) = e_n$ |

证明. 设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathbf{IDD}(K_n^1, -1, -1)\big)$，那么我们可以说

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ D(e_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \text{ and } D(e_3) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i.$$

首先，我们求出 $D(e_4)$ $D(e_5)$，以及 $D(e_6)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
D(e_4) &= 4D(e_1 \diamond e_1) \ = \ 4\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+3} + \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+3} = \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{4}{i+1}\alpha_i e_{i+3}; \\
D(e_5) &= 6D(e_1 \diamond e_2) \ = \ 6\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_2 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-4} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+3} \\
&= \sum_{i=1}^{n-4} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=0}^{n-4} \tfrac{3}{i+2}\beta_{i+1} e_{i+4} \ = \ \tfrac{3}{2}\beta_1 e_4 + \sum_{i=1}^{n-4} \left(\tfrac{2}{i+1}\alpha_i + \tfrac{3}{i+2}\beta_{i+1}\right) e_{i+4}; \\
D(e_6) &= 8D(e_1 \diamond e_3) \ = \ 8\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \diamond e_3 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-5} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+5} + \sum_{i=1}^{n-3} \tfrac{4}{i+1}\gamma_i e_{i+3} \\
&= \sum_{i=1}^{n-5} \tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+5} + \sum_{i=-1}^{n-5} \tfrac{4}{i+3}\gamma_{i+2} e_{i+5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\gamma_1 e_4 + \tfrac{4}{3}\gamma_2 e_5 + \sum_{i=1}^{n-5}\left(\tfrac{2}{i+1}\alpha_i + \tfrac{4}{i+3}\gamma_{i+2}\right)e_{i+5};\\
D(e_6) &= 9D(e_2\diamond e_2) = 9\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_2 + e_2\diamond\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-4}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+4} + \sum_{i=1}^{n-4}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+4}\\
&= \sum_{i=1}^{n-4}\tfrac{6}{i+1}\beta_i e_{i+4} = 3\beta_1 e_5 + \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{6}{i+2}\beta_{i+1}e_{i+5}.
\end{aligned}
$$

比较 $D(e_6)$ 的两个不同表达式，可得

$$\gamma_1 = 0;\ \ \gamma_2 = \tfrac{9}{4}\beta_1;\ \ \gamma_k = \tfrac{3(k+1)}{2k}\beta_{k-1} - \tfrac{k+1}{2(k-1)}\alpha_{k-2},\ 3\le k\le n-3;\ \text{i.e.}$$

$$D(e_3) = \tfrac{9}{4}\beta_1 e_2 + \sum_{i=3}^{n-3}\left(\tfrac{3(i+1)}{2i}\beta_{i-1} - \tfrac{i+1}{2(i-1)}\alpha_{i-2}\right)e_i + \gamma_{n-2}e_{n-2} + \gamma_{n-1}e_{n-1} + \gamma_n e_n.$$

类似地，我们得到 $D(e_7)$ 的两个不同表达式：

$$
\begin{aligned}
D(e_7) &= 10D(e_1\diamond e_4) = 10\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_4 + e_1\diamond\left(\sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{4}{i+1}\alpha_i e_{i+3}\right)\right) =\\
&= \sum_{i=1}^{n-6}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+6} + \sum_{i=1}^{n-6}\tfrac{20}{(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+6} = \sum_{i=1}^{n-6}\tfrac{2(i+14)}{(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+6};\\
D(e_7) &= 12D(e_2\diamond e_3) = 12\big(D(e_2)\diamond e_3 + e_2\diamond D(e_3)\big) =\\
&= 12\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_3 + \right.\\
&\quad \left. + e_2\diamond\left(\tfrac{9}{4}\beta_1 e_2 + \sum_{i=3}^{n-3}\left(\tfrac{3(i+1)}{2i}\beta_{i-1} - \tfrac{i+1}{2(i-1)}\alpha_{i-2}\right)e_i + \sum_{j=n-2}^{n}\gamma_j e_j\right)\right) =\\
&= \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+5} + 3\beta_1 e_6 + \sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{2}{i+1}\left(\tfrac{3(i+1)}{2i}\beta_{i-1} - \tfrac{6(i+1)}{i-1}\alpha_{i-2}\right)e_{i+4} =\\
&= \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+5} + 3\beta_1 e_6 + \sum_{i=3}^{n-4}\left(\tfrac{6}{i}\beta_{i-1} - \tfrac{2}{i-1}\alpha_{i-2}\right)e_{i+4} =\\
&= \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+5} + 3\beta_1 e_6 + \sum_{i=2}^{n-5}\left(\tfrac{6}{i+1}\beta_i - \tfrac{2}{i}\alpha_{i-1}\right)e_{i+5} =\\
&= \tfrac{3}{2}\beta_1 e_6 + \sum_{i=2}^{n-5}\tfrac{3}{i+1}\beta_i e_{i+5} + 3\beta_1 e_6 + \sum_{i=2}^{n-5}\left(\tfrac{6}{i+1}\beta_i - \tfrac{2}{i}\alpha_{i-1}\right)e_{i+5} =\\
&= \tfrac{9}{2}\beta_1 e_6 + \sum_{i=2}^{n-5}\left(\tfrac{9}{i+1}\beta_i - \tfrac{2}{i}\alpha_{i-1}\right)e_{i+5} =\\
&= \tfrac{9}{2}\beta_1 e_6 + \sum_{i=1}^{n-6}\left(\tfrac{9}{i+2}\beta_{i+1} - \tfrac{2}{i+1}\alpha_i\right)e_{i+6}.
\end{aligned}
$$

比较 $D(e_7)$ 的两个不同表达式，我们得到 $\beta_1 = 0$ an d

$$\beta_k = \tfrac{4(k+1)(k+8)}{9k(k+3)}\alpha_{k-1},\ \ 2\le k\le n-5;\ \text{i.e.,}$$

$$
\begin{aligned}
D(e_2) &= \sum_{i=2}^{n-5} \tfrac{4(i+1)(i+8)}{9i(i+3)}\alpha_{i-1}e_i + \sum_{j=n-4}^{n} \beta_j e_j;\\
D(e_3) &= \sum_{i=3}^{n-4} \tfrac{(i+1)(i+22)}{6(i-1)(i+2)}\alpha_{i-2}e_i + \left(\tfrac{3(n-2)}{2(n-3)}\beta_{n-4} - \tfrac{n-2}{2(n-4)}\alpha_{n-5}\right)e_{n-3} + \sum_{j=n-2}^{n} \gamma_j e_j;\\
D(e_5) &= \sum_{i=1}^{n-6} \tfrac{10(i+6)}{3(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+4} + \left(\tfrac{2}{n-4}\alpha_{n-5} - \tfrac{3}{n-3}\beta_{n-4}\right)e_{n-1} + \left(\tfrac{2}{n-3}\alpha_{n-4} - \tfrac{3}{n-2}\beta_{n-3}\right)e_n;\\
D(e_6) &= \sum_{i=1}^{n-6} \tfrac{8(i+9)}{3(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+5} + \tfrac{6}{n-3}\beta_{n-4}e_n.
\end{aligned}
$$

接下来，我们得到 $D(e_8)$ 的两个表达式：

$$
\begin{aligned}
D(e_8) &= 12D(e_1 \diamond e_5) = 12\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_5 + 12e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n-6}\tfrac{10(i+6)}{3(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+4} + \right.\\
&\quad \left. + \left(\tfrac{2\alpha_{n-5}}{n-4} - \tfrac{3\beta_{n-4}}{n-3}\right)e_{n-1} + \left(\tfrac{2\alpha_{n-4}}{n-3} - \tfrac{3\beta_{n-3}}{n-2}\right)e_n\right) =\\
&= \sum_{i=1}^{n-7}\tfrac{2}{i+1}\alpha_i e_{i+7} + \sum_{i=1}^{n-7}\tfrac{20(i+6)}{(i+1)(i+4)(i+5)}\alpha_i e_{i+7} = \sum_{i=1}^{n-7}\tfrac{2(i^2+19i+80)}{(i+1)(i+4)(i+5)}\alpha_i e_{i+7};\\
D(e_8) &= 16D(e_3 \diamond e_3) = 16\left(\sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{(i+1)(i+22)}{6(i-1)(i+2)}\alpha_{i-2}e_i + \right.\\
&\quad \left. + \left(\tfrac{3(n-2)}{2(n-3)}\beta_{n-4} - \tfrac{n-2}{2(n-4)}\alpha_{n-5}\right)e_{n-3} + \sum_{j=n-2}^{n}\gamma_j e_j\right)\diamond e_3 +\\
&\quad +16e_3 \diamond \left(\sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{(i+1)(i+22)}{6(i-1)(i+2)}\alpha_{i-2}e_i + \right.\\
&\quad \left. + \left(\tfrac{3(n-2)}{2(n-3)}\beta_{n-4} - \tfrac{n-2}{2(n-4)}\alpha_{n-5}\right)e_{n-3} + \sum_{j=n-2}^{n}\gamma_j e_j\right) =\\
&= \sum_{i=3}^{n-5}\tfrac{2(i+22)}{3(i-1)(i+2)}\alpha_{i-2}e_{i+5} + \sum_{i=3}^{n-5}\tfrac{2(i+22)}{3(i-1)(i+2)}\alpha_{i-2}e_{i+5}\\
&= \sum_{i=1}^{n-7}\tfrac{4(i+24)}{3(i+1)(i+4)}\alpha_i e_{i+7}.
\end{aligned}
$$

比较 $D(e_8)$ 的现有表达式，我们得到 $\alpha_k = 0$，对于 $2 \le k \le n-7$，可得

$$
\begin{aligned}
D(e_1) &= \alpha_1 e_1 + \sum_{j=n-6}^{n}\alpha_j e_j;\\
D(e_2) &= \tfrac{4}{3}\alpha_1 e_2 + \tfrac{4(n-4)(n+3)}{9(n-2)(n-5)}\alpha_{n-6}e_{n-5} + \sum_{j=n-4}^{n}\beta_j e_j;\\
D(e_3) &= \tfrac{5}{3}\alpha_1 e_3 + \tfrac{(n-3)(n+18)}{6(n-2)(n-5)}\alpha_{n-6}e_{n-4} + \left(\tfrac{3(n-2)}{2(n-3)}\beta_{n-4} - \tfrac{n-2}{2(n-4)}\alpha_{n-5}\right)e_{n-3} + \sum_{j=n-2}^{n}\gamma_j e_j;\\
D(e_4) &= 2\alpha_1 e_4 + \tfrac{4}{n-5}\alpha_{n-6}e_{n-3} + \tfrac{4}{n-4}\alpha_{n-5}e_{n-2} + \tfrac{4}{n-3}\alpha_{n-4}e_{n-1} + \tfrac{4}{n-2}\alpha_{n-3}e_n;\\
D(e_5) &= \tfrac{7}{3}\alpha_1 e_5 + \tfrac{10n\alpha_{n-6}}{3(n-2)(n-5)}e_{n-2} + \left(\tfrac{2\alpha_{n-5}}{n-4} - \tfrac{3\beta_{n-4}}{n-3}\right)e_{n-1} + \left(\tfrac{2\alpha_{n-4}}{n-3} - \tfrac{3\beta_{n-3}}{n-2}\right)e_n;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D(e_6) &= \tfrac{8}{3}\alpha_1 e_6 + \tfrac{8(n+3)}{3(n-2)(n-5)}\alpha_{n-6}e_{n-1} + \tfrac{6}{n-3}\beta_{n-4}e_n;\\
D(e_7) &= 3\alpha_1 e_7 + \tfrac{2(n+8)}{(n-2)(n-5)}\alpha_{n-6}e_n;\\
D(e_8) &= \tfrac{10}{3}\alpha_1 e_8.
\end{aligned}$$

此外，利用归纳法，我们可以证明 $D(e_k) = \frac{k+2}{3}\alpha_1 e_k$，对于$8 \le k \le n.$，为此，我们来考察

$$\begin{aligned}
D(e_{k+1}) &= 2(k-1)D(e_1 \diamond e_{k-2}) = 2(k-1)\big(D(e_1)\diamond e_{k-2} + e_1 \diamond D(e_{k-2})\big) =\\
&= 2(k-1)\left(\left(\alpha_1 e_1 + \sum_{j=n-6}^{n}\alpha_j e_j\right)\diamond e_{k-2} + e_1 \diamond \left(\tfrac{k}{3}\alpha_1 e_{k-2}\right)\right) = \tfrac{k+3}{3}\alpha_1 e_{k+1}.
\end{aligned}$$

综合所有已获得的结果，我们可以看到 $D$ 是映射$\{\varphi, \phi_i, \psi_j, \pi_k\}_{0\le i\le 6}^{0\le k\le 2}$ 的线性组合； $0\le j\le 4$ .

□

**推论52**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^1, -1, -1)\big) = \langle\varphi\rangle$，其中 $\varphi(e_i) = (i+2)\, e_i$.

### 4.5 IDD($K_n^\times$，0，−2的导子

**命题53**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_2^0,\ 0,\ -2)\big) = \big\langle \varphi_i,\ \phi_j\big\rangle_{0\le i\le 2}^{1\le j\le 2}$，其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i\ (e_0) = e_i,\ \varphi_i\ (e_2) = 2\delta_{0,i}e_2$ | $0 \le i \le 2$ |
| $\phi_j$ | $\phi_j(e_1) = e_j$ | $1 \le j \le 2$ |

**命题54.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_3^0,\ 0,\ -2)\big) = \big\langle \varphi_i,\ \phi_j\big\rangle_{0\le i\le 3}^{1\le j\le 3}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_0) = e_3$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_0) = e_2$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_0) = 3e_1,\quad \varphi_1(e_2) = 4e_3$ |
| $\varphi_0$ | $\varphi_0(e_0) = e_0,\quad \varphi_0(e_2) = 2e_2,\quad \varphi_0(e_3) = e_3$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_1) = e_3$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_1) = e_2$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_1) = e_1,\quad \phi_1(e_3) = e_3$ |

**定理 55**。 如果 $4 \le n < \infty$，那么 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0、\ 0、\ -2)\big) = \big\langle \varphi、\ \phi_i、\ \psi_j、\ \pi_k\big\rangle_{0\le i\le 3}^{0\le j\le 1}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | $\varphi(e_i) = (i+2)\, e_i,\quad 0 \le i \le n$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_0) = (n-1)(n^2-4)e_{n-3},\ \phi_3(e_1) = n^2(n-1)e_{n-2},$<br>$\phi_3(e_2) = (n+2)(n^2-3n+4)e_{n-1},\ \phi_3(e_3) = (n+1)(n^2-2n+4)e_n$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_0) = n(n-1)e_{n-2},\quad \phi_2(e_2) = (n^2-n+2)e_n$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_0) = e_{n-1}$ |
| $\phi_0$ | $\phi_0(e_0) = e_n$ |
| $\psi_1$ | $\psi_1(e_1) = e_{n-1}$ |

| $\psi_0$ | $\psi_0(e_1) = e_n$ |
|---|---|

$_n$ $_n$证明。 设 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^0、\ 0、\ -2)\big)$, 则 $D(e_0) = \sum \alpha_i e_i$ 以及 $D(e_1) = \sum \beta_i e_i$. 首先, $_{i=0}$ $_{i=0}$

$$\begin{aligned}
D(e_2) &= 2D(e_0 \diamond e_0) = 2\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_0 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i e_{i+2} + \sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{2}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2} = \sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{i^2+3i+4}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2}; \\
D(e_3) &= 6D(e_0 \diamond e_1) = 6\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_1 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-3}\alpha_i e_{i+3} + \sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\beta_i e_{i+2} = 3\beta_0 e_2 + \sum_{i=0}^{n-3}\left(\alpha_i + \tfrac{6}{(i+2)(i+3)}\beta_{i+1}\right)e_{i+3}; \\
D(e_3) &= 2D(e_1 \diamond e_0) = 2\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_0 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}\beta_i e_{i+2} + \sum_{i=0}^{n-3}\tfrac{2}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+3} = \beta_0 e_2 + \sum_{i=0}^{n-3}\left(\beta_{i+1} + \tfrac{2}{(i+1)(i+2)}\alpha_i\right)e_{i+3};
\end{aligned}$$

这立即给出 $\beta_0 = 0$ 以及 $\beta_k = \frac{(k+2\ ^2\ )()}{k\ k+4}\underline{\alpha_{k-1}}$ 对于 $2 \le k \le n-2$, 即,

$$\begin{aligned}
D(e_1) &= \beta_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-2}\tfrac{(i+2)^2}{i(i+4)}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n \text{ and} \\
D(e_3) &= (\alpha_0 + \beta_1)\, e_3 + \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{(i+4)(i^2+4i+7)}{(i+1)(i+2)(i+5)}\alpha_i e_{i+3}.
\end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned}
D(e_4) &= 12D(e_0 \diamond e_2) = 12\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_2 + e_0 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{i^2+3i+4}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2}\right)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-4}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{12(i^2+3i+4)}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\alpha_i e_{i+4} = \sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{i^4+10i^3+47i^2+86i+72}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}\alpha_i e_{i+4}; \\
D(e_4) &= 2D(e_2 \diamond e_0) = 2\left(\left(\sum_{i=0}^{n-2}\tfrac{i^2+3i+4}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+2}\right)\diamond e_0 + e_2 \diamond \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{i^2+3i+4}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{2}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+4} = \sum_{i=0}^{n-4}\tfrac{i^2+3i+6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+4};
\end{aligned}$$

由此立即得到 $\alpha_k = 0$, 对于 $1 \le k \le n-4$, 即,

$$\begin{aligned}
D(e_0) &= \alpha_0 e_0 + \alpha_{n-3}e_{n-3} + \alpha_{n-2}e_{n-2} + \alpha_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n; \\
D(e_1) &= \beta_1 e_1 + \tfrac{n^2}{n^2-4}\alpha_{n-3}e_{n-2} + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n; \\
D(e_2) &= 2\alpha_0 e_2 + \tfrac{n^2-3n+4}{(n-1)(n-2)}\alpha_{n-3}e_{n-1} + \tfrac{n^2-n+2}{n(n-1)}\alpha_{n-2}e_n; \\
D(e_3) &= (\alpha_0 + \beta_1)\, e_3 + \tfrac{(n+1)(n^2-2n+4)}{(n-1)(n^2-4)}\alpha_{n-3}e_n;
\end{aligned}$$

$$D(e_4) \;=\; 3\alpha_0 e_4.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} D(e_4) \;&=\; 6D(e_1\diamond e_1) \;=\; 6\left(\left(\beta_1 e_1+\tfrac{n^2\alpha_{n-3}}{n^2-4}e_{n-2}+\sum_{i=n-1}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_1+\right.\\ &\left.+e_1\diamond\left(\beta_1 e_1+\tfrac{n^2\alpha_{n-3}}{n^2-4}e_{n-2}+\sum_{i=n-1}^{n}\beta_i e_i\right)\right) \;=\; 2\beta_1 e_4; \end{aligned}$$

即, $\beta_1 =\frac{3}{2}\alpha_0$. 于是我们得到

$$\begin{aligned} D(e_1) \;&=\; \tfrac{3}{2}\alpha_0 e_1+\tfrac{n^2}{n^2-4}\alpha_{n-3}e_{n-2}+\beta_{n-1}e_{n-1}+\beta_n e_n;\\ D(e_3) \;&=\; \tfrac{5}{2}\alpha_0 e_3+\tfrac{(n+1)(n^2-2n+4)}{(n-1)(n^2-4)}\alpha_{n-3}e_n. \end{aligned}$$

此外，利用归纳法，我们可以证明 $D(e_k) \;=\; \frac{k+2}{2}\alpha_0 e_k$，对于$4\le k\le n$. 为此，~~—~~我们考虑

$$\begin{aligned} D(e_{k+2}) \;&=\; 2D(e_k\diamond e_0) \;=\; 2\big(D(e_k)\diamond e_0+e_k\diamond D(e_0)\big) \;=\\ &=\; 2\left(\tfrac{k+2}{2}\alpha_0 e_k\right)\diamond e_0+e_k\diamond\left(\alpha_0 e_0+\sum_{i=n-3}^{n}\alpha_i e_i\right) \;=\; \tfrac{k+4}{4}\alpha_0 e_{k+2}. \end{aligned}$$

结合所有已得到的结果，我们看到 $D$ 是映射$\{\varphi,\phi_i,\psi_j\}_{0\le i\le 3;\ 0\le j\le 1}$的线性组合

□

**推论56.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_\infty^0,\ 0,\ -2)\big)=\big\langle\varphi\big\rangle$，其中 $\varphi(e_i)=(i+2)\ e_i$.

**命题57.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_4^1,\ 0,\ -2)\big)=\big\langle\varphi_i,\ \ \phi_j,\ \ \psi_j\big\rangle_{1\le i\le 4}^{2\le j\le 4}$，其中

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi_i$ | $\varphi_i(e_k)=\delta_{1,k}e_i+2\delta_{1,i}\delta_{4,k}e_4$ | $1\le i\le 4$ |
| $\phi_j$ | $\phi_j(e_2)=e_j$ | $2\le j\le 4$ |
| $\psi_j$ | $\psi_j(e_3)=e_j$ | $2\le j\le 4$ |

**命题58**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_5^1,0,-2)\big)=\big\langle\varphi_i,\phi_j,\psi_k\big\rangle_{1\le i\le 5}^{3\le k\le 5}$; $2\le j\le 5$, 其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_5$ | $\varphi_5(e_1)=e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_1)=e_4$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_1)=e_3$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1)=2e_2,\quad \varphi_2(e_4)=3e_5$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1)=e_1,\quad \varphi_1(e_4)=2e_4,\quad \varphi_1(e_5)=e_5$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2)=e_5$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_2)=e_4$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_2)=e_3$ |

| | |
|---|---|
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_2)=e_2,\quad \varphi_2(e_5)=e_5$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3)=e_5$ |
| $\psi_4$ | $\psi_4(e_3)=e_4$ |
| $\psi_3$ | $\psi_3(e_3)=e_3$ |

**命题59**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_6^1,\ 0,\ -2)\big)=\big\langle \varphi_i,\ \ \phi_j,\ \ \psi_k\big\rangle_{1\le i\le 6}^{4\le k\le 6}$；$_{2\le j\le 6}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_6$ | $\varphi_6(e_1)=e_6$ |
| $\varphi_5$ | $\varphi_5(e_1)=e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_1)=e_4$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_1)=10e_3,\quad \varphi_3(e_4)=13e_6$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1)=4e_2,\quad \varphi_2(e_2)=5e_3,\quad \varphi_2(e_4)=6e_5,\quad \varphi_2(e_5)=7e_6$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1)=e_1,\quad \varphi_1(e_3)=-e_3,\quad \varphi_1(e_4)=2e_4,\quad \varphi_1(e_5)=e_5$ |
| $\phi_6$ | $\phi_6(e_2)=e_6$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2)=e_5$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_2)=e_4$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_2)=e_3$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_2)=e_2,\quad \phi_2(e_3)=2e_3,\quad \phi_2(e_5)=e_5,\quad \phi_2(e_6)=2e_6$ |
| $\psi_6$ | $\psi_6(e_3)=e_6$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3)=e_5$ |
| $\psi_4$ | $\psi_4(e_3)=e_4$ |

**命题60.** $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_7^1,\ 0,\ -2)\big)=\big\langle \varphi_i,\ \ \phi_j,\ \ \psi_k\big\rangle_{1\le i\le 7}^{5\le k\le 7}$；$_{5\le j\le 7}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi_7$ | $\varphi_7(e_1)=e_7$ |
| $\varphi_6$ | $\varphi_6(e_1)=e_6$ |
| $\varphi_5$ | $\varphi_5(e_1)=e_5$ |
| $\varphi_4$ | $\varphi_4(e_1)=5e_4,\quad \varphi_4(e_4)=6e_7$ |
| $\varphi_3$ | $\varphi_3(e_1)=30e_3,\quad \varphi_3(e_2)=35e_4,\quad \varphi_3(e_4)=39e_6,\quad \varphi_3(e_5)=44e_7$ |
| $\varphi_2$ | $\varphi_2(e_1)=20e_2,\quad \varphi_2(e_2)=25e_3,\quad \varphi_2(e_3)=30e_4,$<br>$\varphi_2(e_4)=30e_5,\quad \varphi_2(e_5)=28e_6,\quad \varphi_2(e_6)=40e_7$ |
| $\varphi_1$ | $\varphi_1(e_1)=3e_1,\quad \varphi_1(e_2)=4e_2,\quad \varphi_1(e_3)=5e_3,$<br>$\varphi_1(e_4)=6e_4,\quad \varphi_1(e_5)=7e_5,\quad \varphi_1(e_6)=8e_6,\quad \varphi_1(e_7)=9e_7$ |
| $\phi_7$ | $\phi_7(e_2)=e_7$ |
| $\phi_6$ | $\phi_6(e_2)=e_6$ |
| $\phi_5$ | $\phi_5(e_2)=e_5$ |
| $\psi_7$ | $\psi_7(e_3)=e_7$ |
| $\psi_6$ | $\psi_6(e_3)=e_6$ |
| $\psi_5$ | $\psi_5(e_3)=e_5$ |

**定理61**。 若 $8\le n<\infty$，则 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K_n^1,0,-2)\big)=\big\langle \varphi,\phi_i,\psi_j,\pi_k\big\rangle_{,0\le i\le 4}^{0\le j\quad k\le 2}$，其中

| | |
|---|---|
| $\varphi$ | $\varphi(e_i) = (i+2)\,e_i, \quad 1 \le i \le n$ |
| $\phi_4$ | $\phi_4(e_1) = (n-3)(n^2-4)e_{n-4},\ \phi_4(e_2) = n(n-1)(n-2)e_{n-3},$ $\phi_4(e_4) = (n+2)(n^2-5n+12)e_{n-1},\ \phi_4(e_5) = (n+1)(n^2-4n+12)e_n$ |
| $\phi_3$ | $\phi_3(e_1) = (n-1)\ (n-2)\ e_{n-3}, \quad \phi_3(e_4) = (n^2-3n+8)\ e_n$ |
| $\phi_2$ | $\phi_2(e_1) = e_{n-2}$ |
| $\phi_1$ | $\phi_1(e_1) = e_{n-1}$ |
| $\phi_0$ | $\phi_0(e_1) = e_n$ |
| $\psi_2$ | $\psi_2(e_2) = e_{n-2}$ |
| $\psi_1$ | $\psi_1(e_2) = e_{n-1}$ |
| $\psi_0$ | $\psi_0(e_2) = e_n$ |
| $\pi_2$ | $\pi_2(e_3) = e_{n-2}$ |
| $\pi_1$ | $\pi_1(e_3) = e_{n-1}$ |
| $\pi_0$ | $\pi_0(e_3) = e_n$ |

证明。令 $D \in \mathfrak{Der}\big(\mathbf{IDD}(K_n^1,\mathbf{0},-2)\big)$, 那么我们可以说

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \ D(e_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \text{ and } D(e_3) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i.$$

按照上述思路，我们得到 $D(e_4)$ 和 $D(e_5)$。

$$\begin{aligned}
D(e_4) &= 6D(e_1 \diamond e_1) = 6\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_1 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-3}\alpha_i e_{i+3} + \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+3} = \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{i^2+3i+8}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+3};\\
D(e_5) &= 12D(e_1 \diamond e_2) = 12\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_2 + e_1 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-4}\alpha_i e_{i+4} + \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{12}{(i+1)(i+2)}\beta_i e_{i+3} = 2\beta_1 e_4 + \sum_{i=1}^{n-4}\left(\alpha_i + \tfrac{12}{(i+2)(i+3)}\beta_{i+1}\right)e_{i+4};\\
D(e_5) &= 6D(e_2 \diamond e_1) = 6\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)\diamond e_1 + e_2 \diamond \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-3}\beta_i e_{i+3} + \sum_{i=1}^{n-4}\tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+4} = \beta_1 e_4 + \sum_{i=1}^{n-4}\left(\beta_{i+1} + \tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i\right)e_{i+4}.
\end{aligned}$$

比较 $D(e_5)$，的两个表达式，我们得到

$$\beta_1 = 0;\ \ \beta_k = \tfrac{(k-2)(k+2)(k+3)}{k(k^2+3n-10)}\alpha_{k-1},\ 3 \le k \le n-3; \text{ i.e.,}$$

$$\begin{aligned}
D(e_2) &= \beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-3}\tfrac{(i-2)(i+2)(i+3)}{i(i^2+3i-10)}\alpha_{i-1}e_i + \beta_{n-2}e_{n-2} + \beta_{n-1}e_{n-1} + \beta_n e_n;\\
D(e_5) &= (\alpha_1+\beta_2)\,e_5 + \sum_{i=2}^{n-4}\tfrac{(i+5)(i^2+4i+12)}{(i+1)(i+2)(i+6)}\alpha_i e_{i+4}.
\end{aligned}$$

接下来，我们找出 $D(e_6)$。的三个不同表达式。

$$\begin{aligned}
D(e_6) &= 20D(e_1\diamond e_3) = 20\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\diamond e_3 + e_1\diamond\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-5}\alpha_i e_{i+5} + \sum_{i=1}^{n-3}\tfrac{20}{(i+1)(i+2)}\gamma_i e_{i+3} = \sum_{i=1}^{n-5}\alpha_i e_{i+5} + \sum_{i=-1}^{n-5}\tfrac{20}{(i+3)(i+4)}\gamma_{i+2}e_{i+5} = \\
&= \tfrac{10}{3}\gamma_1 e_4 + \tfrac{5}{3}\gamma_2 e_5 + \sum_{i=1}^{n-5}\left(\alpha_i + \tfrac{20}{(i+3)(i+4)}\gamma_{i+2}\right)e_{i+5}; \\
D(e_6) &= 6D(e_3\diamond e_1) = 6\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i\right)\diamond e_1 + e_3\diamond\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-3}\gamma_i e_{i+3} + \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+5} = \sum_{i=-1}^{n-5}\gamma_{i+2}e_{i+5} + \sum_{i=1}^{n-5}\tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i e_{i+5} = \\
&= \gamma_1 e_4 + \gamma_2 e_5 + \sum_{i=1}^{n-5}\left(\gamma_{i+2} + \tfrac{6}{(i+1)(i+2)}\alpha_i\right)e_{i+5}; \\
D(e_6) &= 12D(e_2\diamond e_2) = 12\big(D(e_2)\diamond e_2 + e_2\diamond D(e_2)\big) = \\
&= 12\left(\beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-3}\tfrac{(i-2)(i+2)(i+3)}{i(i^2+3i-10)}\alpha_{i-1}e_i + \sum_{j=n-2}^{n}\beta_j e_j\right)\diamond e_2 + \\
&\quad +12e_2\diamond\left(\beta_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n-3}\tfrac{(i-2)(i+2)(i+3)}{i(i^2+3i-10)}\alpha_{i-1}e_i + \sum_{j=n-2}^{n}\beta_j e_j\right) = \\
&= \beta_2 e_6 + \sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{(i-2)(i+2)(i+3)}{i(i^2+3i-10)}\alpha_{i-1}e_{i+4} + \beta_2 e_6 + \sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{12(i-2)(i+3)}{i(i+1)(i^2+3i-10)}\alpha_{i-1}e_{i+4} = \\
&= 2\beta_2 e_6 + \sum_{i=3}^{n-4}\tfrac{(i+3)(i^2+3i+14)}{i(i+1)(i+5)}\alpha_{i-1}e_{i+4} = 2\beta_2 e_6 + \sum_{i=7}^{n}\tfrac{(i-1)(i^2-5i+18)}{(i-4)(i-3)(i+1)}\alpha_{i-5}e_i.
\end{aligned}$$

比较上述表达式，可得

$$\begin{aligned}
&\alpha_k = 0, && 3\le k\le n-5;\\
&\gamma_k = \tfrac{(k+1)(k+2)^2}{k(k-1)(k+6)}\alpha_{k-2}, && 4\le k\le n-3.\\
&\gamma_1 = 0;\ \ \gamma_2 = 0;\ \ \gamma_3 = -\alpha_1 + 2\beta_2;
\end{aligned}$$

由最后一个式子可得

$$\begin{aligned}
D(e_1) &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \sum_{j=n-4}^{n}\alpha_j e_j;\\
D(e_2) &= \beta_2 e_2 + \tfrac{5}{4}\alpha_2 e_3 + \tfrac{n(n-1)}{(n+2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-3} + \sum_{j=n-2}^{n}\beta_j e_j;\\
D(e_3) &= (-\alpha_1 + 2\beta_2)\,e_3 + \tfrac{3}{2}\alpha_2 e_4 + \sum_{j=n-2}^{n}\gamma_j e_j;\\
D(e_4) &= 2\alpha_1 e_4 + \tfrac{3}{2}\alpha_2 e_5 + \tfrac{n^2-5n+12}{(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-1} + \tfrac{n^2-3n+8}{(n-1)(n-2)}\alpha_{n-3}e_n;\\
D(e_5) &= (\alpha_1 + \beta_2)\,e_5 + \tfrac{7}{4}\alpha_2 e_6 + \tfrac{(n+1)(n^2-4n+12)}{(n+2)(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_n;\\
D(e_6) &= 2\beta_2 e_6 + 2\alpha_2 e_7;
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
D(e_7) &=& 30D(e_1\diamond e_4) \;=\; 30\left(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\sum\limits_{j=n-4}^{n}\alpha_je_j\right)\diamond e_4+\\
&&+30e_1\diamond\left(2\alpha_1e_4+\frac{3}{2}\alpha_2e_5+\frac{n^2-5n+12}{(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-1}+\frac{n^2-3n+8}{(n-1)(n-2)}\alpha_{n-3}e_n\right) \;=\\
&=& \alpha_1e_7+\alpha_2e_8+2\alpha_1e_7+\frac{15}{14}\alpha_2e_8 \;=\; 3\alpha_1e_7+\frac{29}{14}\alpha_2e_8;\\
D(e_7) &=& 6D(e_4\diamond e_1) \;=\; 6\big(D(e_4)\diamond e_1+e_4\diamond D(e_1)\big) \;=\\
&=& 6\left(2\alpha_1e_4+\frac{3}{2}\alpha_2e_5+\frac{n^2-5n+12}{(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-1}+\frac{n^2-3n+8}{(n-1)(n-2)}\alpha_{n-3}e_n\right)\diamond e_1+\\
&&+6e_4\diamond\left(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\sum\limits_{j=n-4}^{n}\alpha_je_j\right) \;=\\
&=& 2\alpha_1e_7+\frac{3}{2}\alpha_2e_8+\alpha_1e_7+\frac{1}{2}\alpha_2e_8 \;=\; 3\alpha_1e_7+2\alpha_2e_8;\\
D(e_7) &=& 20D(e_2\diamond e_3) \;=\; 20\big(D(e_2)\diamond e_3+e_2\diamond D(e_3)\big) \;=\\
&=& 20\left(\beta_2e_2+\frac{5}{4}\alpha_2e_3+\frac{n(n-1)}{(n+2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-3}+\sum\limits_{j=n-2}^{n}\beta_je_j\right)\diamond e_3+\\
&&+20e_2\diamond\left(\left(-\alpha_1+2\beta_2\right)e_3+\frac{3}{2}\alpha_2e_4+\sum\limits_{j=n-2}^{n}\gamma_je_j\right) \;=\\
&=& \beta_2e_7+\frac{5}{4}\alpha_2e_8+(2\beta_2-\alpha_1)e_7+\alpha_2e_8 \;=\; (3\beta_2-\alpha_1)e_7+\frac{9}{4}\alpha_2e_8.
\end{array}$$

由此可得 $\alpha_2=0$ 和 $\beta_2=\frac{4}{3}\alpha_1$，即,

$$\begin{array}{rcl}
D(e_1) &=& \alpha_1e_1+\sum\limits_{j=n-4}^{n}\alpha_je_j;\\
D(e_2) &=& \frac{4}{3}\alpha_1e_2+\frac{n(n-1)}{(n+2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-3}+\sum\limits_{j=n-2}^{n}\beta_je_j;\\
D(e_3) &=& \frac{5}{3}\alpha_1e_3+\sum\limits_{j=n-2}^{n}\gamma_je_j;\\
D(e_4) &=& 2\alpha_1e_4+\frac{n^2-5n+12}{(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_{n-1}+\frac{n^2-3n+8}{(n-1)(n-2)}\alpha_{n-3}e_n;\\
D(e_5) &=& \frac{7}{3}\alpha_1e_5+\frac{(n+1)(n^2-4n+12)}{(n+2)(n-2)(n-3)}\alpha_{n-4}e_n;\\
D(e_6) &=& \frac{8}{3}\alpha_1e_6;\\
D(e_7) &=& 3\alpha_1e_7.
\end{array}$$

此外，利用归纳法，我们可以证明 $D(e_k) \;=\; \frac{k+2}{3}\alpha_1e_k$，对于$k\geq 8.$，为此,我们考虑

$$\begin{array}{rcl}
D(e_{k+1}) &=& k(k-1)D(e_1\diamond e_{k-2}) \;=\; k(k-1)\big(D(e_1)\diamond e_{k-2}+e_1\diamond D(e_{k-2})\big) \;=\\
&=& k(k-1)\left(\left(\alpha_1e_1+\sum\limits_{j=n-4}^{n}\alpha_je_j\right)\diamond e_{k-2}+e_1\diamond\left(\frac{k}{3}\alpha_1e_{k-2}\right)\right) \;=\; \frac{k+3}{3}\alpha_1e_{k+1}.
\end{array}$$

综合所有得到的结果，我们看到 $D$ 是映射的线性组合$\{\varphi,\phi_i,\psi_j,\pi_k\}_{0\leq i\leq 4;\ 0\leq j\leq 2;\quad 0\leq k\leq 2}$.

□

**推论62**。 $\mathfrak{Der}\big(\mathrm{IDD}(K^1_\infty,0,-2)\big)=\langle\varphi\rangle$，其中 $\varphi(e_i)=(i+2)\,e_i$.

## 参考文献

[1] K. Abdurasulov、J. Adashev 和 F. Toshtemirova。零丝状结合代数上的 $\sigma$-匹配与可互换结构。arXiv:2603.07362。[2] A. Albert。非结合代数。《数学年刊》，43：685–723，1942。[3] S. Alsaody 和 P. Gille。八元数代数的拟同构、 $g_2$-扭子与三重性。《数学进展》，343：864–909，2019。[4] I. Arzhantsev、S. Gaifullin 和 V. Lopatkin。关于多项式环导子代数的有限维齐次李代数。《数学学报》，89：425–441，2025。[5] Sh. Ayupov、A. Elduque 和 K. Kudaybergenov。凯莱代数的局部导子与自同构。《纯粹与应用代数杂志》，227(5)：107277，2023。[6] J. Bell 和 L. Buzaglo。交换与非交换代数导子的包络代数。《国际数学研究通知》，2025(17)：rnaf265，2025。[7] G. Bergman。原幂零代数的同态像。《伊利诺伊数学杂志》，55(3)：719–748，2011。[8] L. Buzaglo。Witt代数子代数的导子、扩张与刚性。《代数杂志》，647：230–276，2024。[9] N. Cantarini 和 V. Kac。线性紧单刚超代数的分类。《国际数学研究通知》，2010(17)：3341–3393，2010。[10] N. Daukeyeva、M. Eraliyeva 和 F. Toshtemirova。零丝状结合代数上的转置 $\delta$-Poisson 代数结构。《数学通讯》，34(1)：1，2026。[11] A. Dzhumadildaev。由 Rota-Baxter 算子构造的代数。arXiv:2501.11534。[12] V. Filippov。一类单非结合代数。《数学札记》，45(1-2)：68–71，1989。[13] A. Jones 和 W. Woods。单Artin环上的滤化斜导子。《以色列数学杂志》，268(1)：365–393，2025。[14] I. L. Kantor。Jordan代数的某些推广 (俄文)。《向量与张量分析研讨会论文集及其在几何、力学和物理学中的应用》，16：407–499，1972。[15] I. Karimjanov、I. Kaygorodov 和 M. Ladra。零丝状结合代数上的 Rota型算子。《线性与多重线性代数》，68(1)：205–219，2020。[16] I. Kaygorodov。 $\delta$-Novikov 与 $\delta$-Novikov–Poisson 代数。arXiv:2505.08043。[17] I. Kaygorodov。非结合代数结构：分类与结构。《数学通讯》，32(3)：1–62，2024。

[18] I. Kaygorodov、A. Lopatin 和 Y. Popov。二维代数的保守代数。《线性代数及其应用》，486：255–274，2015。[19] I. Kaygorodov、S. Lopes 和 P. Páez-Guillán。零丝结合代数的非结合中心扩张。《代数杂志》，560：1190–1210，2020。[20] M. Khrypchenko。偏旗关联代数的同构与导子。《国际代数与计算杂志》，32(1)：193–209，2022。[21] A. Malcev。关于非结合环的一种表示（（俄文））。《数学科学进展》（新系列），47(1)：181–185，1952。[22] S. Pchelintsev。特征不等于 3 的替代代数的拟同构。《数学学报》，84(5)：1002–1015，2020。[23] Y. Popov。保守代数与超代数：综述。《数学通讯》，28(2)：231–251，2020。[24] B. Sartayev 和 P. Kolesnikov。非交换诺维科夫代数。《欧洲数学杂志》，9(2)：35，2023。[25] V. Tkachev。与交换结合代数自同构相关的内拟同构。《数学通讯》，32(2)：153–184，2024。