arXiv:2603.20417v1 [math.RA] 20 Mar 2026

某些 ω-李代数的几何与分类

YIN CHEN、SHAN REN 和 Runxuan Zhang

摘要。我们利用群作用和轨道-稳定子方法，研究域 $\mathbb{K}$ 上特征为 $\neq 2$ 的有限维 ω-李代数同构类的几何，并建立同构类集合与 ω的稳定子轨道空间之间的一一对应关系。我们还应用计算理想理论中的技术，探究 $\mathbb{K}$上所有三维 ω-李代数构成的仿射簇的几何结构，证明该簇是一个六维不可约仿射簇，也是一个完全交。作为应用，我们给出代数闭域上特征为 $\neq 2$的所有三维 ω-李代数在 ω-李代数同构意义下的完整分类。

1. 引言

设 $\mathbb{K}$ 是特征为 $\neq 2$ 的任意域，且 $(L\ [-,-])$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的有限维反对称非结合代数。设 $\omega: L \oplus L \longrightarrow \mathbb{K}$ 是 L 上的一个双线性型。若满足下式，则称三元组 $(L\ [-,-], \omega)$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的 ω-李代数：

（ω-Jacobi 恒等式） $$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y$$

对所有 $x,y,z \in L$。-李代数这一概念由 [Nur07] 提出，是李代数的一种自然推广（$\omega = 0$）。这一概念最初源于对实向量空间上对称三阶张量的研究；这些实向量空间配有黎曼度量结构，并出现在球面中的等距超曲面研究背景下，详见 [BN07]。我们的主要目标是建立一种基于群作用和轨道-稳定子的研究方法，以理解定义在 $\mathbb{K}$ 上的有限维 -李代数同构类的几何。

在过去二十年里，关于特征零域上的有限维 ω-李代数的代数结构与分类已得到广泛研究；例如，参见 [CNY23, CZ17, CRSZ26, Oub24, Oub25] 以及 [Zha21]。在这些研究中，低维 ω-李代数对于理解 ω-李代数的表示、扩张、导子和自同构发挥着不可替代的作用。例如，[CZ17 第 7] 节证明，所有非李的有限维简单复 ω-李代数都必为 3 维。值得注意的是，[Nur07 的定理 2 对 3 维实 ω-李代数进行了分类；此外，[CLZ14 的定理 2] 给出了所有 3 维复 ω-李代数的第一个分类，但相对粗略。近年来，相关的 ω-代数结构在非结合代数领域也日益受到关注；参见 [CW23, SHZC25, Zho25] 以及 [CNY26]。本文的目标之一是探究 $\mathbb{K}$ 上所有 3 维非李 ω-李代数所成仿射簇的几何结构，尤其是在 $\mathbb{K}$ 为代数闭域时，给出这些代数在 ω-代数同构意义下的完整分类。

日期：2026年3月24日。关键词和短语。 ω-李代数；群作用；格罗布纳基；
分类。2020数学主题分类。17A30；17D99；13P25。

请注意，一个 ω-李代数由三个部分组成：底层向量空间 L、括号乘积 $[-,-]$以及双线性型 ω。因此，当 L 固定时，一个ω-李代数的代数结构由 $[-,-]$ 和 ω确定。在 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 且 $\mathbb{R}$时，文献 [CLZ14、CZ17], 所给出的低维分类中，我们始终先确定括号乘积，再具体说明双线性型 ω。与以往的方法不同，本文仔细考察括号 $[-,-]$ 与型ω之间的关系，采用先确定 ω的策略。此外，我们运用群作用和轨道-稳定子的语言，来理解 ω 上固定维数的 $\mathbb{K}$-李代数同构类的几何结构。以下定理是本文的第一个主要结果。

定理 1.1。 设 ω 是域 $\mathbb{K}$ 上一个 n 维向量空间 V 上的非零斜对称双线性形式，域 $\mathbb{K}$ 的特征为 $\neq 2$，且 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 表示关于 ω，V 上所有 ω-李代数构成的仿射簇。设 G_ω 表示在 $\mathrm{GL}(V)$ 中 ω 的稳定子。那么， $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 的同构类集合与 G_ω 作用下 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 的轨道空间之间存在一一对应。

有限维李代数簇的几何结构一直是李理论和微分几何中的经典课题，与李代数的收缩理论、变形和上同调密切相关；例如参见 [GK96，第 5] 章。作为探索有限维 ω-李代数几何结构的第一步，我们关注 $\mathbb{K}$ 上所有 3 维非李 ω-李代数构成的仿射簇$\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$。本文的第二个目的是运用计算理想理论中的技术，探索 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 的几何结构。我们的方法及其类似方法已成功应用于其他非结合代数的研究（参见 [CCZ21、CZ23、CRSZ25] 和 [CQRZ26]），并启发了大量后续研究；参见 [DW24、Che25、DS25], 和 [CZ26]。第二个主要结果陈述如下。

定理 1.2。 设 ω 是域 $\mathbb{K}$ 上一个非零的斜对称双线性形式，该域的特征为 $\neq 2$，且 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 是 V 上所有 ω- 李代数构成的簇。那么 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 是一个 6 维不可约仿射簇，其对应的消失理想是一个完全交。

更有趣的是，我们观察到这个簇 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$既是几何上的完全交，也是代数上的完全交；参见注3.8。

作为定理 1.1 和 1.2的应用，本文的第三个主要结果完整地分类了代数闭域上特征为 ω 的所有 3 维非李 ω-李代数，在 $\neq 2$下按 ω-李代数同构分类。

定理 1.3。 设 $\mathbb{K}$ 是特征为 $\neq 2$ 的代数闭域，且 $L \in \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$上的一个3维非李 ω-李代数。那么

(1)L 必须同构于以下代数之一： $\{A、B、C_\alpha、D \mid \alpha \in \mathbb{K}^\times\}$，其出现在第 4 节；

(2) 所有这些 ω-李代数 (A)、(B)、(C_α) 和 (D) 彼此非同构。

注意，我们先前的工作 [CLZ14] 使用线性代数和表示论方法，对 3 维非李 ω-李代数在 $\mathbb{C}$上进行了粗略分类，但我们没有考察两个这样的代数何时同构于 ω-李代数。在这里，我们将使用一种不同的方法

利用群作用和轨道-稳定子来证明定理1.3，这也可以看作是对 [CLZ14，定理 2]的一般化和增强。

本文的组织如下。第 2 节中，我们研究域 $\mathbb{K}$ 上特征为 $\neq 2$ 的一般 n 维 ω-李代数（$n \geqslant 3$），探讨 ω-李代数中括号乘积与双线性形式之间的关系，并证明两个同构的 ω-李代数具有等价的双线性形式；参见命题 2.4。这一结果促使我们运用群作用和轨道-稳定子的语言，建立一种对 $\mathbb{K}$ 上所有 n 维非李 ω-李代数进行分类的方法。本节还包含定理 1.1 的证明。第 3 节探讨 $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ 仿射簇的几何结构，特别是给出定理 1.2 的证明。本节中的所有 ω-李代数均为 $\mathbb{K}$ 上的三维非李代数。此外，我们的证明大量依赖格罗布纳基理论；一些记号，例如 $\mathrm{LM}(\ell)$ 和 $\mathrm{LC}(\ell)$ 分别表示多项式 ℓ 的首单项式和首项系数，是计算理想理论中的标准记号；例如参见 [DK15，第 1] 章。第 4 节中，我们应用定理 1.1 和 1.2，对代数闭域上特征为 $\neq 2$ 的所有三维非李 ω-李代数进行完整分类。本节分为四个小节：前三个小节致力于找出所有此类 ω-李代数，最后一个小节完成定理 1.3 的证明。第 5 节包含两条说明，展示我们的方法可用于构造任意特征为 $\neq 2$ 的域上的新 ω-李代数。这也表明，我们的方法有望应用于有理数域或有限域上的有限维 ω-李代数分类。

本文中，$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示复数域和实数域。我们始终假设 $\mathbb{K}$ 表示特征为 $\neq 2$的任意域，但4节除外；在该节中，$\mathbb{K}$要求为代数闭域。所有向量空间和代数均为有限维，且定义在 $\mathbb{K}$上。符号 $\langle * \rangle$表示由 $*$ 生成的理想，或由 $*$张成的子空间。我们还用“grevlex”表示 $\mathbb{K}$ 上的多项式环所采用的分次反字典序单项式序，并用 $\mathbb{K}^\times$ 表示 $\mathbb{K}$的非零元素集合。

2. ω-李代数的簇

本节首先探讨 ω-李代数中括号乘积与双线性形式的一些基本性质及其关系。我们还从群作用和轨道-稳定子理论的角度提供一种方法，对所有固定维数的 ω-李代数按 ω-李代数同构分类。

注意，不存在维数1或2的非李 ω-李代数（参见 [Nur07，第 1]节）。因此，本节中我们假设 $\dim_{\mathbb{K}}(L) \geqslant 3$。先从以下简单事实开始。

命题 2.1. 若$(L\ [-,-], \omega)$是域 $\mathbb{K}$ 上的 ω-李代数，则 ω 是斜对称的。

证明. 对任意元素 $y \in L$，由于 $(L\ [-,-])$ 是斜对称的且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$，可得$[y, y] = 0$。在 (ω-Jacobi 恒等式) 中令 $z = y$，可得 $(\omega(x, y) + \omega(y, x))y + \omega(y, y)x = 0$，对所有 $x \in L$ 均成立。由于 $\dim_k(L) \geqslant 3$，我们可以取一个元素 x，使得 $\{x, y\}$ 在 $\mathbb{K}$ 上线性无关。因此 $\omega(y, y) = 0$。于是，$\omega(y_1 + y_2, y_1 + y_2) = 0$对所有 $y_1, y_2 \in L$ 均成立。展开这个等式可得 $\omega(y_1, y_2) = -\omega(y_2, y_1)$，这表明 ω 是斜对称的。□

命题 2.2. 若 ω_1和 ω_2是定义在 $(L\ [-,-])$上的两个双线性型，且 $(L\ [-,-],\omega_1)$和 $(L\ [-,-],\omega_2)$都是 ω-李代数，则 $\omega_1=\omega_2$。

证明。 任取三个元素 x，y、$z\in L$，使得 z不属于由 $\{x、\ y\}$张成的线性子空间，并考虑 ω-雅可比恒等式在 $(L\ [-,-],\omega_1)$和 $(L\ [-,-],\omega_2)$中的相应形式：

$$\begin{aligned}[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] &= \omega_1(x,y)z+\omega_1(y,z)x+\omega_1(z,x)y\\ [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] &= \omega_2(x,y)z+\omega_2(y,z)x+\omega_2(z,x)y.\end{aligned}$$

合并这两个方程可得

$$(\omega_2(x,y)-\omega_1(x,y))z=(\omega_1(y,z)-\omega_2(y,z))x+(\omega_1(z,x)-\omega_2(z,x))y.$$

由于 z 不能由 x 和 y线性表示，因此 $\omega_1(x,y)=\omega_2(x,y)$。因此，$\omega_1=\omega_2$。

□

注 2.3. 这一结果意味着，如果向量空间 L 上的括号乘积 $[-,-]$ 固定，那么至多存在一个双线性型 ω，使三元组 $(L\ [-,-],\omega)$ 成为 ω-李代数。然而，我们将看到，如果固定向量空间 L上的双线性型 ω，则可能存在多个括号乘积 $[-,-]$，使得 $(L\ [-,-],\omega)$ 是 ω-李代数。◇

回顾一下，有限维向量空间W 上的两个斜对称双线性形式 ω_1 和 ω_2 称为等价的，如果存在一个可逆线性映射$g:W\longrightarrow W$ 使得

$$\omega_1(x,y)=\omega_2(g(x),g(y)) \tag{2.1}$$

对所有$x,y\in W$都成立。这意味着 ω_1和 ω_2可以通过W中的基变换相互转化。用矩阵语言来说，如果我们固定W 的一组基，并用A_i 表示 ω_i所对应的反对称矩阵，那么

$$A_2=Q^t\cdot A_1\cdot Q \tag{2.2}$$

对某个可逆矩阵Q成立，其中Q^t 表示Q的转置。换言之，当且仅当它们的矩阵A_1 和A_2 合同，ω_1 和 ω_2 才等价。

如果存在代数同构 $g:L_1\longrightarrow L_2$，使得对所有 $x,y\in L_1$都有 $\omega_1(x,y)=\omega_2(g(x),g(y))$，则称两个 ω-李代数 $(L1,[-,-]_1,\omega_1)$ 和 $(L2,[-,-]_2,\omega_2)$ 同构；参见 [CZZZ18, 定义 1.1]。显然，我们有

命题 2.4。 设$(L_1,[-,-]_1,\omega_1)$和$(L_2,[-,-]_2,\omega_2)$是域 $\mathbb{K}$ 上两个同构的 ω-李代数。那么(1) 维数$_{\mathbb{K}}(L_1)=$维数$_{\mathbb{K}}(L_2)$；(2) ω_1 和 ω_2 等价。

这一直接结果结合命题 2.1，使我们能够给出以下步骤，以理解所有 $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$维 n 维 ω-李代数在 $\mathbb{K}$ 上的簇，并对 ω-李代数进行分类，其范围为 $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$：

(1) 我们可以首先对 $\mathbb{K}$ 上所有 $n\times n$阶反对称矩阵按合同进行分类，这等价于对 $\mathbb{K}$ 上所有 n 阶反对称双线性型按等价进行分类。这是线性代数中一个发展成熟的主题。

(2) 其次，我们需要确定这些反对称矩阵的所有合同典范形。请注意，不同的典范形对应于非同构的 ω-李代数。因此，如果 $\mathbb{K}$ 上的两个 ω-李代数对应于不同的合同典范形，那么它们在 $\mathbb{K}$ 上不可能同构。

(3) 对于每一种合同标准形，我们用 ω 表示相应的双线性型，并将 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 记为 $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ 的子簇，它由相对于 ω 的所有非李 ω-李代数结构组成。我们需要分析 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 的几何结构。

(4) 固定一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间V 以及一个斜对称双线性形式 ω。为了区分 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 中的两个元素 $(V\ [-,-],\omega)$ 和 $(V\ [-,-]',\omega)$，我们将 ω 在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的稳定子记为 G_ω，即，

$$G_\omega := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \omega(g(v),g(w)) = \omega(v,w),\ \text{for all } v,w \in V\}. \tag{2.3}$$

我们将在下文看到，群 G_ω 可以作用于 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$，这对于分类 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 中的 ω-李代数结构非常有帮助。

为实现上述过程的第一步，我们给出以下关于 上 $n \times n$ 斜对称矩阵合同分类的著名结果（定理 2.5）。为方便读者，我们附上该结果的证明，因为我们未能找到提供详细证明的合适参考文献。

我们定义

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

定理 2.5. 设 A 是一个秩为 m 的 $n \times n$ 斜对称矩阵，其元素取自 $\mathbb{K}$。那么 A 合同于

$$J_m := \mathrm{diag}\{J,\dots,J,0,\dots,0\} \tag{2.5}$$

其中 J 的个数为 m_2，零元素的个数为 $n-m$。

证明. 不妨设 $A \neq 0$。注意到A 的所有对角元均为零（因为$A^t = -A$ 且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$），因此$n \geqslant 2$。我们对 n 使用归纳法来证明这一结果。

考虑$n = 2$的情形。不妨设$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & a & a & 0 \\ - & & & \end{pmatrix}$，其中$a \in \mathbb{K}^\times$。定义$Q = \mathrm{diag}\ \{1, a^{-1}\}$。那么$Q^t \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ -a & a0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$。因此$A$合同于$J$。

设 $n > 2$。由于 $A \neq 0$，基变换使我们可以写成

$$A = \begin{pmatrix} a \cdot J & B \\ -B^t & D \end{pmatrix}$$

对于某个$a \in \mathbb{K}^\times$ 以及一个大小为$n-2$的斜对称矩阵D。定义$Q = \begin{pmatrix} I_2 & a^{-1} \cdot J & \cdot \\ & & n-2 \end{pmatrix} B\, 0\, I$。由于$J^t = -J$，可知$Q^t = \begin{pmatrix} I- & {}^{-1} \cdot & {}^{2} \cdot & 0 \\ & & & aBJ\, I_{n-2} \end{pmatrix}$. 注意$J^2 = -I_2$。因此

$$Q^t \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -a^{-1} \cdot B^t \cdot J & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot J & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & a^{-1} \cdot J \cdot B \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cdot J & B \\ 0 & D-a^{-1}\cdot B^t\cdot J\cdot B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & a^{-1}\cdot J\cdot B \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a\cdot J & 0 \\ 0 & D-a^{-1}\cdot B^t\cdot J\cdot B \end{pmatrix}.$$

这意味着A与 $\mathrm{diag}\{a\cdot J, D-a^{-1}\cdot B^t\cdot J\cdot B\}$合同。注意$D-a^{-1}\cdot B^t\cdot J\cdot B$是一个大小为$n-2$的斜对称矩阵，且其秩等于$m-2$（由于$a\neq 0$）。归纳假设表明，它与$J_{m-2}$合同。因此，$A$与$J_m$合同。□

本节其余部分将用于证明定理 1.1。

假设 $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ 并固定一个秩为 ω m 的斜对称双线性形式。为V 选择一个合适的基，根据定理 2.5，我们看到与ω 对应的斜对称矩阵合同于 J_m，其出现在（2.5）中。在经典群理论中众所周知，

$$G_\omega = \{g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid g^t\cdot J_m\cdot g = J_m\} \tag{2.6}$$

是域 m 上的秩为 $\mathbb{K}$ 的奇异辛群；例如参见 [Gec13，例 1.3。15] 或[Wan02，第 3 节。3]。此外，群$G\omega$ 还可以通过全双模视为次数为 m 的辛群与次数为 n –m 的一般线性群的粘合群；参见 [CSW21，第 2 节和例 6。4]。

给定一个元素 $g\in G\omega$ 和一个括号 $[-,-]\in \mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$，我们定义一个新的括号

$$[x,y]_g := g[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] \tag{2.7}$$

其中 x，$y\in V$。于是

引理 2.6. 新括号 $[-,-]_g$在 V 上定义了一个 ω-李代数结构。

证明。设 x,y, z $\in$V 是任意元素。由此可得 $[y,x]_g = g[g^{-1}(y),g^{-1}(x)] = -g[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = -[x,y]_g$。因此 $[-,-]_g$是斜对称的。为了证明 $[-,-]_g$满足 ω-雅可比恒等式，我们注意到

$$[[x,y]_g,z]_g = g[g^{-1}([x,y]_g), g^{-1}(z)] = g[[g^{-1}(x),g^{-1}(y)],g^{-1}(z)].$$

Thus

$$\begin{aligned} & [[x,y]_g,z]_g + [[y,z]_g,x]_g + [[z,x]_g,y]_g \\ = \; & g\Big([[g^{-1}(x),g^{-1}(y)],g^{-1}(z)] + [[g^{-1}(y),g^{-1}(z)],g^{-1}(x)] + [[g^{-1}(z),g^{-1}(x)],g^{-1}(y)]\Big) \\ = \; & g\Big(\omega(g^{-1}(x),g^{-1}(y))\cdot g^{-1}(z) + \omega(g^{-1}(y),g^{-1}(z))\cdot g^{-1}(x) + \omega(g^{-1}(z),g^{-1}(x))\cdot g^{-1}(y)\Big) \\ = \; & \omega(g^{-1}(x),g^{-1}(y))z + \omega(g^{-1}(y),g^{-1}(z))x + \omega(g^{-1}(z),g^{-1}(x))y \\ = \; & \omega(x,y)z + \omega(y,z)x + \omega(z,x)y. \end{aligned}$$

这意味着新括号 $[-,-]_g$定义了一个 ω-李代数结构于 V上。 □

此外，$G\omega$ 可以作用于由下式定义的仿射簇 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$

$$(g\cdot[-,-])(x,y) := [x,y]_g = g[g^{-1}(x),g^{-1}(y)] \tag{2.8}$$

其中 $g \in G\omega, [-,-] \in L\omega(\mathbb{K})$，且 x、$y \in V$。事实上，很明显，$[x、y]_1 = [x、y],$，这意味着 $G\omega$ 的单位元固定原始括号 $[-,-]$。对于 g、$h \in G\omega$ 中的两个元素，注意到

$$\begin{aligned}((gh)\cdot[-,-])(x,y) &= [x,y]_{gh} = (gh)([(gh)^{-1}(x),(gh)^{-1}(y)]) \\ &= g\Big(h([h^{-1}(g^{-1}(x)),h^{-1}(g^{-1}(y))])\Big) = g([g^{-1}(x),g^{-1}(y)]_h) \\ &= (g\cdot[-,-]_h)(x,y) = (g\cdot(h\cdot[-,-]))(x,y).\end{aligned}$$

因此，$(gh)\cdot[-,-] = g\cdot(h\cdot[-,-])$，正如我们所希望的那样。

我们现在可以证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。显然，只需证明在 ω-李代数中，属于 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$的两个代数同构，当且仅当它们在 $G\omega$ 在（2.8）中定义的作用下属于同一轨道。

设 $[-,-]$和 $[-,-]'$是 $L\omega(\mathbb{K})$ 中的两个 ω-李代数。若它们同构，则存在元素 $g \in G\omega$ 使得 $g[x，y]' = [g(x)，g(y)]$ 对所有 $x，y \in V$均成立。因此

$$[x,y]' = g^{-1}[g(x),g(y)] = [x,y]_{g^{-1}} = \left(g^{-1}\cdot[-,-]\right)(x,y)$$

这意味着 $[-,-]$和 $[-,-]'$属于同一轨道。反过来，设对某个 $g \in G\omega$，有 $[-,-]' = g\cdot[-,-]$。那么 $[x，y]' = (g\cdot[-,-])(x，y) = [x，y]_g = g[g^{-1}(x)，g^{-1}(y)]$。因此

$$g^{-1}[x,y]' = [g^{-1}(x),g^{-1}(y)]$$

对所有x、$y \in V$均成立。也就是说，g^{-1}是代数同构。由于$g^{-1} \in G\omega$也保持 ω，因此我们得知，$[-,-]'$ 与 $[-,-]$ 作为 ω-李代数是同构的。□

3. $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$的几何结构

本节探讨仿射簇 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$的几何结构，并证明定理1.2。设$V$表示一个定义在 $\mathbb{K}$上的3维向量空间，其基为 $\{x、y、z\}$。

为了理解仿射簇 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 上所有 ω-李代数结构V，我们设$(L\ [-,-],\omega)$是 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$中的一般元素。由定理2.5可知，所有 3×3 上的非零反对称矩阵都存在唯一的非零合同标准形：$\mathbb{K}$:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们可以将 ω 取为 L 上定义的斜对称双线性形式

$$\omega(x,y) = 1 \text{ and } \omega(x,z) = \omega(y,z) = 0.$$

因此，$\mathscr{A}_3(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$。我们可以假设

$$\begin{aligned}[x,y] &= a_1x + a_2y + a_3z \\ [x,z] &= b_1x + b_2y + b_3z \\ [y,z] &= c_1x + c_2y + c_3z\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，a_i、b_i、c_i 均为 $\mathbb{K}$中的标量。L 中括号乘积的斜对称性表明，L 的ω-代数结构可由这些标量 $\{a_i、b_i、c_i \mid i = 1、2、3\}$确定。此外，（ω-Jacobi 恒等式）使我们能够将 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 视为 9维仿射空间 $\mathbb{K}^9$ 中的一个仿射簇。

令 R := $\mathbb{K}$[x_i、y_i、z_i | i = 1、2、3] 表示 $\mathbb{K}$上的 9 个变量的多项式环，其中 x_i、y_i、z_i分别与 a_i、b_i、c_i对偶。为理解 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 的几何结构，我们需要确定 R 中的消失理想 I($\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$) 以及坐标环 R/I($\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$)。

定义 R 中的三个多项式如下：

$$\begin{aligned} f_1 &:= x_2z_1 + y_3z_1 - x_1z_2 - y_1z_3 \\ f_2 &:= x_3y_1 - x_1y_3 + x_3z_2 - x_2z_3 + 1 \\ f_3 &:= x_2y_1 - x_1y_2 - y_3z_2 + y_2z_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

an并记 $\mathfrak{p} := \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ 为 R中由这三个多项式生成的理想。

引理 3.1. $\mathfrak{p} \subseteq I(\mathscr{A}_3(\mathbb{K}))$.

证明。 只需证明 f_1, f_2, f_3 在泛型 ω-李代数 L上均为零。计算变量取自 ω-雅可比恒等式中的任意三个元素（ {x、y、z}，不一定互不相同）时，可得到以下六个关于 {a_i、b_i、c_i | i = 1、2、3}的关系：

$$\begin{aligned} a_2b_1 - a_1b_2 - b_3c_2 + b_2c_3 &= 0 \qquad -a_2b_1 + a_1b_2 + b_3c_2 - b_2c_3 = 0 \\ a_2c_1 + b_3c_1 - a_1c_2 - b_1c_3 &= 0 \qquad -a_2c_1 - b_3c_1 + a_1c_2 + b_1c_3 = 0 \\ a_3b_1 - a_1b_3 + a_3c_2 - a_2c_3 + 1 &= 0 \qquad -a_3b_1 + a_1b_3 - a_3c_2 + a_2c_3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

显然，右列的三个关系是冗余的。左列的前三个关系表明，对于 i = 1、2、3，有$f_i(L)$ = 0。因此， $\mathfrak{p} \subseteq I(\mathscr{A}_3(\mathbb{K}))$. □

命题 3.2. $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ = $V(\mathfrak{p})$.

证明。由于 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ 包含于其闭包 $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$，且后者等于 V (I($\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$))，由引理 3.1 可得 $\mathscr{A}_3$ ($\mathbb{K}$) $\subseteq \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ = V (I($\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$)) $\subseteq$ V (𝔭)。反过来，对于 V (𝔭) 中的每个点 L :=($a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$)，我们看到 f_i(L) = 0对于 i = 1、2、3。直接计算 (ω-Jacobi 恒等式) 可知，该点 L 连同引理 3.1 证明中左侧列出的三个关系，在 V 上给出一个 ω-Lie 代数结构。这意味着 V (𝔭) $\subseteq \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$。因此， $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ = V (𝔭)。□

为了证明 $\mathfrak{p}$ 是 R 中的素理想，我们需要定义

$$M := \begin{pmatrix} x_2 + y_3 & -x_1 & -y_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -y_3 & y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

显然， $\det(M) = (x_2 + y_3)(x_3y_2 - x_2y_3) \neq 0$ 不是R 中的零因子，因为R 是一个整环。在本节中，我们在R 上选取分次反字典序，其中$x_1 > x_2 > x_3 > y_1 > y_2 > y_3 > z_1 > z_2 > z_3$ ，并定义

$$\begin{aligned} g &:= x_1y_2z_1 + y_1y_3z_1 - x_1y_1z_2 + y_3z_1z_2 - y_1^2z_3 - y_2z_1z_3 \\ h &:= x_1x_3y_2 - x_1x_2y_3 + x_2x_3z_2 + x_3y_3z_2 - x_2^2z_3 - x_3y_2z_3 + x_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

引理 3.3。 $\mathscr{B}$: = $\{f_1, f_2, f_3, g, h\}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的格罗布纳基。

证明。为证明这一陈述，我们将使用布赫伯格算法；例如参见 [DK15，算法 1.1。9]。注意，$\mathfrak{p} = \langle \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3 \rangle$。由于 f_1 和 f_2 的首项单项式互素，因此 $\mathrm{spol}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ 根据 [CLO15，第 4 命题，第 106] 页，在 $\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3\}$ 模意义下化简为零。此外，让我们回顾任意两个多项式 f 和 g 的 S-多项式定义：

$$\mathrm{spol}(f,g) = \frac{\mathrm{LC}(g)\cdot t}{\mathrm{LM}(f)}\cdot f - \frac{\mathrm{LC}(f)\cdot t}{\mathrm{LM}(g)}\cdot g$$

其中$t := \mathrm{lcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))$表示最小公倍数。因此

$$\mathrm{spol}(f_1,f_3) = \frac{1\cdot x_2y_1z_1}{x_2z_1}\cdot f_1 - \frac{1\cdot x_2y_1z_1}{x_2y_1}\cdot f_3 = y_1f_1 - z_1f_3 = g.$$

显然，g 的项中没有任何一项能被 $\{\mathrm{LM}(f_1), \mathrm{LM}(f_2), \mathrm{LM}(f_3)\}$中的任何一个整除。因此，$g$ 关于 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 的标准形就是它本身。同理，由于

$$\mathrm{spol}(f_2,f_3) = x_2f_2 - x_3f_3 = h$$

其关于 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 的标准形也就是其本身，我们可以将g 和h 加入$\{f_1, f_2, f_3\}$，并得到集合 $\mathcal{B}$。

为了完成证明，我们需要检验中的任意两个元素是否会产生s-多项式，且其关于 $\mathcal{B}$的标准形非零。这对于$\{f_1, f_2, f_3\}$ 中的任意两个元素，以及 $\mathcal{B}$ 中首项单项式互素的任意两个元素，显然成立。因此，只需证明$\mathrm{spol}(f_1, g)$ 关于 $\mathcal{B}$的标准形为零。应用 [DK15，算法 1.16],，直接验证可知，$\mathrm{spol}(f_1, g)$ 关于 $\mathcal{B}$的标准形为零。事实上，

$$\mathrm{spol}(f_1,g) = (y_2z_3 - y_3z_2)f_1 - (y_3z_1 - x_1z_2 - y_1z_3)f_3.$$

因此，可由 [CLO15，定理 3，第 105] 页，得出 $\mathcal{B}$ 是 $\mathfrak{p}$的格罗布纳基 . □

引理 3.4. $\{f_1, f_2\}$ 是理想 $\langle f_1, f_2\rangle$的格罗布纳基。

证明。注意，$\mathrm{LM}(\mathrm{f_1}) = \mathrm{x_2z_1}$ 且 $\mathrm{LM}(\mathrm{f_2}) = \mathrm{x_3y_1}$。由于它们互素，由 [CLO15，第 106] 页命题 4 可知，S-多项式 $\mathrm{spol}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ 模 $\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\}$约化为零。根据[CLO15，第 105], 页定理 3，我们推得 $\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\}$ 是 $\langle \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\rangle$的格罗布纳基。□

引理 3.5. $\langle f_1\rangle$ 和 $\langle f_1, f_2\rangle$ 是 R 中的素理想。

证明。注意，f_1 在 R 中不可约，而 R 是唯一分解整环，因此 f_1 是一个素元。这意味着$\langle \mathrm{f}_1\rangle$ 是一个素理想。为了证明 $\langle \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\rangle$ 是素理想，我们将 R_2 记作 $\mathrm{R}/\langle \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\rangle$，只需证明它是一个整环。记 Δ 为 $\begin{pmatrix} \mathrm{x}_{-}^{1} & {}_{1}\mathrm{y} \\ \mathrm{x}_3 & \mathrm{x}_2 \end{pmatrix}$的行列式，即 $\Delta := \mathrm{x_1x_2} + \mathrm{x_3y_1} \neq 0$。

我们声称 Δ 的类不是R_2中的零因子。如果这一声称成立，那么R_2 可以嵌入局部化$R_2\left[\Delta^{-1}\right]$中。此外，注意到$R$中有 $\Delta \neq 0$。解以下线性方程组

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -x_3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2z_1 + y_3z_1 \\ x_3y_1 - x_1y_3 - 1 \end{pmatrix}$$

这意味着

$$R_2\left[\Delta^{-1}\right] \cong \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1]\left[\Delta^{-1}\right]$$

而后者是整环，因为它是多项式环的局部化。因此，R_2, 作为$R_2\left[\Delta^{-1}\right]$ 的子环，同样是整环。

因此，只需证明上述结论。显然，该结论等价于如下陈述：冒号理想 $\langle f_1,f_2\rangle:\Delta$ 等于 $\langle f_1,f_2\rangle$。根据 [DK15，第 1.2 节。4], 我们可知

$$\langle f_1,f_2\rangle:\Delta=\Delta^{-1}\cdot(\langle f_1,f_2\rangle\cap\langle\Delta\rangle). \tag{3.5}$$

可以应用求两个理想的交的格罗布纳基的标准方法。引入一个新变量 z，并考虑 R[z] 中的理想 $J:=\langle f_1,f_2\rangle\cdot z+\langle\Delta\rangle\cdot(1-z)$。将分次反字典序扩展到 R[z]，使得 $z>x_1>x_2>\cdots>z_3$，并使用引理 3.3 中的相同方法，我们得到 J 的格罗布纳基 $\mathcal{D}=\{\Delta\cdot f1,\Delta\cdot f_2,z\cdot f_1,z\cdot f_2,h_1,h_2\}$，其中

$$\begin{aligned}h_1 &:= zx_1x_2+zx_1y_3-zx_3z_2+zx_2z_3-x_1x_2-x_3y_1-z\\ h_2 &:= zx_1^2z_2-zx_3z_1z_2+zx_1y_1z_3-zy_3z_1z_3+zx_1z_2z_3+zy_1z_3^2-x_1x_2z_1-x_3y_1z_1-zz_1.\end{aligned}$$

根据 [DK15中的算法 1.2，1], 为了得到 $\langle f_1,f_2\rangle\cap\langle\Delta\rangle$ 的格罗布纳基，我们需要移除 $\mathcal{D}$ 中涉及额外变量 z 的所有元素。显然，

$$\{\Delta\cdot f_1,\Delta\cdot f_2\}$$

是 $\langle f_1,f_2\rangle\cap\langle\Delta\rangle$ 的格罗布纳基，因此 $\{f_1,f_2\}$ 是 $\langle f_1,f_2\rangle:\Delta$ 的格罗布纳基。因此，$\langle f_1,f_2\rangle:\Delta=\langle f_1,f_2\rangle$。这就完成了该断言的证明。□

引理 3.6. $\det(M)$在 $R/\mathfrak{p}$ 中的等价类不是零因子。

证明。 我们采用引理 3.5 中证明该断言时使用的相同方法来证明此结论。只需验证冒号理想 $\mathfrak{p}:\det(M)$ 等于 $\mathfrak{p}$。根据 [DK15 第 1.2 节，4], 我们可知

$$\mathfrak{p}:\det(M)=\frac{1}{\det(M)}\cdot(\mathfrak{p}\cap\langle\det(M)\rangle). \tag{3.6}$$

引入一个新变量 z，并考虑 R[z] 中的理想 $J:=\mathfrak{p}\cdot z+\langle\det(M)\rangle\cdot(1-z)$。将分次反字典序扩展到 R[z]，并令 $z>x_1>\cdots>z_3,$，我们可以得到 J 的一个格罗布纳基，包含 26 个元素。根据 [DK15, Algorithm1.2.1], ，移除其中所有涉及变量 z 的元素后，可得到 $\mathfrak{p}\cap\langle\det(M)\rangle$ 的一个格罗布纳基，其中 $\mathcal{D}'=\{\det(M)\cdot f\mid f\in\mathcal{B}\}$。因此，$:\det(M)$ 可由 $\mathcal{B}$ 生成，由引理 3.3 可知 $\mathfrak{p}:\det(M)=\mathfrak{p}$。所以，$\det(M)$ 在 $R/\mathfrak{p}$ 中的等价类不是零因子。□

命题 3.7。 $\mathfrak{p}$ 是 R 中高度为 3 的素理想。

证明。 要证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想，只需证明 $R/\mathfrak{p}$ 是整环。解线性方程组 $f_1=f_2=f_3=0$ 可得，z_1,z_2,z_3 可以用其他变量有理地表示。此外，

$$(R/\mathfrak{p})\left[\frac{1}{\det(M)}\right]\cong\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3]\left[\frac{1}{\det(M)}\right]$$

是整环。由引理3.6可知，$\det(M)$ 在 $R/\mathfrak{p}$ 中的等价类不是零因子，因此 $R/\mathfrak{p}$ 可以嵌入到 $(R/\mathfrak{p})\left[\frac{1}{\det(M)}\right]$ 中。因此，$R/\mathfrak{p}$ 也是整环，且 $\mathfrak{p}$ 是素理想。

为计算 $\mathfrak{p}$的高度，我们考虑以下代数同态

$$\pi:R\longrightarrow\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3]\left[\frac{1}{\det(M)}\right] \tag{3.7}$$

定义为 $x_i \mapsto x_i$，$y_i \mapsto y_i$，$z_1 \mapsto 0$，以及

$$z_2 \mapsto \frac{1}{\det(M)}(x_1y_3 - x_3y_1 - 1), z_3 \mapsto \frac{1}{\det(M)}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

注意，π 的像是一个克鲁尔维数为 6 的整环，因此由 [Har77，定理 1.8A] 可知，$\ker(\pi)$ 是一个高度为 3 的素理想。显然，$\mathfrak{p} \subseteq \ker(\pi)$。由引理3.5 可得

$$0 \subset \langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathfrak{p} \subseteq \ker(\pi) \tag{3.8}$$

是 R 中的素理想链。因此，$\mathfrak{p} = \ker(\pi)$，且其高度为 3。 □

我们现在可以证明定理 1.2。

定理*1.2*的证明。 由命题 3.2 和 3.7，我们看到 $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ 是一个 6 维不可约仿射簇，这证明了定理1.2中的第一条结论。

为证明第二条结论，我们需要证明 f_1, f_2, f_3 是 R 中的正则序列。由于 R 是一个整环且 $f_1 \neq 0$，可知 f_1 不是 R 中的零因子，因此 f_1 在 R 中是正则的。为证明 f_1, f_2 在 R 中是正则的，只需证明 f_2 不是 $R/\langle f_1 \rangle$中的零因子。由引理 3.5，$R/\langle f_1 \rangle$ 是一个整环。注意，相对于 $\{f_1\}$，f_2 的标准形非零，因此 f_2 在 $R/\langle f_1 \rangle$ 中的类不是零因子。为证明 f_1, f_2, f_3 在 R 中是正则的，我们需要证明 f_3 在 $R/\langle f_1, f_2 \rangle$中的类不是零因子。注意，引理 3.4 告诉我们，$\{f_1, f_2\}$ 是 $\langle f_1, f_2 \rangle$的格罗布纳基；利用这一事实，我们可以推出，相对于 $\{f_1, f_2\}$，f_3 的标准形就是其本身。因此它非零。再次应用引理 3.5，我们看到 $R/\langle f_1, f_2 \rangle$ 是一个整环。因此，f_3 的类不是 $R/\langle f_1, f_2 \rangle$中的零因子。这就完成了定理 1.2 的证明。□

注 3.8。注意，几何意义下的完全交与代数意义下的完全交这两个概念一般并不等价。具体而言，一个在几何意义下为完全交的仿射簇，其消失理想可能不是完全交理想，反之亦然。然而，在我们的情形中，$\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$在几何和代数两种意义下均构成完全交。◇

4. 三维 ω-李代数的分类

本节利用定理1.1 和1.2 ，对代数闭域 ω上的所有三维非李 $\mathbb{K}$ 特征的 $\neq 2$-李代数进行完整分类。

注意，$\mathcal{A}_3(\mathbb{K}) = \mathcal{L}_\omega(\mathbb{K})$，其中我们可以假设

$$\omega(x, y) = 1 \text{ and } \omega(x, z) = \omega(y, z) = 0. \tag{4.1}$$

回顾辛群 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$；参见 [Tay92，定理 8。1]。因此，$\omega$ 在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$中的相应稳定子为

$$G_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ T & d \end{pmatrix} \mid S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}), T \in \mathbb{K}^2, d \in \mathbb{K}^\times \right\}. \tag{4.2}$$

在本小节中，除非另有说明，我们始终假设g 表示$G\omega$ 中的一般元素，使得

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 & 0 \\ s_2 & s_4 & 0 \\ t_1 & t_2 & d \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

其中 $\begin{pmatrix} 3 \\ s_1\ s_4 \end{pmatrix} \in_{s_2}\ s\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$。因此，

$$s_1 s_4 - s_2 s_3 = 1. \tag{4.4}$$

设 $L \in \mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 是一个一般的三维 ω-李代数，由 $\{x、\ y、\ z\}$ 张成。则 g^{-1} 在 L 上的作用可表示为

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= s_1 x + s_2 y + t_1 z \\ g^{-1}(y) &= s_3 x + s_4 y + t_2 z \\ g^{-1}(z) &= dz. \end{aligned} \tag{4.5}$$

此外，我们假设 L 中的括号如下：

$$\begin{aligned} [x,y] &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ [x,z] &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ [y,z] &= c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned} \tag{4.6}$$

由命题 3.2，可知

$$\begin{aligned} a_2 b_1 - a_1 b_2 - b_3 c_2 + b_2 c_3 &= 0 \\ a_2 c_1 + b_3 c_1 - a_1 c_2 - b_1 c_3 &= 0 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_3 c_2 - a_2 c_3 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

将（4.7）中的第三个方程与（4.6）中的第一个方程结合，可知 $[x、\ y] \neq 0$。因此，本节中的论证分为两种情况： $a_3 \neq 0$ 和 $a_3 = 0$。定义

$$\Delta := b_1 c_2 - b_2 c_1 \tag{4.8}$$

这在下面的论证中起着关键作用。

4.1. **情形 $a_3 \neq 0$ 和 $\Delta \neq 0$.** 在这种情形下，以下引理 4.1 表明，不失一般性，(4.6)中的第一个方程实际上可以假设为

$$[x,y] = z \tag{4.9}$$

因为 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$中任意两个元素在 $G\omega$ 作用下属于同一轨道，所产生的ω-李代数彼此同构；根据定理1.1。

为证明引理4.1，注意到将z 替换为$a_3^{-1}z$ 并固定x 和y 在（4.6）中，可得到一个同构的 ω-李代数。因此，我们可以假设$a_3 = 1$ 在（4.6）中。事实上，利用群元素

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-1} \end{pmatrix} \text{ and } g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in G_\omega,$$

我们看到 $[x, y]_g = g[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = g[x,y] = g(a_1x + a_2y + a_3z) = a_1g(x) + a_2g(y) + a_3g(z) = a_1x + a_2y + a_3(a_3^{-1}z) = a_1x + a_2y + z$。由于 b_i 和 c_i 目前是自由变量，因此 $[x, z]_g$ 和 $[y, z]_g$ 可以假设具有与（4.6）中相同的形式。

引理 4.1。存在一个元素 $g \in G\omega$ 使得 $[x、y]_g = z$，其中 $[x、y]_g$ 定义为（2.7）.

证明。设 g 表示 $G\omega$ 中的一般元素，使得 g^{-1} 具有（4.3）中的形式。显然，$z = [x、y]_g = g([g^{-1}(x)、g^{-1}(y)])$ 成立当且仅当

$$g^{-1}(z) = [g^{-1}(x), g^{-1}(y)]. \tag{4.10}$$

因此，只需验证 4.10）对某个 $g \in G\omega$成立。由（4.5），注意到 $g^{-1}(z) = dz$，以及

$$\begin{aligned} & [g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = [s_1x + s_2y + t_1z, s_3x + s_4y + t_2z] \\ = \; & [x,y] + (s_1t_2 - s_3t_1)[x,z] + (s_2t_2 - s_4t_1)[y,z] \\ = \; & (a_1x + a_2y + z) + (s_1t_2 - s_3t_1)(b_1x + b_2y + b_3z) + (s_2t_2 - s_4t_1)(c_1x + c_2y + c_3z). \end{aligned}$$

由 x、y、z的线性无关性，我们观察到（4.10）成立当且仅当

$$\begin{aligned} a_1 + (s_1t_2 - s_3t_1)b_1 + (s_2t_2 - s_4t_1)c_1 &= 0 \\ a_2 + (s_1t_2 - s_3t_1)b_2 + (s_2t_2 - s_4t_1)c_2 &= 0 \\ 1 + (s_1t_2 - s_3t_1)b_3 + (s_2t_2 - s_4t_1)c_3 &= d. \end{aligned}$$

为确定 g^{-1}，我们将 t_1,t_2 和 d 视为不定元，上述线性方程组可改写为

$$\begin{aligned} (s_3b_1 + s_4c_1)t_1 - (s_1b_1 + s_2c_1)t_2 &= a_1 \\ (s_3b_2 + s_4c_2)t_1 - (s_1b_2 + s_2c_2)t_2 &= a_2 \\ (s_3b_3 + s_4c_3)t_1 - (s_1b_3 + s_2c_3)t_2 + d &= 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

我们将 T 记为左端（4.11）的系数矩阵。注意到 $\Delta \neq 0$。因此

$$\begin{aligned} \det(T) &= \Big((s_1b_1 + s_2c_1)(s_3b_2 + s_4c_2) - (s_3b_1 + s_4c_1)(s_1b_2 + s_2c_2)\Big) \cdot d \\ &= (s_1s_4 - s_2s_3)(b_1c_2 - b_2c_1) \cdot d \\ &\overset{(4.4)}{=} (b_1c_2 - b_2c_1) \cdot d \overset{(4.8)}{=} \Delta \cdot d \neq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

根据线性代数，$(t_1,t_2,d)^t = T^{-1} \cdot (a_1, a_2, 1)^t$是唯一解，它确定了一个元素$g \in G\omega$，使得 $[x、y]_g = z$。□

注释 4.2. 在引理 4.1的证明中，我们看到向量 (t_1,t_2,d) 由 $s_1, s_2, s_3,$和 s_4唯一确定。因此，$G\omega$中满足 $[x、y]_g = z$的所有元素构成的集合由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$参数化。 ◇

根据引理 4.1，不妨设 $a_1 = a_2 = 0$ 以及 $a_3 = 1$ 在（4.6）中，这使得（4.7）中的方程变为

$$\begin{aligned} b_3c_2 - b_2c_3 &= 0 \\ b_3c_1 - b_1c_3 &= 0 \\ b_1 + c_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

（4.13）中的前两个方程可写为 $\begin{pmatrix} c_2 & -b_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & -bb_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} c$，这意味着$b_3 = c_3 = 0$，因为 $\Delta \neq 0$。

因此， ω-李代数 L 的括号如下：

$$\begin{aligned} [x,y] &= z \\ [x,z] &= b_1 x + b_2 y \\ [y,z] &= c_1 x + c_2 y. \end{aligned} \tag{4.14}$$

为了消去b_i 和c_i 中的更多冗余变量，同时保留（4.9），我们记$H\omega$ 为 $[x、y] = z$ 在$G\omega$ 中的稳定子，即：

$$H_\omega := \{g \in G_\omega \mid [x,y]_g = z\} = \{g \in G_\omega \mid [g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = g^{-1}(z)\}. \tag{4.15}$$

下面的引理确定了$H\omega$的结构。

引理 4.3. $H_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \right\}$.

证明. 与引理 4.1 的证明一样，g 表示 Gω 中的一个一般元素，使得 g^{-1} 具有 (4.3) 中的形式。条件 $[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = g^{-1}(z)$，等价于 $[x,y]_g = z$，可写成 (4.11)。注意，$a_1 = a_2 = b_3 = c_3 = 0$。因此，(4.11) 变为

$$\begin{aligned} (s_3 b_1 + s_4 c_1) t_1 - (s_1 b_1 + s_2 c_1) t_2 &= 0 \\ (s_3 b_2 + s_4 c_2) t_1 - (s_1 b_2 + s_2 c_2) t_2 &= 0 \\ d &= 1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

显然，$(t_1, t_2, d) = (0,0,1)$ 是该线性方程组的唯一解。因此，$g \in H\omega$ 当且仅当存在某个 $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，使得 $g = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。 □

注 4.4. 根据引理 4.3，Hω 在 (L $[-,-]$) 上的作用保持关系 $[x,y] = z$ in (4.14)，但可能改变 (4.14) 中的两个关系 $[x, z]$ 和 $[y, z]$。我们分别用 ad 和 ad 表示 (L $[-,-]$) 和 (L $[-,-]_g$) 中的伴随映射。对于每个 $g \in H\omega$，我们有 $[x, z]_g = -\widetilde{\mathrm{ad}}_z(x)$ and $g[g^{-1}(x), g^{-1}(z))] = -g(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(z)(g^{-1}(x))) = -(g \circ \mathrm{ad}_z \circ g^{-1})(x)$。因此

$$\widetilde{\mathrm{ad}}_z(x) = (g \circ \mathrm{ad}_z \circ g^{-1})(x).$$

类似地，$\widetilde{\mathrm{ad}}_z(y) = (g \circ \mathrm{ad}_z \circ g^{-1})(y)$。因此，在子空间 $\langle x,y \rangle$，$\widetilde{\mathrm{ad}}_z$和 ad_z 在 $H\omega$中共轭。由（4.14）可知，除符号外，

$$\mathrm{ad}_z = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

注意，（4.13）中的第三个方程意味着 $b_1 + c_2 = -1$。因此，在此情形下，对 ω-李代数在 $\mathscr{L}_\omega(\mathbb{K})$ 进行分类（$a_3 \neq 0$ 和 $\Delta \neq 0$）等价于对所有 2×2 迹为 -1 的矩阵在 $\mathbb{K}$ 上、在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$的共轭作用下的典范形进行分类。◇

我们用 $\mathscr{M}(\mathbb{K})$ 表示所有迹为 -1、定义在 $\mathbb{K}$ 上的 2×2 矩阵所构成的簇，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 通过共轭作用于其上。回顾一下，共轭作用保持迹和行列式不变。

假设 $M \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ 表示一个一般矩阵。那么特征多项式

$$\chi_M(t) = t^2 - \mathrm{tr}(M)\cdot t + \det(M) = t^2 + t + \det(M)$$

这只取决于 det(M)。由于 $\mathbb{K}$ 是代数闭的，$\chi_M(t) = (t - b)(t - c)$ 在 $\mathbb{K}$ 中分解，其中 $b、c \in \mathbb{K}$。注意，$b + c = \mathrm{tr}(M) = -1$，因此 $c = -(b+1)$。显然，若 $b = -\frac{1}{2}$，则 $c = -\frac{1}{2}$。因此，$\chi_M(t) = 0$ 在 $\mathbb{K}$ 中有一个根。当 $b \neq -\frac{1}{2}$ 时，$b \neq c$ 且 $\chi_M(t) = 0$ 有两个不同的根，均在 $\mathbb{K}$ 中。

引理 4.5. 若 $b \neq -\frac{1}{2}$，则 M 与 对角矩阵 $\{b, -(b+1)\}$ 具有相同的共轭轨道。特别地，在 $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ 中只有一个共轭类。

证明。注意，$b \neq c = -(b+1)$ 是 $\chi_M(t) = 0$ 在 $\mathbb{K}$ 中的两个不同的根。因此，M 的 Jordan标准形为 diag{b, c}。换言之，M 与 diag{b,c} 在 $GL_2(\mathbb{K})$ 中共轭。根据下面的引理4.6，M 与 diag{b,c}(= diag{b, −(b + 1)}) 在 $SL_2(\mathbb{K})$ 中也共轭。

此外，注意到 diag{b,c} 和 diag{c,b} 通过式（2.4）中的矩阵J在 $SL_2(\mathbb{K})$ 中共轭。因此，标量 b 和 c 共同确定一个共轭类。由于 $c = -(b+1)$，我们看到在 $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ 中存在唯一的共轭类，由 diag{b, −(b + 1)} 表示。□

引理4.6。设 A、B 是 $\mathbb{K}$ 上的两个 2 阶矩阵。当且仅当它们在 $SL_2(\mathbb{K})$ 中共轭时，它们在 $GL_2(\mathbb{K})$ 中共轭。

证明。（$\Longrightarrow$）这是显然的。（$\Longleftarrow$）由于 A 和 B 在 $GL_2(\mathbb{K})$ 中共轭，我们可以假设对某个 $g \in GL_n(\mathbb{K})$，有 $B = g^{-1}Ag$。注意到 $\mathbb{K}$ 是代数闭的，因此存在一个标量 $c \in \mathbb{K}^\times$，使得 $c^2 = \det(g)$。定义 $h := c^{-1}\cdot g$。那么 $\det(h) = \det(c^{-1}\cdot g) = c^{-2}\cdot\det(g) = \det(g)^{-1}\cdot\det(g) = 1$，这意味着 $h \in SL_2(\mathbb{K})$。此外，$g = c\cdot h$ 这一事实意味着

$$B = g^{-1}Ag = (c\cdot h)^{-1}A(c\cdot h) = h^{-1}Ah.$$

因此，A 和 B 在 $SL_2(\mathbb{K})$ 中也共轭。 □

注 4.7. 若 $\mathbb{K}$ 不是代数闭的，则此结论可推广为：A 和 B 在 $SL_2(\mathbb{K})$ 中共轭，当且仅当它们在 $GL_2(\mathbb{K})$ 中通过某个 g 共轭，且 $\det(g)$ 是 $\mathbb{K}^\times$ 中的一个平方。◇

由引理 4.5，我们可以选取

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -(b+1) \end{pmatrix}.$$

注意，$\det(M) = \Delta \neq 0$。因此我们得到一族 ω-李代数：

$$(C_\alpha^*) \qquad [x,y] = z, [x,z] = \alpha x, [y,z] = -(\alpha+1)y, \text{ where } \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{-1, -\frac{1}{2}, 0\}.$$

注 4.8. (1) 从下文的（4.17）和（4.22）可知，当 $\alpha \in \{-1, -\frac{1}{2}\}$ 时，（C_α^*）中的关系仍定义一个 ω-李代数（也可直接验证）。换言之，（C_α^*）中的条件可以部分去除。因此，我们得到一族 ω-李代数：

$$(C_\alpha) \qquad [x,y] = z, [x,z] = \alpha x, [y,z] = -(\alpha+1)y, \text{ where } \alpha \in \mathbb{K}^\times.$$

此外，根据后文第 4.2 节第一个子情形中的讨论，当 $\alpha = 0$，C_0 实际上是一个 ω-李代数，但与 C_{-1} 同构。

(2) 当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时，这一族与 $C\alpha$ 中出现的族同构，该族见 [CLZ14，定理 2]。此外，ω-李代数 L_2 见 [CLZ14，定理 2]，它也与 $C_0 \cong C_{-1}$ 同构。 ◇

现在考虑 $b=-\frac{1}{2}$ 的情形。

引理4.9。若 $b=-\frac{1}{2}$，则在 $\mathscr{M}(\mathbb{K})$ 中有两个共轭类，分别由下列元素表示

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

。

证明。若 $b=-\frac{1}{2}$，则 b 是 $\chi_M(t)=0$ 在 $\mathbb{K}$ 中的唯一根。M 的 Jordan标准形只有两种可能：$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$。根据引理 4.6，$M$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 中与其中一个共轭。 □

根据引理 4.9，当 $M=\begin{pmatrix} 1 \\ b_1 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} b_2 c$ 时，我们得到如下 ω-李代数：

$$[x,y]=z,[x,z]=-x/2,[y,z]=-y/2 \tag{4.17}$$

这确定了 $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ 在 (C^*_α) 中的情形。

此外，令 $M=\begin{pmatrix} 1 \\ b_1 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} b_2 c$，可得到

$$[x,y]=z,[x,z]=-x/2,[y,z]=x-y/2 \tag{B}$$

它同构于 ω-李代数 B，见于 [CLZ14，定理 2] 当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时。

4.2. 情形 $a_3 \neq 0$ 和 $\Delta=0$。 由于 $\Delta=b_1c_2-b_2c_1=0$，因此（b_1,b_2）和（c_1,c_2）在 $\mathbb{K}$ 上线性相关。我们可以假设 L 中的括号如下：

$$\begin{aligned} [x,y] &= a_1x+a_2y+a_3z \\ [x,z] &= b_1x+b_2y+b_3z \\ [y,z] &= cb_1x+cb_2y+c_3z \end{aligned} \tag{4.18}$$

对于某个 $c \in \mathbb{K}$。

将 y 替换为 $y-cx$ 并固定 x 和 z 后，方程4.18中的第三个方程可设为

$$[y,z]=c_3z. \tag{4.19}$$

事实上，我们可以选择

$$g=\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } g^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_\omega,$$

并注意到

$$\begin{aligned} [y,z]_g &= g[g^{-1}(y),g^{-1}(z)]=g[y-cx,z] \\ &= g(cb_1x+cb_2y+c_3z-c(b_1x+b_2y+b_3z)) \\ &= (c_3-cb_3)z. \end{aligned}$$

由于 a_i 和 b_i 是自由变量，$[x、y]_g$ 以及 $[x、z]_g$ 可以假设具有（4.18）中的形式。

由此得到两个子情况：$c_3 = 0$ 和$c_3 \neq 0$。

情形 1： $c_3 = 0$。此时，(4.7) 变为

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 0 \text{ and } a_3b_1 - a_1b_3 + 1 = 0 \tag{4.20}$$

这表　　明 (a_1,a_2) 和 (b_1,b_2) 在 $\mathbb{K}$ 上线性相关。我们可以假设

$$[x,y] = cb_1x + cb_2y + a_3z$$

对某个 $c \in \mathbb{K}$ 成立。将 y 替换为 $y - cz$，并固定 x 和 z，即作用群元素

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in G_\omega,$$

结合 (4.18) 中的第二个方程以及 $[y,z] = 0$，我们可以假设 L 中的括号如下：

$$[x,y] = a_3z, [x,z] = b_1x + b_2y + b_3z, \text{ and } [y,z] = 0. \tag{4.21}$$

注意 $a_3 \neq 0$。因此，我们可以通过将 $a_3 = 1$ ，将 z 替换为 $a_3^{-1}z$ 。此外，由 (4.20) 可得 $b_1 = -1$。因此，(4.21) 可化为

$$[x,y] = z, [x,z] = -x + b_2y + b_3z, \text{ and } [y,z] = 0.$$

将x替换为$x - b_2y - b_3z$，并固定y和z，即应用群元素$g \in G\omega$，使得

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

我们得到如下 ω-李代数：

$$[x,y] = z, [x,z] = -x, [y,z] = 0. \tag{4.22}$$

这固定了 $\alpha \neq -1$ 式（C_α^*）中的情形。

子情形 2： $c_3 \neq 0$。将 z 乘以 c_3^{-1}，不妨设 $c_3 = 1$ 在此情形下。由（4.7），可推出 $b_1 = 0$ 且

$$(1 - a_1)b_2 = 0 \text{ and } a_1b_3 + a_2 = 1. \tag{4.23}$$

此外，（4.18）变为

$$\begin{aligned} [x,y] &= a_1x + a_2y + a_3z \\ [x,z] &= b_2y + b_3z \\ [y,z] &= z. \end{aligned} \tag{4.24}$$

将 x 替换为 $x - b_3y$，并固定 y 和 z，不妨设 $b_3 = 0$ 在（4.24）中。结合（4.23）可得 $a_2 = 1$。由于 $(1 - a_1)b_2 = 0$，因此 $b_2 = 0$ 或 $a_1 = 1$。对于第一个子情形（$b_2 = 0$），我们看到：

$$[x,y] = a_1x + y + a_3z, [x,z] = 0, [y,z] = z.$$

将y替换为$a_1x + y + a_3z$，并固定x和z，可得到

$$[x,y] = y, [x,z] = 0, [y,z] = z \tag{D}$$

它是 ω-李代数 L_1，见 [CLZ14，定理 2] 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。

对于后一个子情形（$a_1 = 1$），我们有

$$[x,y] = x+y+a_3z, [x,z] = b_2y, [y,z] = z$$

其中 $b_2 \neq 0$，因为若 $b_2 = 0$，我们得到一个 ω-李代数，它与 (*D*) 同构。将z 替换为 $b_2^{-1}z$，并固定 x 和 y，于是可以假设 L 具有如下括号：

$$[x,y] = x+y+a_3z, [x,z] = y, [y,z] = z. \tag{4.25}$$

显然，上述过程可以通过对$G\omega$中的某些元素进行作用来实现。

引理 4.10. 设 $N\omega$ 是 $G\omega$ 中 $[y,z] = z$ 和 $[x,z] = y$ 的稳定子。那么，$N\omega$ 由所有满足下式的 $g \in G\omega$ 组成：

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

证明。设 $g \in N\omega$ 表示一个具有一般形式的元素，且 g^{-1} 具有 (4.3) 中的形式。则$[y, z]_g = z$，这等价于 $[g^{-1}(y), g^{-1}(z)] = g^{-1}(z)$。由 (4.5) 可知，这意味着

$$[s_3x + s_4y + t_2z, dz] = dz.$$

注意，$d \neq 0$。因此，$s_3y + s_4z = z$。这意味着 $s_3 = 0$ 且 $s_4 = 1$。此外，由于 $\begin{pmatrix} 3 \\ s_1 s_4 \end{pmatrix} s_2 s$的行列式为 1，可知 $s_1 = 1$。因此，g^{-1} 具有如下形式：

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & d \end{pmatrix}.$$

由于g也保持 $[x、z] = y$，我们看到 $[g^{-1}(x)、g^{-1}(z)] = g^{-1}(y)$，这可写作

$$[x + s_2y + t_1z, dz] = y + t_2z.$$

即，$dy + s_2dz = y + t_2z$。因此$d = 1$且$t_2 = s_2$。证明至此完成。 □

为完成这一情形的论证，我们考虑g^{-1} 对x 和y的作用，其中$g \in N\omega$使得g^{-1} 具有（4.26）中的形式。显然，

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ s^2 - t & -s & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，

$$\begin{aligned} [g^{-1}(x), g^{-1}(y)] &= [x + sy + tz, y + sz] = (x + y + a_3z) + sy + s^2z - tz \\ &= x + (1+s)y + (a_3 + s^2 - t)z. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} [x,y]_g &= g[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = g(x) + (1+s)g(y) + (a_3 + s^2 - t)g(z) \\ &= (x - sy + (s^2 - t)z) + (1+s)(y - sz) + (a_3 + s^2 - t)z \\ &= x + y + (s^2 - t - s^2 - s + a_3 + s^2 - t)z \\ &= x + y + (s^2 - 2t - s + a_3)z. \end{aligned}$$

定义 $t=\frac{1}{2}(s^2-s+a_3)$。我们得到一个 $g\in N\omega$，使得

$$[x,y]_g=x+y.$$

因此，这便得到

$$[x,y]=x+y,[x,z]=y,[y,z]=z. \tag{A}$$

它与 ω-李代数A_0 在 [CLZ14定理 2] 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$同构。这也表明$A_\alpha\cong A_0$ 在 [CLZ14定理 2] 对所有 $\alpha\in\mathbb{C}$均与上面的 A同构。

4.3. **情形**$a_3=0$。注意，$[x,\ y]\neq 0$。因此，在这种情形下，我们看到，要么$a_1\neq 0$，要么$a_2\neq 0$。不失一般性，我们可以假设$a_1\neq 0$，因为对于$a_2\neq 0$的情形，我们将得到相同的 ω-李代数。分别用x 和y 替换$a_1^{-1}x$ 和a_1y，实际上我们可以假设$a_1=1$。因此，L 中的括号为：

$$\begin{aligned}[x,y]&=\ x+a_2y\\ [x,z]&=\ b_1x+b_2y+b_3z\\ [y,z]&=\ c_1x+c_2y+c_3z.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Re将x 替换为$x+a_2y$，我们可以假设$a_2=0$ 在（4.27）中。于是（4.7）变为

$$\begin{aligned}b_2+b_3c_2-b_2c_3&=0\\ b_3c_1-c_2-b_1c_3&=0\\ b_3-1&=0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

由于 $b_3=1$，我们可以将 y 替换为 $y-c_3x$，并假设 $c_3=0$ 在（4.27）中成立。将此假设代回（4.28），可得

$$b_2+c_2=0 \text{ and } c_1-c_2=0.$$

显然，上述基变换等价于通过应用$G\omega$中的元素来实现。因此，我们可以假设L 的括号如下：

$$\begin{aligned}[x,y]&=\ x\\ [x,z]&=\ b_1x-c_1y+z\\ [y,z]&=\ c_1x+c_1y.\end{aligned} \tag{4.29}$$

情形 1：$c_1=0$。若 $b_1=0$，由（4.29）可得以下 ω-李代数：

$$[x,y]=x,[x,z]=z,[y,z]=0$$

它同构于（D）。若 $b_1\neq 0$，则 $[x,\ z]=b_1x+z$。将 x 替换为 $x-z$，得到

$$[x,y]=x+z,[x,z]=bx+(b+1)z,[y,z]=0 \tag{4.30}$$

根据第 4.2 小节的讨论，它同构于 ω-李代数C_{-1}。

情形 2：$c_1\neq 0$。此时，将 z 替换为 $c_1^{-1}z$，得到

$$[x,y]=x,[x,z]=bx-y+z,[y,z]=x+y. \tag{4.31}$$

将 x 替换为 $x-z$，我们得到

$$[x,y]=2x+y+z,[x,z]=bx-y+(b+1)z,[y,z]=x+y+z$$

根据第 4.1 和 4.2 小节，它将与以下对象之一同构：$\{A, B, C_\alpha, D \mid \alpha \in \mathbb{K}^\times\}$。

4.4. **定理 1.3 的证明**。结合前面的第 4.1、4.2 和 4.3 小节，我们可以给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3 第一项陈述的证明。我们假设对于 $L \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$，有 $\omega(x, y) = 1$ and $\omega(x, z) = \omega(y, z) = 0$。如果 $[x, y]$ 的 z 分量非零，根据第 4.1 和 4.2 小节，我们可知 L 必须同构于 $\{A, B, C_\alpha、D \mid \alpha \in \mathbb{K}^\times\}$ 中的某一个。如果 $[x, y]$ 的 z 分量为零，那么根据本小节的讨论，存在一个群元素 $g \in G_\omega$，使得新的括号 $[x, y]_g$ 的 z 分量非零。因此，L 也同构于 $\{A, B, C_\alpha、D \mid \alpha \in \mathbb{K}^\times\}$ 中的某一个。□

定理 1.3 的第二项陈述的证明。我们先计算导出代数 $[L, L]$ 的维数。显然，$\dim([D, D]) = \dim([C_{-1}, C_{-1}]) = 2$，而其他情况的维数均为 3。因此，D 与 $\{A, B, C_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0, -1\}\}$ 中的任何一个都非同构，唯一的可能性是 $D \cong C_{-1}$。反设它们同构。由定理 1.1，它们属于同一轨道，即存在可逆元 $g \in G_\omega$，使得 $C_{-1} = g \cdot D$，且 g^{-1} 具有 (4.3) 中的形式。回忆一下，$D: [x, y] = y, [x, z] = 0, [y, z] = z$，而 $C_{-1}: [x, y] = z, [x, z] = -z, [y, z] = 0$。注意，$0 = [y, z]_g = g[g^{-1}(y), g^{-1}(z)] = g([s_3x + s_4y + t_2z, dz]) = g(s_4dz) = (s_4d)(d^{-1})z = s_4z$。因此 $s_4 = 0$。类似地，由于 $-z = [x, z]_g = g[g^{-1}(x), g^{-1}(z)] = g([s_1x + s_2y + t_1z, dz])$，可知 $s_2 = -1$。现在，$z = [x, y]_g = g[g^{-1}(x), g^{-1}(y)] = g[s_1x + s_2y + t_1z, s_1x + s_2y + t_1z] = g(y - t_2z)$。因此，$g^{-1}(z) = y - t_2z$，且 $y = g^{-1}(z) + t_2z = (d + t_2)z \in \langle z \rangle$。矛盾由此得证，D 与 C_{-1}不同构。

我们需要证明 $\{A、B、C_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{K}^\times\}$ 中任意两个都非同构。反设存在可逆元 $g \in G_\omega$，使得 $B = g \cdot A$。那么 $z = [y, z]_g = g[g^{-1}(y), g^{-1}(z)] = g[s_3x + s_4y + t_2z, dz] = g(v)$，其中 $v \in \langle x、y \rangle$。因此 $v = g^{-1}(z) = dz$，且 $z = d^{-1}z \in \langle x、y \rangle$。这一矛盾说明 A 和 B 不同构。类似的论证表明，对于所有 $\alpha \in \mathbb{K}^\times$，A 和 C_α 都不同构。我们只需考察 B 和 C_α。然而，根据第4.1小节，B 和 C_α 在 $SL_2(\mathbb{K})$ 的作用下对应于不同的共轭标准形。因此，对于所有 $\alpha \in \mathbb{K}^\times$，B 和 C_α 都不同构。

因此，只需证明对于任意 $\alpha \neq \beta$ 属于 $\mathbb{K}^\times$，C_α 和 C_β 不同构。回顾一下，$C_\alpha: [x, y] = z, [x, z] = \alpha x, [y, z] = -(\alpha + 1)z$。反设存在定义于 (4.15) 中的可逆元 $h \in H_\omega$，使得 $C_\beta = h \cdot C_\alpha$。于是，

$$\beta x = [x, z]_h = h[h^{-1}(x), h^{-1}(z)] = h[s_3x + s_4y, z] = h(s_3\alpha x - s_4(\alpha + 1)z).$$

这意味着 $\beta(s_3x + s_4y) = s_3\alpha x - s_4(\alpha + 1)z$，这意味着 $s_3 = s_4 = 0$。然而，

$$\det \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{pmatrix} = 1.$$

这一矛盾表明，当 $\alpha \neq \beta$ 属于 $\mathbb{K}^\times$ 时，C_α 和 C_β 不同构。 . □

5. 两点备注

最后一节包含两条关于在任意特征为 $\neq 2$ 的域 $\mathbb{K}$（不一定是代数闭域）上构造有限维 ω-李代数的备注。

对于第一条备注，我们考虑三维情形，并写作

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

对应于一般 ω-李代数L 在域 $\mathbb{K}$ （例如实数 $\mathbb{R}$ 或有限域 $\mathbb{F}_q$）上结构常数的矩阵，见（3.1）。借助素理想 $\mathfrak{p} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$，我们可以特化$C$，直接构造或恢复所有非李的 3 维 ω-李代数结构，其中f_1, f_2 和f_3 定义见（3.2）。例如，若

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix},$$

那么，由$f_2 = 0$ 可知$z_3 = 1$。因此，我们恢复了 ω-李代数L_1，它出现在复数和实数域上 3 维 ω-李代数的分类表中；参见 [CLZ14、定理 2 和表 1]。这个例子还意味着， ω-李代数L_1,由下式定义

$$[x,y] = y, [x,z] = 0, [y,z] = z \text{ and } \omega(x,y) = 1, \omega(x,z) = \omega(y,z) = 0$$

将出现在任意特征为 ω的域 $\mathbb{K}$上所有 3 维非李 $\neq 2$-李代数的分类表中。在代数闭情形下，我们在第4 节已看到，这个 ω-李代数同构于D。

此外，如果

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \end{pmatrix},$$

那么根据$f_2 = 0$ 这一事实可知，$z_2 = -1$，由此便可得到 ω-李代数L_2，见[CLZ14，定理 2]。采用相同的方法，我们将重新得到在 ω上所有三维 $\mathbb{C}$-李代数，以及 $\mathbb{R}$，并推导出其他域上的一些新的三维 ω-李代数。

特别是，我们认为这种方法将有助于对有理数域和有限域上的所有三维非李ω-李代数进行分类。关于利用计算理想理论和不变量理论，构造并分类有限域上由多项式方程定义的代数结构的最新应用，可参见 [CZ23] 和 [CZ25]。

第二条说明涉及 ω上的高维 $\mathbb{K}$-李代数。例如，我们考虑四维情形。根据定理2.5，我们有 ω的两个非零典范形：

$$J_1 = \text{diag}\{J, 0\} \text{ and } J_2 = \text{diag}\{J, J\}.$$

固定一个典范形，并使用第3节中出现的格罗布纳基方法，我们可以得到 $\mathcal{A}_4(\mathbb{K})$ 的一些特殊仿射子簇的消失理想。这些消失理想可用于构造新的 ω-李代数，方法如上文第一条说明所述。

最后，我们用下面的例子来说明这一思想，为本文作结。

例5.1。我们希望了解仿射子簇$X_1(\mathbb{K})$，它由所有包含上述三维 ω-李代数 D作为子代数的四维非李 ω-李代数构成，且这些代数定义在 $\mathbb{K}$ 上。注意，我们已经对定义在 $\mathbb{C}$上的四维 ω-李代数进行了分类；参见[CZ17，定理1。5]。

对于任意特征为 $\neq 2$ 的域 $\mathbb{K}$，我们可以假设

$$[x,e]=a_1x+a_2y+a_3z+a_4e,[y,e]=b_1x+b_2y+b_3z+b_4e, \text{ and } [z,e]=c_1x+c_2y+c_3z+c_4e.$$

记J 为多项式环 $\mathbb{K}[x_i,y_i,z_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4]$中$X_1(\mathbb{K})$的消失理想。利用格罗布纳基方法，我们将推导出$J$ 可表示为两个素理想$\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$的交，其中

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_1 &:= \langle x_1,x_2+z_3,x_4+1,y_2-z_3,y_4-1,z_1,z_2,z_4\rangle\\ \mathfrak{p}_2 &:= \langle x_4z_3-x_2,x_1,y_1,y_2-z_3,y_3,y_4-1,z_1,z_2,z_4\rangle.\end{aligned}$$

因此，$X_1(\mathbb{K}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup V(\mathfrak{p}_2)$ 是一个由两个不可约分支构成的四维仿射簇。特别地，对于$X_1(\mathbb{C})$，将 $\mathfrak{p}_1$ 或 $\mathfrak{p}_2$ 的生成元设为零，我们即可恢复那些已在 $\mathbb{C}$出现于 [CZ17，定理1.5 (1)]中的四维非李 ω李代数。◇

致谢 **部分**。本研究部分由国家自然科学基金（项目编号：12561003).

参考文献

[BN07] Marcin Bobienski 和 Pawel Nurowski, 《五维不可约 SO(3)几何》, J. Reine Angew. Math. 605 (2007), 51–93.[CCZ21] Hongliang Chang、Yin Chen 和 Runxuan Zhang, 《李代数导子的推广》, Electron. Res. Arch. 29 (2021), no. 3, 2457–2473.[CNY23] Zhiqi Chen、Junna Ni 和 Jianhua Yu, 《ω-李代数的描述》, J. Geom. Phys. 192 (2023), Paper No. 104926, 13 pp.[CNY26] ,《四维 ω-左对称代数的分类》, 即将发表于 Comm. Algebra (2026), https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2587195.[CW23] Zhiqi Chen 和 Yang Wu, 《低维 ω-左对称代数的分类》, Bull. Korean Math. Soc. 60 (2023), no. 3, 747–762.[Che25] Yin Chen, 《对称幂上的一些李代数结构》, Amer. Math. Monthly 132 (2025), no. 2, 150–161.[CLZ14] Yin Chen、Chang Liu 和 Runxuan Zhang, 《三维复 ω-李代数的分类》, Port. Math. 71 (2014), no. 2, 97–108.[CQRZ26] Yin Chen、Liman Qin、SHAN REN 和 Runxuan Zhang, 《前 Malcev 代数上的 Kupersh midt-Nijenhuis 结构》, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 49 (2026), no. 1, Paper No. 17, 24 pp.[CRSZ25] Yin Chen、SHAN REN、Jiawen Shan 和 Runxuan Zhang, 《 ω-李代数的 Rota-Baxter 算子》, 即将发表于 Kyushu J. Math. (2025)。arXiv:2602.18413.[CRSZ26] ,《 ω-李代数的广义导子》, 即将发表于 J. Algebra Appl. (2026), DOI: 10.1142/ S0219498826502063。arXiv:2503.11595.[CSW21] Yin Chen、R. James Shank 和 David L. Wehlau, 《有限粘合群的模不变量》, J. Algebra 566 (2021), 405–434.[CZZZ18] Yin Chen、Ziping Zhang、Runxuan Zhang 和 Rushu Zhuang, 《复 ω-李代数的导子、自同构与表示》, Comm. Algebra 46 (2018), no. 2, 708–726.[CZ17] Yin Chen 和 Runxuan Zhang, 《 ω-李代数与四维 ω-李代数在 $\mathbb{C}$上的简单情形》, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 40 (2017), no. 3, 1377–1390.[CZ23] ,《乘性 Hom-李代数的交换代数方法》, Linear Multilinear Algebra 71 (2023), no. 7, 1127–1144.[CZ26] ,《李代数的不变量理论与系数代数》, J. Algebra 689 (2026), 87–111.[CZ23] Yin Chen 和 Xinxin Zhang, 《有限域上的一类二次矩阵方程》, Algebra Colloq. 30 (2023), no. 1, 169–180.[CZ25] Yin Chen 和 Shaoping Zhu, 《有限域上杨-巴克斯特矩阵方程的几何》, 即将发表于 Exp. Math. (2025)。arXiv:2506.17893.

[CLO15] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea，《理想、簇与算法》，第4版，数学本科生教材，施普林格，尚贝里，2015.[DK15] Harm Derksen 和 Gregor Kemper，《计算不变理论》，增订第二版，数学百科全书，第130卷，施普林格，海德堡，2015.[DS25] Alina Dobrogowska 和 Marzena Szajewska，《论某些李代数结构》，《物理学中的几何方法》第41卷，数学趋势，比克豪泽/施普林格，尚贝里，2025，第57–66页.[DW24] Alina Dobrogowska 和 Karolina Wojciechowicz，《李代数、特征值问题与左对称代数》，几何、对称与物理学杂志 69 (2024), 59–67.[Har77] Robin Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材，第52号，施普林格出版社，纽约-海德堡，1977.[Gec13] Meinolf Geck，《代数几何与代数群导论》，牛津数学研究生教材，第20卷，牛津大学出版社，牛津，2013.[GK96] Michel Goze 和 Yusupdjan Khakimdjanov，《幂零李代数》，数学及其应用，第361卷，克卢维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1996.[Nur07] Pawel Nurowski，《利用2-形式变形李代数》，几何物理学杂志 57 (2007), no. 5, 1325–1329.[Oub24] Hassan Oubba，《复 ω-李代数的局部（2-局部）导子、自同构与双导子》，《数学》（卡塔尼亚）79 (2024), no. 1, 135–150.[Oub25] ，《简单 ω-李代数的双导子、局部与2-局部导子及自同构》，arXiv: 2505.00436 (2025).[SHZC25] Yining Sun、Zeyu Hao、Ziyi Zhang 和 Liangyun Chen，《 ω-李双代数与 ω-杨-巴克斯特方程》，arXiv:2510.09630 (2025).[Tay92] Donald E. Taylor，《经典群的几何》，Sigma纯数学丛书，第9卷，赫尔德曼出版社，柏林，1992.[Wan02] Zhexian Wan，《有限域上经典群的几何》，科学出版社，北京/纽约，2002.[Zha21] Runxuan Zhang，《 ω-李代数的表示与李代数的带尾导子》，国际代数与计算杂志 31 (2021), no. 2, 325–339.[Zho25] Jia Zhou，《复 ω-李超代数的广义导子》，arXiv:2505.22966 (2025).

井冈山大学数学与物理学院、江西教育学院ECOFM重点实验室，中国江西吉安343009 & 萨斯喀彻温大学金融与管理科学系，加拿大萨斯卡通，SK，S7N 5A7电子邮箱：yin.chen@usask.ca

东北师范大学数学与统计学院，中国长春130024电子邮箱：rens734@nenu.edu.cn

埃德蒙顿康考迪亚大学数学与信息技术系，加拿大埃德蒙顿，AB，T5B 4E4电子邮箱：runxuan.zhang@concordia.ab.ca