arXiv:2603.20491v1 [math.GT] 20 Mar 2026

每个弱佩龙数都是端周期伸缩因子

PAIGE HILLEN、Marissa Loving 和 Chenxi Wu

Abstract. 给定任意弱佩龙数 λ，我们构造一个端周期同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 其 Handel-Miller 伸缩因子等于 λ，其中Σ 是一个连通的无限型曲面，具有有限多个端，且这些端都由亏格累积。

1. Introduction

对于端周期同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$，其伸缩因子 $\lambda(f)$是由与 f相关的 Handel–Miller 层状结构所定义的马尔可夫分解的关联矩阵的谱半径。此伸缩因子与 f 的旋绕伪阿诺索夫代表元的伸缩因子相同，后者在 [LMT]中有所考察；关于这一事实的简要讨论，见 [LW25] 。Landry–Minsky–Taylor 证明，旋绕伪阿诺索夫在所有同伦的端周期映射中使伸缩因子最小，并且旋绕伪阿诺索夫的伸缩因子体现了简单闭曲线与其在该旋绕伪阿诺索夫迭代作用下的像之间交数的增长率。另见他们在 [LMT23]中的相关研究。最近，Buckminster 证明，旋绕伪阿诺索夫代表元在其同伦类中使伸缩因子最小 [Buc25]。

另一方面，对于端周期伸缩因子的数论性质，人们知之甚少；而这在伪阿诺索夫伸缩因子的研究中一直是一个富有成果的方向。例如，Thurston 在宣布映射类群元素的分类定理时指出，亏格为 g 的曲面 Σ_g 上的伪阿诺索夫同胚的伸缩因子的代数次数由 $6g-6$所界，其中 $6g-6$是Σ_g [Thu88]的 Teichm¨uller 空间的维数。这最终由 Strenner 证明；他不仅证明了 Thurston 所断言的界可以实现，还完全刻画了 Mod(Σ_g) 中伪阿诺索夫元素可能的代数次数集合 [Str17]。Fried 的一个相关结果证明，每个伪阿诺索夫伸缩因子 λ 都是双佩龙数 [Fri85]。Fried 猜想每个双佩龙数都可作为某个伪阿诺索夫的伸缩因子出现。这仍然是一个开放问题。相比之下，我们完全刻画了端周期伸缩因子的集合。

主定理。数 λ 是端周期同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 的伸缩因子，当且仅当 λ 是弱佩龙数。

日期：2026年3月24日。

这一刻画的一个方向源自 Cantwell、Conlon 和 Fenley 的研究，他们证明了端周期同胚的伸缩因子必定是弱佩龙数。具体而言，他们证明每个“伪阿诺索夫”端周期同胚都定义了一个核心动力系统，该系统在拓扑上共轭于一个双端有限型马尔可夫移位 [CCF21，定理 9。2] 因此，其伸缩因子是佩龙数。若放宽这一额外的不可约性要求，就能得到弱佩龙数但并非佩龙数的伸缩因子。

因此，我们的贡献在于证明每个弱佩龙数都可以实现为某个端周期同胚的伸缩因子。我们的证明完全是构造性的。给定一个不可约的非负方阵整数矩阵 M，其谱半径等于 λ，我们使用 M 构造一个曲面 Σ 和一个端周期同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$，使得 $\lambda(f) = \lambda$。这与 Baik–Rafiqi–Wu 用来构造具有给定伸缩因子 [BRW16]的伪阿诺索夫同胚实例的构造类型相同。不过，为了确保所得曲面是有限型的，他们对初始矩阵施加了相当严格的条件。

最后，我们指出，我们的主定理与 Thurston 对一维熵的刻画 [Thu14, DDH$^+$24]相呼应。特别是，他证明了每个弱佩龙数都可以作为自由群某个外自同构的伸缩因子出现。事实上，此处的构造以及 Baik–Rafiqi–Wu 的构造 [BRW16]都可以追溯到 Thurston 的思想。

本文结构。 我们首先回顾与端周期同胚相关的一些基本结构，定义 Handel-Miller 伸缩因子，并在第 2 节回顾一些 Perron-Frobenius 理论。

在第 3 节，我们证明每个整数都可以实现为某个端周期同胚的伸缩因子。尽管这一结果可由主定理推出，但这个特例为一般构造提供了很好的热身，也暗示了本文其余部分的整体结构。

在第 4 节，我们描述如何利用一个不可约的正方形非负整数矩阵 M 构造一组矩形 Σ_0，称为与 M对应的矩形，同时构造 Σ_0 的两个划分。接着，我们构造一个分段线性同胚 f_0，将一个划分的内部映射到另一个划分的内部。该映射 f_0 在水平方向上以 M 的谱半径 λ 进行伸缩，并在竖直方向上以 λ^{-1} 进行收缩。

在第 5 节中，我们定义了作用于 Σ_0 的划分边上的四个映射，并证明这些边映射只有有限多个周期点。

在第6节中，我们通过将无限条带粘合到 Σ_0 上边映射的周期点邻域周围，构造 Σ_1，称为与 M对应的扩展矩形。随后，我们定义与 M对应的扩展分片映射，记作 f_1，它将 Σ_1 的一个分割的内部映射到 Σ_1的另一个分割的内部。我们为 f_1定义四个新的边映射，并用这些新的边映射在 Σ_1的边界上生成一个等价关系 $\sim$。这个无限二维复形

与 M 对应的 Σ_2 是$=\Sigma_1/\sim$。本节最后证明，对 Σ_2 稍作修改便会得到一个曲面 Σ。接着，我们在第7节证明，对这一构造作直接修改可确保 Σ 为无限型。在第8节中，我们证明 f_1 可延拓为一个端周期同胚$f:\Sigma\to\Sigma$，其伸缩因子等于 λ。

在第 9 节中，我们证明当 M 是本原时，Σ 是连通的；此外，通过对构造进行另一种相容的修改，可以保证在 M 不可约但非本原时，Σ是连通的。注意，当 λ 是弱佩龙数而非佩龙数时，它是一个不可约但非本原矩阵 M 的谱半径。

最后，在第10节中，我们讨论该领域未来的一些研究方向，并重点介绍若干尚待解决的问题。

致谢。 本研究的部分工作是在 Loving 驻于数学科学研究所（MSRI）期间完成的。该研究所现已更名为西蒙斯·劳弗数学科学研究所（SLMath），并由美国国家科学基金会（资助编号 DMS-2424139）支持。我们也衷心感谢美国国家科学基金会通过 DMS-2231286 对 Loving 的支持，以及通过 DMS-2230900 对威斯康星州的几何、群作用与动力学 NSF RTG 项目（Hillen）的支持。Wu 部分获得了西蒙斯合作基金（编号 850685）的资助。我们感谢 Hyungryul Baik、Ahmad Rafiqi 和 John Hubbard 提供的宝贵讨论。最后，感谢 Chi Cheuk Tsang 对本文早期草稿提出的深刻意见。

2. 背景

2.1. 端周期同胚。 令 Σ 表示一个具有有限多个端、且所有端均为非平面的无限型可定向曲面。注意，我们不再采用通常的假设，即 Σ 是连通的，因为有时考虑具有多个连通分支的曲面会更方便。端周期同胚 $f:\Sigma\to\Sigma$ 是满足以下条件的同胚。存在 $m>0$，使得对于 Σ的每个端 E，都存在 E 的一个邻域 U_E，满足以下条件之一：

(i) $f^m(U_E)\subsetneq U_E$，且集合 $f^{nm}(U_E)_{n>0}$构成 E的一个邻域基；或 (ii) $f^{-m}(U_E)\subsetneq U_E$，且集合 $f^{-nm}(U_E)_{n>0}$构成 E的一个邻域基。

我们称这样的邻域 U_E 为嵌套邻域。

固定一个端周期同胚 $f:\Sigma\to\Sigma$。令 U_+ 为吸引端的嵌套邻域之并，令 U_- 为排斥端的嵌套邻域之并。我们称集合 U_+ （分别为 U_-）是 f的正 （分别为负）阶梯 。此外，若 $f^{\pm1}(U_\pm)\subset U_\pm$是一个真包含，则称阶梯 $U_\pm$是紧的 。一对不相交的正、负紧阶梯 U_+,U_-确定一个紧子曲面 $Y=\Sigma-(U_+\cup U_-)$，称为 f的核心 。

定义

$$\mathcal{U}_+=\bigcup_{n\geq0}f^{-n}(U_+)\text{ and }\mathcal{U}_-=\bigcup_{n\geq0}f^n(U_-).$$

我们称 $\mathcal{U}_+$ 为正逃逸集 和 $\mathcal{U}_-$ 为负逃逸集。

$\mathcal{U}_+$（分别为 $\mathcal{U}_-$）中的本质多重环是f 的正（分别为负）接合弧，当且仅当它是一个紧致正（分别为负）梯子的边界。给定 f 的一个正接合弧 j_+ 和一个负接合弧 j_-，我们定义

$$J^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(j_+) \text{ and } J^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(j_-).$$

在 Σ 上固定一个双曲度量 X，并令 $\mathcal{J}^\pm$ 为 $J^\pm$中每条曲线经紧化后的测地线之并。注意，$\mathcal{J}^\pm$ 是 Σ 上的一个测地层状结构，因为它是互不相交的简单测地线之并。与 f相关的***Handel–Miller*** 层状结构是如下定义的测地层状结构：

$$\Lambda^+ = \overline{\mathcal{J}^-} - \mathcal{J}^- \text{ and } \Lambda^- = \overline{\mathcal{J}^+} - \mathcal{J}^+.$$

注意，根据定义，$\mathcal{J}^-$ 与 Λ^+ 不相交，且 $\mathcal{J}^+$ 与 Λ^-不相交。

Handel–Miller 层状结构 $\Lambda^+ \cap \Lambda^-$ 的交集定义了逃逸点补集的一个马尔可夫分解，我们用 λ（f）表示该分解中关联矩阵的相应谱半径，它等于 f 在 $\Lambda^+ \cap \Lambda^-$上的作用的拓扑熵的指数。我们称 λ（f）为 f的***Handel–Miller*** 拉伸因子。更详细的讨论见 [CCF21]。我们常将 λ（f）简称为 f 的伸缩因子，或 f的端周期伸缩因子。

2.2. **Perron–Frobenius 理论**。 我们称一个具有非负整数项的 $n \times n$ 矩阵 $M = (m_{ij})$为不可约，如果对于每个$(i,\ j)$，都存在一个整数$k > 0$ 使得 m_{ij} 为正。若存在一个 $k > 0$ 使得 M^k 的每个项都为正，则称 M 为本原。 M 对应的图是一个有向图，其顶点集为 $\{v_i\}_{i=1}^n$，并且有从 v_j 到 v_i的 m_{ij} 条有向边。Perron–Frobenius 定理保证，这样的矩阵有唯一一个绝对值最大的实特征值。该特征值称为 Perron–Frobenius 特征值。Lind 的以下定理给出了反向结论 [Lin84]。

定理 2.1 (Lind)。 对于任意实代数整数 $\lambda > 0$，若其绝对值严格大于其伽罗瓦共轭，则存在一个非负整数矩阵，其某个幂严格为正，且以 λ 为特征值。

我们将这样的 λ称为 Perron 数，如定理 2.1 中所述。如果一个数的某个幂是 Perron 数，我们就称它为弱 ***Perron*** 数。

3. Warm Up: Integers

为了为一般情形做准备，我们先证明每个整数 $d \geq 2$ 都是某个无限型曲面上端周期映射的伸缩因子。我们在此引入的大部分记号在一般情形中也会再次使用。

定理 3.1. 对于任意整数 $d \geq 2$，存在一个无限型曲面 Σ 及一个端周期同胚 $f\colon\ \Sigma \to \Sigma$，其伸缩因子等于 d。

证明. 首先，令

$$\Sigma_0 := [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

表示 $\mathbb{R}^2$中的单位正方形。将 Σ_0 分割成 d个等宽的垂直条带，并用 $V_{(1)\,1,\ k}$表示这些条带的内部，其中 $k \in \{1,\dots,d\}$。现在，将 Σ_0分割成 d 个等高的水平条带，并用 $H^{(1)}_{1\,k\ ,}$ 表示这些条带的内部，其中 $k \in \{1,\dots,d\}$。虽然 V和 H上的上标 (1) 看起来可能多余，但在一般情况下是必要的，因此我们现在引入它，以保持一致性。令

$$V := \bigcup_{k=1}^{d} V^{(1)}_{1,k} \text{ and } H := \bigcup_{k=1}^{d} H^{(1)}_{1,k}.$$

令 $f_0 :\ V \to H$ 为分段线性同胚，它将每个 $V^{(1)}_{1\,k\ ,}$ 映射到 $H^{(1)}_{1\,k\ ,}$，并保持上/下和左/右定向。注意，f_0将每个 $V_{(1)\,1,\ k}$水平伸长 d 倍，并将 $V^{(1)}_{1\,k\ ,}$ 垂直压缩为原来的 d^{-1}。

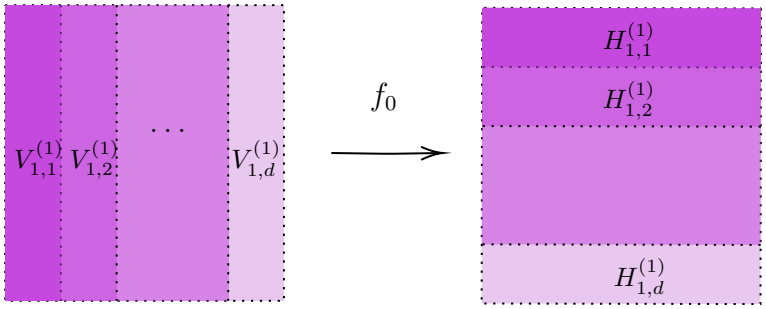


FIGURE 1. 分段线性同胚 $f_0 : V \to H$。

更具体地，对于 $(x,y) \in V_{(1)\,1,k}:=(\frac{k-1}{d},\frac{k}{d})\times(0,1)$，我们有

$$f_0(x,y) := \Big(dx - k + 1, 1 - \frac{(k-1+y)}{d}\Big).$$

注3.2。 此时，我们可以通过按需将边界上的区间两两识别，将 f_0 扩展为定义在正方形上的连续映射，以确保连续性。熟悉无限型平移曲面的专家或许会认出，这种构造会得到查马纳拉曲面：一种底层拓扑曲面为尼斯湖水怪 [Cha04]的平移曲面结构。我们不构造这种平移曲面（其底层拓扑曲面无法容纳端周期同胚），而是将正方形左上角和右下角的聚点膨胀为无限条带。这使我们能够将尼斯湖水怪曲面的单个端分裂为一对端；最终，这两个端将分别成为我们通过扩展 f_0所构造的端周期同胚的吸引端和排斥端。

现在，考虑平面中的四个无限条带：

$$E_L(0,1) := (-\infty, 0] \times [1 - \frac{1}{d^2}, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$E_T(0,1) := [0, \frac{1}{d^2}] \times [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$E_R(1,0) := [1, \infty) \times [0, \frac{1}{d^2}] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$E_B(1,0) := [1 - \frac{1}{d^2}, 1] \times [0, -\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$$

令 Σ_1 等于 Σ_0 与四条无限条带的并集。设

$$(V_{1,1}^{(1)})' = \text{int}\left(\overline{V_{1,1}^{(1)}} \cup E_L(0,1) \cup E_T(0,1)\right),$$

$$(V_{1,d}^{(1)})' = \text{int}\left(\overline{V_{1,d}^{(1)}} \cup E_R(1,0) \cup E_B(1,0)\right),$$

并且，对于 $2 \le j \le d-1$，令 $(V_{(1)\,1,\ j})' = V_1^{(1)}{}_{,\ j}$。最后，令

$$V_1 = \bigcup_j (V_{1,j}^{(1)})'.$$

类似地，定义每个 $(H_1^{(1)}{}_{,\ j})'$ 和 H_1。

我们的目标是定义一个同胚 $f_1 : V_1 \to H_1$，它在 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$ 中除点 (0，1) 和 (1，0) 外等于 f_0，并且在每条无限条带足够深处等于一个平移。为此，我们在 (0，1) 和 (1，0) 周围定义一个切换区域，使 f_1 的行为从 f_0 切换为平移。

令 W_1 为一条连接 $(0,\ 1 - \frac{1}{d})$ 和 $(\frac{1}{d^2},\ 1)$ 的线段，该线段包含于 $[0, \frac{1}{d}] \times [1 - \frac{1}{d}, 1]$ 中。定义 (0，-1) 的切换区域，记作 P_1，为平面中边界等于以下内容的区域

$$W_1 \cup (\{0\} \times [1 - \frac{1}{d^2}, 2]) \cup ([0, \frac{1}{d^2}] \times \{2\}) \cup (\{\frac{1}{d^2}\} \times [1, 2]).$$

设 $W_1' = \overline{f_0(W)}$。设 P_1' 为平面中的区域，其边界等于

$$W_1' \cup (\{-1\} \times [1, 1 - \frac{1}{d^2}]) \cup ([-1, \frac{1}{d}] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times [1 - \frac{1}{d^2}, 1]).$$

设 W_2 为连接点 $(1 - \frac{1}{d^2},\ 0)$ 与 $(1,\ \frac{1}{d})$ 的线段，且该线段包含于 $[1 - \frac{1}{d}, 1] \times [0, \frac{1}{d}]$ 中。定义 (1，0) 的切换区域，记为 P_2，为平面中边界等于

$$W_2 \cup (\{1\} \times [-1, \frac{1}{d}]) \cup ([1 - \frac{1}{d^2}, 1] \times \{-1\}) \cup (\{1 - \frac{1}{d^2}\} \times [0, -1]).$$

Let $W_2' = \overline{(f_0(W_2))}$. 令 P_2' 为平面中边界等于

$$W_2' \cup (\{2\} \times [0, \frac{1}{d^2}]) \cup ([1 - \frac{1}{d^2}, 2] \times \{0\}) \cup ([1, 2] \times \{1 - \frac{1}{d^2}).$$

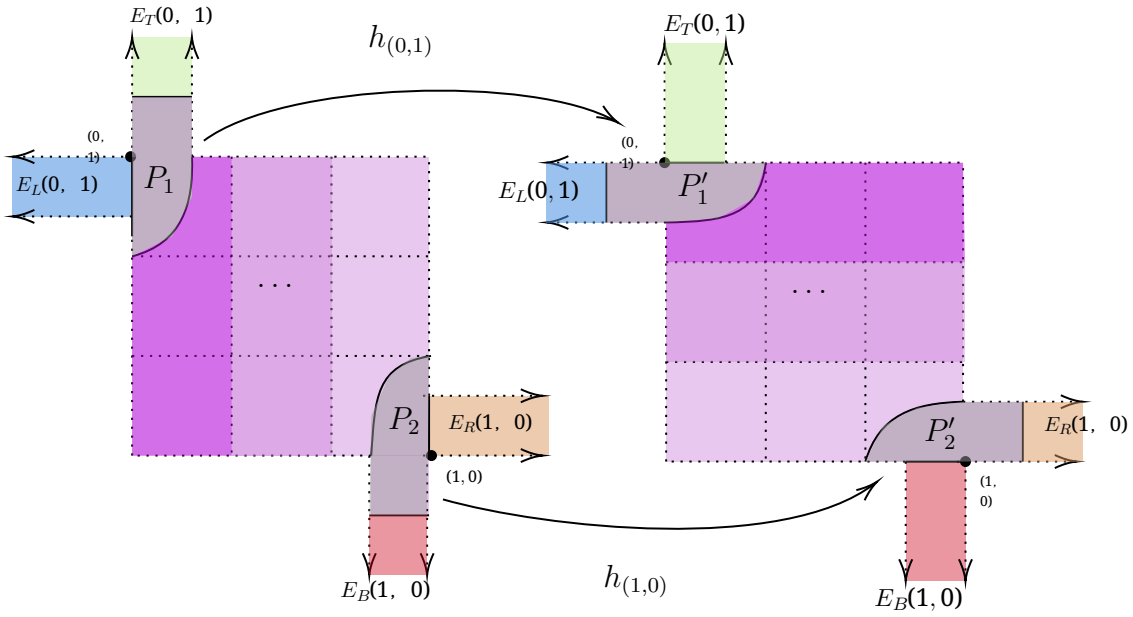


FIGURE 2. 同胚 f_1： $V_1 \to H_1$，颜色表示各区域的像。

定义同胚 $f_1 : V_1 \to H_1$ 如下:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f_0(x,y) & \text{if } (x,y) \in V_0 - (P_1 \cup P_2) \\ h_{(0,1)}(x,y) & \text{if } (x,y) \in P_1 \\ h_{(1,0)}(x,y) & \text{if } (x,y) \in P_2 \\ (x-1,y) & \text{if } (x,y) \in E_L(0,1) \\ (x,y-1) & \text{if } (x,y) \in E_T(0,1) - P_1 \\ (x+1,y) & \text{if } (x,y) \in E_R(1,0) \\ (x,y+1) & \text{if } (x,y) \in E_B(1,0) - P_2 \end{cases}$$

其中 $h_{(0,1)}$： $P_1 \to P_1'$ 和 $h_{(1,0)}$： $P_2 \to P_2'$ 是称为切换映射的同胚，选取它们使得 f_1 成为良定义的同胚。注意， f_1 的作用恰如我们所期望：它在正方形内部去掉切换区域后的部分限制为 f_0，在无限条带去掉切换区域后的部分执行平移，并在切换区域内实现 f_0 与平移之间的过渡。

令 L_1 表示 V_1 中各垂直条带左边的并集。($V_{1\,1}^{(1)}$，)′ 的左边是指

$$(\{0\} \times [0, 1 - \frac{1}{d^2}]) \cup (-\infty, 0] \times \{1 - \frac{1}{d^2}\}).$$

类似地，将 R_1 定义为垂直条带右边的并集，将T_1 定义为水平条带上边的并集，并将 B_1 定义为水平条带下边的并集。接下来，我们定义四个边

映射，它们来自将 f_1 和 f_1^{-1}延拓到分割边界的不同方式。

给定一个点 $x \in L_1$，存在一个序列 $x_i \in V_1$ “从右侧”收敛于 x，也就是说，该序列来自 x 所在的垂直条带的内部。若 x 位于 E_L 的底部边界分支 (0, 1) 中，即 $x \in ((-\infty,\ 0] \times \{1 - \frac{1}{d^2}\})$，那么“从右侧”是指 V_1 中任意一个收敛于 x 的序列。将 f_1 的左边映射定义为

$$f_{1,L} : L_1 \to L_1$$
$$f_{1,L}(x) := \lim_{i\to\infty} f_0(x_i),$$

其中 极限按照上文所述“从右侧”取。（参见记号 6.3。）

给定一个点 $x \in R_1$，存在一个序列 $x_i \in V_1$ “从左侧”收敛于 x，也就是说，该序列来自 x 所在的垂直条带的内部。若 x 位于 E_R 的顶部边界分支 (1，0) 中，那么“从左侧”是指 V_1 中任意一个收敛于 x 的序列。将 f_1 的右边映射定义为

$$f_{1,R} : R_1 \to R_1$$
$$f_{1,R}(x) := \lim_{i\to\infty} f_0(x_i),$$

其中，极限按照上文所述从“左侧”取值。

类似地，定义 f_1^{-1} 的上边缘映射，

$$f_{1,T}^{-1} : T_1 \to T_1$$

以及 f_1^{-1} 的下边缘映射，

$$f_{1,B}^{-1} : B_1 \to B_1$$

分别使用从“下方”和从“上方”收敛的类似概念。

现在，我们构造一个 2-复形

$$\Sigma_2 := \Sigma_1/\sim,$$

其中，$\sim$ 是由 $z \sim w$ 生成的 Σ_1 上的等价关系，当且仅当

(i) 存在 $x \in L_1 \cap R_1$和 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得 $f_{1,L}^N(x) = z$且 $f_{1,R}^N(x) = w$；或者 (ii) 存在 $x \in T_1 \cap B_1$和 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得 $f_{1\,T}^{-N}(x) = z$且 $f_{1\,B}^{-N}(x) = w$。

如果每个点的链接都同胚于 S^1 或 $[0, 1]$，那么 2-复形就是带边界曲面。注意，Σ_2 有一些顶点，其等价类中包含无穷多个顶点。在这种情况下，这样的顶点必定具有链接$\mathbb{R}$。事实上，link([(0,0)]$_\sim$) 和 link([(1,1)]$_\sim$) 就是如此。观察图 3, $[(0, 0)]_\sim$ 中黑色正方形顶点的集合，以及 $[(1,1)]_\sim$ 中黑色圆形顶点的集合。

令 Σ 为由 Σ_2 构造的曲面：先将 $[(0,\ 0)]_\sim$ 和 $([(1,\ 1)]_\sim$ 替换为它们的链接，然后沿边界加倍。注意，Σ 是一个与梯子曲面同胚的闭连通曲面，并且 f_1 唯一地延拓为同胚 $f : \Sigma \to \Sigma$.

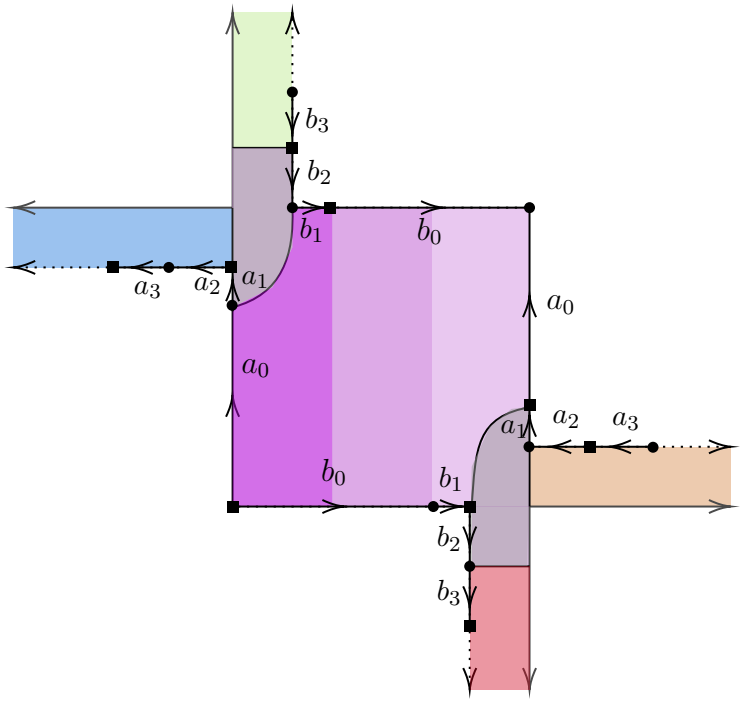


FIGURE 3. 对应于整数 $d = 3$ 的 2-复形 Σ_2。

由图3中的蓝色和橙色扩展矩形及其加倍所产生的 Σ 中的区域，定义了 Σ 吸引端的一个嵌套邻域。由图中的绿色和红色扩展矩形及其加倍所产生的 Σ 中的区域，定义了 Σ 排斥端的一个嵌套邻域。因此，按构造， f 是端周期的。此外，由图中紫色区域及其加倍所产生的 Σ 子曲面的矩形分解，为 f 的一个核心定义了马尔可夫分解，其关联矩阵为 $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$。因此， f 的伸缩因子为 d。

□

4. A Piecewise Linear Map

在本文余下各节中，固定一个 $n \times n$ 非负整数项的不可约矩阵 $M = (m_{ij})$，其谱半径等于 λ。令 $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_n)$（分别为 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_n)$）表示 M 的右（分别为左）佩龙–弗罗贝尼乌斯特征向量。

例4.1。（运行示例）设

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

M的特征多项式为 $x^4 - 2x^2 - x - 2$。 M的谱半径λ约为 1。785。注意，由于 det(M) $= -2$ λ 不是代数单位，因此不是任何有限型曲面上的伪阿诺索夫映射的伸缩因子。近似而言， $\vec{\eta}$ =(0。31，0。74，0。56，1) 和 $\vec{\omega}$ =(1。19，1。12，0。67，1)。

令 Σ_0 为 n 个矩形的不交并，记为 $Q_1, \ldots, Q_n$，其高度分别为 $\vec{\eta}$，宽度分别为 $\vec{\omega}$。将每个 Q_k 分割成 $\sum_{i=1}^{n} m_{ik}$ 个垂直条带。将这些垂直条带的内部记为 $V^{(k)}_{i,j}$，其中 $j \in \{1, \ldots, m_{ik}\}$，按从左到右的顺序排列：

$$V^{(k)}_{1,1}, \ldots, V^{(k)}_{1,m_{1k}}, V^{(k)}_{2,1}, \ldots, V^{(k)}_{2,m_{2k}}, \ldots, V^{(k)}_{n,1}, \ldots, V^{(k)}_{n,m_{nk}}.$$

注意，由于 $\vec{\omega}$ 是 M 的左特征向量，对应特征值为 λ,

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ik}(\lambda^{-1}\omega_i) = \omega_k.$$

因此，我们可以选择垂直条带，使得每个 $V^{(k)}_{i,j}$ 的宽度为 $\lambda^{-1}\omega_i$.

将每个 Q_k 分割成 $\sum_{i=1}^{n} m_{ki}$ 个水平条带。将这些水平条带的内部记为 $H^{(k)}_{i,j}$，其中 $j \in \{1, \ldots, m_{ki}\}$，按从上到下的顺序排列：

$$H^{(k)}_{1,1}, \ldots, H^{(k)}_{1,m_{1k}}, H^{(k)}_{2,1}, \ldots, H^{(k)}_{2,m_{2k}}, \ldots, H^{(k)}_{n,1}, \ldots, H^{(k)}_{n,m_{nk}}.$$

由于 $\vec{\eta}$ 是 M 的右特征向量，对应特征值为 λ,

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ki}(\lambda^{-1}\eta_i) = \eta_k.$$

因此，我们可以选择横条带，使每个 $H^{(k)}_{i,j}$ 的高度为 $\lambda^{-1}\eta_i$。

定义 4.2。 考虑由竖直线段构成的 Σ_0 的叶状结构，以及由水平线段构成的 Σ_0 的叶状结构。这些叶状结构可以拉直为 Σ_0 的层状结构，我们将其称为 的竖直和水平层状结构，分别记作 $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{H}_0$。

对于每个矩形 Q_i，选择一个双射

$$\sigma_i : \{H^{(i)}_{k,j} \mid 1 \le k \le n, 1 \le j \le m_{ik}\} \circlearrowleft$$

以及一个双射

$$\tau_i : \{V^{(i)}_{k,j} \mid 1 \le k \le n, 1 \le j \le m_{ki}\} \circlearrowleft .$$

调整条带的大小，使得 $\tau_i^{-1}(V^{(i)}_{k,j})$ 的宽度为 $\lambda^{-1}\omega_k$，且 $\sigma_i(H^{(i)}_{k,j})$ 的高度为 $\lambda^{-1}\eta_k$。

Let

$$V = \bigcup_{k,i,j} V^{(k)}_{i,j}$$

为竖条带内部的并集，并令

$$H = \bigcup_{k,i,j} H_{i,j}^{(k)}$$

是横条带内部的并集。

设 σ : $H \to H$ 为将 $H_{j\,k}^{(i)}$,映射到σ_i($H_{j\,k}^{(i)}$,)并保持左/右/上/下的分段线性同胚。类似地，设 τ : $V \to V$ 为将 $V_{(i)\ j,k}$ 映射到 τ_i($V_{(i)\ j,k}$)并保持左/右/上/下的分段线性同胚。

定义4.3。 对应于 M, $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$和 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 的分片映射是分段线性同胚

$$f_0 : V \to H$$

将 τ_k^{-1} ($V_{(k)\ i,j}$) 双射地映射到 σ_i($H_{k}^{(i)}$,$_j$)，同时保持左/右和上/下定向。注意，当且仅当 $1 \le i,k \le n$ 和$1 \le j \le m_{ik}$时， $V_{(k)\ i,j}$ 是 Σ_0 中的垂直条带。类似地，在 i,j,k 满足完全相同的条件时， $H_{k}^{(i)}$,$_j$ 是一个水平条带。因此， f_0 定义良好。

等价地，我们可以定义 $f_0 : V \to H$ 如下:

$$f_0 = \sigma \circ w \circ \tau$$

其中 w : $V \to H$ 是分段线性映射同胚，它将 $V_{j\,k}^{(i)}$, 映射到$H_{i\,k}^{(j)}$, ，并保持左、右、上、下定向。

根据我们对条带宽度和高度的选择，每个垂直条带在映射 f_0 下，水平方向按比例因子 λ 缩放，垂直方向按比例因子 λ^{-1}缩放。此外， f_0保持层状结构 $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{H}_0$不变。

对每个矩形 Q_i，令 $V^{(i)}{}_{\min}$ 表示出现在 Q_i最左侧的垂直条带。换言之，min 等于 (p, 1)，其中 p 是i^{th} 列中 M 里非零项对应的最小索引。类似地，令 $H^{(i)}{}_{\min}$ 表示出现在 Q_i最上侧的水平条带。

注意，对于同时位于某个垂直条带右边和另一个垂直条带左边的点， f_0 无法连续延拓到这些点。类似地，对于同时位于某个水平条带上边和另一个水平条带下边的点， f_0^{-1}也无法连续延拓到这些点。

为了处理 Σ_0 内部的这些垂直边上 f_0 的两种不同自然延拓，我们最终会将矩形左边的某些线段与矩形右边的某些线段识别起来。类似地，为了处理 Σ_0 内部的这些横边上 f_0^{-1} 的两种不同自然延拓，我们会将矩形上边的某些线段与矩形下边的某些线段识别起来。

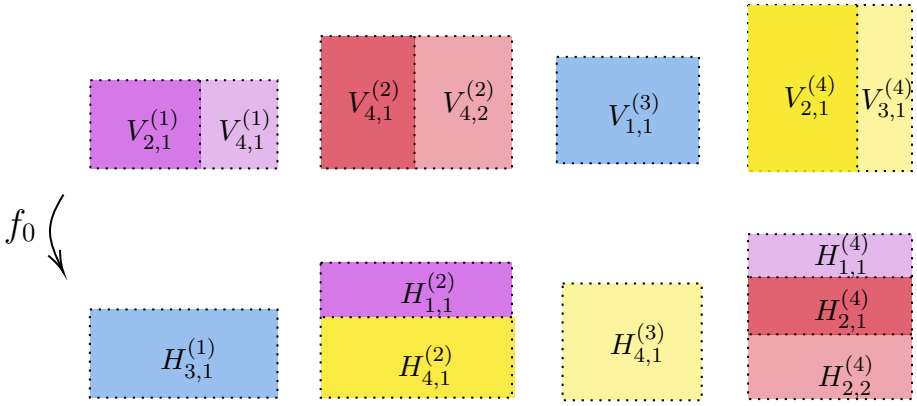


FIGURE 4. **运行示例：** 与例4.1中的 M 相对应的分片映射 f_0 : $V \to H$ ，以及每个 σ_k 和 τ_k 均为恒等映射。颜色表示各区域的像。

如果我们现在就在 Σ_0 上进行这些识别，那么 Σ_0 的边界上会有一些点成为这些边识别的聚点。为此，我们会等到将无限条带粘贴到 Σ_0 上之后再进行这些识别；这将在第6节中完成。

5. THE EDGE MAPS

Let

$$L := \bigcup_{k,i,j} \text{Left edge}(V^{(k)}_{i,j}) \text{ and } R := \bigcup_{k,i,j} \text{Right edge}(V^{(k)}_{i,j})$$

为竖条带的左边和右边。设

$$T := \bigcup_{k,i,j} \text{Top edge}(H^{(k)}_{i,j}) \text{ and } B := \bigcup_{k,i,j} \text{Bottom edge}(H^{(k)}_{i,j})$$

为横条带的上边和下边。

定义5.1。（的**边映射**）

（1） f_0 的左边映射

$$f_L : L \to L$$

由 $f_L(x) := \lim_{i\to\infty} f_0(x_i)$ 给出，其中 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ 在 $x_i \in V$ 从右侧趋近 x 时成立。根据 f_0 的定义， f_L 将左边($\tau_k^{-1}(V^{(k)}_{i,j})$) 双射到左边($\sigma_i(H^{(i)}_{k,j})$)。

（2） f 的右边映射是

$$f_R : R \to R$$

由 $f_R(x) := \lim_{i\to\infty} f_0(x_i)$ 给出，其中 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ 当 $x_i \in V$ 从左侧趋近于 x 时。根据 f_0 的定义， f_R 将 Right edge($\tau_k^{-1}(V^{(k)}_{i,j})$) 双射到 Right edge($\sigma_i(H^{(i)}_{k,j})$)

(3) 上边缘映射 f_0 是

$$f_T^{-1} : T \to T$$

由 $f_T^{-1}(x) := \lim_{i\to\infty} f_0^{-1}(x_i)$ 给出，其中 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ 当 $x_i \in H$ 从下方趋近于 x 时。根据 f_0 的定义， f_T^{-1} 将上边($\sigma_k(H_i^{(k)}, j)$) 双射到上边($\tau_i^{-1}(V_{(i)k,\ j})$)。

(4) f_0 的下边缘映射为是

$$f_B^{-1} : B \to B$$

由 $f_B^{-1}(x) := \lim_{i\to\infty} f_0^{-1}(x_i)$ 给出，其中 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ 当 $x_i \in H$ 从上方趋近于 x 时。根据 f_0 的定义， f_B^{-1} 将下边($\sigma_k(H_i^{(k)}, j)$) 双射到下边($\tau_i^{-1}((V_{(i)k,\ j})$)。

设 $X := L \cap R$ 和 $Y := T \cap B$。它们分别是那些不位于 Q_i 边界上的竖边与横边的并。注意， f_L 和 f_R 都定义在 X 上，而 f_T^{-1} 和 f_B^{-1} 都定义在 Y 上。这些映射之间的差异正是阻止我们连续延拓 f_0 和 f_0^{-1} 的原因。为了解决这个问题，我们最终需要将边界上的某些点识别起来。

定义 5.2. 我们定义四个有向图，每个图的顶点集均为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$。

1. 左边有向图 D_L 的有向边为

$$E^+(D_L) = \{(v_i, v_j) |\ f_L(\text{Left edge}(Q_i)) \subseteq \text{ Left edge}(Q_j)\}.$$

2. 右边有向图 D_R 的有向边为

$$E^+(D_R) = \{(v_i, v_j) |\ f_L(\text{Right edge}(Q_i)) \subseteq \text{Right edge}(Q_j)\}$$

3. 上边有向图 D_T 的有向边为

$$E^+(D_T) = \{(v_i, v_j) |\ f_T^{-1}(\text{Top edge}(Q_i)) \subseteq \text{Top edge}(Q_j)\}$$

4. 下边有向图 D_B 的有向边为

$$E^+(D_B) = \{(v_i, v_j) |\ f_B^{-1}(\text{Bottom edge}(Q_i)) \subseteq \text{Bottom edge}(Q_j)\}.$$

根据构造， D_L 和 D_R （分别地， D_T 和 D_B）是对应于 M（分别地， M^T）的有向图的子图。

引理 5.3. Q_i 的左（分别为右、上、下）边在 f_L（分别为 f_R、 f_T^{-1}、 f_B^{-1}）作用下包含一个周期点，当且仅当 v_i 是 D_L （分别为 D_R、 D_T、 D_R）中的一个周期顶点。否则，该边不含周期点。因此， Σ_0 的边界上在 f_L、f_R、 f_T^{-1} 或 f_B^{-1} 作用下为周期点的点只有有限多个。

证明。 注意到，顶点 v_i 在有向图 D_L 中的周期为 p，当且仅当

$$f_L^p(\text{Left edge}(Q_i)) \subseteq \text{Left edge}(Q_i).$$

此外，矩阵 M 的不可约性保证该映射

$$f_L^p : \text{Left edge}(Q_i) \to \text{Left edge}(Q_i)$$

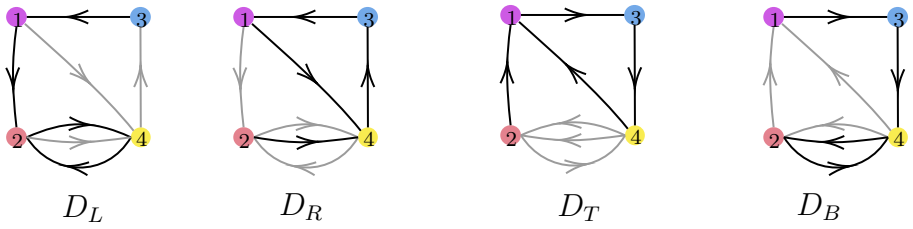


FIGURE 5.**运行示例：** 与图4所示映射 f_0 相对应的四个边有向图。黑色有向边属于这些边有向图，而浅灰色边则是与 M （针对 D_L 和 D_R ）以及与 M^T （针对 D_T 和 D_B）相对应的有向图中的其余边。

是压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，该压缩映射恰有一个不动点。

现在假设 $x \in L$ 是 f_L的一个周期为 p 的点，因此 $f_L^p(x) = x$。由于 $f_L(L)$包含在 Q_i的左边中，对于某个 i，必有 $x \in$左边(Q_i)。由于每条左边的像都包含在另一条左边中，因此必有 f_L^p(左边(Q_i)) $\subseteq$ 左边(Q_i)。因此， v_i 是 D_L 中的一个周期顶点，并且

$$f_L^p : \text{Left edge}(Q_i) \to \text{Left edge}(Q_i)$$

是一个压缩映射。因此， x 必定是唯一的不动点。

因此，每个矩形的左边 Q_i 至多有一个周期点，故 f_L 的周期点至多有 n 个。换言之，

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} f_L^i(L)$$

由至多 n 个点组成。对于 f_R， f_T^{-1}，以及 f_B^{-1}，也有类似的论证。 □

注意，如果 f_L （分别地， f_R）的一个周期点是矩形 Q_i 的左上角或左下角（分别地，右上角或右下角），那么它必然也是 f_T^{-1} 或 f_B^{-1} 的周期点（周期相同）。反过来，f_T^{-1}或 f_B^{-1}的一个周期点若是矩形 Q_i 的角点，也同时是 f_L 或 f_R 的周期点。

6. 拼接无限条带

本节将着手处理以下待办事项：

(1) 将无限条带粘接到 Σ_0 上，形成 Σ_1。(2) 以两种方式分割 Σ_1： V_1 和 H_1。(3) 构造一个同胚 f_1： $V_1 \to H_1$，使其在距离 f_0 的边映射的周期点足够远处等于 f_0。(4) 证明 f_1 的边映射没有周期点。(5) 构造一个 2-复形 Σ_2，将 Σ_1 中在不同边映射下为同一点的像的点进行识别，从而得到其商空间。

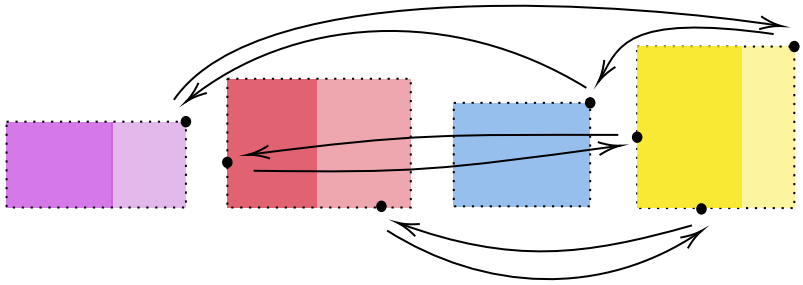


FIGURE 6. **运行示例：**图4中对应于 f_0 的边映射的周期点。箭头表示周期点在相应边映射下的轨道。

(6) 修改 Σ_2 以构造一个曲面 Σ，称为与 M 对应的曲面 .

我们先介绍一些记号，以便追踪定义映射 f_1所需的信息。

对于 f_0的四个边映射中每个有限轨道 C，选取 C上的一个特定周期点，称为的初始点。选取初始点时，应满足：如果 x是两个边映射下的周期点（即 x 是矩形Q_i的周期角点），且 x 是某个边映射中轨道 C 的初始点，那么 x 也应是第二个边映射中包含 x的轨道 C' 的初始点。

映射 f_1 将在添加到 Σ_0 以构成Σ_1的每条无限条带上进行移位，但我们只会在每个循环中、每条轨道的初始点处移位一次。

对于每个周期点 x，属于 f_L，令其对应的左侧无限条带为 x，定义为

$$E_L(x) = [0,1] \times [0,\infty).$$

类似地定义 $E_R(x)$、$E_T(x)$ 和 $E_B(x)$。令 $(z,\ w)_{L,\ x}$ 表示点 $(z,\ w)\ \in E_L(x)$，其他无限条带也类似。

定义与 对应的扩展矩形为

$$\Sigma_1 := \Sigma_0 \sqcup_g \left(\left(\bigcup_x E_L(x) \right) \cup \left(\bigcup_x E_R(x) \right) \cup \left(\bigcup_x E_T(x) \right) \cup \left(\bigcup_x E_B(x) \right) \right)$$

其中，每个并集均取遍相应边映射的周期点；无限条带通过分段线性映射 g 粘合到 Σ_0 上，该映射定义如下： g 的定义域是每个无限条带对应的 $[0,1] \times \{0\}$ 的并集，值域则是某些周期点的邻域的并集。

设 $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{p-1}$ 是 f_L 下由周期点组成的有限轨道，其中 $x_0\ \in$左边(Q_i) 是一个初始周期点。对于每个 $0 \le j \le p-1$，映射 g 在 $([0,1] \times \{0\})_{L,\ x_j}$ 上是一个线性映射，其像位于 L，使得

$$g(([0,1] \times \{0\})_{L,x_j}) = f_L^{2p+j}(\text{Left edge}(Q_i))$$

and

$$g((0,0)_{L,x_j}) = f_L^{2p+j}(\text{Bottom left corner}(Q_i)).$$

类似地，设 x_0，x_1，……，x_{p-1} 是 f_T^{-1} 下由周期点组成的有限轨道，其中 $x_0 \in$ 上边(Q_i) 是一个初始周期点。对于每个 $0 \le j \le p-1$，映射 g 在 $([0,1]\times\{0\})_{T,\,x_j}$ 上是一个线性映射，其像位于 T，使得

$$g(([0,1]\times\{0\})_{T,x_j}) = f_T^{-2p-j}(\text{Top edge}(Q_i))$$

and

$$g((0,0)_{T,x_j}) = f_T^{-2p-j}(\text{Top left corner}(Q_i)).$$

对于 f_R 和 f_B^{-1} 的周期点，我们也可以用同样的方式定义 g。

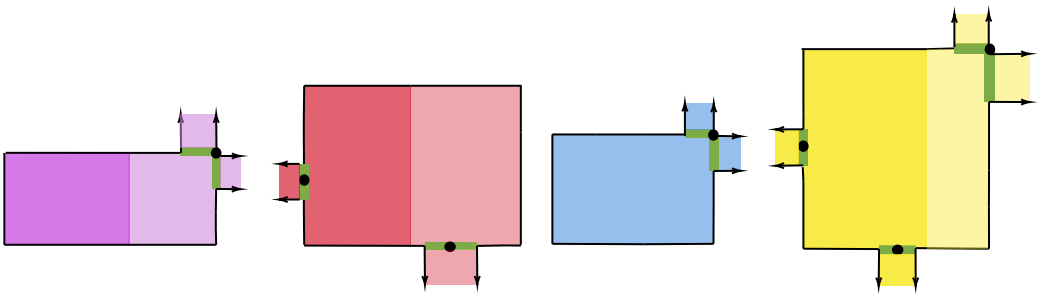


FIGURE 7. **运行示例：**图4中与 f_0 对应的扩展矩形。绿色区域表示通过映射 g粘接无限条带的位置。

对于每个 $V_{(k)\,i,j}$，令 $(V_i^{(k)}{}_{,j})'$ 为 Σ_1 的子集，由 $(V_i^{(k)}{}_{,j})$ 与所有粘接到 $V_i^{(k)}{}_{,j}$ 边界上的无限条带的并集的内部构成。类似地定义每个 $(H_i^{(k)}{}_{,j})'$，并令

$$V_1 = \bigcup (V_{i,j}^{(k)})'$$

and

$$H_1 = \bigcup (H_{i,j}^{(k)})'.$$

我们将构造一个同胚 $f_1 : V_1 \to H_1$，使其在无限条带的某个邻域之外与 f_0 一致，并且在每个无限条带足够深处等于一个平移。我们首先指定一些区域，在这些区域中，f_1 的行为从 f_0 的行为过渡到移位。

定义6.1（切换区域）。设 x 是 f_0 的一个边映射的周期点。与 x 对应的切换区域记作 $P(x)$，它是 Σ_1 中映射 f_1 从等于 f_0 切换为沿无限条带平移的区域。我们先为 f_L 和 f_R 的非角周期点定义该区域，然后为 f_T^{-1} 和 f_B^{-1} 的非角周期点定义该区域。最后，我们为边映射的角周期点定义该区域。

(i)左边映射和右边映射的非角周期点。令x_0，……，x_{p-1} 为 f_L 中一个周期为 p 的非角点周期点的轨道，

标记这些点，使得 x_0 为初始周期点。令 Q_i 为包含 x_0的矩形。令 W为一条路径，将 f_L^p（左上角（Q_i））连接到 f_L^p（左下角（Q_i））， 使得

$$f_0^j(\mathrm{int}(W)) \subseteq V_0 \cap H_0 \quad \text{for } 0 \le j \le p.$$

令 $I \subset$ 左边(Q_i) 为具有相同端点的子线段。对于$0 \le j \le p-1$，定义与 x_j 对应的切换区域，记作 $P(x_j)$，它是由 $f_0^j(W) \cup f_L^j(I)$ 围成的 Σ_1 区域（见图8）。

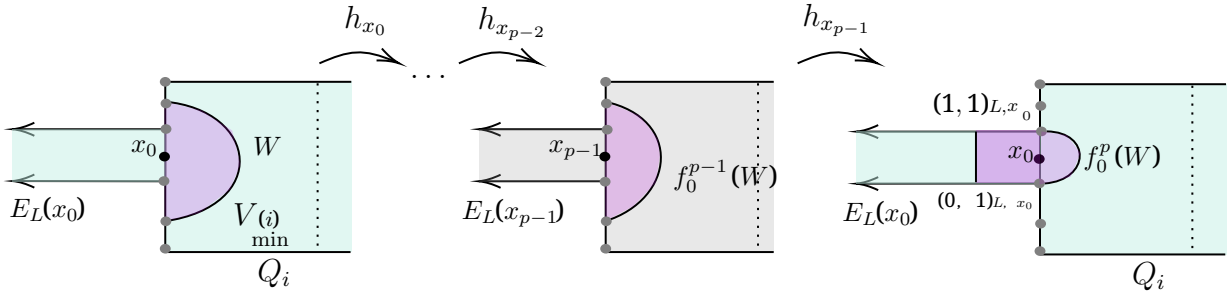


FIGURE 8. 轨道 x_0， x_1， ...， x_{p-1} 的非角周期点对应的切换区域 $P(x_i)$，由左侧前两个紫色区域表示。右侧最后一个紫色区域表示最终切换映射 $h_{x_{p-1}}$ 的像。这个最终区域是初始周期点 x_0 的一个邻域，但它不同于切换区域 $P(x_0)$，因为我们希望包含一次移位。

f_R 的非角周期点的切换区域也以类似方式定义。

(ii)上边与下边映射的非角周期点。令x_0，.....， x_{p-1} 为f_T^{-1} 的一个非角点周期点的轨道，并标记为使得 $f_T(x_j) = x_{j+1}$ 且 x_0 为初始点。令 W为一条连接 f_T^{-2p} (左上角(Q_i))与 f_T^{-2p} (右上角(Q_i))的路径，使得

$$f_0^j(\mathrm{int}(W)) \subseteq V_0 \cap H_0 \quad \text{for } 0 \le j \le p.$$

对于 $0 \le j \le p-1$，定义 $P(x_j)$为 Σ_1 中由f_0^j(int(W)以及正方形 $[0,1] \times [0,1]$ ⊆$E_T(x_j)$的左侧、上侧和右侧所围成的区域（见图9）。

f_B^{-1} 的非角周期点的切换区域的定义类似 y.

(iii) 角周期点。令 x_0，.....， x_{p-1}为 f_L 作用下的一条角点周期点轨道，其中 $x_0 =$ 为左上角(Q_i)。令 W 为一条连接f_L^p(左下角(Q_i))与 f_T^{-2p}(右上角(Q_i))的路径，使得

$$f_0^j(\mathrm{int}(W)) \subseteq V_0 \cap H_0 \quad \text{for } 0 \le j \le p.$$

令 $I \subset$ 左边(Q_i) 为端点为 f_L^p (左下角(Q_i)) 和 x_0 的子线段。

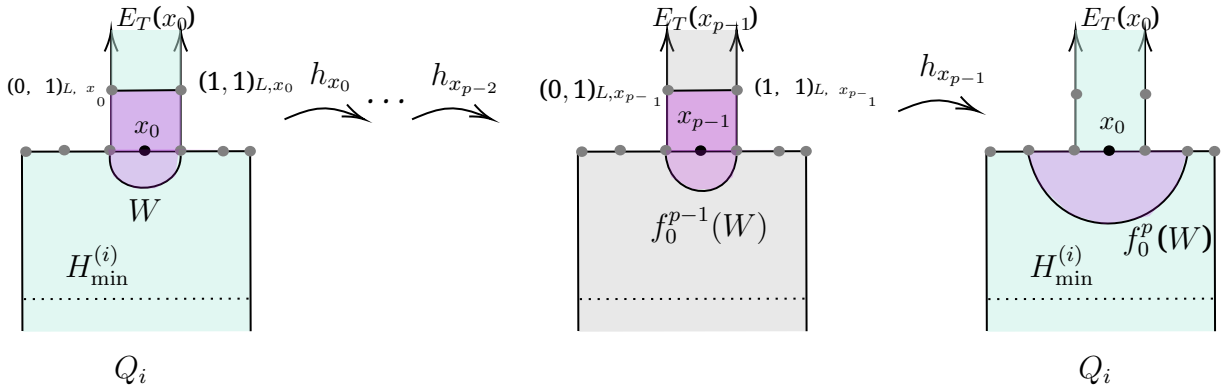
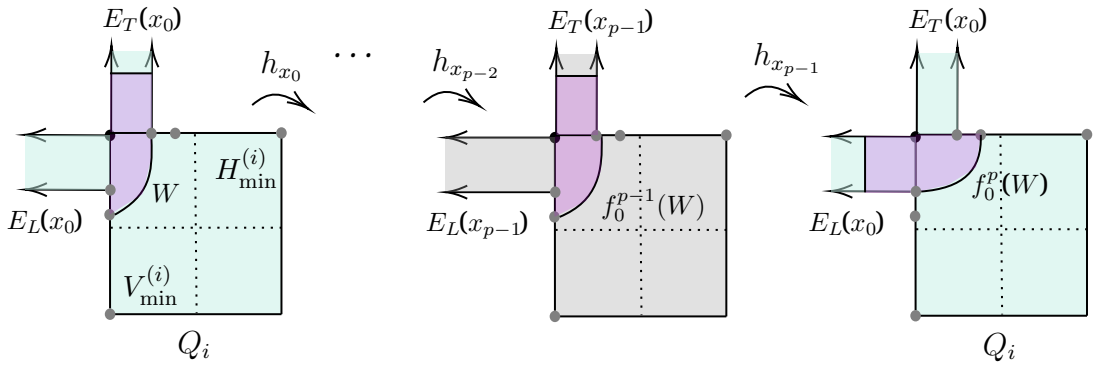


FIGURE 9. 轨道 $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ 中非角周期点 f_T 在初始周期点 x_0 下对应的切换区域 $P(x_i)$，由左侧前两个紫色区域表示。右侧最后一个紫色区域表示最终切换映射 $h_{x_{p-1}}$ 的像。这个最后的区域是初始周期点 x_0 的一个邻域，但它不同于切换区域 $P(x_0)$，因为我们希望包含一次移位。

对于 $0 \le j \le p-1$，定义 $P(x_j)$ 为 Σ_1 中的区域，其边界由$f_0^j(\text{int}(W))$、正方形 $[0,1]\times[0,1] \subseteq E_T(x_j)$ 的左、上、右边以及 $f_L^{p+j}(I)$ 构成（见图10）。



x_0 的切换区域由最左侧展开矩形中的紫色区域表示。最右侧展开矩形中的紫色区域是切换映射 $h_{x_{p-1}}$ 的像。

其余角点周期点的切换区域也以相同方式定义。

定义 6.2. 令 $f_1:\ V_1 \to H_1$ 为与下式给出的 相对应的扩展分段映射

$$f_1(y) = \begin{cases} f_0(y) & \text{if } y \in V_0 \text{ and } y \notin P(x) \text{ for any periodic } x \\ h_x(y) & \text{if } y \in P(x) \\ (z,w)_{L,f_L(x)} & \text{if } y = (z,w)_{L,x} - P(x) \text{ and } f_L(x) \text{ not initial} \\ (z,w)_{R,f_R(x)} & \text{if } y = (z,w)_{R,x} - P(x) \text{ and } f_R(x) \text{ not initial} \\ (z,w)_{T,f_T(x)} & \text{if } y = (z,w)_{T,x} - P(x) \text{ and } f_T(x) \text{ not initial} \\ (z,w)_{B,f_B(x)} & \text{if } y = (z,w)_{B,x} - P(x) \text{ and } f_B(x) \text{ not initial} \\ (z,w+1)_{L,f_L(x)} & \text{if } y = (z,w)_{L,x} - P(x) \text{ and } f_L(x) \text{ initial} \\ (z,w+1)_{R,f_R(x)} & \text{if } y = (z,w)_{R,x} - P(x) \text{ and } f_R(x) \text{ initial} \\ (z,w-1)_{T,f_T(x)} & \text{if } y = (z,w)_{T,x} - P(x) \text{ and } f_T(x) \text{ initial} \\ (z,w-1)_{B,f_B(x)} & \text{if } y = (z,w)_{B,x} - P(x) \text{ and } f_B(x) \text{ initial} \end{cases}$$

对于边映射的每个周期点 x，切换映射 h_x 是如下定义的连续插值。令 $x' = f_*(x)$ 对于 $* = L,\ R,\ B,$ 或 T。若 x' 不是初始周期点，则

$$h_x : P(x) \to P(x').$$

若 x' 是周期为 p的初始周期点，则

$$h_x : P(x) \to ([0,1]\times[0,1])_{*,x'} \cup \overline{(f_0^p(\text{int}(P(x'))))}$$

对于 $* = L,\ R,\ B$或 T，具体取决于边 x所在的位置。

注意，一般而言，f_T^{-1}（分别为 f_B^{-1}）有定义，但 f^T（分别为 f^B）没有定义。不过，在上述 f_1 的定义中，我们仅将 f_T（分别为 f_B）作用于在f_T^{-1}（分别为 f_B^{-1}）下为周期点的点 x，因为在这种情况下逆映射是良定义的。

接下来，我们定义四个新的边映射，它们来自将f_1 和 f_1^{-1}以不同方式延拓到划分 V_1 和 H_1的边界。

首先，令 L_1 为每个 $(V_i^{(k)}{}_{,\ j})'$ 的“左边”的并集；其中包括粘接到条带左边的任何无限条带的边界，但不包括左边上发生粘接的区域。若无限条带粘接在左边的顶部，则在 L_1 中只包括该无限条带的底边界。若无限条带粘接在左边的底部，则在 L_1 中只包括该无限条带的顶边界。类似地定义 R_1、T_1 和 B_1。

记号 6.3。每个点 $x \in L_1$ 都是一个点序列 $x_i \in V_1$ 的极限。若 x 不在无限条带的边界上，则可选取点 x_i，使其从右侧趋近于 x 。若 x 在无限条带的边界上，则取 V_1 中任意一个收敛到 x 的序列，并仍称该序列从右侧趋近于 x 。对于 R_1 中的点，我们也会使用类似的从左侧趋近的说法。对于 $x \in T_1$（分别为 B_1）中的点，我们将选取从下方（分别从上方）趋近于 x 的序列。

定义 6.4.（f_1的边映射）

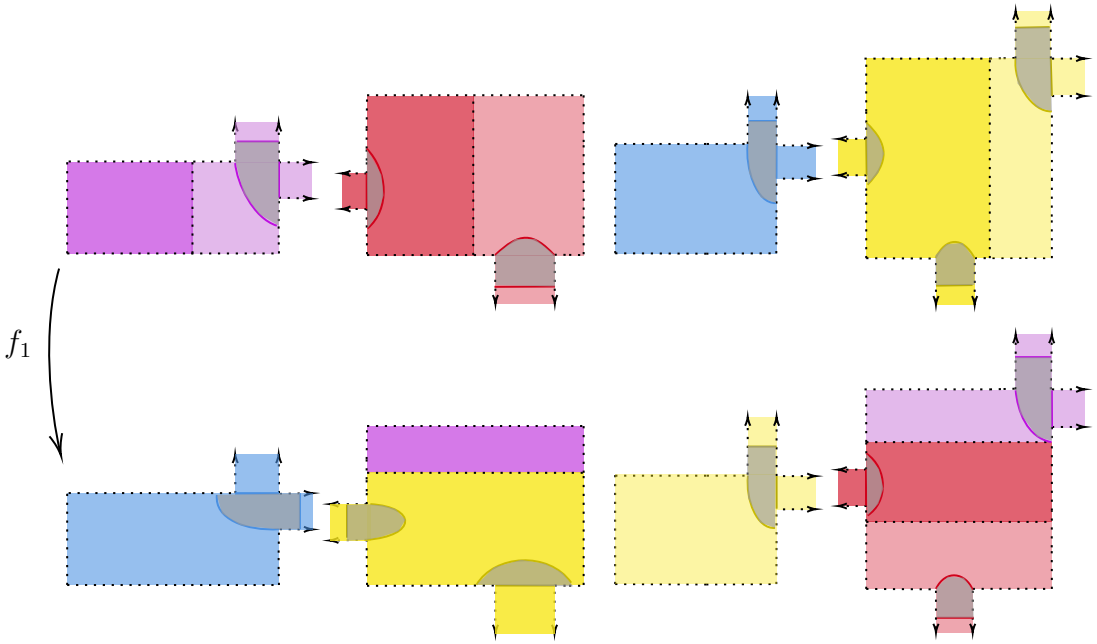


FIGURE 11. **运行示例：** 与 M 对应的扩展分段映射 $f_1 : V_1 \to H_1$。Q_1 和Q_2 中的三个周期点被选为初始周期点。切换区域及其像以灰色标示。

（1） f_1 的左边映射为

$$f_{1,L} : L_1 \to L_1$$

由 $f_{1,L}(x) := \lim_{i\to\infty} f_1(x_i)$ 给出，其中极限在 Σ_1 中取，并且当 $x_i \in V_0$ 从右侧收敛至 x 时取 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$。

(2) f_1 的右边映射为

$$f_{1,R} : R_1 \to R_1$$

由 $f_{1,R}(x) := \lim_{i\to\infty} f_1(x_i)$ 给出，其中极限在 Σ_1 中取，并且当 $x_i \in V_1$ 从左侧收敛至 x 时取 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$。

(3) f_1 的上边缘映射为

$$f_{1,T}^{-1} : T_1 \to T_1$$

由 $f_{1T}^{-1}(x) := \lim_{i\to\infty} f_1^{-1}(x_i)$ 给出，其中极限取于 Σ_1，且当 $x_i \in H_1$ 从下方收敛至 x 时，$x = \lim_{i\to\infty} x_i$。

（4） f_1 的下边缘映射为

$$f_{1,B}^{-1} : B_1 \to B_1$$

由 $f_{1B}^{-1}(x) := \lim_{i\to\infty} f_1^{-1}(x_i)$ 给出，其中极限是在 $\Sigma_1 \text{and} x = \lim_{i\to\infty} x_i$ 中取得的，且 $x_i \in H_1$ 收敛到 x 时是从上方逼近的。

由于我们限制了序列从哪个方向趋近于 L_1, R_1, T_1 或 B_1 中的点，因此这四个连续延拓都是良定义的。

引理 6.5。 如果 $x \in L_1$ 和 x 不是 V_1中某个垂直条带的角，那么对每个幂 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$f_1^N{}_{,L}$在 x 处都是单射。此外，如果 $x \in L_1$ 是垂直条带的一个角，那么对于每个 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，至多存在另一个点 $w \in L_1$，使得 $f_1^N{}_{,L}(w) = f_1^N{}_{,L}(x)$。

对于 $f_{1,R}$、$f_{1\,T}^{-1}{}_{,}$和 $f_{1\,B}^{-1}{}_{,}$也有类似的结论。

证明。 首先，假设对于不同的 $x, y \in L_1$，有 $f_{1,L}(x) = f_{1,L}(y)$。设 $\{x_i\}$（分别为 $\{y_i\}$）是 V_1 中的序列，从右侧收敛到 x（分别为 y）。$\{f_1(x_i)\}$ 的某个尾部包含在 H_1中的单个水平条带内，$\{f_1(y_i)\}$也同样如此。如果这两个尾部都包含在同一个水平条带内，那么由于 $f_1 : V_1 \to H_1$ 是一个同胚，我们便有 $x = y$。因此，这两个尾部包含在不同的水平条带内。于是 $f_{1,L}(x)$既是某个水平条带上边左端点，也是另一个水平条带下边左端点。因此，根据 f_1的定义，我们必有 x 和 y 都是不同垂直条带的左角，一个是左下角，另一个是左上角。

现在假设，对于不同的点 $x, y \in L_1$，有 $f_1^N{}_{,L}(x) = f_1^N{}_{,L}(y)$。根据上一段，要么 $f_{1\,L}^{N-1}{}_{,}(x) = f_{1\,L}^{N-1}{}_{,}(y)$，要么 $f_{1\,L}^{N-1}{}_{,}(x)$ 和 $f_{1\,L}^{N-1}{}_{,}(y)$ 是不同垂直条带的角。令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为满足$f_1^n{}_{,L}(x) = f_1^n{}_{,L}(y)$的最小正整数。因此，$f_{1\,L}^{n-1}{}_{,}(x)$ 和 $f_{1\,L}^{n-1}{}_{,}(y)$ 是不同垂直条带的角。若 $n = 1$，则证明完毕，所以假设 $n \geq 2$。那么 $f_{1\,L}^{n-1}{}_{,}(x)$ 和 $f_{1\,L}^{n-1}{}_{,}(y)$ 都包含在矩形的左边中，因此各自都是一个矩形的角，也就都是水平条带的角。在 $f_{1,L}$ 的幂映射下，只有垂直条带的角会被映射到水平条带的角。因此，x 和 y 是角。

引理中的最后一个结论可由以下观察得出：在 $f_{1,L}$作用下，垂直条带的角至多有两个会映射到同一点；而垂直条带的角在$f_{1,L}$ 下的原像包含于垂直条带的角所构成的集合中。

其他边映射的证明类似。注意，在 $f_{1\,T}^{-1}{}_{,}$或 $f_{1\,B}^{-1}{}_{,}$作用下，横条带的角至多有两个会映射到同一点。□

我们构造了 f_1，使得当 N充分大时，边映射的第 N_{th}次迭代会将每个边界点映射到附着于 Σ_0的某个无限条带边界上的点。一旦某次迭代进入无限条带，f_1 便作为移位作用，确保此后的所有像构成一个无限离散集。我们在以下引理中将此结论形式化。

引理 6.6。 f_1 的边映射的每个轨道都是无限且离散的。

证明。 令 $x_0 \in L_1$ 并定义

$$x_j := f_{L,1}^j(x_0)$$

对每个 $j \in \mathbb{Z}_+$。要么 $x_0 \in \partial(E_L(z) - P(z))$，要么对于某个 $z \in L_0$，$x_0 \in \partial P(z)$ 在 f_L 下具有周期 p；要么对于某个 i，$x_0 \in$ 左边 (Q_i)；要么 $x_0 \in \text{int}(\Sigma_0)$。

(i) 首先，假设 $x_0 = (\alpha, \beta)_{L,z} \in \partial(E_L(z) - P(z))$。那么

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} (\alpha_k, \beta_k)_{L,z}$$

对于某个序列 $(\alpha_k, \beta_k)_{L,z}$，它属于 $\text{int}(E_L(z) - P(z))$。在这种情况下，

$$f_1^{pm+s}(\alpha_k, \beta_k) = (\alpha_k, \beta_k + m)_{L, f_L^s(z)}$$

对于每个 $m \in \mathbb{Z}_+$ 和每个 $0 \le s \le p-1$。因此

$$f_{1,L}^{pm+s}(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta + m)_{L, f_L^s(z)}.$$

因此，x_0 的轨道是 Σ_1 中一个无限且离散的集合。

(ii) 现在，假设 $x_0 \in \partial P(z)$ 并且

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} a_k$$

对于某个序列 a_k，其位于 $\text{int}(P(z))$ 中。根据切换映射的定义，

$$f_1^{2p}(a_k) := (f_1^p \circ h_{z_{p-1}} \circ h_{z_{p-2}} \circ \cdots \circ h_{z_0})(a_k) \in \text{int}(E_L(z) - P(z)).$$

因此，x_{2p} 是 $\text{int}(E_L(z) - P(z))$ 中点的极限。所以，根据第 (i) 部分，x_0 的轨道是无限且离散的。

(iii) 假设 $x \in$ 位于 Q_i 的左边。只要 x_j 位于一条没有 f_L 的任何周期点的左边上，就有 $x_{j+1} = f_{1,\,L}(x_j) = f_L(x_j)$。由于有向图 D_L 中每条足够长的有向路径最终都会包含一个周期顶点，因此存在某个幂 N，使得 $x_N = f_L^N(x_0)$ 位于 Q_k 的左边上，而该左边包含 f_L 的一个周期点。取 N 为首次发生这种情况的时刻。在这种情况下，

$$x_{N+1} = f_{1,L}(x_N) \in \partial P(z).$$

因此，根据第 (ii) 部分，x_0 的轨道是无限且离散的。

(iv) 最后，假设 $x_0 \in$ 位于 $\text{int}(\Sigma_1)$ 中。由于 $x_0 \in$ 位于 $\text{int}(\Sigma_0) \cap L_1$ 中，我们知道 x_0 是一列点的极限，这些点从右侧向 x_0 收敛，并且满足 $f_1(y_i) = f_0(y_i)$。因此，$x_1 = f_L(x_0)$。于是，x_1 位于某个扩展矩形 Q_k 的左边上。因此，根据第 (iii) 部分，x_0 的轨道是无限且离散的。□

定义6.7。该与 M 相对应的无限二维复形

$$\Sigma_2 := \Sigma_1 / \sim$$

其中，$\sim$ 是由 $z \sim w$ 生成的等价关系，条件是

(i) 存在 $x \in L_1 \cap R_1$ 和 $N \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，使得 $z = f_{1,L}^N(x)$ 和 $w = f_{1,R}^N(x)$；或

(ii) 存在 $y \in T_1 \cap B_1$ 和 $N \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，使得 $z = f_{1\,T}^{-N}(y)$ 和 $w = f_{1\,B}^{-N}(y)$。

2-复形 Σ_2 的定义旨在使我们能够将 f_1 扩展为 Σ_2 上的同胚。然而， Σ_2 通常并不是曲面。为此，我们将对 Σ_2 做一些小的修改，构造出一个曲面 Σ，然后证明 f_1 可扩展为 Σ 上的同胚。在接下来的几节中，我们将说明，可以进一步修改 Σ，使其成为无限型（第7节），并且我们构造的同胚确实是端周期的（第8节）。首先，我们着重证明若干技术引理，这些引理将有助于构造 Σ 并扩展 f_1。

对于定义 6.7 中引入的等价关系，我们将在引理 6.9 的证明中，以及在第 8 节证明所构造的映射是端周期的过程中，使用以下关于无限等价类的刻画。

引理 6.8. 等价类 $[f_{1,L}(z)]_\sim$ 是无限的，当且仅当 $[z]_\sim$ 是无限的。同样，对于$f_{1,R}$、 $f_{1\,T}^{-1}$,和$f_{1\,B}^{-1}$,也成立。

证明。 如果 $z \sim w$ 通过 $z \in L_1$ 和 $w \in R_1$的 $\sim$ 定义中的部分（i），那么$f_{1,L}(z) \sim f_{1,R}(w)$。因此，如果 $[z]_\sim$ 是无限的，那么 $[f_{1,L}(z)]_\sim$也是无限的。

另一方面，如果 $[f_{1,L}(z)]_\sim$ 是无限的，那么存在一个互不相同的序列

$$w_0 \sim w_1 \sim w_2 \sim \dots$$

其中 $w_0 = f_{1,\,L}(z)$，每个 w_i 各不相同，且上述每个关系都由 (i) 得出。因此，对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在 N_k， $J_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、 $x_k \in L_1$ 和 $y_k \in R_1$，使得

$$\begin{aligned} w_{2k} &= f_{1,L}^{N_k}(x_k), \\ w_{2k+1} &= f_{1,R}^{N_k}(x_k), \\ w_{2k+1} &= f_{1,R}^{J_k}(y_k), \text{ and} \\ w_{2k+2} &= f_{1,L}^{J_k}(y_k). \end{aligned}$$

如果 N_k 或 J_k 中大于或等于 2 的只有有限多个，那么对于所有足够大的 k，都有$f_{1,\,R}(x_k) = f_{1,\,R}(y_k)$。由引理 6.5 可知， R_1 中使 $f_{1,\,R}$ 非单射的点只有有限多个。因此，对于足够大的k，有 $x_k = y_k$，但这与 w_i 互不相同矛盾。

因此， N_k 或 J_k 中有无穷多个大于或等于 2。于是，我们可以在等价类 $[z]_\sim$ 中不同的元素之间找到一列类似的关系。□

接下来，我们将进一步描述等价关系 $\sim$ 在 Σ_1 上的等价类。之后，我们就可以证明，经过适当的修改，我们可以从 2-复形 $\Sigma_2 = \Sigma_1/\sim$得到一个真正的曲面。

引理 6.9。 $\sim$ 的每个等价类都是离散的。无限等价类只有有限多个，而这些点在 Σ_2 中的链接同胚于 $\mathbb{R}$，或同胚于可数无限个圆的互不相交并。有限等价类要么是单元素集，要么恰好包含两个点；这些点在 Σ_2 中的链接分别同胚于 $\mathbb{S}^1$ 或 $[0,1]$，。

证明。 如果 $z \in$int(Σ_1)，那么 z不在 $f_{1,\,L}$、 $f_{1,\,R}$、 $f_{1\,B}^{-1}$、或 $f_{1\,T}^{-1}$的像中。因此，$[z]$是一个单元素集，其链接与 $\mathbb{S}^1$同胚。

假设 $z \in \partial\Sigma_1$，并且对于所有 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$[z]$ 都不包含任何边映射下垂直或水平条带某个角的像。假设 $z \in L_1$，并且

$$z = z_0 \sim z_1 \sim z_2$$

使得上述每个关系都来自 $\sim$ 定义中的 (i) 或 (ii)。由于$z_0 \in L_1$ 且不是一个角，我们有 $z_0 \notin T_1 \cup B_1$。因此，根据 $\sim$ 定义的第 (i) 部分可得 $z_0 \sim z_1$。于是存在某个 $x \in L_1 \cap R_1$ 和某个 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得$z_0 = f_1^N{}_{,L}(x)$ 且 $z_1 = f_1^N{}_{,R}(x)$。由于 z_1 也不是一个角，关系 $z_1 \sim z_2$ 同样可由 $\sim$ 定义的第 (i) 部分得到。因此存在某个 $x' \in L_1 \cap R_1$ 和某个 $N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得 $z_1 = f_1^{N'}{}_{R,}(x')$ 且 $z_2 = f_1^{N'}{}_{L,}(x')$。不失一般性，设 $N' \geq N$。那么

$$\begin{aligned} z_1 &= f_{1,R}^N(x) = f_{1,R}^{N'}(x') \\ &= f_{1,R}^N(f_{1,R}^{(N'-N)}(x')) \end{aligned}$$

由于 x 不是角点，根据引理 6.5，$f_1^N{}_{,R}$ 在 x 处是单射的。因此 $x = f_1^{N'-N}{}_{R}{}_{,}(x')$。由于 $x \in L_1 \cap R_1$ 以及 $f_{1,R}$ 的像位于 $R_1 -$（L_1- 角点）中，我们必有 $N' = N$，从而 $x' = x$。于是 $z_2 = z_0$。因此，$[z] = \{z, z_1\}$ 或 $[z] = \{z\}$，并且根据构造，分别具有 $\mathbb{S}^1$ 或 $[0,1]$,链接。

由于水平条带和竖条带的角点只有有限多个，并且根据引理 6.6，边映射的轨道是离散的，所以在 Σ_1 中存在一个点的等价类是无限的离散点集，并且每个无限等价类都是离散集。

注意，Σ_1 中的左边去掉无限条带的边界后，构成 $f_{1,L}$的有界基本域。由离散性可知，该基本域中只有有限多个点具有无限等价类。由引理 6.8可知，因此总共只有有限多个无限等价类。此外，离散性意味着，Σ_2 中每个无限等价类的链接同胚于 $\mathbb{R}$ 或可数个圆的不交并。□

当 M 是本原矩阵时，为构造与 M 对应的曲面，记作Σ：将每个链接同胚于 $\mathbb{R}$ 或可数无限个圆的互不相交并的点 $x \in \Sigma_2$，替换为链接(x)，从而得到 Σ_2'。接下来，沿其边界将 Σ_2' 双重化，得到 Σ。当 M 不可约但非本原时，我们将链接为 $\mathbb{R}$ 或可数无限个圆的互不相交并的每个点替换为其链接，然后执行略作修改的双重化操作（以确保连通性），从而构造 Σ。关于不可约但非本原的情形，参见第 9 节。

命题 6.10. Σ是一个曲面。

证明。 根据引理 6.9，只有有限多个点会使 Σ_2 不成为带边界曲面，因为这些点的链接同胚于 $\mathbb{R}$ 或可数无限个圆的互不相交并。 Σ_2 的其余点要么是内点，其邻域同胚于圆盘（如果它们的链接是 $\mathbb{S}^1$），要么是边界点，其邻域同胚于半圆盘（如果它们的

链接是 $[0,1]$）。从 Σ_2构造 Σ 时，首先将 Σ_2 中链接同胚于 $\mathbb{R}$ 的有限多个点替换为它们的链接。由于此前链接为 $\mathbb{R}$的所有点现在都是链接为 $[0,1]$的边界点，这就得到一个带边界曲面。然后沿边界加倍，得到闭曲面Σ。□

定义 6.11。 注意， $\mathcal{V}_0, \mathcal{H}_0$ 上的竖直叶状结构和水平叶状结构 Σ_0可自然延拓为 Σ_2上的一对奇异、横截且带测度的叶状结构$\mathcal{V}_2, \mathcal{H}_2$；其中，将 $\mathcal{V}_0$ 和 $\mathcal{H}_0$ 延拓到无限条带上的方式由 $\sim$的识别所诱导。图 12 展示了一个示例。注意，与具有无限等价类的点相交的 $\mathcal{V}_2$ 和 $\mathcal{H}_2$ 的叶集是零测度的。因此，我们将 Σ 上的一对奇异、横截且带测度的叶状结构 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{H}$ 定义为：移除这组零测度的叶后，由 $\mathcal{V}_2$ 和 $\mathcal{H}_2$所诱导的叶状结构。

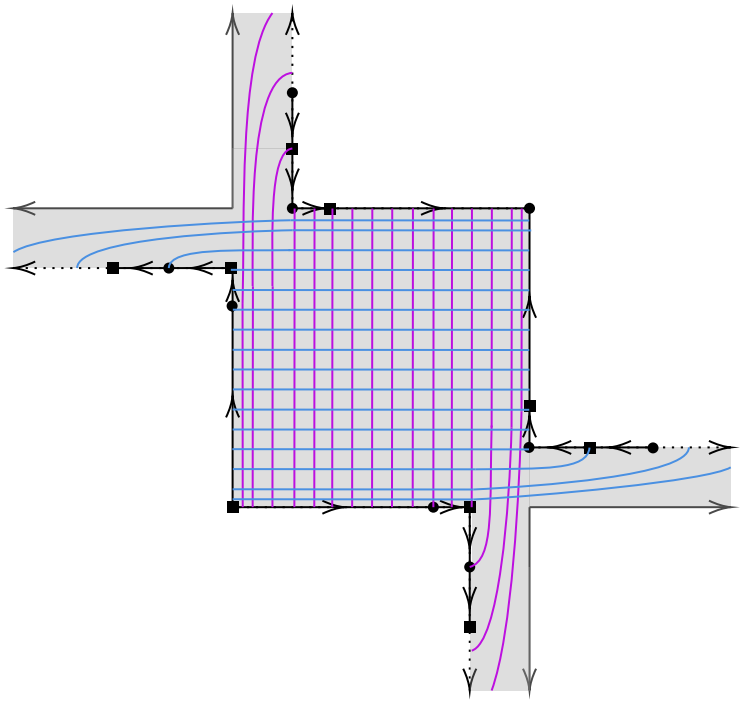


FIGURE 12. 第 3 节中的 Σ_2上的水平叶状结构和竖直叶状结构 $\mathcal{V}_2$ 和 $\mathcal{H}_2$ 。

7. 确保 Σ 为无限型

前面各节中构造的曲面 Σ可能是有限型的，并且 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 是伸缩因子等于 λ 的伪阿诺索夫同胚。准确理解这种情况何时发生将会很有趣。不过，我们应当指出，这种情况只可能出现在非常受限的情形下。例如，如果特征值 λ 不是双佩龙代数单位，那么 Σ 就不可能是有限型的，因为每个伪阿诺索夫伸缩因子都是双佩龙数。

为了确保每个特征值 λ 都能成为端周期伸缩因子，我们证明，对构造稍作改动，始终可以得到一张无限型曲面。为此，我们首先证明，至少存在一个角点在 f_0 的边映射作用下是周期的。然后，我们沿着不变集插入把手；该不变集由沿角点周期点的两个邻域粘合的两条无限条带的未识别侧所产生的外部直线构成。

命题 7.1。对于任意不可约矩阵 M，存在双射 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ 和$\{\tau_i\}_{i=1}^n$，使得 Q_1 的左上角是 f_L的一个周期点。

证明。由于 M 不可约，在与 M 关联的有向图中存在一个包含顶点 v_1的嵌入环 C。按顺序记下该循环的（互不相同的）指标为

$$1 = \Sigma_1, \Sigma_2, s_3, \ldots, s_k.$$

根据关联有向图的定义，对于每个 j，必有 $m_{s_{j+1},\, s_j} \neq 0$（在 s_i的指标中对 k 取模进行加法）。因此，对于每个 j，在 V 中存在一个垂直条带$V^{(s_j)\ s_{j+1},\ 1}$，以及在 H 中的一个水平条带 $H^{(s_{j+1})\ s_j,\ 1}$。

现在，选取一组双射 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$，使得

$$\tau_{s_j}(V_{\min}^{(s_j)}) = V_{s_{j+1},1}^{(s_j)},$$

对于每个 $1 \leq j \leq k$，同样对 k取模进行加法。

此外，选择一组双射 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$，使得

$$\sigma_{s_{j+1}}(H_{s_j,1}^{(s_{j+1})}) = H_{\min}^{(s_{j+1})},$$

对每个 $0 \leq j \leq k-1$ 都成立，其中在 s_i 的指标中再次采用模 k 加法。由于这些 s_j 互不相同，因此存在双射集合 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$，使得该条件成立。

令 x_j 为每个 $1 \leq j \leq k$ 中 Q_{s_j} 的左上角。现在，$f_L(x_j)$ 是 f_L 的上端点（左边$(V^{(s_j)}_{\text{最小}})$）。由于 $\tau_{s_j}(V^{(s_j)}_{\text{最小}}) = V^{(s_j)\ s_{j+1},\ 1}$，我们有

$$\begin{aligned} f_L(\text{Left edge}(V_{\min}^{(s_j)})) &= \text{Left edge}(\sigma_{s_{j+1}}(H_{s_j,1}^{(s_{j+1})})) \\ &= \text{Left edge}(H_{\min}^{(s_{j+1})})). \end{aligned}$$

因此，$f_L(x_j)$ 是 $Q_{s_{j+1}}$ 的左上角，也就是 x_{j+1}。所以 $f_L^k(x_1) = x_1$。 □

例 7.2（运行示例）。考虑与 M 对应的有向图中的循环 $v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_4 \to v_1$。上述命题的证明表明，若$\{\tau_i\}_{i=1}^4$ 和$\{\sigma_i\}_{i=1}^4$ 满足：

$$\tau_1(V_{2,1}^{(1)}) = V_{2,1}^{(1)}, \quad \tau_2(V_{4,1}^{(2)}) = V_{4,1}^{(2)}, \quad \tau_3(V_{1,1}^{(3)}) = V_{1,1}^{(3)}, \quad \tau_4(V_{2,1}^{(4)}) = V_{3,1}^{(4)}$$

and

$$\sigma_1(H_{3,1}^{(1)}) = H_{3,1}^{(1)}, \quad \sigma_2(H_{1,1}^{(2)}) = H_{1,1}^{(2)}, \quad \sigma_3(H_{4,1}^{(3)}) = H_{4,1}^{(3)}, \quad \sigma_4(H_{2,1}^{(4)}) = H_{1,1}^{(4)}$$

于是，$x_1 =$ Q_1 的左上角在 f_L作用下是周期性的。

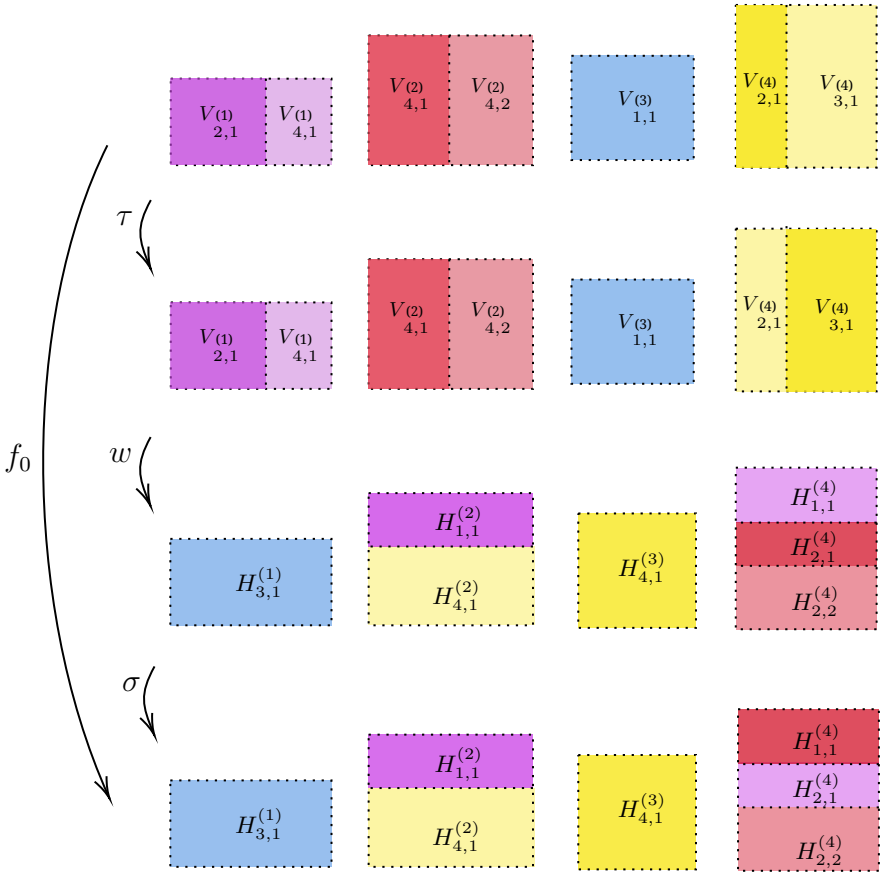


FIGURE 13. **运行示例：** 分片映射 $f_0 : V \to H$对应于 M 来自例4.1，其中映射 σ 和 τ 按命题 7.1 选取，以确保 Q_1的左上角（记为 x_1）是边映射的一个周期点。事实上，$f_L^4(x_1) = x_1$。

注意，更改 τ 和 σ后，我们需要调整条带的宽度和高度，使得 f_0 仍然沿水平方向以 λ 伸展，并沿垂直方向以$1/\lambda$收缩。整个矩形的高度和宽度保持不变。四个有向图也会发生变化，如图14所示。

现在我们可以保证至少存在一个角点周期点，因此至少存在一个由相邻两条无限条带未识别的边所形成的 Σ_2 的周期边界分支。在这条直线上选取 x ，并令$G = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$。将 G 中的每个点替换为其链接。与之前一样，将无限等价类替换为其链接，沿边界分支取双并并识别，以形成 Σ。注意，无限等价类都不出现在指定的周期边界分支上，因此， G 中各点的链接不会妨碍这一步。G 中各点的链接将导致至少两个由亏格累积的端。

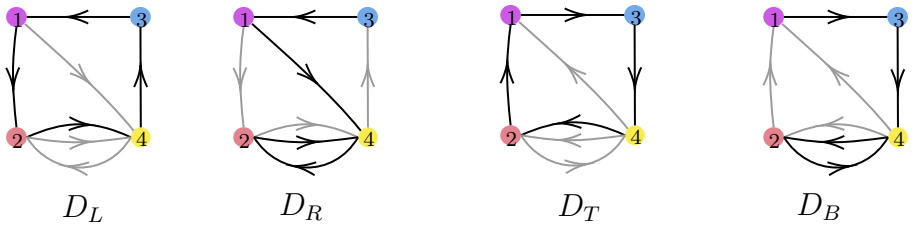


FIGURE 14. **运行示例：** 例 7.2 中与 $f_0 : V \to H$ 对应的四个边有向图。黑色有向边属于有向图，浅灰色边是有向图中其余的边：对于 D_L 和 D_R，这些边对应于 M；对于 D_T 和 D_B，则对应于 M^T。

8. The End-Periodic Map

下面两个引理将帮助我们确保能够找到 Σ 各端的嵌套邻域，使其具有吸引性或排斥性。

引理8.1。 存在 N，使得 $f_1^N{}_{,L}(L_1)$ 包含在无限条带的边界中。对于 $f_{1,R}$, $f_1^{-1}{}_{T,}$和 $f_1^{-1}{}_{B,}$，也有类似结论。

证明。 对于任意有限有向图，存在 k，使得每条长度为 k 的有向路径都终止于一个周期顶点。设 k 为有向图D_L的这样一个数。那么对于任意 $x \in L \subseteq \Sigma_0$，点 f_L^k (x) 位于一条左边上，而该左边包含一个周期点 z。因此，对于任意 $x \in L_1$，我们有 $f_{1,L}^k(x)$ 位于一条左边上，而该左边包含一条无限条带。设 p 为 z的周期。根据切换区域的定义，$f_1^{k+p}{}_L{}_{,}(x)$ 要么包含在 z的切换区域边界中，要么包含在无限条带的边界中。根据切换映射的定义，$f_1^{k+2p}{}_L{}_{,}(x)$ 必须位于无限条带的边界中。

根据 f_1的定义，如果 y 位于某条无限条带的边界上，那么对于每个 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$f_{1,}^i$ $_L(y)$都位于某条（可能不同的）无限条带的边界上。因此，令

$$N = k + 2\max\{p \mid p \text{ is the period of a cycle in } f_L\}$$

即可证明该引理。 □

引理 8.2。 存在 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于每条无限条带 $E_*(x)$，若$\beta > \alpha$，则$(0, \beta)_{*,x}$以及$(1, \beta)_{*,x} \in E_*(x)$ 的 $\sim$等价类要么是无限的，要么包含于无限条带集合的边界中。这里 $* = L$、R、T或 B。

证明。令 N 为引理 8.1 中四个边映射里最大的 N。取足够大的 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于每条无限条带$E_{*,x}$ 以及每个 $\beta > \alpha$，点$(0, \beta)_{*,x}$$(1, \beta)_{*,x}$均包含在 N^{th}像中；这里采用的是在该点有定义的 f_1 的边映射。

如果 x 是角点周期点，那么相应无限条带的边界上存在一些点，在这些点处 f_1 未定义边映射。它们的等价类是单元素集。

现在假设 $z \in f_1^{N,\ L}(L_1)$ 且其等价类有限。根据引理 6.9，$[z]_\sim$ 要么是单元素集，要么恰好包含两个点。如果 $[z]_\sim$ 包含第二个点 w，那么存在某个 $x \in L_1 \cap R_1$ 和某个 $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，使得 $z = f_1^{K,\ L}(x)$ 且 $w = f_1^{K,\ R}(x)$。由于 $x \in L_1 \cap R_1$ 与 $f_{1,\ L}$ 的像不相交于 $L_1 \cap R_1$，我们必有 $K \geq N$。因此 $w = f_1^{K,\ R}(x) \subseteq f_1^{N,\ R}(R_1)$。根据 N 的选取，w 位于无限条带的边界上。

对于 $f_1^{N,R}(R_1)$ $f_{1\,T}^{-N}(T_1)$ 和 $f_{1\,B}^{-N}(B_1)$ 中的元素，也有类似的论证。 □

命题 8.3. 映射 $f_1 : V_1 \to H_1$ 可延拓为端周期同胚 $f : \Sigma \to \Sigma$。

证明。每个点 $x \in \Sigma$ 都是点序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq V_1$的极限。首先，假设 x 不是 Σ 中的一个点，该点是由 Σ_1中的一个无限等价类经吹起得到的。则根据引理 6.8，$[\lim_{i\to\infty} f_1(x_i)]_\sim$ 也是一个有限等价类。由于等价关系 $\sim$将点在左边映射和右边映射下的不同像识别为同一点，因此令 $f(x) := [\lim_{i\to\infty} f_1(x_i)]_\sim$ 是良定义且连续的。

现在假设 $x \in \Sigma$ 是通过吹起 Σ_2 中的一个无限等价类而得到的 Σ 中的一个点。设 $[z]_\sim$ 为该无限等价类。由于 $x \in \mathrm{link}([z]_\sim)$，存在一个相应的序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq V_1$，它收敛到点 $z \in [z]_\sim$。存在点 $y \in \mathrm{link}([\lim_{i\to\infty} f_1(x_i)]_\sim)$，它与序列$\{f_1(x_i)\}$ 相对应。根据引理 6.8，$[\lim_{i\to\infty} f_1(x_i)]_\sim$ 是一个无限等价类，因此 $y \in \Sigma$。令 $f(x) = y$。f_1 的连续性保证，按所述方式将其延拓到这些链接后仍然连续。

同理，f^{-1} 定义良好且连续。因此，$f\colon \Sigma \to \Sigma$ 是一个同胚。

为了证明 $f\colon \Sigma \to \Sigma$ 是端周期的，只需证明存在 $m > 0$，使得对于 Σ 的每个端 E，都存在 E 的一个嵌套邻域 U_E，满足以下二者之一：$f^m(U_E) \subsetneq U_E$，且集合 $\{f^{nm}(U_E)\}_{n>0}$ 构成 E 的一个邻域基；或者 $f^{-m}(U_E) \subsetneq U_E$，且集合 $\{f^{-nm}(U_E)\}_{n>0}$ 构成 E 的一个邻域基。

固定 Σ的一个端 E。在 Σ_1 中存在某个无限条带 $E_*(x) = [0,1] \times [0,\infty)$，以及某个 $\gamma > 0$，使得由$([0,1] \times (\gamma,\ \infty))_{*,\ x}$ 在 Σ 中诱导的区域包含于 E的一个邻域内。这里，$* = L,\ R,\ T$或 B。

设 α 如引理 8.2 中所述，并假设 $\alpha > \gamma$。根据 α的选取，存在由$([0,1] \times (\alpha, \infty))_{*,\ x}$ 诱导的区域的一个邻域 U_E，它完全包含在无限条带中。如有必要，扩大 α 以消除与切换区域的任何交集。若 $* = L$ 或 R，则 U_E 包含在左右无限条带中。若 $* = T$ 或 B，则 U_E 包含在上下无限条带中。

令 m为 f_L、f_R、f_T^{-1}和 f_B^{-1}中每个循环的周期之积。现在，嵌套行为由构造可知。更具体地说，若 $* = L$ 或R，则 $\{f^{nm}(U_E)\}_{n>0}$ 构成 E的一个邻域基。若 $* = T$ 或 B，则$\{f^{-nm}(U_E)\}_{n>0}$ 构成 E的一个邻域基。□

现在我们将 f 称为：$\Sigma \to \Sigma$ 所对应的端周期同胚。注意，在构造 f 和 Σ 时，我们所作的选择包括：双射 σ

以及 τ，即竖直条带和水平条带的双射； f_0 的边映射的每个有限轨道对应的初始周期点；每个初始周期点对应的精确路径 W ；以及切换映射（每个切换映射都可以是任何一种在切换区域边界上的行为符合要求的同胚）。

命题 8.4。对应于M的端周期同胚 $f:\ \Sigma \to \Sigma$ 具有 *Handel-Miller* 伸缩因子 $\lambda(f) = \lambda$，即 M的谱半径。

证明。我们的目标是证明，由 $\Lambda^+ \cap \Lambda^-$ 确定的马尔可夫分解的关联矩阵与由叶状结构 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{H}$诱导的马尔可夫分解的关联矩阵一致，即

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

其中 M 是我们起初所使用的不可约矩阵。

用层状结构替代叶状结构 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{H}$ 会更方便。借用记号，我们将由相应叶状结构的奇异叶吹起后得到的层状结构记为 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{H}$ 。由于这些叶状结构彼此横截，且没有阶数为 1 或 2 的棘爪，这些层状结构与原叶状结构确定相同的马尔可夫分解和关联矩阵。

设 J 是一个本质多重环，它围成一个有限型子曲面， $\mathcal{V}$ 和$\mathcal{H}$ 在其中相交，并记为 $J = j_+ \sqcup j_-$，其中 j_+（分别地， j_-）围成由附着在矩形左、右（分别地，上、下）两侧的无限条带所产生的区域的邻域。根据命题 8.3， j_+ 和 j_- 分别是 f的正交界和负交界线。令

$$J^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(j_+), \qquad J^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(j_-).$$

在 Σ 上固定一个双曲度量，并令 $\mathcal{J}^\pm$ 表示 $J^\pm$中各曲线的测地代表的并集。Handel–Miller 层状结构为

$$\Lambda^+ = \overline{\mathcal{J}^-} - \mathcal{J}^-, \qquad \Lambda^- = \overline{\mathcal{J}^+} - \mathcal{J}^+.$$

经过拉直后， j_+ 与 $\mathcal{V}$ 不相交，并且以一致的定向与 $\mathcal{H}$ 的叶相交，且相交方式本质上不可消除。因此，每个迭代像 $f^k(j_+)$ 都位于 $\mathcal{V}$ 的叶之间，同时与 $\mathcal{H}$的叶相交。由于 f 在 $\mathcal{V} \cap \mathcal{H}$ 上的动力学由不可约矩阵 M决定，迭代像 $f^k(j_+)$ 会聚集到 $\mathcal{V}$的叶上。因此， $\Lambda^- = \mathcal{V}$ 作为射影测度层状集。对 j_- 应用对称论证可知， $\Lambda^+ = \mathcal{H}$ 作为射影测度层状集。□

注 8.5. 请注意，命题 *8.4* 的证明蕴含了这样一个结论：我们构造的所有端周期同胚都具有一项额外性质，即它们的 *Handel-Miller* 层状结构允许存在全支撑的横截测度，这些测度会被伸缩因子收缩或扩张。感谢 *Chi Cheuk Tsang* 建议我们强调这一事实。

9. Ensuring Σ is Connected

在本节中，我们将证明，对于任意弱佩龙数，都可以以一种确保其连通的方式构造 Σ，同时不影响命题 8.3 和命题 8.4 的结论。

命题 9.1. 如果 λ 是一个佩龙数，那么命题 *8.3* 中的曲面 Σ可以选为连通的。

证明。设 M 是一个本原非负整数矩阵，其谱半径等于 λ。设 $f_0 : V \to H$ 是对应于 M 的分片映射，其中 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$和 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 来自命题 7.1。设 Σ是相应的无限型曲面，$f : S \to S$ 是相应的端周期同胚。

由于 M 是本原的，存在一个幂次 k，使得 M^k 的第一列为正。因此，对每个 $1 \le i \le n$，$f_0^k(Q_1) \cap Q_i \neq \emptyset$。对于每个 i，令 U_i为 Σ_0中由 Q_i诱导的 Σ的子集。对于每个$1 \le i \le n$，我们必须有 $f^k(U_1) \cap U_i \neq \emptyset$。由于 U_1 是连通的，$f^k(U_1)$ 是连通的。因此，每个 U_i 都属于同一个连通分支，从而 Σ 是连通的。□

命题 9.2. 如果 μ 是弱佩龙数，则存在一个本原矩阵 M，其谱半径为 μ，使得命题 *8.3* 中的曲面 Σ 可以选为连通的。

证明. 设 μ 是弱佩龙数。那么对于某个幂 k，$\mu^k = \lambda$ 是佩龙数。设 M 是一个谱半径等于 λ的本原非负整数 $m \times m$ 矩阵。令 $n = km$，并定义一个 $n \times n$ 分块置换矩阵：

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & M \\ I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}$$

其中 I_m 是 $m \times m$ 单位矩阵。注意，M' 的谱半径恰好是 $\lambda^{1/k} = \mu$。

令 $f_0 : V \to H$ 为对应于 M' 的分片映射，其中 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$来自命题 7.1。按照所述构造继续进行，直到得到 Σ_3；它等于 Σ_2，其中每个无限等价类都替换为其链接。现在将 Σ_3 加倍，得到 Σ_3 及其加倍后的 Σ_3'。

注意，如果我们通过恒等映射沿边界粘合 Σ_3 和 Σ_3'，就会构造出一个具有 k 个连通分支的曲面，$C_1, \dots C_k$，并且所得的同胚将对每个 i映射 $C_i \mapsto C_{i+1}$，下标按模 k计算。

令 U_i 为 Σ_0 中由 Q_i 诱导得到的 S_3 的子集，并令 U_i' 为它的双倍。由于我们选择双射 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$，以确保 Q_1 的左上角在 f_L 作用下是周期的（因此在 f_T^{-1} 作用下也同样如此），所以 U_1 有一个边界分支，它来自沿着这个角点周期点的一个邻域附接的两条无限条带的未识别侧面。令 A_1 为该边界分支的左侧无限射线，

并令 B_1 为该边界分支的上方无限射线，因此 A_1 和 B_1 在点 x_1 相交。注意，根据 M' 的构造，A_1 的轨道是一组无限射线 A_2，……，A_k，它们是 U_{m+1}，U_{2m+1}，$\dots U_{n-k+1}$ 的等价边界分支；B_1 的情形也类似。

现在，分别通过恒等映射将每个 A_i 与 A_i' 粘合，并将每个 B_i 与 B_{i+1}' 粘合。通过恒等映射将 Σ_3 和 Σ_3' 剩余的边界分支粘合。若有需要，按照第7节所述，在 A_i 和 B_i 边界分支处加入亏格，并令 Σ 为所得的无限型曲面。

注意，所有 x_i 都被识别，因此 U_1、U_{m+1}、U_{2m+1}、$\dots U_{n-k+1}$ 及其双重曲面都属于 Σ 的同一个连通分支。

由于 M 是本原的，存在某个幂 Σ，使得 M^s 的第一列为正。因此，存在某个幂 t，使得 $(M')^t$ 的第一列中从第一项到 m^{th} 项均为正。于是，当 $1 \le i \le m$ 时，$f^t(U_1) \cap U_i \neq \emptyset$。因此，$U_1$、……、$U_m$ 都属于 Σ 的同一个连通分支。此外，对于每个 $j \in \{1, m+1, 2m+1, \dots n-k+1\}$，$f$ 将 $U_j \cup \dots \cup U_{j+m}$ 映射到 $U_{j+m+1} \cup \dots \cup U_{j+2m}$。因此，对于这些 j 的取值，U_j、U_{j+1}、……、U_{j+m} 都属于同一个连通分支。其双重曲面也同样如此。既然我们已经证明 U_1、U_{m+1}、U_{2m+1}、$\dots U_{n-k+1}$ 及其双重曲面都属于同一个连通分支，Σ 就是连通的。□

10. Discussion and Further Questions

尽管我们的工作结合 Cantwell–Conlon–Fenley 的工作，完整刻画了端周期伸缩因子，但仍有许多有趣的问题有待解答。我们在此列出其中几个，供感兴趣的读者参考。在有限型情形中，确定复杂度固定的曲面上可实现的最小伪阿诺索夫伸缩因子，几乎仍是一个完全未解的问题。事实上，对于任何亏格为 ≥ 2 的带穿孔曲面，或任何亏格为 ≥ 3 [CH08] 的闭曲面，这一数值都尚不为人所知。尽管最近 [TZ25] 的工作解决了辫子情形中除 6 种情况外的所有情况；另见 [SKL02、HS07、LT11]。将这一问题推广到无限型情形的一种自然方式，是用固定核心特征取代固定复杂度。沿用 [FKLL25], 的定义，f 的核心特征 为

$$\chi(f) = \max_{Y \subset \Sigma} \chi(Y),$$

其中，最大值取遍 f 的所有核心 $Y \subset \Sigma$。

问题 10.1。对于固定的核心特征 m，任何具有 $\chi(f) = m$的端周期同胚 f 所能实现的最小伸缩因子是多少?

我们还可以通过固定一个曲面 L来进一步限定这个问题。对于固定的核心特征，在端较多还是较少的曲面上会出现最小伸缩因子，我们尚不清楚。另一种限定方式是：对于固定的核心特征，计算由我们用于证明第 1 节的构造所产生的最小端周期伸缩因子。这自然引出了一个问题：我们能否计算所构造的端周期映射的拓扑复杂度界限？一个端周期

映射 f 的拓扑复杂度由其容量 表示，容量由核心特征 $\chi(f)$和端复杂度 $\xi(f)$组成。从本质上说，这些量分别描述了 f 表现为伪阿诺索夫映射的子曲面的复杂程度，以及 f 在各端上的移位量。详细定义和讨论见 [FKLL25，第 2 节。3]

我们认为，通过这一构造得到的同胚是无环面的，但这一点只有在第 3 节构造的例子中才显而易见。一般而言，可以确定的是，我们构造的所有例子都既非强不可约，也非不可约。事实上，无限等价类的链接集合在 f 下保持不变。这些链接产生了一套周期弧和约化曲线。

问题 10.2。 能否修改这一构造，以产生不可约的端周期同胚？更一般地说，我们能否刻画哪些弱佩龙数可以作为（强）不可约端周期同胚的伸缩因子？

从一个略有不同的角度出发，我们提出以下问题。

问题 10.3。 通过我们的构造得到的无限型曲面 Σ 能否实现为有限型平移曲面的极限？我们得到的相应端周期映射能否实现为这些有限型平移曲面上的伪阿诺索夫映射的极限？

请注意，第 3 节中为 $d = 2$ 构造的例子可以由有限型平移曲面上的一列伪阿诺索夫映射逼近。这一序列中的两个连续元素如图 15 所示。另见 [Bow13]，其中给出了这类逼近的另一个例子。

此外，Chi Cheuk Tsang 指出，对于第 3 节中的例子，我们可以应用 Landry–Minsky–Taylor 的“去旋”构造，从而得到一列逼近给定端周期映射的伪阿诺索夫映射。特别地，第 3 节中的所有例子都具有一个紧化映射环面，该环面恰好有两个边界分支，且二者都是亏格为 2 的曲面，其接合弧由一条非分离曲线组成。因此，存在一个从紧化映射环面的正边界到负边界的同胚，将正接合弧类映射到负接合弧类，于是我们可以应用 [LMT，第 3.9] 条命题。若能确定是否可以修改我们的普遍构造，以保证所构造的端周期同胚在梯子曲面上实现，将会很有意思。

最后，我们提出一个问题。回想一下，为了确保我们的构造得到的是无限型曲面，我们在第7节中不得不多做一些工作。然而，我们并不知道何时需要进行这项额外调整，也不知道何时曲面本身已经是无限型的。

问题 10.4. 是否可能完全刻画出我们的构造（或其某种变体）在何种情况下会产生有限型曲面？如果不能，是否存在能够保证所得曲面为有限型曲面的充分条件？

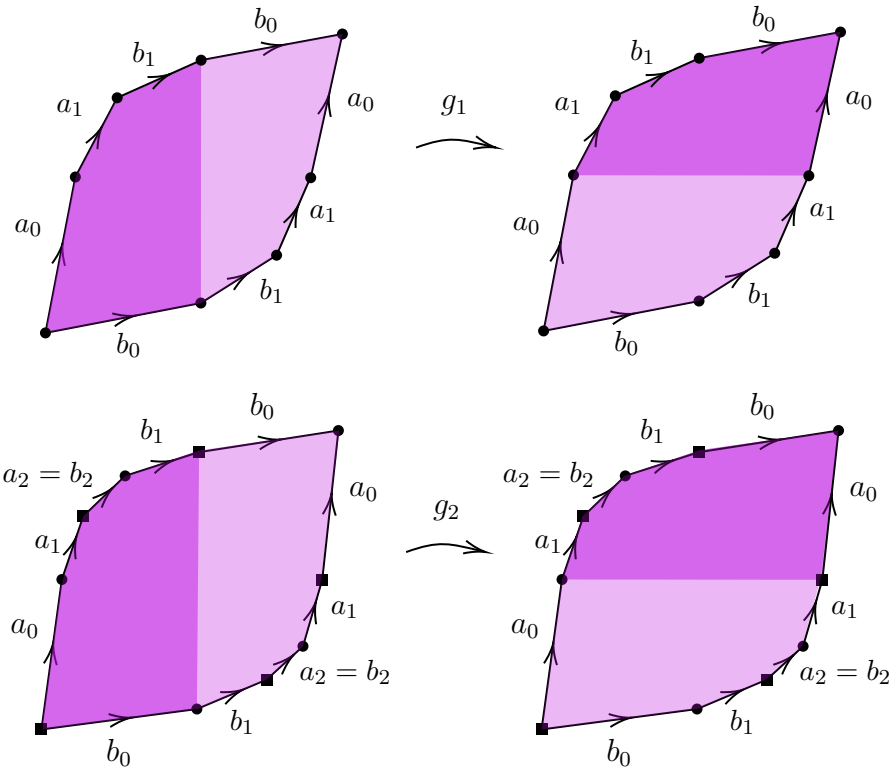


FIGURE 15. 两个有限型平移曲面及其伪阿诺索夫映射。延续这一序列，可逼近第 3 节中为 $d = 2$ 构造的端周期同胚。

这似乎是一个非常困难的问题。例如，Baik–Rafiqi–Wu 给出了充分条件，使得与我们类似的构造能够产生一个配备伪阿诺索夫同胚的有限型曲面 [BRW16]。不过，他们的假设相当严格。

REFERENCES

[Bow13] Joshua P Bowman. Arnoux–Yoccoz 曲面的完整族。*GeometriaeDedicata*, 164(1):113–130，2013。[BRW16] Hyungryul Baik、Ahmad Rafiqi 和 Chenxi Wu。构造具有给定膨胀率的伪阿诺索夫映射。*Geom. Dedicata*，180:39–48，2016。[Buc25] Ellis Buckminster。端周期映射的周期点。*Groups, Geometry, and Dy-namics*，2025。[CCF21] John Cantwell、Lawrence Conlon 和 Sergio R.Fenley。曲面与叶状结构的端周期自同构。*Ergodic Theory Dynam. Systems*，41(1):66–212，2021。[CH08] Jin-Hwan Cho 和 Ji-Young Ham。二属曲面的最小膨胀率。*Experimental Mathematics*，17(3):257 – 267，2008。[Cha 04] R. Chamanara。无限型曲面的仿射自同构群。载于*In thetradition of Ahlfors and Bers, III*，第355卷*Contemp. Math.*，第123–145页。Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2004。

[DDH+24]Ryan Dickmann、George Domat、Thomas Hill、Sanghoon Kwak、Carlos Ospina、Priyam Patel 和 Rebecca Rechkin。Thurston 定理：一维熵。Math. Res. Lett.，31(1):127–174，2024。[FKLL25] Elizabeth Field、Autumn Kent、Christopher Leininger 和 Marissa Loving。端周期映射环面的体积下界。Journal of Topology，18(3):e70037，2025。[Fri85] David Fried。曲面同胚的增长率与流等价。Ergodic Theory and Dynamical Systems，5(4):539–563，1985。[HS07] Ji-Young Ham 和 Won Taek Song。伪阿诺索夫 5-辫的最小膨胀率。Experimental Mathematics，16(2):167 – 180，2007。[Lin84] D. A. Lind。拓扑马尔可夫移位的熵及一类相关代数整数。Ergodic Theory and Dynamical Systems，4(2):283–300，1984。[LMT] Michael Landry、Yair Minsky 和 Samuel J. Taylor。通过伪阿诺索夫流构造端周期映射。arXiv:2304.10620。[LMT23] Michael Landry、Yair Minsky 和 Samuel J. Taylor。流、增长率与偏转多项式。Ergodic Theory and Dynamical Systems，43(9):3026–3107，2023。[LT11] Erwan Lanneau 和 Jean-Luc Thiffeault。关于小亏格曲面上伪阿诺索夫同胚的最小膨胀率。Annales de l'institut Fourier，61(1):105–144，2011。[LW25] Marissa Loving 和 Chenxi Wu。端周期伸缩因子的下界。Proc. Amer. Math. Soc.，153(9):4071–4077，2025。[SKL02] Won Taek Song、Ki Hyoung Ko 和 J´erˆome E. Los。辫的熵。Journal of Knot Theory and Its Ramifications，11(04):647–666，2002。[Str17] Bal´azs Strenner。伪阿诺索夫伸缩因子的代数次数。Geometric and Functional Analysis，27:1497 – 1539，2017。[Thu88] William P. Thurston。关于曲面微分同胚的几何与动力学。Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society，19(2):417 – 431，1988。[Thu14] William Thurston。一维熵，2014。[TZ25] Chi Cheuk Tsang 和 Xiangzhuo Zeng。伪阿诺索夫辫的最小膨胀率，2025。