arXiv:2603.20523v1 [math.DS] 20 Mar 2026

一阶系统的相对 K 理论指标定理

Robert Skiba、Daniel Strzelecki 和 Nils Waterstraat

摘要

受动力系统同宿轨道分支分岔问题的启发，我们研究实数轴上的一阶方程族，并对 Pejsachowicz 以及 Hu 和 Portaluri 提出的以往指标定理作了推广。我们的方法有两项主要创新：首先，在分析框架上，我们不再采用方程渐近双曲这一常见假设；其次，我们考虑一般的紧参数空间，而非单个参数，由此得到一个极为简洁的相对 K理论指标公式。

1 引言

本文的研究动机源于一般非线性系统的同宿解分岔问题，其形式为

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = g(\lambda, t, u(t)), \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $g\colon\ [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$连续可微，且 $u\equiv 0$对所有 $\lambda\in[a,b]$均满足 (1)。为了研究从这个平凡解出发的分岔，线性化系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A_\lambda(t)u(t), \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

对于 $A_\lambda(t) := D_u g(\lambda,\ t,\ 0)$ 起着关键作用，因为在通常假设下，当参数 $\lambda^*\in(a,\ b)$ 取值时，方程 (2) 存在非平凡解空间，这是方程 (1) 的新解在 λ 越过 λ^* 时从平凡解中产生的必要条件。寻找从 $u\equiv 0$ 出发发生分岔的充分判据，是一个复杂得多的问题，尤其是由于非紧性，经典的 Krasnoselskii 分岔定理并不适用。

注意，(2) 存在非平凡解，当且仅当

$$E^u_\lambda(0)\cap E^s_\lambda(0)\neq\{0\},$$

其中

$$\begin{aligned} E^s_\lambda(0) &= \{u(0)\in\mathbb{R}^d:\ \dot{u}(t)-A_\lambda(t)u(t)=0,\ u(t)\to 0, t\to\infty\} \\ E^u_\lambda(0) &= \{u(0)\in\mathbb{R}^d:\ \dot{u}(t)-A_\lambda(t)u(t)=0,\ u(t)\to 0, t\to-\infty\} \end{aligned} \tag{3}$$

[1] **2010 数学主题分类：主分类 47A53；次分类 34C37、47J15、19K56、55N15**

表示 (2) 的稳定空间和不稳定空间。理解 (2) 的解的另一种自然方式是考虑以下有界线性算子的核

$$L_\lambda : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \quad L_\lambda u = \dot{u} - A_\lambda(\cdot)u. \tag{4}$$

在通常假设下，算子 L_λ 是指标 0 的 Fredholm算子，因此可以利用 Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在20世纪80年代和90年代一系列论文中引入的奇偶性来研究（1）的分岔（参见 [11]，其中有全面的介绍）。奇偶性 $\sigma(L, [a, b])$ 是一种取 $\mathbb{Z}_2$值的、关于两个巴拿赫空间 X 和 Y 之间指标 0 的有界 Fredholm算子路径 $L = \{L_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$ 的可加同伦不变量，它产生于将经典的 Leray-Schauder 度扩展为拟线性Fredholm映射的同伦不变量度的构造过程中。粗略地说，当参数 λ 遍历区间 $[a, b]$ 时，奇偶性计算算子 L_λ 的核的维数模 2。特别地，非平凡的奇偶性表明，对于某个参数 λ^*，L_{λ^*} 具有非平凡的核。其在分岔理论中最重要的应用如下（参见 [9]）。

定理。设 X, Y为巴拿赫空间，且 $G\colon [a, b] \times X \to Y$为一个映射，使得对所有 $\lambda \in [a, b]$, $G(\lambda, 0) = 0$。假设对所有 $\lambda \in [a, b]$，导数 $L_\lambda := D_u G(\lambda, 0)\colon X \to Y$均为指标为 0的 ***Fredholm*** 算子，且当 $\lambda \in \{a, b\}$时可逆。若 $L = \{L_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$的奇偶性 $\sigma(L, [a, b])$ 在 $\mathbb{Z}_2$中非平凡，则方程存在从平凡分支 $u \equiv 0$ 出发的分岔

$$G(\lambda, u) = 0,$$

也就是说，存在某个 $\lambda^* \in (a, b)$，使得在 $[a, b] \times X$中 $(\lambda^*, 0)$ 的每个邻域内，都存在某个 (λ, u)，使得 $G(\lambda, u) = 0$ 且 $u \neq 0$。

因此，为了找到方程 (1) 存在分岔的判据，我们需要计算 (4) 中算子路径 L 的奇偶性 $\sigma(L, [a, b])$。Pejsachowicz 在 [22] 中研究了这一问题，所采用的方法是利用奇偶性与闭路径的指标为 0 的有界 Fredholm 算子的（Atiyah-Jänich）指标丛之间的联系；这一联系由 Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在 [10]中指出。

一般而言，指标丛是约化 KO 理论群 $\widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda)$ 中的一个元素，该群源自代数拓扑，由紧拓扑空间 Λ 上的向量丛构成。Atiyah 和 Jänich 指出（参见 [4], [17]），任何以 $\widetilde{\mathrm{KO}}$为参数的 Fredholm 算子族，只要参数取自 Λ，便会确定 $\widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda)$ 中的一个元素；当 $\mathbb{Z}$ 中的加法替换为 $\widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda)$ 中的群运算时，该元素在形式上具有经典整数 Fredholm 指标的若干性质。特别是，该元素在 Fredholm 算子族的同伦下保持不变；并且在希尔伯特空间上，算子族的同伦类由 $\widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda)$ 中的这一元素唯一确定。

对于 $\Lambda = S^1$，一个族实际上是闭路径，而且 $\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2$。因此，奇偶性和指标丛是两种为 Fredholm 指标 0 算子的闭路径赋予 $\mathbb{Z}_2$ 中一个元素的方式，Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在 [10] 中证明了这些数值相等。总之，如果我们在附加假设下考虑 (1)，即对于 (2) 中所有的 $t \in \mathbb{R}$，$A_a(t) = A_b(t)$，那么 Atiyah 和 Jänich 的指标丛就可以用作分岔不变量。

为确保 (4) 中的算子 L_λ 是 Fredholm 指标 0 的算子，Pejsachowicz 在 [22] 中假设这些极限

$$A_\lambda(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} A_\lambda(t) \tag{5}$$

在 $\lambda \in S^1$ 中一致存在且为双曲的，即它们的谱与虚轴不相交。此外，假设存在某个 $\lambda_0 \in S^1$，使得存在一个直和分解

$E^u_{\lambda_0}(0) \oplus E^s_{\lambda_0}(0) = \mathbb{R}^d$，这意味着 L_{λ_0} 可逆。 [22] 的主定理表明， $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in S^1}$ 的指标丛非平凡，因此，当 $E^s(+\infty)$ 和 $E^s(-\infty)$ 这两个定义在 S^1 上的向量丛不同构时，方程 (1) 会发生分岔。这些丛的纤维为

$$E^s_\lambda(\pm\infty) = \{u(0) \in \mathbb{R}^d : \dot{u}(t) - A_\lambda(\pm\infty)u(t) = 0, \lim_{t\to\infty} u(t) = 0\}, \tag{6}$$

即关于具有负实部的特征值的 $A_\lambda(\pm\infty)$ 的广义特征子空间。

经典分析与代数拓扑之间这一非凡的联系有一个主要缺点：只有当 S^1 作为 $\widetilde{\ }$ 拓扑空间是非平凡的时，才能通过指标丛计算奇偶性；这一点反映为 $\mathrm{KO}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2$ 是非平凡的。对于非闭 $\widetilde{\ }$ 路径，$\mathrm{KO}([a,b])$ 是平凡的，因此指标丛无法提供关于奇偶性的任何信息。Hu 和 Portaluri 首次尝试从拓扑学角度改进 Pejsachowicz 的方法是在 [16], ，此时不再要求对于 (2) 中的所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $A_a(t) = A_b(t)$，而是作者在假设 (5) 中的极限具有双曲性的基础上，进一步假设

$$E^u_\lambda(0) \oplus E^s_\lambda(0) = \mathbb{R}^d \tag{7}$$

在参数区间 $[a,b]$ 的端点 $\lambda = a,\ b$处。有一种众所周知的向量丛粘合构造，可以从紧区间上的丛[13]得到 S^1 上的丛。Hu 和 Portaluri 利用这一构造，从 $\lambda \in [a,b]$ 的空间 (6) 得到了 S^1 上的两个向量丛 $E^s(+\infty)$、$E^s(-\infty)$。他们的主定理表明，如果这些在 S^1 上的丛不同构，则 (4) 中算子路径 L_λ 的奇偶性是非平凡的。如果进一步对于所有$t \in \mathbb{R}$都有 $A_a(t) = A_b(t)$，即 Fredholm算子路径 $L = \{L_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$ 是闭合的，那么粘合构造不会产生任何影响，从而得到 Pejsachowicz 的定理 [22]。

本文旨在从分析和拓扑框架两方面，全面推广此前关于（1）的拓扑分岔理论研究；这也通过 K 理论方法推动了多参数分岔理论的新研究。首先，借助第一作者与 Longo 和 Pötzsche 的近期合作成果，我们研究不再要求（5）中的极限存在的（1）。相反，我们要求指数二分性的存在；这一概念早在1930年就由 Perron 提出。由于指数二分性是研究微分方程同宿轨道时非常自然且相当一般的框架，Pejsachowicz 已在 [22] 中建议在这一假设下证明其定理。需要指出的是，任何满足极限（5）存在且为双曲的系统（2），都具有我们下文所需的指数二分性。此外，根据定义，指数二分性将线性非自治微分方程的扩展状态空间分解为两个由稳定空间和不稳定空间（3）构成的丛。这自然促使我们使用 K理论中的方法，在这一框架下研究方程（2）。其次，Hu 和 Portaluri 的工作 [16] 的主要成果，是将 Pejsachowicz 的定理推广到系统（2）：其中（4）中的算子路径 $L = \{L_\lambda\}$ 不一定是闭路，但其端点是可逆的。在这里，我们大幅超越现有研究水平，考虑由任意紧拓扑空间 Λ参数化的（2），并进一步假设 $\Lambda_0 \subset \Lambda$是满足（7）的闭子空间，对所有 $\lambda \in \Lambda_0$均成立。这包含了 Pejsachowicz 在 $\Lambda = S^1$、 $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$下的框架，以及 Hu 和 Portaluri 在 $\Lambda = [a,b]$、 $\Lambda_0 = \{a,b\}$下的框架。我们按照第三作者此前的工作 [35, 36, 38], ，考虑相对 K理论群 $\mathrm{KO}(\Lambda,\Lambda_0)$ 中的指标丛，并以参数空间 Λ上由空间（3）构成的向量丛为基础，获得了一个形式出人意料地简洁的指标定理，这是本文的主要成果。如果 $(\Lambda,\Lambda_0) = (S^1,\{\lambda_0\})$ 或 $(\Lambda,\Lambda_0) = ([a,b],\{a,b\})$，则 $\mathrm{KO}(\Lambda,\Lambda_0) \cong \mathbb{Z}_2$，而 [22] 和 [16] 中的先前结果也就立即成为我们定理的推论（见下文第3.3节）。需要强调的是，Hu 和 Portaluri 还考虑了

相对群 KO($[a,b],\{a,b\}$)，这是在其证明开头进行的；但最终，他们的论证依赖于区间 $[a,b]$ 的线性序，因此无法推广到我们的框架。
Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在多篇论文中利用 K-理论中的指标丛研究多参数分岔问题，例如 [10, 21, 25]。应用仍取决于这样一个问题：对于紧参数空间 Λ，KO(Λ)是否非平凡$\widetilde{\ }$；这是一项相当不自然的假设（不过，参见 [21] 和 [37], ，其中有界区域上的微分方程族以格拉斯曼流形为参数空间）。本文的另一项目标是通过相对 K-理论 KO(Λ，Λ_0)，开创一种研究多参数分岔理论的新方法；这一方向将在即将开展的工作 [33]中继续推进。因此，像高维区间 $\Lambda = I^k$ 这样的可缩空间，如今也可作为相对于其边界 $\Lambda_0 = \partial I^k$的参数空间；而对于（1），则可由本文的主定理得到多参数分岔，该定理也将在 [33]中发挥重要作用。

本文结构如下。第二节回顾动力系统和拓扑 K-理论的一些预备知识，特别介绍指数二分性的概念，以及相对 K-理论中的指标丛。需要强调的是，我们通过投影族来定义向量丛，使非拓扑学领域的读者也能理解本文的阐述。第三节是本文的核心，分为四个部分。首先，我们考察 (4) 中的微分算子 L_λ，阐明本文对 (2) 所作的具体假设，讨论 Fredholm 性质，并计算 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$ 中定义域稠密的无界算子之伴随算子 $H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$。其次，我们陈述主定理及其若干推论，其中包括极限 (5) 存在且为双曲的情形。第三，我们考虑上述 KO(Λ，Λ_0) $\cong \mathbb{Z}_2$ 的情形，并得到 Pejsachowicz [22] 和 Hu-Portaluri [16] 的主定理。最后，我们证明主定理；这实际上是本文篇幅最长的部分，并且分为四个主要步骤。第四节讨论一个一般紧空间 Λ 上的例子，在该例中，我们可以根据 (2) 中矩阵 A_λ 的特征子空间，显式计算 KO(Λ，Λ_0) 中的指标。若 $\Lambda = S^1$ 且 $\Lambda_0 = \{-1\}$，我们的例子便推广了 Pejsachowicz 在 [22] 中给出的例子。Hu 和 Portaluri 的论文 [16] 没有给出其指标定理的例子；我们通过考察其定理在 $\Lambda = [0,\pi]$ 且 $\Lambda_0 = \{0,\pi\}$ 这一特殊情形下的例子，弥补了这一缺憾。本文最后一节讨论 (1) 的分岔问题，考察参数空间 Λ 紧且可缩、而 Λ_0在 Λ 中由两个不同点组成的情形。此时 KO(Λ，Λ_0) $\cong \mathbb{Z}_2$，非平凡指标丛会在参数空间中产生一个由分岔点组成的整一余维子集。需要强调的是，在这一框架下，如果 Λ_0 连通但不是单点集，分岔问题会更有趣，因为此时经典奇偶性不再是分岔不变量。后续工作 [33] 的主要目标是说明，与此相反，我们的相对 K-理论方法仍然适用，甚至能够在高维参数空间中识别孤立分岔点。

2 预备知识

本节旨在回顾理解下文指标定理所需的分析和拓扑概念。

2.1 一阶方程与指数二分性

本节旨在回顾指数二分性的概念，对于非自治动力系统而言，它是双曲性的一种便捷替代。

设 $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ 为一个无界区间，且 $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 是一个连续矩阵值映射，其中 Mat($d,\mathbb{R}$) 表示所有实数集 $d\times d$矩阵构成的空间。线性

系统

$$\dot{x} = A(t)x \tag{8}$$

是一个投影族 $P\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$（即，对所有 $t \in \mathbb{I}$， $P(t)^2 = P(t)$），使得

$$\Phi(t,s)P(s) = P(t)\Phi(t,s) \text{ for all } t,s \in \mathbb{I}, \tag{9}$$

其中， $\Phi(t,s) \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 表示（8）的转移矩阵，即映射 $t \mapsto \Phi(t,s)$ 在整个 $\mathbb{I}$ 上满足（8），且对所有 $s \in \mathbb{I}$， $\Phi(s,s) = \mathrm{id}$。为便于后文引用，我们指出其共有性质

$$\Phi(t,s)\Phi(s,r) = \Phi(t,r) \quad \text{for all } t,s,r \in \mathbb{I},\ r \le s \le t. \tag{10}$$

以下定义对于我们将在下文考虑的方程所满足的主要假设至关重要。

定义 2.1。如果存在线性系统（8）在 $\mathbb{I}$ 上的一个不变投影算子 P，以及实数 $K \ge 1$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\|\Phi(t,s)P(s)\| \le Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{and} \quad \|\Phi(s,t)(I_d - P(t))\| \le Ke^{-\alpha(t-s)} \text{ for all } t \ge s \text{ with } t,s \in \mathbb{I}.$$

若（8）在 $\mathbb{I} = [\tau, +\infty$ 上具有指数二分性，则记为

$$E^s(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{t\to\infty} \Phi(t,\tau)x = 0 \right\},$$

并且，若在 $\mathbb{I} = (-\infty, \tau]$ 上具有指数二分性

$$E^u(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{t\to-\infty} \Phi(t,\tau)x = 0 \right\},$$

这与我们在 (3) 中的记号一致。需要注意的是，这些空间与不变投影算子可以通过下式相互确定：

$$R(P(t)) = E^s(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{I},$$

当 $\mathbb{I} = [t, \infty)$ 时，其中 $R(P(t))$ 表示投影算子 $P(t)$ 的值域；并且

$$N(P(t)) = E^u(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{I},$$

当 $\mathbb{I} = (-\infty, t]$ 时，其中 $N(P(t))$ 表示投影算子 $P(t)$ 的核。特别地，若在整个 $\mathbb{R}$ 上存在指数二分性，则投影算子 P 唯一确定。此外，在这种情况下，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，都有 $E^u(t) \cap E^s(t) = \{0\}$，这表明 (8) 在整条实数轴上只有平凡解 $x \equiv 0$。

举例来说，注意到自治线性微分方程 $\dot{x} = Ax$ 在无界区间 $\mathbb{I}$ 上具有指数二分性，当且仅当它是双曲的；也就是说，矩阵 $A \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 在虚轴上没有特征值。此外，集合 $E^s(t)$ 和 $E^u(t)$ 是常数，并且分别由对应于以下特征值的广义特征子空间的直和给出

$$\sigma^-(A) = \{\mu \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\mu) < 0\} \quad \text{and} \quad \sigma^+(A) = \{\mu \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\mu) > 0\}.$$

显然，在这种情况下，可以通过明确计算确定定义 2.1 中的常数 $K \ge 1$ 和 $\alpha > 0$
方法是利用矩阵 A 的谱和特征向量。
以下来自 [6] 的定理对于证明给定系统具有指数二分性至关重要。

定理 2.2. 假设(8) 在 $\mathbb{I}$上具有常数为 $K \geq 1$ 和 $\alpha > 0$的指数二分性，其中 $\mathbb{I} = [\tau, \infty)$， $\mathbb{I} = (-\infty, \tau]$ 对于某个 $\tau \in \mathbb{R}$，或 $\mathbb{I} = \mathbb{R}$。如果 $B\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ 是连续的，并且

$$\sup_{t \in \mathbb{I}} |B(t)| < \frac{\alpha}{4K^2}, \tag{11}$$

那么扰动后的系统

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x$$

在 $\mathbb{I}$ 上也具有指数二分性。

我们指出，关于指数二分性更强的扰动结果可见于例如 [18, 定理 3.1 和推论 3.1]。为使结果的表述简洁起见，这里仍采用 Coppel 的经典定理 2.2。

Coppel 还在 [6] 中证明，如果 $\dot{x} = A(t)x$ 在区间$[\tau_1, \infty)$上具有指数二分性，那么它在任何更大的区间 $[\tau_2, \infty)$（其中 $\tau_2 \leq \tau_1$）上也具有指数二分性。对于形如 $(-\infty, \tau]$的区间上的指数二分性，同样成立。

回顾一下，若矩阵值映射 $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R}$满足：极限 $A_\pm := \lim_{t \to \pm\infty} A(t)$ 存在且为双曲的（参见 [2]），则称其为渐近双曲的。于是，(8) 在 $[\tau, \infty)$ 和 $(-\infty, -\tau]$ 上都具有指数二分性，对任意 $\tau \geq 0$均成立，这直接由上述结果得到：

$$\dot{x} = A(t)x = (A_\pm + B(t))x \text{ for } B(t) := A(t) - A_\pm.$$

下一个结果将整个 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性与两个半轴上的指数二分性联系起来。

定理2.3. 线性系统(8) 在 $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ 上具有指数二分性，当且仅当

(a) (8) 在两个区间 $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$ 和 $\mathbb{R}_0^- := (-\infty, 0]$ 上分别具有指数二分性，其对应的投影算子为 P^+ 和 P^-，

(b) $R(P^+(0)) \oplus N(P^-(0)) = \mathbb{R}^d$.

最后，对于问题(8)，我们关联以下对偶微分方程

$$\dot{x} = -A^\top(t)x, \tag{12}$$

其中 $A(t)^\top$ 表示矩阵 $A(t)$ 的转置。很容易证明（见 [29]），若 (8) 在 $\mathbb{I}$ 上具有指数二分性，其常数为 $K \geq 1, \alpha > 0$，投影算子为 $P\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$，则 (12) 在 $\mathbb{I}$ 上也具有指数二分性，且常数 $K \geq 1, \alpha > 0$相同，投影算子 $P^*\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ 为

$$P^*(t) = I_d - P(t)^\top. \tag{13}$$

因此，对于任意 $\tau \geq 0$，我们可以看到 (12) 的稳定空间和不稳定空间为

$$\left\{ x(\tau) \in \mathbb{R}^d : \dot{x}(t) = -A^\top(t)x(t),\ x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \right\} = E^s(\tau)^\perp \text{ for } \mathbb{I} = [\tau, \infty),$$
$$\left\{ x(-\tau) \in \mathbb{R}^d : \dot{x}(t) = -A^\top(t)x(t),\ x(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \right\} = E^u(-\tau)^\perp \text{ for } \mathbb{I} = (-\infty, -\tau].$$

今后，我们考虑如下形式的参数化线性微分方程

$$\dot{x} = A_\lambda(t)x, \tag{14}$$

其中， Λ 是一个紧连通拓扑空间， $A\colon \Lambda\times\mathbb{R}\to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$ 是连续的，且每个映射 $A_\lambda := A(\lambda,\ \cdot)\colon \mathbb{R}\to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$ 都是有界且一致连续的。我们假设，对于任意 $\lambda\in\Lambda$，问题 (14) 在两个区间 $\mathbb{R}_0^+$和$\mathbb{R}_0^-$ 上都存在指数二分性，其对应的投影算子分别为 P_λ^+ 和 P_λ^-。第一作者最近与 Pötzsche 和 Longo 合作证明了以下定理（参见 [29, 19]）。

定理 2.4。 在上述假设下，不变投影算子 $P_\lambda^-(-\tau)$和 $P_\lambda^+(\tau)$ 可以选取为使映射 $\lambda\longmapsto P_\lambda^-(-\tau)\in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 和 $\lambda\longmapsto P_\lambda^+(\tau)\in\mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 对任意 $\tau\geq 0$ 在 Λ 上连续。

因此，稳定子空间和不稳定子空间

$$\begin{aligned} R(P_\lambda^+(\tau)) &= E_\lambda^s(\tau)\\ R(I_d-P_\lambda^-(-\tau)) &= N(P_\lambda^-(-\tau)) = E_\lambda^u(-\tau)\end{aligned} \tag{15}$$

以连续的方式依赖于参数 $\lambda\in\Lambda$，这使得上述框架可以借助一个众所周知的事实采用拓扑方法：投影族的像构成向量丛（例如，参见 [20, 命题 1.7.5]）。更确切地说，我们将紧拓扑空间 Λ 上的向量丛视为具有如下形式的子集

$$E=\{(\lambda,u)\in\Lambda\times\mathbb{R}^d:\ u\in R(P_\lambda)\}\subset\Lambda\times\mathbb{R}^d$$

对某个 $d\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$，它是拓扑空间 $\Lambda\times\mathbb{R}^d$ 的子集，其中 $P\colon \Lambda\to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$ 是连续幂等矩阵族，即在 $\mathbb{R}^d$ 上的投影。我们用 $E_\lambda = R(P_\lambda)$ 表示点 $\lambda\in\Lambda$ 上方的纤维，它是 $\mathbb{R}^d$ 的线性子空间。如果 Λ 连通，则维数 $\dim(E_\lambda)$ 不依赖于 λ，称为向量丛 E 的维数。

当 P 是常值族且 $R(P_\lambda)=V\subset\mathbb{R}^d, \lambda\in\Lambda$ 时，我们将积 $\Lambda\times V$ 简记为 $\Theta(V)$。特别要注意， $\Theta(\mathbb{R}^d)$ 是由族 $P_\lambda = I_d, \lambda\in\Lambda$ 得到的丛。我们称带有投影族 $P\colon \Lambda\to\mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 的向量丛 F 是 E 的子丛，如果 $R(P_\lambda)\subset R(P_\lambda)$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 都成立；也就是说，每个纤维 F_λ 都是 E_λ 的线性子空间。如果 E,F 是 Λ 上的两个向量丛，那么连续映射 $h:\ E\to F$ 若保持纤维（即 $h(E_\lambda)\subset F_\lambda, \lambda\in\Lambda$），且对所有 $\lambda\in\Lambda$，$h|_{E_\lambda}\colon E_\lambda\to F_\lambda$ 都是线性的，则称其为丛同态。通常，双射同态称为同构；显然，当且仅当每个 $h|_{E_\lambda}: E_\lambda\to F_\lambda$ 都是同构时，才有这种情况。N

ow, by Th定理2.4 和 d (1)5 , f对于任意 $\tau\geq 0$, t he 集合

$$E^s(\tau):=\{(\lambda,v)\in\Lambda\times\mathbb{R}^d: v\in E_\lambda^s(\tau)\}\ \text{and}\ E^u(-\tau):=\{(\lambda,v)\in\Lambda\times\mathbb{R}^d: v\in E_\lambda^u(-\tau)\}$$

是 Λ 上的向量丛。我们指出，供后文参考，这尤其意味着 $\dim(E_\lambda^u(0))$ 和 $\dim(E_\lambda^s(0))$ 是常数，并且

$$\dim(E_\lambda^u(0))+\dim(E_\lambda^s(0))=d \tag{16}$$

根据定理2.3，如果存在某个 $\lambda\in\Lambda$，使得 (14) 在整个 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。最后，根据关于解相对于参数的连续性的众所周知的结果（参见 [3]），映射 $\mathbb{X}\colon \Lambda\times\mathbb{R}^2\to \mathrm{GL}(d,\ \mathbb{R})$ 由 $\mathbb{X}(\lambda,(t,\ s)) := \Phi_\lambda(t,\ s)$ 定义，是连续的，其中 Φ_λ 表示 (14) 的转移矩阵。如

$$E_\lambda^s(\tau)=\mathbb{X}_\lambda(\tau,0)E_\lambda^s(0)\quad\text{and}\quad E_\lambda^u(-\tau)=\mathbb{X}_\lambda(-\tau,0)E_\lambda^u(0),\quad \lambda\in\Lambda,$$

我们得到丛同构

$$E^s(\tau)\cong E^s(0)\quad\text{and}\quad E^u(-\tau)\cong E^u(0)\quad\text{for all }\tau\geq 0, \tag{17}$$

这将在下文中发挥重要作用。

2.2 相对 K-理论中的指标丛

本节旨在介绍实向量丛的相对 K-理论群（称为 KO 理论），以及著名的 Atiyah-Jänich 指标丛在这一背景下的一种变体。我们仅讨论理解下文主定理 3.3 所必需的主要概念和性质，并将对相关工作的全面介绍留待另一篇平行论文 [33]，该文探讨相对 KO 理论与多参数分岔。

上一节中，我们已经简要回顾了向量丛的概念，当时它或许显得是专为我们的目的而设计的。事实上，按同构而言，给出的定义与基于局部平凡性的、更常见的定义是等价的（参见 [4], [20]）。因此，由于下文只需考虑向量丛的同构类，沿用前一节的定义并将紧拓扑空间 Λ 上的（实）向量丛视为积 $\Lambda \times \mathbb{R}^d$ 的子集，不会损失任何一般性；这些子集具有如下形式

$$E = \{(\lambda, u) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d : u \in R(P_\lambda)\},$$

其中 $P: \Lambda \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^d$ 和 $d \in \mathbb{N}_0$上的连续投影族。今后，我们需要在 Λ上所有向量丛的集合上定义如下加法运算。若 E, F 由投影族 $P_E: \Lambda \to \mathrm{Mat}(p_1, \mathbb{R})$ 和 $P_F: \Lambda \to \mathrm{Mat}(p_2, \mathbb{R})$ 定义，则

$$P_{E\oplus F} = \begin{pmatrix} P_E & 0 \\ 0 & P_F \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$上的投影族。由此族诱导的丛 $E \oplus F$称为 E与 F的直和丛，其纤维 $(E \oplus F)_\lambda$是 $E_\lambda \subset \mathbb{R}^{p_1}$与 $F_\lambda \subset \mathbb{R}^{p_2}$作为 $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$的子空间时的直和。

2.2.1 相对 K理论

本节简要回顾相对 KO 理论群的构造及其主要性质，主要遵循 [15, §10]。今后我们假设 Λ 是一个紧拓扑空间，$\Lambda_0 \subset \Lambda$ 是一个闭子集。我们考虑三元组 $\xi = \{E_0, E_1, h\}$，其中 E_0 和 E_1是 Λ 上的向量丛，且 h: $E_0 \to E_1$ 是一个丛同态，使得限制映射$h|_{\Lambda_0}: E_0|_{\Lambda_0} \to E_1|_{\Lambda_0}$ 到 Λ_0 是一个同构。如果 $h: E_0 \to E_1$ 是一个同构（在整个 Λ上），则称元素 $\xi = \{E_0, E_1, h\}$ 为平凡元。

若存在丛同构 $\varphi_0: E_0^1 \to E_0^2$ 和 $\varphi_1: E_1^1 \to E_1^2$，使得图表满足相应条件，则称两个三元组 $\xi^1 = \{E_0^1, E_1^1, h_1\}$和$\xi^2 = \{E_0^2, E_1^2, h_2\}$同构（$\xi^1 \cong \xi^2$）

$$\begin{array}{ccc} E_0^2 & \xrightarrow{h_2} & E_1^2 \\ {\scriptstyle\varphi_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_1} \\ E_0^1 & \xrightarrow{h_1} & E_1^1 \end{array} \tag{18}$$

在 Λ_0 上可交换。容易看出，这构成一个等价关系，因此今后令$L(\Lambda, \Lambda_0)$为同构类的集合。$L(\Lambda, \Lambda_0)$的元素将用圆括号表示，即 (E_0, E_1, h)。注意，$L(\Lambda, \Lambda_0)$在由直和诱导的运算 $\oplus$ 下构成一个交换半群。此外，对于任意丛 E_0、E_1，等价类 (E_0, E_1, h)仅依赖于 h 到 Λ_0 的限制映射。

为了使 $L(\Lambda, \Lambda_0)$ 成为一个群，我们定义如下等价关系：$\xi^1 \sim \xi^2$ 若存在平凡元 η^1，η^2 属于 $L(\Lambda, \Lambda_0)$，使得 $\xi^1 \oplus \eta^1 \cong \xi^2 \oplus \eta^2$。等价类的集合记为 $\mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$，

即紧致对 $(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 上的实相对 K-理论。以下，我们用方括号 $[E_0, E_1, h]$ 表示 $(E_0,\ E_1,\ h) \in L(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 在 $\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 中的等价类。接下来，我们将简要概述 $\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 的一些基本性质，这些性质尤其将说明，$\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 关于运算是一个阿贝尔群

$$[E_0^0, E_1^0, h_0] + [E_0^1, E_1^1, h_1] = [E_0^0 \oplus E_0^1, E_1^0 \oplus E_1^1, h_0 \oplus h_1],$$

由向量丛的直和诱导。首先注意，任意满足 $h:\ E_0 \to E_1$ 为同构的类 $[E_0, E_1, h]$ 都是单位元。其次，[15, §10，推论 5.4] 证明了

$$[E_0, E_1, h(0)] = [E_0, E_1, h(1)] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0). \tag{19}$$

f对于 Λ 上任意两个向量丛 E_0 和 E_1，以及任意连续的丛态射族 s

$$h : [0,1] \to \hom(E_0, E_1)$$

使得对所有 $t \in [0,1]$ 和 $\lambda \in \Lambda_0$，$(h(t))_\lambda \in$ 属于 $\mathrm{GL}((E_0)_\lambda,\ (E_1)_\lambda)$。由此可证明，若 (19) $[E_0, E_1, h],\ [E_1, E_2, g] \in \mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$，则

$$[E_0, E_1, h] + [E_1, E_2, g] = [E_0, E_2, g \circ h]. \tag{20}$$

若 $[E_0, E_1, h] \in \mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$，则根据定义，$h|_{\Lambda_0}:\ E_0|_{\Lambda_0} \to E_1|_{\Lambda_0}$ 是同构，因而有逆 $(h|_{\Lambda_0})^{-1}:\ E_1|_{\Lambda_0} \to E_0|_{\Lambda_0}$。由于 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 是闭的，$(h|_{\Lambda_0})^{-1}$ 可以延拓为一个

~ ~丛态射 $h:\ E_1 \to E_0$（见 [4, §1.4]）；

并且如上所述，类 $[E_1, E_0, h]$ 不依赖于从 Λ_0 到 Λ 的延拓。现在由 (20) 可知，$[E_0, E_1, h]$ 在 $\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 中的逆元为

$$-[E_0, E_1, h] := [E_1, E_0, \widetilde{h}], \tag{21}$$

因此，$\mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$ 确实是一个群。

~ ~我们简要回顾一下（例如参见 [13]）：经典地，紧拓扑空间 Λ的约化绝对 KO 理论群 $\mathrm{KO}(\Lambda)$ 是通过对形式差集合 $[E]-[F]$上的一个等价关系定义的，其中 E, F是 Λ上的同维数向量丛，方括号表示一个向量丛的同构类。等价关系定义为$[E_0]-[F_0]=[E_1]-[F_1]$当且仅当对于某个$k \in \mathbb{N}_0$，$E_0 \oplus F_1 \oplus \Theta(\mathbb{R}^k)$ 与 $E_1 \oplus F_0 \oplus \Theta(\mathbb{R}^k)$ 同构；群运算定义为 $([E_0]-[F_0]) + ([E_1]-[F_1])$ $= [E_0 \oplus E_1] - [F_0 \oplus F_1]$。我们注意到，稍后将会用到，对于任意固定的基点 $\lambda_0 \in \Lambda$，映射

$$\Psi_{\lambda_0} : \mathrm{KO}(\Lambda, \{\lambda_0\}) \to \widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda), \quad [E, F, h] \mapsto [E] - [F] \tag{22}$$

根据 [15, §10，推论 5，3] 是群同构。

当参数空间 Λ 可缩时（例如，若 Λ 是某个欧几里得空间的凸子集），Λ 上的任意向量丛 E 都同构于乘积丛 $\Theta(\mathbb{R}^d)$，其全空间为 $\Lambda \times \mathbb{R}^d$，其中 $d \in \mathbb{N}_0$ 为某个对象（参见 [13]）。因此，若 $[E_0, E_1, h] \in \mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 且 $\Lambda_0 \neq \emptyset$，则存在某个 $d \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$[E_0, E_1, h] = [\Theta(\mathbb{R}^d), \Theta(\mathbb{R}^d), \phi \circ h \circ \varphi^{-1}], \tag{23}$$

其中 $\varphi : E_0 \to \Theta(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi:\ E_1 \to \Theta(\mathbb{R}^d)$ 是丛同构。因此，如果 Λ 可缩，我们可以假设 $\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$ 中的元素具有 $[\Theta(\mathbb{R}^d)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ h]$ 的形式，其中 $h = \{h_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族线性映射 h_λ：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，满足对于 $\lambda \in \Lambda_0,\ \ h_\lambda \in \mathrm{GL}(d,\ \mathbb{R})$。以下定理在第3.3节的应用中将起重要作用。

命题 2.5。 设 Λ 是可缩紧拓扑空间，且 $\Lambda_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\} \subset \Lambda$ 对于 Λ 中两个不同的元素 λ_0、λ_1。则映射 $\psi_{\lambda_0,\,\lambda_1} : \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0) \to \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 定义为

$$(-1)^{\psi_{\lambda_0,\lambda_1}([\Theta(\mathbb{R}^d),\Theta(\mathbb{R}^d),h])} = \operatorname{sgn}\det h_{\lambda_0} \cdot \operatorname{sgn}\det h_{\lambda_1} \tag{24}$$

是一个同构。

证明。我们将 $\psi_{\lambda_0,\lambda_1}$ 是良定义群同态这一点留给读者验证；这可由行列式的基本性质直接计算得出。为证明 $\psi_{\lambda_0,\lambda_1}$ 是双射，我们首先回顾，$[\Theta(\mathbb{R}^d)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ h]$ 仅由 h 经由 h 到 Λ_0 的限制映射决定，因此在我们的情形下，它由两个可逆矩阵 h_{λ_0} 和 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}h_{\lambda_1}$ 唯一确定。现在，任意连续映射 h：$I \times \Lambda_0 \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$，只要满足 $h(0, \lambda_0) = h_{\lambda_0}$ 且 $h(0, \lambda_1) = h_{\lambda_1}\hat{}$，就可扩张为连续映射 h：$I \times \Lambda \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$。由同伦不变性 (19) 以及 $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 有两个道路连通分支这一事实可知，$\mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$ 的所有元素均可写成 $[\Theta(\mathbb{R}^d)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ h^i]$, $i = 1, 2$，其中 $h^1(\lambda_0) = I_d = h^1(\lambda_1)$ 或 $h^2(\lambda_0) = I_d$, $h^2(\lambda_1) = -I_d$。注意，这确实涵盖了所有情形，因为对于 $L(\Lambda, \Lambda_0)$ 中的任意元素，一般都有 $(E, F, h) = (E, F, -h)$。由此即得所述结论，因为 $\psi_{\lambda_0,\lambda_1}([\Theta(\mathbb{R}^d)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ h^1]) = 0$ 且 $\psi_{\lambda_0,\lambda_1}([\Theta(\mathbb{R}^d)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ h^2]) = 1$。

□

2.2.2 指标丛

现在我们将回顾映射的指标丛构造

$$L : (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(X, Y), \mathrm{GL}(X, Y)),$$

其中，与之前一样，Λ 是紧的，$\Lambda_0 \subset \Lambda$ 是闭的，而 $\Phi_0(X,\ Y)$表示两个巴拿赫空间 X 和 Y之间指标为 0 的 Fredholm 算子集合。本节的主要参考文献是 [34], [35, §2.1] 以及即将发表的著作 [33]。

根据 [35, 引理 2.1], ，存在一个有限维子空间 $V \subset Y$，使得

$$R(L_\lambda) + V = Y, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{25}$$

也就是说，V 与所有算子 L_λ的像横截。由于 V 是有限维的，存在一个映到 V上的有界投影 P，使得复合映射

$$X \xrightarrow{L_\lambda} Y \xrightarrow{I_Y - P} R(I_Y - P)$$

是满射，且

$$N((I_Y - P) \circ L_\lambda) = L_\lambda^{-1}(V) \text{ as well as } \dim N((I_Y - P) \circ L_\lambda) = \dim V, \tag{26}$$

对所有 $\lambda \in \Lambda$ 均成立。因此，根据 [7, 命题 14.2.3],

$$E(L, V) := \{(\lambda, w) \in \Lambda \times X \mid w \in L_\lambda^{-1}(V)\} \tag{27}$$

是一个维数为 $\dim(E(L,\ V)) = \dim(V)$、定义在 Λ 上的向量丛。映射 L 限制为一个丛态射 $L|_{E(L,V)}$：$E(L,\ V) \to \Theta(V)$，其中 $\Theta(V)$ 表示 Λ 上的乘积丛 $\Lambda \times V$，从而得到一个 KO-理论类

$$\mathrm{ind}(L) := [E(L, V), \Theta(V), L|_{E(L,V)}] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0). \tag{28}$$

注意到，$(L|_{E(L,V)})_\lambda$ 是同构，当且仅当 L_λ 是同构，这表明 $\mathrm{ind}(L)$ 确实属于 $\mathrm{KO}(\Lambda,\ \Lambda_0)$。类 (28) 不依赖于 (25) 中有限维空间 V的选择（参见 [34, 定理 3]），并且若对某个 $\lambda_0 \in \Lambda$有 $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$，则

$$\Psi_{\lambda_0}(\mathrm{ind}(L)) = [E(L, V)] - [\Theta(V)] \in \widetilde{\mathrm{KO}}(\Lambda) \tag{29}$$

是经典的 Atiyah-Jänich 丛（参见 [4], [17]），其中 Ψ_{λ_0} 是 (22) 中的典范同构。指标丛的以下性质可见于 [34], ，其中大多数性质可直接由其定义得出。

命题 2.6。 元素 $\mathrm{ind}(L) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$ 具有以下性质：

(i) 如果对所有 $\lambda \in \Lambda$， L_λ 都是可逆的，则 $\mathrm{ind}(L) = 0 \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$。

(ii) 如果 $H\colon [0,1] \times (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(X, Y), \mathrm{GL}(X, Y))$ 是 *Fredholm*算子的一个同伦，则

$$\mathrm{ind}(H(0,\cdot)) = \mathrm{ind}(H(1,\cdot)) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0).$$

(iii) 如果 $S\colon (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(Y, Z), \mathrm{GL}(Y, Z))$ 和 $L\colon (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(X, Y), \mathrm{GL}(X, Y))$ 是两个 *Fredholm*算子族，则

$$\mathrm{ind}(S \diamond L) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(L) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0), \tag{30}$$

其中，对 $\lambda \in \Lambda$，$(S \diamond L)_\lambda = S_\lambda \circ L_\lambda$。

(iv) 如果 $L_1\colon (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(X_1, Y_1), \mathrm{GL}(X_1, Y_1))$ 和 $L_2\colon (\Lambda, \Lambda_0) \to (\Phi_0(X_2, Y_2), \mathrm{GL}(X_2, Y_2))$ 是两个 *Fredholm*算子族，则

$$\mathrm{ind}(L_1 \oplus L_2) = \mathrm{ind}(L_1) + \mathrm{ind}(L_2) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0). \tag{31}$$

在定理 3.3 的证明中，我们需要对指标丛的定义作如下温和的推广。若 $P\colon \Lambda \to \mathcal{L}(X)$ 是 X 上投影的连续映射，即 $P_\lambda^2 = P_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$，那么我们称子集

$$X_P = \{(\lambda, u) \in \Lambda \times X : P_\lambda u = u\} \tag{32}$$

为平凡丛 $\Theta(X)$ 的一个 Banach 子丛。对于一个族 $L\colon \Lambda \to \mathcal{L}(X, Y)$，我们定义一个丛态射

$$L_P : X_P \to \Theta(Y), \qquad L_P(\lambda, u) := (\lambda, L_\lambda u).$$

若 L_P 是指标 0 的 Fredholm 态射，则称其为指标 0 的 Fredholm 态射，如果 $L_\lambda\big|_{(X_P)_\lambda} \in \Phi_0\big((X_P)_\lambda, Y\big)$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$, 均成立，其中 $(X_P)_\lambda = \{u \in X : P_\lambda u = u\} = \mathrm{Im}(P_\lambda)$ 是投影 P_λ 的像。构造式 (28) 以及命题 2.6 中的所有性质，在这一稍加一般化的情形下仍然成立。关于一般 Banach 丛之间态射的指标丛， [34] 中有全面的讨论。

3 族指标定理

3.1 微分算子及其伴随算子

本节我们聚焦于线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\lambda(t)x \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

其中，我们的既定假设是：λ 是紧致连通拓扑空间 Λ 中的一个参数，并且 $A\colon \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{R})$ 是一个维数为.....的实二次矩阵连续族

$d \in \mathbb{N}$ 使得每个 $A_\lambda\colon\ \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$都有界且一致连续。我们还形式上考虑伴随方程

$$\begin{cases} \dot{x} = -A_\lambda^\top(t)x \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

我们主要研究的对象是微分算子

$$L_\lambda : H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d), \quad (L_\lambda x)(t) = \dot{x}(t) - A_\lambda(t)x(t) \text{ for } \lambda \in \Lambda \tag{35}$$

以及由下式给出的伴随算子

$$L_\lambda^* : H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d), \quad (L_\lambda^* x)(t) = -\dot{x}(t) - A_\lambda^\top(t)x(t) \text{ for } \lambda \in \Lambda, \tag{36}$$

在以下假设下:

(*A*1) 对每个 $\lambda \in \Lambda$，方程 $\dot{x} = A_\lambda(t)x$ 在 $\mathbb{R}_0^+$和 $\mathbb{R}_0^-$上关于投影 $P_\lambda^+\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$和 $P_\lambda^-\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$具有指数二分性。我们假设根据定理 2.4，这些投影关于 λ 连续。

(*A*2) 存在一个闭子空间 $\emptyset \neq \Lambda_0 \subset \Lambda$，使得对每个 $\lambda \in \Lambda_0$，方程 $\dot{x} = A_\lambda(t)x$在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。

除非另有说明，我们总是在希尔伯特空间$L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$和 $H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$上考虑通常的内积。因此，特别地，$L_\lambda$，$L_\lambda^*$是有界线性算子。以下定理在更强的假设下可见于 [22, 命题 3.1] 。该定理实际上如以下陈述成立，解释见 [22, 注 3.2]；另参见 [19]。

定理 3.1. 在假设 $(A1)$ 和 $(A2)$ 下，算子 L_λ 和 L_λ^*, $\lambda \in \Lambda$ 均为 *Fredholm*算子，且

$$\operatorname{ind} L_\lambda^* = \operatorname{ind} L_\lambda = \dim N(L_\lambda) - \dim N(L_\lambda^*) = \dim R(P_\lambda^+) - \dim R(P_\lambda^-) = 0. \tag{37}$$

上文我们将 L_λ^* 称为 L_λ的伴随算子，现在我们要为此作出论证。因此，我们暂且将 L_λ 和 L_λ^* 视为稠密定义的无界算子

$$L_\lambda : \mathcal{D}(L_\lambda) \subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$$

and

$$L_\lambda^* : \mathcal{D}(L_\lambda^*) \subset L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d),$$

where $\mathcal{D}(L_\lambda) = \mathcal{D}(L_\lambda^*) = H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$。算子理论中的以下结果可能广为人知，不过我们并未在文献中找到相关出处。

引理 3.2. 设 H 是一个希尔伯特空间，且 $T\colon\ \mathcal{D}(T) \subset H \to H$, $S\colon\ \mathcal{D}(S) \subset H \to H$ 是稠密定义算子。若

(i) $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Sv\rangle$ *for all* $u \in \mathcal{D}(T)$, $v \in \mathcal{D}(S)$,

(ii) T 和 S 是指标为0的 *Fredholm*算子,

(iii) $\dim N(T) = \dim N(S)$,

那么 $S = T^*$。

证明。我们首先回顾一下，T 的伴随算子 T^* 定义为

$$D(T^*) = \{v \in H : \exists w \in H \text{ such that } \langle Tu, v\rangle = \langle u, w\rangle \ \forall u \in D(T)\}, \qquad T^* v := w.$$

假设 (i) 对每个 $v \in D(S)$ 都给出恒等式

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Sv\rangle \quad \forall u \in D(T),$$

这表明 $v \in D(T^*)$ 和 $T^* v = Sv$。因此 $S \subset T^*$，接下来只需证明反向包含关系。

显然，(i) 推出 $N(T) \subset R(S)^\perp$。由于 T，S是指标相同的 Fredholm 算子，

$$\dim N(T) - \dim R(T)^\perp = \dim N(S) - \dim R(S)^\perp$$

因此由 (iii) 可得

$$0 = \dim N(T) - \dim N(S) = \dim R(T)^\perp - \dim R(S)^\perp.$$

因此，由于 Fredholm 指标为 0，

$$\dim R(S)^\perp = \dim R(T)^\perp = \dim N(T)$$

并且我们可以看到，作为后续参考，在给定假设下

$$N(T) = R(S)^\perp. \tag{38}$$

现在令 $u \in \mathcal{D}(T^*)$，并设 $w = T^* u$。那么

$$\langle u, Tv\rangle = \langle w, v\rangle, \quad v \in \mathcal{D}(T). \tag{39}$$

由于 $R(S)$ 是闭的，由 (38) 可知，存在 $w_1 \in N(T)$ 和 $u_1 \in \mathcal{D}(S)$，使得 $w = w_1 + Su_1$。由 (39) 和 (i) 可得，对于 $v \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle u - u_1, Tv\rangle = \langle u, Tv\rangle - \langle u_1, Tv\rangle = \langle w, v\rangle - \langle Su_1, v\rangle = \langle w - Su_1, v\rangle = \langle w_1, v\rangle. \tag{40}$$

再次由于 $R(S)$ 是闭的，任意 $v \in \mathcal{D}(T)$ 都可由 (38) 写成 $v = v_1 + v_2$，其中$v_1 \in N(T)$ 且 $v_2 \in R(S)$。实际上，$v_2 \in R(S) \cap \mathcal{D}(T)$，因为 v，$v_1 \in \mathcal{D}(T)$，因此我们由 (40)

$$\langle u - u_1, Tv\rangle = \langle u - u_1, Tv_2\rangle = \langle w_1, v_2\rangle = 0,$$

这里我们再次使用了 (38)。因此，$u - u_1 \in R(T)^\perp = N(S) \subset \mathcal{D}(S)$，这表明 $u \in \mathcal{D}(S)$，因为 $u_1 \in \mathcal{D}(S)$。注意，这里我们在 (38) 中交换了 T 和 S，这是可行的，因为这两个算子满足相同的假设。因此我们已证明 $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(S)$，最终便得到所声称的 $S = T^*$。 □

现在，由 (37) 和分部积分可知，当将这些算子视为作用于 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上的无界算子时，L_λ^* 确实是 L_λ 的希尔伯特空间伴随算子。这带来了重要信息，例如，L_λ^* 的核是 Fredholm 算子 L_λ值域的正交补；这一点将在下面证明主定理时用到。需要指出的是，我们还将再次用到下面的抽象引理 3.2。

3.2 指标定理与推论

我们在假设 (A1) 和 (A2) 下考虑微分方程族 (33)，其中与前文一样， Λ 是一个紧致连通拓扑空间。根据我们在第 2.1 节中的讨论，相应的族 $E^s_\lambda(0)$、 $E^u_\lambda(0)$（对应于 $\lambda \in \Lambda$ ）给出参数空间 Λ 上的向量丛 $E^s(0)$ 和 $E^u(0)$，二者都是乘积丛 $\Theta(\mathbb{R}^d)$ 的子丛。因此，根据我们在第 2.2 节开头的说明，直和 $E^u(0) \oplus E^s(0)$ 是 $\Theta(\mathbb{R}^{2d})$ 的一个子丛。现在，后一个丛可通过丛同态 $(\lambda, u, v) \mapsto (\lambda, u - v)$ 映射到 $\Theta(\mathbb{R}^d)$，其中 $u, v \in \mathbb{R}^d$；于是，通过限制映射，我们得到一个丛态射 $\mathcal{L}: E^u(0) \oplus E^s(0) \to \Theta(\mathbb{R}^d)$，其定义为 $\mathcal{L}(\lambda, u, v) = (\lambda, u - v)$。注意，由 (16) 可知 $\dim(E^u(0) \oplus E^s(0)) = d$，因此， $\mathcal{L}_\lambda$ 是同构，当且仅当 $E^u_\lambda(0) \cap E^s_\lambda(0) = \{0\} \subset \mathbb{R}^d$；而这当且仅当 (35) 中的算子 L_λ 是单射。由于 L_λ 是指标 0 的 Fredholm 算子，这等价于 L_λ 是同构。

注意，假设（$A2$）根据定理2.3蕴含，对于所有$\lambda \in \Lambda_0$， $E^u_\lambda(0) \cap E^s_\lambda(0) = \{0\} \subset \mathbb{R}^d$，因此可知，Fredholm算子 L_λ 以及丛态射 $\mathcal{L}_\lambda$对所有这些 λ都是同构。现在我们可以陈述本文的主要结果。

定理 3.3。 若假设（A1） 和 （A2） 成立，则

$$\operatorname{ind}(L) = [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0), \tag{41}$$

其中，同态 $\mathcal{L}$： E^u（0） $\oplus E^s$（0） $\to \Theta$（$\mathbb{R}^d$） 由 $\mathcal{L}$（λ, u, v） $=$（$\lambda, u - v$ ）.

在证明该定理之前，我们先列出几个推论以供后续参考。对于第一个推论，我们需要以下附加假设。

（A3）存在连续映射 $s_1, \ldots, s_d$: $\Lambda \to \mathbb{R}^d$，使得

$$E^u_\lambda(0) = \operatorname{span}\{s_1(\lambda), \ldots, s_k(\lambda)\}, \quad E^s_\lambda(0) = \operatorname{span}\{s_{k+1}(\lambda), \ldots, s_d(\lambda)\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

对某个 $1 \le k \le d - 1$。

注意，$(A3)$ 等价于假设向量丛 $E^u(0)$ 和 $E^s(0)$ 在Λ 上是平凡的，即存在向量丛同构 $\varphi^u : E^u(0) \to \Theta(\mathbb{R}^k)$ 和 $\varphi^s : E^s(0) \to \Theta(\mathbb{R}^{d-k})$。

推论 3.4. 若$(A1)$、$(A2)$ 和$(A3)$ 成立，则

$$\operatorname{ind}(L) = [\Theta(\mathbb{R}^d), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{M}] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0),$$

其中 $\mathcal{M}$： $\Lambda \to \mathrm{Mat}(d$、 $\mathbb{R})$ 是矩阵族 $\mathcal{M}_\lambda = (s_1(\lambda) \ldots, s_d(\lambda))$。

证明。 映射 $s_1, \ldots, s_d$: $\Lambda \to \mathbb{R}^d$ in $(A3)$ 诱导出一个丛同构 φ: $\Theta(\mathbb{R}^d) \to E^u(0) \oplus E^s(0)$，其定义为 $\varphi(\lambda, e_i) = s_i(\lambda)$， $1 \le i \le k$ 且 $\varphi(\lambda, e_i) = -s_i(\lambda)$， $k + 1 \le i \le d$ 其中 e_i表示 $\mathbb{R}^d$中的第 i 个标准基向量。现在由定理 3.3 和 (18)，

$$\operatorname{ind}(L) = [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}] = [\Theta(\mathbb{R}^d), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L} \circ \varphi] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$$

以及 $(\mathcal{L} \circ \varphi)_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$。 □

以下假设 $(A3)$ 成立时，我们用 $\mathcal{L}_D : \Lambda \to \mathbb{R}$ 表示映射

$$\mathcal{L}_D(\lambda) = \det(\mathcal{M}_\lambda) = \det(s_1(\lambda), \ldots, s_d(\lambda)).$$

注意， $\mathcal{L}_D(\lambda) = 0$ 当且仅当 (2) 有非平凡解，这让人想起狄拉克算子族的行列式截面（参见 [5,§9.7]）。

假设 $(A3)$ 尤其在 Λ 是可缩拓扑空间时成立，因为在这种情况下， Λ 上的所有向量丛都是平凡的。此外，若 $\Lambda_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ 在 Λ 中由两个不同点组成，则根据命题 2.5，在同构 $\psi_{\lambda_0,\ \lambda_1}$ 下，我们得到 $\mathrm{ind}(L)$ 作为 $\mathbb{Z}_2$ 的元素。

推论 3.5。 设 Λ 可缩，且 $\Lambda_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ 对于两个不同点 λ_0、 $\lambda_1 \in \Lambda$。若 $(A1)$ 和 $(A2)$ 成立，则 $\mathrm{ind}(L) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0) \cong \mathbb{Z}_2$ 非平凡，当且仅当

$$\mathcal{L}_D(\lambda_0) \cdot \mathcal{L}_D(\lambda_1) < 0.$$

对于其他推论，我们再次关注丛 $E^u(0)$ 和 $E^s(0)$ 可能非平凡的情形，即不再明确假设 $(A3)$ 成立。由 (17) 可知，对于任意 $\tau \geq 0$ ，存在一个丛同构

$$\mathcal{X}_\tau : E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau) \to E^u(0) \oplus E^s(0)$$

由下式给出

$$\mathcal{X}_\tau(\lambda, u, v) = (\lambda, \mathbb{X}_\lambda(0, -\tau)u, \mathbb{X}_\lambda(0, \tau)v)$$

其中 $\mathbb{X}$: $\Lambda \times \mathbb{R}^2 \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 如第 2.1 节末尾所述。由此得到定理 3.3 的以下简单改述。

推论 3.6。 若假设 (A1) 和 (A2) 成立，则对于任意 $\tau \geq 0$

$$\mathrm{ind}(L) = [E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}_\tau] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0),$$

其中同态 $\mathcal{L}_\tau$: $E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau) \to \Theta(\mathbb{R}^d)$ 由下式给出

$$(\mathcal{L}_\tau)(\lambda, u, v) = \mathbb{X}_\lambda(0, -\tau)u - \mathbb{X}_\lambda(0, \tau)v.$$

证明。 由于 $\mathcal{X}_\tau$: $E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau) \to E^u(0) \oplus E^s(0)$ 是一个同构，

$$[E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau), E^u(0) \oplus E^s(0), \mathcal{X}_\tau] = 0 \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0).$$

因此由定理 3.3 和 (20) 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(L) &= [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}] + [E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau), E^u(0) \oplus E^s(0), \mathcal{X}_\tau] \\ &= [E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L} \circ \mathcal{X}_\tau], \end{aligned}$$

这表明了关于 $\mathcal{L} \circ \mathcal{X}_\tau = \mathcal{L}_\tau$ 的断言。 □

现在我们终于讨论矩阵族 A: $\Lambda \times \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$ 为渐近双曲的情形:

（A4）存在由双曲矩阵构成的连续族 $A^\pm$: $\Lambda \to \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$，使得

$$A^\pm_\lambda := \lim_{t \to \pm\infty} A_\lambda(t).$$

根据我们在第 2.1 节中的讨论，(A4) 意味着 (8) 在两个半轴上都具有指数二分性，因此假设 (A1) 成立。其次，我们还考虑非空闭子空间 $\Lambda_0 \subset \Lambda$:

(A5) 对所有 $\lambda \in \Lambda_0$,

$$E^u_\lambda(0) \oplus E^s_\lambda(0) = \mathbb{R}^d.$$

注意到，根据定理 2.2 和 2.3，假设（$A4$）和（$A5$）蕴含（$A1$）和（$A2$）。因此，由我们的主定理 3.3 和推论 3.6，可得到关于渐近双曲系统的以下推论。

推论 3.7。若假设（(A4)）和（(A5)）成立，则对于任意 $\tau \geq 0$

$$\mathrm{ind}(L) = [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}] = [E^u(-\tau) \oplus E^s(\tau), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}_\tau] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0),$$

其中，同态 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}_\tau$ 如上所定义。

3.3 与 Pejsachowicz 和 Hu-Portaluri 工作的比较

本小节旨在从上述关于渐近双曲系统的推论 3.7 推导出文献 [22] 和 [16] 中的主要结果。

3.3.1 Pejsachowicz 的指标公式

Pejsachowicz 在 [22] 中考察了以圆 $\Lambda = S^1$ 作为参数空间的情形，并在 $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$下对某些 $\lambda_0 \in S^1$ 进行了研究，满足假设 (A4) 和 (A5)。首先需要指出的是，实际上在 [22] 中假设的是：方程 (14) 和 (12) 都仅对 $\lambda = \lambda_0$具有平凡的同宿解 $u \equiv 0$，而不是 (A5)。由于 E^u_λ(0) $\cap E^s_\lambda$(0) 同构于方程 (14) 的同宿解空间，并且正如第 2.1 节所回顾的，伴随方程 (12) 的稳定空间和不稳定空间是 $\mathbb{R}^d$ 中 $E^{u/s}_\lambda$ (0) 的正交补，因此这等价于 (A5)。本节旨在证明，对于 $\Lambda = S^1$, $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$，我们的推论 3.7，即

$$\mathrm{ind}(L) = [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}] \in \mathrm{KO}(S^1, \{\lambda_0\})$$

等价于 Pejsachowicz 的指标定理 [22]。在陈述确切结果之前，我们需要一些预备知识。

首先，Pejsachowicz 考虑了指标丛

$$[E(L,V)] - [\Theta(V)] \in \widetilde{\mathrm{KO}}(S^1) \tag{42}$$

该指标丛由 Atiyah 和 Jänich 针对族 L 引入：$S^1 \to \Phi_0(X,\ Y)$。根据 (29)，对于 (22) 中引入的同构 Ψ_{λ_0} : KO(S^1, $\{\lambda_0\}$) $\to$ KO(S^1)，它等于 $\widetilde{\Psi_{\lambda_0}(\mathrm{ind}(L))}$。其次，考虑如下形式的自治微分方程族

$$\dot{x} = B_\lambda x$$

其中 B : $S^1 \to$ Mat(d, $\mathbb{R}$) 是由双曲矩阵 B_λ 构成的族，即 B_λ 的所有特征值的实部均非零。稳定空间和不稳定空间 E^s_λ(0)、E^u_λ(0) 分别是对应于实部为负和为正的特征值的广义特征子空间。由于它们是关于位于负半平面或正半平面的特征值的谱投影的像，而且谱投影连续地依赖于矩阵，我们得到两个定义在 S^1 上的向量丛 E^u_B 和 E^s_B。请注意，E^u_B 和 E^s_B 也可以由定理 2.4 得到，但这里我们想指出，不借助指数二分性的概念，也可以按照 [22] 构造它们。

现在，我们准备证明，在 $\Lambda = S^1$ 和 Λ_0 均为单点集这一特殊情况下，Pejsachowicz 的指标定理等价于推论 3.7。

推论 3.8。 如果$(A4)$ 和$(A5)$ 对于以 $\Lambda = S^1$ 为参数的族(1) 以及$\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$成立，那么

$$\Psi_{\lambda_0}(\mathrm{ind}(L)) = [E^s_{A^+}] - [E^s_{A^-}] \in \widetilde{\mathrm{KO}}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2.$$

证明。 根据 $(A4)$、$(A5)$ 和定理 2.2，方程 $\dot{x} = A_{\lambda_0}(t)x$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，以下我们令 $K \geq 1$ 和 $\alpha > 0$ 为定义 2.1 中相应的常数。现在令 $\tau_0 > 0$ 足够大，使得

$$\sup_{t\in[\tau_0,\infty)} |A_{\lambda_0}(t) - A^+_{\lambda_0}| < \frac{\alpha}{4K^2}, \qquad \sup_{t\in(-\infty,-\tau_0]} |A_{\lambda_0}(t) - A^-_{\lambda_0}| < \frac{\alpha}{4K^2}.$$

Mo此外，令 $\mathbb{R} \times S^1 \ni (t,\ \lambda) \mapsto C_\lambda(t) \in \mathrm{Mat}(d,\ \mathbb{R})$ 为一个连续矩阵族，使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A_{\lambda_0}(t) - C_{\lambda_0}(t)| < \frac{\alpha}{4K^2}, \tag{43}$$

并且对 $t \leq -\tau_0,\ C_\lambda(t) = A^-_\lambda$ 成立，同时对 $t \geq \tau_0,\ C_\lambda(t) = A^+_\lambda$ 成立。现在考虑

$$K_\lambda(t) := A_\lambda(t) - C_\lambda(t),$$

那么算子 S_{K_λ}：$H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^p) \to L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^p)$, $(S_{K_\lambda}x)(t) = K_\lambda(t)x(t)$ 由 [1,引理 3.3] 可知是紧的，因为当 $\lim_{t\to\pm\infty} K_\lambda(t) = 0$ 时。现在令

$$L_\lambda = \widetilde{L}_\lambda - S_{K_\lambda},$$

~ ~其中 $L_\lambda x = \dot{x} - A_\lambda x$ 且 $L_\lambda x = \dot{x} - C_\lambda x$。根据定理 2.2、(43) 和定理2.3，对于所有 $s \in [0,1]$，算子 $L_{\lambda_0} - sS_{K_{\lambda_0}}$ 均可逆。
It f这由命题 2.6 中指标丛的同伦不变性以及推论 3.7 得出
that

$$\mathrm{ind}(L) = \mathrm{ind}(\widetilde{L} + S_K) = \mathrm{ind}(\widetilde{L}) = \left[E^u_{A^-} \oplus E^s_{A^+},\, \Theta(\mathbb{R}^d),\, \mathcal{L}_{\tau_0}\right],$$

其中，最后一个等式用到了 $E^u_\lambda(-\tau_0) = E^u_{A^-}$ 且 $E^s_\lambda(\tau_0) = E^s_{A^+}$, $\lambda \in S^1$，对于~，方程 $\dot{x} = C_\lambda x$。因此我们在 $KO(S^1)$ 中得到

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda_0}(\mathrm{ind}(L)) &= [E^u_{A^-} \oplus E^s_{A^+}] - [\Theta(\mathbb{R}^d)] = [E^s_{A^-} \oplus E^u_{A^-} \oplus E^s_{A^+}] - [E^s_{A^-} \oplus \Theta(\mathbb{R}^d)] \\ &= [\Theta(\mathbb{R}^d) \oplus E^s_{A^+}] - [E^s_{A^-} \oplus \Theta(\mathbb{R}^d)] = [E^s_{A^+}] - [E^s_{A^-}] \in \widetilde{KO}(S^1),\end{aligned}$$

其中，我们用到了：如果向量丛 E 和 F 同构，则 $[E] - [F] = 0 \in \widetilde{KO}(S^1)$；此外，$E \oplus F$ 与 $F \oplus E$ 同构。

□

最后指出，Pejsachowicz 将其在 [24]中的指标定理推广到了 Λ 为一般紧拓扑空间且 $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$ 为单点集的情形。事实证明，将 $\mathrm{KO}(S^1)$ 替换为 $\mathrm{KO}(\Lambda)$ 后，~~上述关于 $\mathrm{ind}(L)$ 的公式仍原样成立；这同样可由我们的主定理 3.3 推出，也可通过推论 3.8 中相同的证明得到。

3.3.2 Hu 和 Portaluri 的指标公式

Hu 和 Portaluri 在 [16] 中研究了满足假设（$A4$）和（$A5$）的情形 $\Lambda = [a,b]$, $\Lambda_0 = \{a,b\}$，并为（8）构造了两个取值于 $\mathbb{Z}_2$的不变量，他们在主定理中证明了这两个不变量相等。首先按照 [16]的术语介绍（8）的 $\mathbb{Z}_2$-指标。由于稳定空间和不稳定空间的族 $\{E^u_\lambda(0)\}_{\lambda\in[a,b]}$ 和 $\{E^s_\lambda(0)\}_{\lambda\in[a,b]}$，根据（A5），是格拉斯曼流形 $Gr_k(d,\mathbb{R})$ 和 $Gr_{d-k}(d,\mathbb{R})$ 中的连续路径，其中某个 $1\le k\le d-1$，因此存在标架$\{v_1(\lambda)\dots,v_k(\lambda)\}_{\lambda\in[a,b]}$，对应于 $\{E^u_\lambda(0)\}_{\lambda\in[a,b]}$；以及标架 $\{w_1(\lambda)\dots,w_{d-k}(\lambda)\}_{\lambda\in[a,b]}$，对应于 $\{E^s_\lambda(0)\}_{\lambda\in[a,b]}$。我们考虑矩阵族 $\{M(\lambda)\}_{\lambda\in[a,b]}$，其中

$$M(\lambda)=(v_1(\lambda),\dots,v_k(\lambda),w_1(\lambda),\dots,w_{d-k}(\lambda))\in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$$

并按 [16, 定义 2.1] 中的方式设定

$$\iota(E^u_\lambda(0),E^s_\lambda(0);\lambda\in I)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad \det(M(0)M(1))>0\\ 1 & \text{if} \quad \det(M(0)M(1))<0.\end{cases}$$

另一种指标的构造方式 [16]如下。与我们的构造（28）类似，作者考虑了定义在 $[a,b]$ 上的向量丛 $E(L,V)$，以及限制映射$L|_{E(L,V)}$：$E(L,V)\to\Theta(V)$。由于 $[a,b]$ 上的每个丛都是平凡的，存在丛同构 φ：$E(L,V)\to\Theta(\mathbb{R}^d)$、$\phi$：$\Theta(V)\to\Theta(\mathbb{R}^d)$，从而得到一个态射 $\tilde{L}:=\phi\circ L\circ\varphi^{-1}$：$\Theta(\mathbb{R}^d)\to\Theta(\mathbb{R}^d)$，其中$d=\dim(V)$。现在，可以通过将两份 $[a,b]$ 在端点处粘合得到 S^1，并且˜这些乘积丛可以通过粘合函数 L 进行粘合，该函数是$\partial[a,b]=\{a,b\}$上的一个同构。结果得到一个定义在 S^1 上的向量丛 E_L，Hu 和 Portaluri 将其称为

$$\sigma(L_\lambda,\lambda\in[a,b])=\begin{cases}0 & \text{if} \quad E_L \quad \text{is orientable,}\\ 1 & \text{if} \quad E_L \quad \text{is non-orientable}\end{cases}$$

路径 L 的奇偶性，恰好是向量丛 E_L 的第一斯蒂费尔-惠特尼数。[16] 的主定理指出

$$\sigma(L_\lambda,\lambda\in[a,b])=\iota(E^u_\lambda(0),E^s_\lambda(0);\lambda\in[a,b])\in\mathbb{Z}_2, \tag{44}$$

我们声称，这是由针对 $\Lambda=[a,b]$、$\Lambda_0=\{a,b\}$ 的推论 3.5 直接得出的。事实上，根据该推论，只需将 $\psi_{a,b}(\mathrm{ind}(L))$ 和 $\sigma(L_\lambda,\lambda\in[a,b])$ 识别为 $\mathbb{Z}_2$ 的元素即可。在定义 $\sigma(L_\lambda,\lambda\in[a,b])$ 时，E_L 的构造是通过 $L_\lambda\in\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 沿 $\{a,b\}$ 对 $[a,b]$ 上两个平凡丛进行˜粘接得到的。现在，E_L 可定向当且仅当 L_a 和 L_b 属于 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 的同一道路连通分支（例如参见˜[13, §1.2]），而这当且仅当 $\det(L_a)\det(L_b)>0$。因此，由 (28) 和 (24) 可得

$$\sigma(L_\lambda,\lambda\in[a,b])=\psi_{a,b}(\mathrm{ind}(L))\in\mathbb{Z}_2,$$

因此，(44) 确实是推论 3.5 的直接结果。

3.4 指标定理的证明

我们将证明分为四个主要步骤。

步骤 I：从 L 到 L_P。

考虑某个固定的 $\tau_0>0$ 下的微分算子族

$$L^0_\lambda:\mathcal{D}(L^0_\lambda)\subset L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)\to L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d),\quad (L^0_\lambda x)(t)=\dot{x}(t)-A_\lambda(t)x(t),$$

其中

$$\mathcal{D}(L_\lambda^0) := \left\{ x \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : x(-\tau_0) \in E_\lambda^u(-\tau_0),\, x(\tau_0) \in E_\lambda^s(\tau_0) \right\}.$$

这些算子对于理解该族 $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 至关重要，下面我们首先讨论基本的解析性质。

引理 3.9。 算子 L_λ^0、 $\lambda \in \Lambda$ 是指标为 0 的 *Fredholm*算子。

证明。 为简化记号，在本证明中我们令 $Y = L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d)$、 $X = H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d)$ 以及 $Z = \mathcal{D}(L_\lambda^0)$。算子 L_λ^0： $Z \to Y$ 具有 $L_\lambda^0 = Q|_Z + K_\lambda|_Z$ 的形式，其中 Q： $X \to Y$ 由 $Qx = \dot{x}$ 定义，而 K_λ： $X \to Y$ 是乘法算子 $(K_\lambda x)(t) = -A_\lambda(t)x(t)$。由于 K_λ 可延拓为 Y 上的有界算子，且 X 到 Y 的嵌入是紧的，因此可知 K_λ： $X \to Y$ 是一个紧算子。算子 Q 是满射的，其核是 X 中由常值函数构成的 d 维子空间。因此 Q 是一个指标为 d 的 Fredholm算子。现在考虑同态

$$T : X \to \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto (P_\lambda^-(-\tau_0)x(-\tau_0), (I_d - P_\lambda^+(\tau_0))x(\tau_0)),$$

其中 $P_\lambda^-(-\tau_0)$ 和 $P_\lambda^+(\tau_0)$ 是定理 2.4 中的投影。于是 $N(T) = \mathcal{D}(L_\lambda^0)$，根据第一同构定理，该空间在 X 中的余维等于 T的值域的维数，即 $\dim(E_\lambda^u(-\tau_0)^\perp) + \dim(E_\lambda^s(\tau_0)^\perp) = d$。

最后，根据 [12, XI.3], ，结论得证。该结论指出，Fredholm算子$D : X \to Y$ 在有限余维闭子空间 $Z \subset X$ 上的限制映射是 Fredholm 算子，其指标为 $\mathrm{ind}(D|_Z) = \mathrm{ind}(D) - \mathrm{codim}(Z)$。 □

若我们对 $\lambda \in \Lambda$ 考虑无界算子

$$(L_\lambda^0)^* : \mathcal{D}((L_\lambda^0)^*) \subset L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) \to L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d), \quad ((L_\lambda^0)^* x)(t) = -\dot{x}(t) - A_\lambda(t)^\top x(t),$$

其中

$$\mathcal{D}((L_\lambda^0)^*) = \{x \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) :\, x(-\tau_0) \in E_\lambda^u(-\tau_0)^\perp,\, x(\tau_0) \in E_\lambda^s(t_0)^\perp\},$$

则得到下面的引理，后文将用到它。

引理 3.10。 算子 $(L_\lambda^0)^*$ 是 $L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d)$中 L_λ^0 的希尔伯特空间伴随算子 .

证明。 这由引理 3.2 得出。首先注意，(i) 可由分部积分得到。对于 (ii)，根据引理 3.9，我们已知 L_λ^0 是一个指标为 0 的 Fredholm算子；同样的论证也适用于 $(L_\lambda^0)^*$ ，因为注意到 $\mathcal{D}((L_\lambda^0)^*)$ 在$H^1([-\tau_0, \tau_0],\ \mathbb{R}^d)$ 中的余维为 $\dim(E_\lambda^u(-\tau_0)) + \dim(E_\lambda^s(\tau_0)) = d$。最后，$(iii)$ 成立，因为

$$\dim N((L_\lambda^0)^*) = \dim N(L_\lambda^*) = \dim N(L_\lambda) = \dim N(L_\lambda^0),$$

其中，第一个和最后一个等式分别是 $\mathcal{D}((L_\lambda^0)^*)$ 和 $\mathcal{D}(L_\lambda^0)$ 定义的直接结果，而中间的等式是定理 3.1 的一部分。 □

注意，对于每个 $\lambda \in \Lambda$，都有一个典范映射

$$i_\lambda : \mathcal{D}(L_\lambda^0) \to H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \tag{45}$$

通过将给定函数 $u \in \mathcal{D}(L_\lambda^0)$ 延拓到区间 $(-\infty, -\tau_0)$ 和 (τ_0, ∞)，使其成为 $\dot{x} = A_\lambda(t)x$ 的一个解来定义。映射 i_λ 是单射，并且

$$i_\lambda\left(N(L_\lambda^0)\right) = N(L_\lambda), \tag{46}$$

这尤其意味着 $\dim\ N(L_\lambda) = \dim\ N(L_\lambda^0)$。此外，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{L_\lambda} & L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \\ \uparrow{\scriptstyle i_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{D}(L_\lambda^0) & \xrightarrow{L_\lambda^0} & L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d), \end{array} \tag{47}$$

其中 p 表示将 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 中的函数限制到 $L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)$。
回顾一下，正如第 2.2.2 节末段所述，对于定义域变化的算子族，也可以定义指标丛。在下面的引理中，我们使用该节引入的记号。

引理 3.11。 存在一个投影族 $P\colon \Lambda \to \mathcal{L}(H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d))$ 使得

$$H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)_P = \left\{(\lambda,x) \in \Lambda \times H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d) :\ x \in \mathcal{D}(L_\lambda^0)\right\},$$

其中我们使用 (32) 中引入的记号。

证明。 根据 $H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)_P$ 的定义，我们需要构造一个连续的投影族

$$P : \Lambda \to \mathcal{L}(H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)) \text{ with } R(P_\lambda) = \mathcal{D}(L_\lambda^0).$$

设 $P^\pm\colon \Lambda \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ 是两个投影族，满足 $N(P_\lambda^-) = E_\lambda^u(-\tau_0)$ 且 $R(P_\lambda^+) = E_\lambda^s(\tau_0)$，如定理 2.4 中所述。考虑由下式给出的 $P\colon \Lambda \to \mathcal{L}(H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d))$

$$(P_\lambda x)(t) = x(t) - \frac{\tau_0 - t}{2\tau_0} P_\lambda^- x(-\tau_0) - \frac{\tau_0 + t}{2\tau_0}(I_d - P_\lambda^+)x(\tau_0).$$

Then

$$\begin{aligned} (P_\lambda x)(-\tau_0) &= x(-\tau_0) - P_\lambda^- x(-\tau_0) = (I_d - P_\lambda^-)x(-\tau_0) \in E_\lambda^u(-\tau_0), \\ (P_\lambda x)(\tau_0) &= x(\tau_0) - (x(\tau_0) - P_\lambda^+ x(\tau_0)) = P_\lambda^+ x(\tau_0) \in E_\lambda^s(\tau_0), \end{aligned}$$

这表明对于所有 $\lambda \in \Lambda$，$R(P_\lambda) \subset \mathcal{D}(L_\lambda^0)$。由于对于所有 $x \in \mathcal{D}(L_\lambda^0)$都有 $P_\lambda x = x$，因此对于所有 $\lambda \in \Lambda$，$R(P_\lambda) = \mathcal{D}(L_\lambda^0)$，且 $P_\lambda^2 = P_\lambda$。 □

注意，我们得到一个相应的丛态射

$$L_P : H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)_P \to \Theta(L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)), \quad (L_P)_\lambda = L_\lambda^0$$

因为映射

$$\Lambda \ni \lambda \mapsto \frac{d}{dt} - A_\lambda(\cdot) \in \mathcal{L}(H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d), L^2([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d))$$

是连续的。因此，综上所述

$$L : \Theta(H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)) \to \Theta(L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)) \quad \text{and} \quad L_P : H^1([-\tau_0,\tau_0],\mathbb{R}^d)_P \to \Theta(L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d))$$

是指标为 0 且在 Λ_0 上可逆的 Fredholm 态射。因此，$\mathrm{ind}(L)$ 和 $\mathrm{ind}(L_P)$ 被定义为 $KO(\Lambda,\Lambda_0)$ 中的元素，下一步的目标是将这些 K- 理论类等同起来。

步骤 II： $\mathrm{ind}(L) = \mathrm{ind}(L_P) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$

按照第 2.2 节介绍的方法构造指标丛时，我们首先需要找到有限维空间 $V \subseteq L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$ 和 $W \subseteq L^2([-\tau_0, \tau_0],\ \mathbb{R}^d)$，使它们与族 L 和 L_P 的像横截，即

$$R(L_\lambda) + V = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad R(L^0_\lambda) + W = L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) \text{ for all } \lambda \in \Lambda.$$

第 2.2 节已说明这类空间普遍存在；不过，下面我们需要一种适合本论证的特殊形式，现在就来描述它。固定 $\lambda_0 \in \Lambda$。由于 $N(L_{\lambda_0})$ 是闭的，因此存在一个闭子空间 $E_{\lambda_0} \subseteq H^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^d)$，使得

$$N(L_{\lambda_0}) \oplus E_{\lambda_0} = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d).$$

现在考虑有界线性算子

$$C_\lambda : E_{\lambda_0} \times N(L^*_{\lambda_0}) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d),$$

定义如下

$$C_\lambda(w, v) := L_\lambda w + v.$$

由于 $N(L^*_{\lambda_0}) = R(L_{\lambda_0})^\perp$，这里用到 $L^*_{\lambda_0}$ 是 L_{λ_0} 的希尔伯特空间伴随算子，

$$C_{\lambda_0} \in \mathrm{GL}\left(E_{\lambda_0} \times N(L^*_{\lambda_0}), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)\right).$$

由于 L 连续，且有界可逆算子集是开集，因此存在 λ_0 的一个邻域$U_{\lambda_0} \subseteq \Lambda$，使得

$$C_\lambda \in \mathrm{GL}(E_{\lambda_0} \times N(L^*_{\lambda_0}), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)) \text{ for all } \lambda \in U_{\lambda_0}.$$

因此，

$$R(L_\lambda) + N(L^*_{\lambda_0}) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \text{ for all } \lambda \in U_{\lambda_0}.$$

由于 Λ 是紧集，它可以被有限个这样的邻域覆盖

$$U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \subseteq \Lambda,$$

现在我们定义

$$V := N(L^*_{\lambda_1}) + N(L^*_{\lambda_2}) + \cdots + N(L^*_{\lambda_n}) \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d). \tag{48}$$

那么 $\dim V < \infty$，且对所有 $\lambda \in \Lambda$

$$R(L_\lambda) + V = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d). \tag{49}$$

考虑到引理 3.10，我们可以重复这些论证，并得出

$$R(L^0_\lambda) + W = L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d), \tag{50}$$

其中

$$W := N((L^0_{\lambda_1})^*) + \cdots + N((L^0_{\lambda_n})^*). \tag{51}$$

在这里，我们确实可以不失一般性地假设，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ 的参数对 V和 W相同，因为我们可以向 V添加任意有限个空间 $N(L^*_\lambda)$，以及任意有限

个空间 $N((L_\lambda^0)^*)$到 W，而不影响性质(49)和(50)。现在这些向量丛

$$E(L,V) := \left\{(\lambda,x) \in \Lambda \times H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \mid L_\lambda x \in V\right\},$$
$$E(L_P,W) := \left\{(\lambda,x) \in \Lambda \times \mathcal{D}(L_\lambda^0) \mid L_\lambda^0 x \in W\right\}$$

已定义，且

$$\mathrm{ind}(L) = [E(L,V), V, L|_{E(L,V)}] \in \mathrm{KO}(\Lambda,\Lambda_0),$$
$$\mathrm{ind}(L_P) = [E(L_P,W), W, L_P|_{E(L_P,W)}] \in \mathrm{KO}(\Lambda,\Lambda_0).$$

对空间 V和 W的特定选择现在得出如下观察。按照 (47) 中的记号，记 p: L^2(ℝ, $\mathbb{R}^d$) $\to$ L^2 ($[-\tau_0,\tau_0]$, $\mathbb{R}^d$) 为到区间 $[-\tau_0,\tau_0]$上的限制映射。我们考虑

$$V_0 := \{\chi_{[-\tau_0,\tau_0]}u \mid u \in V\}, \qquad V_1 := \{\chi_{\mathbb{R}\setminus[-\tau_0,\tau_0]}u \mid u \in V\},$$

并注意到 $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ 以及 $V \subset V_0 \oplus V_1$。此外，(48)、(51) 中空间 V和W的定义表明 p($V_0 \oplus V_1$) $\subset W$，且限制映射 $p\,|_{V_0}$: $V_0 \to W$是一个同构。由 (47) 我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} E(L,V_0\oplus V_1)_\lambda & \xrightarrow{L_\lambda} & V_0\oplus V_1 \\ \uparrow{\scriptstyle (\iota_E)_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E(L_P,W)_\lambda & \xrightarrow{L_\lambda^0} & W, \end{array} \tag{52}$$

其中 ι_E: E(L_P, W) $\to$ E(L, $V_0 \oplus V_1$) 是由典范映射 (45) 诱导的丛态射。由于 i_E: E(L_P, W) $\to$ E (L, $V_0 \oplus V_1$) 是单射丛态射，因此 E^0:= ι_E(E(L_P, W)) 是 E(L, $V_0 \oplus V_1$) 的一个子丛。令 E^1 为E^0的一个互补子丛，即 E(L, $V_0 \oplus V_1$) $= E^0 \oplus E^1$。现在，对于任意 $\lambda \in \Lambda$，图 (52) 具有如下形式

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda^0\oplus E_\lambda^1 & \xrightarrow{L_\lambda} & V_0\oplus V_1 \\ \uparrow{\scriptstyle (i_E)_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E(L_P,W)_\lambda & \xrightarrow{L_\lambda^0} & W \end{array}$$

且 L_λ： $E_\lambda^0 \oplus E_\lambda^1 \to V_0 \oplus V_1$ 可以写成算子矩阵

$$L_\lambda = \begin{bmatrix} L_\lambda^{11} & L_\lambda^{12} \\ L_\lambda^{21} & L_\lambda^{22} \end{bmatrix}.$$

注意，在下面的引理中，(i) 和 (iii) 涉及整个空间 Λ 上的算子，而 (ii) 仅在 Λ_0 上成立。

引理 3.12。 L 的上述矩阵元具有以下性质：

(i) 对于所有 $\lambda \in \Lambda$，同态 L_λ^{21}: $E_\lambda^0 \to V_1$ 都是平凡的。(ii) L_λ^{11}: $E_\lambda^0 \to V_0$ 对于所有 $\lambda \in \Lambda_0$ 都是同构。(iii) L_λ^{22}: $E_\lambda^1 \to V_1$ 对于所有 $\lambda \in \Lambda$都是同构。

证明。我们首先考虑 L_λ^{21}，并令 $u \in E_\lambda^0$。由于存在 $v \in E(L_P, W)_\lambda$，满足 $(i_E)_\lambda v = u$，因此 $L_\lambda u$ 具有如下性质

$$(L_\lambda u)(t) = 0 \text{ for all } t \in (-\infty, -\tau_0) \cup (\tau_0, \infty),$$

由此得到

$$L_\lambda u = (L_\lambda^{11} u, L_\lambda^{21} u) \in V_0 \oplus \{0\},$$

因此，算子 L_λ^{21}是平凡的。
为了证明（ii），只需注意到，由（i）可知，L_λ^{11}: $E_\lambda^0 \to V_0$ 对 $\lambda \in \Lambda_0$ 是单射；否则 $\ker(L_\lambda) \neq \{0\}$，这与 L_λ 对 $\lambda \in \Lambda_0$可逆矛盾。现在 $\dim(V_0) = \dim(W)$，后者由（26）等于 $\dim(E(L_P, W)_\lambda)$。由于 $\dim(E(L_P, W)_\lambda) = \dim(i_E)_\lambda(E(L_P, W)_\lambda) = \dim(E_\lambda^0)$，因此 $\dim(E_\lambda^0) = \dim(V_0)$，故 L_λ^{11}: $E_\lambda^0 \to V_0$ 确实是一个同构，如果$\lambda \in \Lambda_0$。
最后，为了证明 L_λ^{22}是一个同构，考虑某个 $u \in E_\lambda^1 \subset H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$，使得$L_\lambda^{22} u = 0$。那么

$$\dot{u}(t) - A_\lambda(t)u(t) = 0 \text{ for all } t \in (-\infty, -\tau_0) \text{ and for } t \in (\tau_0, \infty),$$

这尤其表明

$$u(-\tau_0) \in N(P_\lambda^-(-\tau_0)) \text{ and } u(\tau_0) \in R(P_\lambda^+(\tau_0)).$$

因此，存在一个元素 $v \in E(L_P, W)_\lambda$，使得 $(i_E)_\lambda(v) = u$，这意味着$u \in E_\lambda^0$。由此，$u \in E_\lambda^0 \cap E_\lambda^1 = \{0\}$，因此 L_λ^{22}是单射。此外，由 (26) 可知 $\dim(V_0 \oplus V_1) = \dim(E_\lambda^0 \oplus E_\lambda^1)$，而由 ($ii$) 的证明可知 $\dim(V_0) = \dim(E_\lambda^0)$，故 $\dim(V_1) = \dim(E_\lambda^1)$，因此对所有 $\lambda \in \Lambda$，L_λ^{22}都是同构。 □

根据前述引理，我们现在可以仿照 [36, §3.3 中的步骤 4] 进行论证，并注意到同伦

$$h(s, \lambda) = \begin{bmatrix} L_\lambda^{11} & (1-s)\, L_\lambda^{12} \\ 0 & L_\lambda^{22} \end{bmatrix}$$

具有如下性质：对于所有 $s \in [0, 1]$ 和 $\lambda \in \Lambda_0$，$h(s, \lambda)$: $E(L, V_0 \oplus V_1)_\lambda \to V_0 \oplus V_1$ 是可逆的。因此由 (19)

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(L) &= [E(L, V_0 \oplus V_1), \Theta(V_0 \oplus V_1), h(0, \cdot)] = [E(L, V_0 \oplus V_1), \Theta(V_0 \oplus V_1), h(1, \cdot)] \\ &= [E(L, V_0 \oplus V_1), \Theta(V_0 \oplus V_1), L^{11} \oplus L^{22}] \\ &= [E^0 \oplus E^1, \Theta(V_0) \oplus \Theta(V_1), L^{11} \oplus L^{22}] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0). \end{aligned}$$

由于 $L^{22} : E^1 \to \Theta(V_1)$ 是丛同构，因此

$$\begin{aligned} [E^0 \oplus E^1, \Theta(V_0) \oplus \Theta(V_1), L^{11} \oplus L^{22}] &= [E^0, \Theta(V_0), L^{11}] + [E^1, \Theta(V_1), L^{22}] \\ &= [E^0, \Theta(V_0), L^{11}]. \end{aligned}$$

最后，交换图

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda^0 & \xrightarrow{L_\lambda^{11}} & V_0 \\ {\scriptstyle (i_E)_\lambda}\uparrow \cong & & \cong \downarrow {\scriptstyle p|_{V_0}} \\ E(L_P, W)_\lambda & \xrightarrow{L_\lambda^0} & W \end{array}$$

由式 (18) 得出

$$[E^0, \Theta(V_0), L^{11}] = [E(L_P, W), \Theta(W), L_P] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$$

并且我们确实已经证明了 $\mathrm{ind}(L) = \mathrm{ind}(L_P) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$，如所声称的那样。

第三步： $\mathrm{ind}(L_P) = \mathrm{ind}(Q) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$

证明这一步的目的是证明

$$\mathrm{ind}(L_P) = \mathrm{ind}(Q) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0),$$

其中 $Q = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是算子

$$Q_\lambda : \mathcal{D}(Q_\lambda) \subset H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) \to L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d), \quad [Q_\lambda u](t) = \dot{u}(t)$$

定义在定义域上

$$\mathcal{D}(Q_\lambda) = \left\{ u \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) \mid u(-\tau_0) \in N(P_\lambda^-(0)),\, u(\tau_0) \in R(P_\lambda^+(0)) \right\}.$$

首先注意，算子 Q_λ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，这一点可由引理 3.9 证明中关于 L_λ^0 的论证得到。此外，核 $N(Q_\lambda)$ 同构于 $N(P_\lambda^-(0)) \cap R(P_\lambda^+(0)) = E_\lambda^u(0) \cap E_\lambda^s(0)$，因此根据 $(A2)$ 和定理2.3，对所有 $\lambda \in \Lambda_0$，Q_λ 都是同构。于是，$\mathrm{ind}(Q) \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$ 有定义。

现在，我们通过 $\Phi_\lambda(t) := \Phi_\lambda(t,\ 0)$ 简化记号，并考虑乘法算子

$$M_\lambda \in GL(L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d)), \qquad [M_\lambda u](t) = \Phi_\lambda(t) u(t) \ \text{ for all } t \in [-\tau_0, \tau_0].$$

那么，$M_\lambda^{-1} \circ L_\lambda^0 \circ M_\lambda$ 是定义域上的 Fredholm算子，指标为 0

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(M_\lambda^{-1} \circ L_\lambda^0 \circ M_\lambda) = \{ M_\lambda^{-1} u \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : u \in \mathcal{D}(L_\lambda^0) \} \\
&= \{ M_\lambda^{-1} u \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : u(-\tau_0) \in N(P_\lambda^-(-\tau_0)),\, u(\tau_0) \in R(P_\lambda^+(\tau_0)) \} \\
&= \{ v \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : (M_\lambda v)(-\tau_0) \in N(P_\lambda^-(-\tau_0)),\, (M_\lambda v)(\tau_0) \in R(P_\lambda^+(\tau_0)) \} \\
&= \left\{ v \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : v(-\tau_0) \in M_\lambda^{-1}(-\tau_0) N(P_\lambda^-(-\tau_0)),\, v(\tau_0) \in M_\lambda^{-1}(\tau_0) R(P_\lambda^+(\tau_0)) \right\} \\
&= \left\{ v \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) :\ v(-\tau_0) \in N(P_\lambda^-(0)), v(\tau_0) \in R(P_\lambda^+(0)) \right\},
\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们用到了由 (9) 得出的结论

$$\Phi_\lambda(t) P_\lambda^\pm(0) \Phi_\lambda(t)^{-1} = P_\lambda^\pm(t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}_\pm.$$

此外，对于 $u \in \mathcal{D}(M_\lambda^{-1} \circ L_\lambda^0 \circ M_\lambda)$，我们有恒等式

$$\begin{aligned}
[\left(M_\lambda^{-1} \circ L_\lambda^0 \circ M_\lambda\right) u](t) &= \Phi_\lambda(t)^{-1} (\dot{\Phi}_\lambda(t) u(t) + \Phi_\lambda(t) \dot{u}(t) - A_\lambda(t) \Phi_\lambda(t) u(t)) \\
&= \dot{u}(t) + \Phi_\lambda(t)^{-1} (\dot{\Phi}_\lambda(t) - A_\lambda(t) \Phi_\lambda(t)) u(t) = \dot{u}(t)
\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立，这表明 $M_\lambda^{-1} \circ L_\lambda^0 \circ M_\lambda = Q_\lambda$。因此，由命题 2.6 中的 (i) 和 (iii) 可得，

$$\mathrm{ind}(Q) = \mathrm{ind}(M^{-1} \diamond L_P \diamond M) = \mathrm{ind}(M^{-1}) + \mathrm{ind}(L_P) + \mathrm{ind}(M) = \mathrm{ind}(L_P).$$

第四步： $\mathrm{ind}(Q) = [E^u(0) \oplus E^s(0)\ \Theta(\mathbb{R}^d)\ \mathcal{L}] \in \mathrm{KO}(\Lambda, \Lambda_0)$

在证明的最后一步，我们证明

$$\mathrm{ind}(Q) = [E^u(0) \oplus E^s(0), \Theta(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}], \tag{53}$$

其中，丛同态 $\mathcal{L}$：$E^u(0)\oplus E^s(0) \to \Theta(\mathbb{R}^d)$ 定义为 $\mathcal{L}(\lambda, u, v) = (\lambda, u-v)$。我们先回顾一个众所周知的事实：$L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) = Y_0 \oplus Y_1$，其中 Y_0 是常值 $\mathbb{R}^d$ 值函数构成的 d 维空间，并且

$$Y_1 = \left\{ u \in L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d) : \int_{-\tau_0}^{\tau_0} u(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

现在，如果我们为 $u \in Y_1$ 设定

$$v(t) = \int_{-\tau_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s,$$

那么 $v \in H^1([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d)$、$v(-\tau_0) = 0 \in N(P_\lambda^-(0))$ 且 $v(\tau_0) = 0 \in R(P_\lambda^+(0))$，这表明 $v \in \mathcal{D}(Q_\lambda)$。由于 $Q_\lambda v = u$，可得 $Y_1 \subset R(Q_\lambda)$，因此 Y_0 与 Q 的像横截，即

$$R(Q_\lambda) + Y_0 = L^2([-\tau_0, \tau_0], \mathbb{R}^d).$$

因此，向量丛 $E(Q,\ Y_0)$ 得以定义，其纤维由下式给出

$$\begin{aligned} E(Q, Y_0)_\lambda &= Q_\lambda^{-1} Y_0 = \{u \in \mathcal{D}(Q_\lambda) : \dot{u} \equiv \text{constant}\} \\ &= \left\{ u_a^b(t) := \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{t}{\tau_0}\right) b + \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{t}{\tau_0}\right) a : a \in N(P_\lambda^-(0)),\, b \in R(P_\lambda^+(0)) \right\}. \end{aligned}$$

此外，Q_λ 按如下方式作用于纤维 $E(Q,\ Y_0)_\lambda$，并将其映至 Y_0

$$Q_\lambda \left(u_a^b\right) = \frac{1}{2\tau_0}(b - a).$$

最后，我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} E(Q, Y_0)_\lambda & \xrightarrow{\quad Q_\lambda \quad} & Y_0 \\ {\scriptstyle e_\lambda}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle m} \\ N(P_\lambda^-(0)) \oplus R(P_\lambda^+(0)) & \xrightarrow{\quad \mathcal{L}_\lambda \quad} & \mathbb{R}^d, \end{array}$$

其中同态 e_λ、$\mathcal{L}_\lambda$ 和 m 定义如下

$$e_\lambda(u) := (u(-\tau_0), u(\tau_0)), \quad m(u) := 2\tau_0 u, \quad \mathcal{L}_\lambda(u, v) = v - u.$$

由于 $N(P_\lambda^-(0)) = E_\lambda^u(0)$ 且 $R(P_\lambda^+(0)) = E_\lambda^s(0)$，$\lambda \in \Lambda$，这就表明了 (53)，并最终完成了定理 3.3 的证明。

4 一个例子

在本节中，我们考虑以下系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A_\lambda(t) u(t), \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} u(t) = 0 \end{cases} \tag{54}$$

其中，对于紧拓扑空间 Λ中的所有 λ ，

$$A_\lambda(t) = \begin{cases} a(t)\, B_\lambda & \text{for } t \le 0, \\ a(t)\, C_\lambda & \text{for } t \ge 0, \end{cases}$$

and

(i) $a\colon\ \mathbb{R} \to (-\infty,\ 0]$ 连续， $a(0) = 0$，并且存在 $a^\pm > 0$ 和 $t_0 > 0$ ，使得

$$-a^- \le a(t) \le -a^+, \quad |t| \ge t_0.$$

(ii) $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{GL}(d,\ \mathbb{R})$ 中的对称矩阵连续族，其中 $d \ge 2$ 为某个值。

(iii) 对于某个 $1 \le k \le d-1$，矩阵 B_λ、 C_λ 分别有 k 个正特征值和 $d-k$ 个负特征值，重数计入在内。

转移矩阵族 $\{\Phi_\lambda^-\}_{\lambda\in\Lambda}$ （定义在 $(-\infty,\ 0]$ 上）和 $\{\Phi_\lambda^+\}_{\lambda\in\Lambda}$ （定义在 $[0,\infty$ 上）由下式给出

$$\Phi_\lambda^-(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(r)\, dr\, B_\lambda\right) \quad \text{and} \quad \Phi_\lambda^+(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(r)\, dr\, C_\lambda\right).$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，我们定义

$$P_\lambda^- = \chi_{(0,\infty)}(B_\lambda), \quad P_\lambda^+ = \chi_{(0,\infty)}(C_\lambda), \tag{55}$$

其中我们使用函数演算，且 $\chi_{(0,\infty)}$ 是一个示性函数。注意，族 $\{P_\lambda^\pm\}_{\lambda\in\Lambda}$ 关于参数 λ 连续变化，因为根据假设，矩阵 B_λ、 C_λ 可逆。现在固定 $\lambda \in \Lambda$ ，并令

$$\mu_1(B_\lambda) \ge \cdots \ge \mu_k(B_\lambda) > 0 > \mu_{k+1}(B_\lambda) \ge \cdots \ge \mu_d(B_\lambda)$$
$$\mu_1(C_\lambda) \ge \cdots \ge \mu_k(C_\lambda) > 0 > \mu_{k+1}(C_\lambda) \ge \cdots \ge \mu_d(C_\lambda)$$

是 B_λ、 C_λ 的特征值，也是 $\{b_{1,\lambda}, \ldots, b_{d,\lambda}\}$、 $\{c_{1,\lambda}, \ldots, c_{d,\lambda}\}$ 的标准正交基，其中 $\mathbb{R}^d$ 满足 $B_\lambda b_{l,\lambda} = \mu_l(B_\lambda) b_{l,\lambda}$ 且 $C_\lambda c_{l,\lambda} = \mu_l(C_\lambda) c_{l,\lambda}$ 对于 $1 \le l \le d$。那么，对于 $x \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$P_\lambda^- x = \sum_{i=1}^k \langle x, b_{i,\lambda}\rangle b_{i,\lambda}, \qquad P_\lambda^+ x = \sum_{i=1}^k \langle x, c_{i,\lambda}\rangle c_{i,\lambda}$$

并得到对于 $t,\ s \in (-\infty,\ 0]$

$$P_\lambda^-(\Phi_\lambda^-(t,s)x) = \Phi_\lambda^-(t,s) P_\lambda^- x, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

以及对于 $t,\ s \in [0,\infty)$

$$P_\lambda^+(\Phi_\lambda^+(t,s)x) = \Phi_\lambda^+(t,s) P_\lambda^+ x, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

因此， P_λ^- 是 $\dot{x} = A_\lambda(t)x$ 在$(-\infty,\ 0]$上的不变投影算子，并且 P_λ^+ 在 $[0,\infty$上。如果我们利用$(I_d - P_\lambda^-)x = \sum_{i=k+1}^d \langle x,\ b_{i,\lambda}\rangle b_{i,\lambda}$，很容易看出

$$\|\Phi_\lambda^-(t,s) P_\lambda^-\| \le e^{\mu(B_\lambda) a^+ (s-t)} \quad \text{and} \quad \|\Phi_\lambda^-(s,t)(I_d - P_\lambda^-)\| \le e^{\mu(B_\lambda) a^+ (s-t)}$$

对于所有满足 $t,\ s\in(-\infty,\ -t_0]$的 $s\le t$，其中 $\mu(B_\lambda)=\min_{i=1,\ \dots,\ d}|\mu_i(B_\lambda)|>0$，并且我们在$(i)$中使用了上界。同理，

$$\|\Phi_\lambda^+(t,s)P_\lambda^+\|\le e^{\mu(C_\lambda)a^+(s-t)}\quad\text{and}\quad\|\Phi_\lambda^+(s,t)(I_d-P_\lambda^+)\|\le e^{\mu(C_\lambda)a^+(s-t)}$$

对于所有 $s\le t$ 满足 $t,\ s\in[t_0,\infty)$，其中 $\mu(C_\lambda)=\min_{i=1,\ \dots,\ d}|\mu_i(C_\lambda)|>0$。注意，正如第 2.1 节中回顾的那样，由关于 $(-\infty,\ -t_0]$ 和 $[t_0,\infty)$ 的这些估计已经可以推出 $(A1)$ 成立，即 $\dot x=A_\lambda(t)x$ 在两个半轴 $\mathbb{R}_0^-$和 $\mathbb{R}_0^+$上都具有指数二分性。为供后文参考，我们指出，读者很容易验证，实际上

$$\|\Phi_\lambda^-(t,s)P_\lambda^-\|\le K_Be^{\alpha_B(s-t)},\quad\|\Phi_\lambda^-(s,t)(I_d-P_\lambda^-)\|\le K_Be^{\alpha_B(s-t)},\quad t,s\in(-\infty,0],\,t\ge s,$$

对于 $K_B=e^{\mu(B_\lambda)a^+t_0}$ 和 $\alpha_B=\mu(B_\lambda)a^+$，并且在 $[0,\infty)$ 上对 Φ_λ^+ 和 $K_C=e^{\mu(C_\lambda)a^+t_0}$, $\alpha_C=\mu(C_\lambda)a^+$ 也有相应的不等式成立。
稳定子空间和不稳定子空间为

$$E_\lambda^u(0)=N(P_\lambda^-)=R(\chi_{(-\infty,0)}(B_\lambda)),\qquad E_\lambda^s(0)=R(P_\lambda^+)=R(\chi_{(0,\infty)}(C_\lambda))$$

并且，由于 $\dim(E_\lambda^u(0))+\dim(E_\lambda^s(0))=d-k+k=d$，根据定理2.3可知，对于 $\dot x=A_\lambda(t)x$，$\mathbb{R}$ 上处处存在指数二分性，当且仅当

$$E_\lambda^u(0)\cap E_\lambda^s(0)=\{0\}.\tag{56}$$

因此，若 $\Lambda_0\neq\emptyset$ 是一个闭子集，且 Λ 使得对所有 $\lambda\in\Lambda_0$都成立（56），则相应族（35）的指标丛 $\mathrm{ind}(L)$ 有定义，且由下式给出

$$\mathrm{ind}(L)=[E^-(B)\oplus E^+(C),\Theta(\mathbb{R}^d),\mathcal{L}]\in\mathrm{KO}(\Lambda,\Lambda_0),\tag{57}$$

其中，$E^-(B)\oplus E^+(C)$ 是由投影族诱导的、定义在 Λ 上的向量丛

$$\{\chi_{(-\infty,0)}(B_\lambda))\oplus\chi_{(0,\infty)}(C_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$$

在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中。注意，纤维

$$E^-(B)_\lambda=\bigoplus_{\mu<0}N(\mu I_d-B_\lambda),\qquad E^+(C)_\lambda=\bigoplus_{\mu>0}N(\mu I_d-C_\lambda)$$

由对称矩阵 B_λ 和 C_λ 的特征子空间构成。
现在考虑特殊情形：对所有 $\lambda\in\Lambda_0$，都有 $E_\lambda^u(0)\perp E_\lambda^s(0)$。于是 $N(P_\lambda^-)\perp R(P_\lambda^+)$，这表明对 $\lambda\in\Lambda_0$，$P_\lambda^-=P_\lambda^+$。因此，不变投影算子 $P_\lambda:=P_\lambda^-=P_\lambda^+$ 给出 $\dot x=A_\lambda(t)x$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上的指数二分性，其中 $K:=\max\{K_B,K_C\}$，且 $\alpha:=\min\{\alpha_B,\alpha_C\}$。那么，若 $Q\colon\Lambda\times\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}(d,\mathbb{R})$ 连续且

$$\sup_{(\lambda,t)\in\Lambda\times\mathbb{R}}|Q_\lambda(t)|<\frac{\alpha}{4K^2},\tag{58}$$

方程

$$\dot x=(A_\lambda(t)+Q_\lambda(t))x\tag{59}$$

根据定理 2.2，满足 $(A1)$ 和 $(A2)$。由于矩阵族 $A_\lambda(t)+sQ_\lambda(t)$,$s\in[0,1]$ 也具有同样的性质，由命题 2.6 中的同伦不变性可知，扰动问题 (59) 对应的算子 (35) 的指标丛同样由 (57) 给出。

本节的最终目标是考察上述方程在 $d=2$ 和一维参数空间上的数值例子。我们首先通过 $\Lambda=S^1$, $\Lambda_0=\{-1\}$ 和

$$B_\lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad C_\lambda=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},\ \lambda=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi. \tag{60}$$

注意，对于 $\lambda_0=-1\in S^1$，我们现在确实有 $P^-_{\lambda_0}=P^+_{\lambda_0}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上构成指数二分性，这表明对于 $\Lambda_0=\{-1\}$，(A2) 成立。此外， $\mu_1(B_\lambda)=\mu_1(C_\lambda)=1$, $\mu_2(B_\lambda)=\mu_2(C_\lambda)=-1$，并且

$$E^-(B)_\lambda=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\quad E^+(C)_\lambda=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\}.$$

现在将映射 (22) 应用于 (57)，即可得到相应算子 (35)

$$\Psi_{\lambda_0}(\operatorname{ind}(L))=[E^-(B)\oplus E^+(C)]-[\Theta(\mathbb{R}^2)]=[E^+(C)]-[\Theta(\mathbb{R})]\neq 0\in\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)\cong\mathbb{Z}_2,$$

因为 $E^+(C)$ 是 S^1 上的莫比乌斯丛。因此， $\Psi_{\lambda_0}(\operatorname{ind}(L))$ 生成 $\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)$，且特别地它是非平凡的。对于这一选择，指标丛 $\Psi_{\lambda_0}(\operatorname{ind}(L))$ 非平凡这一结论，以及B_λ 和 C_λ ，Pejsachowicz 已在 [22, § 4] 中证明，所用的附加假设为 $\lim_{t\to-\infty}a(t)=\lim_{t\to\infty}a(t)=-1$，该条件使 $A_\lambda(t)$ 渐近双曲，正如推论 3.8 中所述。这里，我们通过考虑扰动 (59)，还能进一步放宽这一假设，其中 Q 满足 (58)，常数 α 和 K 取决于 (i) 中的数值 t_0 和 a^+ 。接下来，对于 $\Lambda=[0,\pi]$ 和 $\Lambda_0=\{0,\pi\}$，考虑矩阵

$$B_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad C_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},\ 0\le\theta\le\pi. \tag{61}$$

那么，对于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$， $P^-_\theta=P^+_\theta$，这尤其表明 (A2) 对 $\Lambda_0=\{0,\pi\}$ 成立。此外，如上所述， $\mu_1(B_\theta)=\mu_1(C_\theta)=1$， $\mu_2(B_\theta)=\mu_2(C_\theta)=-1$，但现在

$$E^-(B)_\theta=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\},\quad E^+(C)_\theta=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\}. \tag{62}$$

我们要强调的是，尽管我们可以轻松地将 $\{B_\theta\}_{\theta\in[0,\pi]}$ 和 $\{C_\theta\}_{\theta\in[0,\pi]}$ 扩展为由 S^1 参数化的族，定理 3.3 和 (22) 在这种情况下只能得出

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda_0}(\operatorname{ind}(L))&=[E^-(B)\oplus E^+(C)]-[\Theta(\mathbb{R}^2)]\\ &=([E^-(B)]-[\Theta(\mathbb{R})])+([E^+(C)]-[\Theta(\mathbb{R})])=0\in\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)\cong\mathbb{Z}_2,\end{aligned}$$

因为 $E^+(C)$ 和 $E^-(B)$ 都与 S^1 上的莫比乌斯丛同构。另一方面，若像之前一样考虑 $\Lambda=[0,\pi]$、$\Lambda_0=\{0,\pi\}$，则由于 Λ 可缩，(A3) 成立，并且由推论 3.4 可得

$$\operatorname{ind}(L)=[\Theta(\mathbb{R}^2),\Theta(\mathbb{R}^2),\mathcal{M}],$$

其中

$$\mathcal{M}_\theta=\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

以及 $\mathcal{L}_D(\theta)=\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}=-\cos(\theta)$， $\theta\in[0,\pi]$，见推论 3.5。因此，由该推论可知 $\operatorname{ind}(L)\in\mathrm{KO}([0,\pi],\ \{0,\pi\})$ 非平凡，换言之

$$\psi_{0,\pi}(\operatorname{ind}(L))=1\in\mathbb{Z}_2 \tag{63}$$

在式 (24) 中的同构$\psi_{0,\ \pi}$ 下。
注意到，在我们的假设下，如果极限 $\lim_{t\to\pm\infty} A_\lambda(t)$ 存在，那么 (54) 中的矩阵 $A_\lambda(t)$ 渐近双曲；在这种情况下，上述结果给出了 Hu 和 Portaluri 的定理 1 在 [16] 中的一个非平凡例子。这里我们同样不仅可以放宽对极限存在性的要求，甚至还可以考虑扰动 (59)，其中 Q 满足 (58)，常数 α 和 K 则取决于 (i) 中的数 t_0 和 a^+ 。

5 同宿轨道分岔

5.1 分岔定理与推论

在本文的最后一部分，我们首次将定理 3.3 应用于同宿轨道的多参数分岔；因此，我们考虑

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = g(\lambda, t, u(t)), \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{64}$$

对于连续映射 $g\colon \Lambda\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，偏导数 $D_u g$ 存在，且在 $\Lambda\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上也连续。此外，我们假设 g 和 $D_u g$ 有界，并且对所有 $(\lambda,t)\in\Lambda\times\mathbb{R}$，$g(\lambda,\ t,\ 0) = 0$。特别地，对于所有 $\lambda\in\Lambda$，$u\equiv 0$ 都是 (64) 的一个解。

如果对于每个 $(\lambda^*,0)\in\Lambda\times H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 的邻域，都存在某个 (λ,u)，使得 u 是方程 (64) 的一个解且 $u\neq 0$，则称 $\lambda^*\in\Lambda$ 为分岔点。此后，$\mathcal{B}\subset\Lambda$ 表示方程 (64) 的所有分岔点的集合。方程 (64) 的线性化为

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A_\lambda(t)u(t), \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{65}$$

其中

$$A_\lambda(t) := D_u g(\lambda, t, 0)\in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R}). \tag{66}$$

下文中，我们用 $\Sigma\subset\Lambda$ 表示那些使得方程 (65) 除平凡解 $u\equiv 0$外还有其他解的 $\lambda\in\Lambda$ 。注意，$(A2)$蕴含 $\Lambda_0\cap\Sigma=\emptyset$。关于方程 (64) 的分岔主定理如下。

定理 5.1. 假设对于以单连通空间 Λ 为参数的方程，$(A1)$、$(A2)$ 和$(A3)$ 成立。若存在 $\lambda_0,\lambda_1\in\Lambda_0$ 使得

$$\mathcal{L}_D(\lambda_0)\cdot\mathcal{L}_D(\lambda_1) < 0,$$

那么分岔集 $\mathcal{B}$ 将 Λ分离。

我们首先强调，在对 Λ作出附加假设的情况下，分岔集 $\mathcal{B}$ 具有以下拓扑推论。

推论 5.2. 设定理 *5.1* 的假设成立，并进一步假设 Λ 是一个维数为 $n\geq 2$ 、带有（可能为空）边界 $\partial\Lambda$ 的紧致连通流形。那么 $\mathcal{B}$ 的（勒贝格覆盖）维数至少为 $n-1$；并且若 $\partial\Lambda\cap\Sigma=\emptyset$，则 $\mathcal{B}$ 作为拓扑空间不可缩。

证明。 根据假设， Λ 是连通的，因此我们从同调中的长正合列得到 ogy

$$\ldots \to H_1(\Lambda, \Lambda \setminus \mathcal{B}; \mathbb{Z}_2) \to \tilde{H}_0(\Lambda \setminus \mathcal{B}; \mathbb{Z}_2) \to \tilde{H}_0(\Lambda; \mathbb{Z}_2) = 0$$

˜使得 H_1(Λ， $\Lambda \setminus \mathcal{B}$； $\mathbb{Z}_2$) $\to H_0$(Λ \ $\mathcal{B}$； $\mathbb{Z}_2$) 是满射。根据定理，
Λ \ $\mathcal{B}$ 5 1 不连通，因此约化同调群 H_0(Λ\$\mathcal{B}$； $\mathbb{Z}_2$) 非平凡。
˜于是， H_1(Λ， Λ\$\mathcal{B}$； $\mathbb{Z}_2$) 也非平凡。最后，庞加莱-勒夫谢茨对偶给出一个同构

$$H_1(\Lambda, \Lambda \setminus \mathcal{B}; \mathbb{Z}_2) \cong \check{H}^{n-1}(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \partial\Lambda; \mathbb{Z}_2),$$

其中 ˇH 表示切赫上同调，并且我们利用了 $\mathcal{B}$ 是紧的这一点。这证明了关于维数的断言，因为次数为 $n-1$ 的非平凡切赫上同调给出了全空间 $\mathcal{B}$ 的维数下界 $n-1$。此外，若 $\Sigma \cap \partial\Lambda = \emptyset$，则 $\mathcal{B} \cap \partial\Lambda = \emptyset$，因为 $\mathcal{B} \subset \Sigma$。因此，ˇ$H^{n-1}$($\mathcal{B}$； $\mathbb{Z}_2$) =ˇH^{n-1}($\mathcal{B}$， $\mathcal{B} \cap \partial\Lambda$； $\mathbb{Z}_2$)，这说明 $\mathcal{B}$ 不可缩，因为 $n \geq 2$。 □

$\Lambda = [0,1]$ 和 $\Lambda_0 = \{0,1\}$ 这一情形值得单独指出，因为这是 Hu 和 Portaluri 在更强的假设（$A4$）和（$A5$）下所得工作的主要结果 [16] 。

推论 5.3. 假设方程 (64) 满足($A1$) 和($A2$)，其中 $\Lambda = [0,1]$ 且$\Lambda_0 = \{0,1\}$。那么，若满足以下条件，方程(64) 在 $\lambda^* \in (0, 1)$ 处有一个分岔点

$$\mathcal{L}_D(0) \cdot \mathcal{L}_D(1) < 0.$$

再次强调，($A3$) 在每个可缩空间 Λ 上都成立，因此它不是前一推论中的假设。

5.2 定理5.1的证明

我们考虑非线性算子族

$$G : \Lambda \times H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \quad G(\lambda, u) = \dot{u}(t) - g(\lambda, t, u(t))$$

以及在平凡解分支处相应的线性化

$$L := D_0 G : \Lambda \times H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \quad L_\lambda u = \dot{u}(t) - A_\lambda(t)u(t),$$

它们具有主定理 3.3 中的形式 (35)。因此，根据定理 3.1，算子 L_λ, $\lambda \in \Lambda$, 是指标 0 的 Fredholm算子。

现在我们简要回顾巴拿赫空间 X, Y 之间指标 0 的 Fredholm算子空间 Φ_0(X, Y) 中路径奇偶性的定义，这里我们主要遵循 [11]。设 L：$[a,b]$ →Φ_0(X, Y) 是一条路径，且 L_a 和 L_b 可逆。Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在[8] 中证明，存在 L 的一个参数子，即一条路径 M：$[a,b] \to$ 一般线性群(Y, X)，使得对于某条紧算子路径 K：$[a,b] \to \mathcal{K}(X)$，有 $M_\lambda L_\lambda = I_X + K_\lambda$。由于对 $\lambda = a, b$， $I_X + K_\lambda$ 均可逆，这些算子的 Leray-Schauder 度有定义，且给出为

$$\deg_{LS}(I_X + K_\lambda) = (-1)^{k(\lambda)}, \tag{67}$$

其中， k(λ) 表示 K_λ的特征值中小于 -1的特征值的代数重数。奇偶性 σ(L， $[a,b]$) 定义为 $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ 中的唯一元素，使得

$$\deg_{LS}(I_E + K_a) \deg_{LS}(I_E + K_b) = (-1)^{\sigma(L,[a,b])}.$$

已在 [8], [11] 中证明，该定义确实不依赖于参数子M的选择。此外，奇偶性具有以下性质：

(i) 如果对于所有 $\lambda \in [a,b]$都有 $L_\lambda \in$一般线性群$(X,\ Y)$，那么 $\sigma(L,\ [a,b]) = 0$。

(ii) 如果 $h\colon\ [a,b] \times [0,1] \to \Phi_0(X,\ Y)$ 是一个同伦，使得对于所有 $s \in [0,1]$，$h(a,\ s)$ $h(b,\ s) \in$ GL$(X,\ Y)$，那么

$$\sigma(h(\cdot,0),[a,b]) = \sigma(h(\cdot,1),[a,b]).$$

(iii) 如果 $E = E_1 \oplus E_2$ 对于 E 的两个闭子空间成立，且对所有 $\lambda \in [a,b]$，$L_\lambda(E_i) \subset E_i$，$i = 1,\ 2$，那么

$$\sigma(L,[a,b]) = \sigma(L\mid_{E_1},[a,b]) + \sigma(L\mid_{E_2},[a,b]).$$

引入奇偶性的主要动机是非线性算子方程的分岔理论，如下述定理所示，该定理可见于 [9]。

定理 *5.4.* 设 X, Y 是实巴拿赫空间，且 $G\colon [a,b]\times X \to Y$ 是一个 C^1-映射，对所有 $\lambda \in [a,b]$，均有 $G(\lambda, 0) = 0$。假设 $G_\lambda\colon X \to Y$ 在 $0 \in X$ 处的导数 D_uG_λ 均为指标 *0* 的 *Fredholm* 算子，并且对于 $\lambda = a, b$，$D_uG_\lambda \in GL(X,Y)$，且 $\sigma(D_uG_\cdot, [a,b]) = 1$。那么，存在一个从平凡分支分岔的分岔点，即存在某个 $\lambda^* \in (a,b)$，使得在 $(\lambda^*, 0)$ 的每个邻域 $\in [a,b] \times X$ 中，都存在某个 (λ, u)，满足 $G(\lambda, u) = 0$ 且 $u \neq 0$。

Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在 [10]指出，对于 $\Lambda = S^1$和闭路径 $L : S^1 \to \Phi_0(X,\ Y)$，指标丛 (42) 在 $\widetilde{\text{KO}}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2$的对应关系下可识别为奇偶性。这一事实已多次用于研究常微分方程和偏微分方程的分岔问题，例如见 [21, 25]。最后需要指出，Hu 和 Portaluri 的工作 [16] 中存在一个微妙的漏洞：作者将其不变量 $\sigma(L_\lambda,\ \lambda \in [a,b])$称为奇偶性，却从未解释它实际上与定理 5.4 中使用的数值 $\sigma(L,\ [a,b])$相同。Fitzpatrick 和 Pejsachowicz 在 [11]证明了以下定理。

定理 5.5。 设 $L : ([a,b], \{a,b\}) \to (\Phi_0(X,Y),$一般线性群$(X,Y))$ 是一个路径，且 $V \subset Y$是一个与 L 的值域横截的有限维子空间，如(25)所示。若 $\psi\colon [a,b]\times\mathbb{R}^d \to E(L,V)$是(27) 中丛 $E(L,V)$ 在 $[a,b]$上的任意平凡化，则

$$\sigma(L,[a,b]) = \operatorname{sgn}\det(L_a\psi_a)\operatorname{sgn}\det(L_b\psi_b) \in \mathbb{Z}_2.$$

现在令 λ_0, λ如定理 5.1 的陈述所述，并令 $\gamma\colon [0,1] \to \Lambda$为一条满足$\gamma(0) = \lambda_0$ 且 $\gamma(1) = \lambda_1$的路径。若考虑由指标 0 的 Fredholm 算子构成的路径 $L_\gamma = \{L_{\gamma(s)}\}_{s\in[0,1]}$，则 $\sigma(L_\gamma, [0,1]) \in \mathbb{Z}_2$ 有定义。此外，由命题 2.5 对于 $\Lambda = [0,1], \Lambda_0 = \{0,1\}$ 的结论以及定理 5.5 可得 $\sigma(L_\gamma, [0,1]) = \psi_0$, $1(\text{ind}(L_\gamma)) \in \mathbb{Z}_2$。现在，ind$(L_\gamma)$ 非平凡，当且仅当推论 3.5 中的映射 $\mathcal{L}_D^\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathcal{L}_D^\gamma(0) \cdot \mathcal{L}_D^\gamma(1) < 0$。最后，若考虑定义在整个 Λ上的映射 $\mathcal{L}_D\colon \Lambda \to \mathbb{R}$，则对所有 $t \in [0,1]$，都有 $\mathcal{L}_D(\gamma(t)) = \mathcal{L}_D^\gamma(t)$，因此根据假设

$$\mathcal{L}_D^\gamma(0) \cdot \mathcal{L}_D^\gamma(1) = \mathcal{L}_D(\lambda_0) \cdot \mathcal{L}_D(\lambda_1) < 0.$$

综上，$\sigma(L_\gamma,\ [0,1]) = 1$，由定理 5.4 可知，存在某个 $t' \in (0,\ 1)$，使得 $\gamma(t') \in \mathcal{B}$，因此它不是空集。

为证明 $\mathcal{B}$ 分离 Λ，我们按照 [28] 的思路，并假设存在一条路径 $\tilde{\gamma}$，位于 Λ 中，满足$\tilde{\gamma}(0) = \lambda_1$、$\tilde{\gamma}(1) = \lambda_0$，且 $\sigma(L_{\tilde{\gamma}},\ [0,1]) = 0 \in \mathbb{Z}_2$。那么，$L_\gamma$与 $L_{\tilde{\gamma}}$的拼接构成一条闭路径，因此，由于根据假设 Λ是单连通的，该闭路径同伦于一条常值路径。上述奇偶性的性质（i）和（ii）表明，这条闭路径的奇偶性为零。另一方面，性质（iii）表明，后一条路径的奇偶性非平凡，这就产生了矛盾。因此，对于连接 λ_0 和 λ_1的 Λ 中任意路径 γ，都有 $\sigma(L_\gamma,\ [0,1]) = 1$；由定理 5.4 可知，任何此类路径都与 $\mathcal{B}$ 相交。由于 λ_0、$\lambda_1 \notin \Sigma$ 和 $(\Lambda \setminus \Sigma) \cap \mathcal{B} = \emptyset$，可知 $\mathcal{B}$ 确实分离 Λ。

5.3 示例

本节旨在阐释定理 5.1。首先，我们将继续讨论已在第 4 节中考察过的例子。先假设 $\Lambda = S^1$、$\Lambda_0 = \{-1\}$ 以及式（64）的线性化具有矩阵（60）所对应的形式（54）。由我们在第 4 节中的结论可知，只有当 $\lambda = 1 \in S^1$ 时，式（54）才有非平凡解。由于 $\mathcal{B} \subset \Sigma$，这是式（64）唯一可能的分岔点。读者可利用推论 5.3 验证，实际上 $\mathcal{B} = \{1\}$。因此，尽管 $\mathcal{B}$ 非空，它并不分离 $\Lambda = S^1$。请注意，这并不与定理 5.1 矛盾，因为 $\Lambda = S^1$ 既不是单连通的，也不存在如（$A3$）所示的映射s_1, $s_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2$。

现在我们考虑一个满足定理 5.1 假设的例子。设 Λ 为任意紧单连通空间，并考虑一个连续映射 $\theta : \Lambda \to \mathbb{R}$。我们假设 (64) 的线性化具有 (54) 的形式，其中对于 $\lambda \in \Lambda$

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \cos(\theta(\lambda)) & -\sin(\theta(\lambda)) \\ -\sin(\theta(\lambda)) & -\cos(\theta(\lambda)) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C_\lambda = \begin{pmatrix} \cos(\theta(\lambda)) & \sin(\theta(\lambda)) \\ \sin(\theta(\lambda)) & -\cos(\theta(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

注意，$P_\lambda^- = P_\lambda^+$若 $\theta(\lambda) = k\pi$对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，这特别说明 ($A2$) 对于 Λ 中包含在 $\theta^{-1}(\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$ 内的任意子集 Λ_0 都成立。此外，$\mu_1(B_\lambda) = \mu_1(C_\lambda) = 1$，$\mu_2(B_\lambda) = \mu_2(C_\lambda) = -1$，并且若我们定义连续映射 s_1, $s_2 : \Lambda \to \mathbb{R}^2$

$$s_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta(\lambda)}{2} \\ \cos\frac{\theta(\lambda)}{2} \end{pmatrix}, \quad s_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta(\lambda)}{2} \\ \sin\frac{\theta(\lambda)}{2} \end{pmatrix},$$

then $E^u(0)_\lambda = \operatorname{span}\{s_1(\lambda)\}$，并且对所有 $\lambda \in \Lambda$，$E^s(0)_\lambda = \operatorname{span}\{s_2(\lambda)\}$，这说明 ($A3$)，且

$$\mathcal{L}_D(\lambda) = \det(s_1(\lambda), s_2(\lambda)) = \sin^2\frac{\theta(\lambda)}{2} - \cos^2\frac{\theta(\lambda)}{2} = -\cos(\theta(\lambda)).$$

现在，通过考察 θ 的等值集，很容易得到 (64) 的多参数分岔示例。例如，考虑闭单位圆盘 $\Lambda = D^2$，并设 $\theta : D^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $\theta|_{S^1} \equiv 0$, $\theta(D^2) \subset [0, \pi]$ 且 $\theta(0, 0) = \pi$。那么，由推论 5.2 可得，对于 $\Lambda_0 = \{(0, 0), (0, 1)\}$，$\mathcal{B}$ 分离 D^2，它作为拓扑空间不可缩，且覆盖维数至少为 1。注意，若 θ 可微且 $\frac{\pi}{2}$ 是正则值，那么根据通常的莫尔斯理论，$\mathcal{B}$ 实际上是 D^2 的一个维数为 1 的子流形。一般而言，一个有趣的观察是，只要满足 (58)，(59) 中的任何扰动都不会影响指标丛。因此，根据定理 3.3，推论 5.2 的拓扑推论仍然成立，故扰动问题的分岔集仍然分离 D^2，不可缩，且覆盖维数至少为 1。

如果我们考虑形如 $\theta(x, y) = \theta_1(x)\theta_2(y)$ 的映射 $\theta : D^2 \to \mathbb{R}$，则会出现另一种颇具启发性的情形。例如，若假设 $\theta_1 : [-1, 1] \to [0, \pi]$ 是一个同胚，且 $\theta_2(0) = 1$，那么对于 $\Lambda_0 = \{(-1, 0), (1, 0)\}$，推论 5.2 表明，$\mathcal{B}$ 分离 D^2，其覆盖维数为 1，并且与 S^1 至少有两个不同点相交。此外，在每个开半圆 $S^1_+ = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$ 和 $S^1_- = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$ 中，$\mathcal{B}$ 与 S^1 至少有一个交集。后者由此得出

$$\mathcal{L}_D(-1, 0) \cdot \mathcal{L}_D(1, 0) < 0$$

因此，$\mathcal{L}_D|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$ 沿着半圆改变符号，这意味着根据推论 5.3，它与$\mathcal{B}$ 有交集。我们再次指出，任何满足（58）的扰动族（59）的分岔集都具有相同的拓扑性质。

我们后续工作的主要目标 [33]是在 $\Lambda = D^2$ 和 $\Lambda_0 = S^1$等情形下，为（64）构造一个分岔不变量，因此它不适用于上文 D^2 中的两个例子。对于后一个例子，显然有 $\mathcal{B}\cap S^1 = \emptyset$，只要 $\Lambda_0 = S^1$；而第一个例子可以很容易地变形为一个常值系统，其指标丛在 KO中消失（D^2，S^1）。这一新不变量的独特之处在于，它能够导出例如 $\mathcal{B} \subset D^2$存在孤立点，而这些点无法通过奇偶性找到，因此确实是由多参数效应所导致的。
最后，我们考虑一个例子，以说明我们的结果适用范围。在扰动的二阶方程中

$$u''(t) + p(\lambda, t)\, u'(t) + q(\lambda, t)\, u(t) + f(\lambda, t, u(t)) = 0, \qquad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1], \tag{68}$$

我们假设 $f\colon [\lambda_0, \lambda_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $(\lambda,\ t,\ u)$ 上连续，并且在 u上连续可微。此外，

$$f(\lambda, t, 0) = 0, \qquad D_u f(\lambda, t, 0) = 0 \qquad \text{for every } t \in \mathbb{R} \text{ and } \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \tag{69}$$

且系数 $p,\ q\colon [\lambda_0, \lambda_1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $(\lambda,\ t)$ 上连续。注意，(69) 表明，对于每个 λ，$u \equiv 0$ 都是 (68) 的一个解。为了研究从这一平凡解分支出发的分岔，我们考虑以下线性二阶常微分方程族

$$u''(t) + p(t, \lambda)\, u'(t) + q(t, \lambda)\, u(t) = 0, \qquad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1], \tag{70}$$

在 $\mathbb{R}$ 上。为使表述简洁，我们不考虑可应用定理 3.3 的最一般情形，而是假设极限

$$p(\lambda, t) \to p^{\pm}(\lambda), \qquad q(\lambda, t) \to q^{\pm}(\lambda) \qquad \text{as } t \to \pm\infty \tag{71}$$

在 λ 中一致存在，且相应的极限常系数方程

$$u'' + p^-(\lambda)u' + q^-(\lambda)u = 0, \qquad u'' + p^+(\lambda)u' + q^+(\lambda)u = 0$$

是双曲的，即其特征多项式

$$r^2 + p^-(\lambda)r + q^-(\lambda) = 0, \qquad r^2 + p^+(\lambda)r + q^+(\lambda) = 0 \tag{72}$$

有根 $r_i^{\pm}$，使得 $\operatorname{Re}\, r_1^- \cdot \operatorname{Re}\, r_2^- < 0$ 且 $\operatorname{Re}\, r_1^+ \cdot \operatorname{Re} r_2^+ < 0$。
标准相变量 $x_1(t) = u(t)$ 和 $x_2(t) = u'(t)$ 将线性方程 (70) 转化为等价的非自治线性系统

$$x'(t) = A_\lambda(t)\, x(t), \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{73}$$

其中

$$A_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(\lambda, t) & -p(\lambda, t) \end{pmatrix}.$$

极限 (71) 表明，当 $t \to \pm\infty$ 时，$A_\lambda(t) \to A_\lambda^{\pm}$，其中

$$A_\lambda^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^{\pm}(\lambda) & -p^{\pm}(\lambda) \end{pmatrix}$$

并且（72）保证 $A_\lambda^{\pm}$ 是如假设（$A4$）中所述的双曲矩阵。半线性方程（68）
变为

$$x'(t) = A_\lambda(t)\, x(t) + F(\lambda, t, x(t)), \tag{74}$$

其中

$$F(\lambda,t,x)=\begin{pmatrix}0\\-f(\lambda,t,x_1)\end{pmatrix}. \tag{75}$$

由 (69) 可得

$$F(\lambda,t,0)=0,\qquad D_xF(\lambda,t,0)=0\qquad \text{for all } t\in\mathbb{R} \text{ and } \lambda\in[\lambda_0,\lambda_1],$$

因此，(74) 在平凡解 $x\equiv 0$ 处的线性化方程恰好就是 (73)。在上述假设下，线性化方程 (70) 存在由两个函数 $u_\pm(\lambda,\cdot)$ 张成的一维解空间：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $u_-(\lambda,t)\to 0$ 当 $t\to-\infty$ 时成立，而 $u_+(\lambda,t)\to 0$当 $t\to+\infty$ 时成立。等价地，在一阶形式 (73) 中，向量

$$v_-^u(\lambda):=\begin{pmatrix}u_-(\lambda,0)\\u_-'(\lambda,0)\end{pmatrix},\qquad v_+^s(\lambda):=\begin{pmatrix}u_+(\lambda,0)\\u_+'(\lambda,0)\end{pmatrix}$$

在 $0\in\mathbb{R}$ 处张成不稳定子空间和稳定子空间。
现在考虑

$$\mathcal{L}_D(\lambda):=\det\left(v_-^u(\lambda),\,v_+^s(\lambda)\right)=\det\begin{pmatrix}u_-(\lambda,0)&u_+(\lambda,0)\\u_-'(\lambda,0)&u_+'(\lambda,0)\end{pmatrix} \tag{76}$$

如推论 5.3 所示，那么在 $\mathcal{L}_D$ 改变符号处的任何孤立零点都是 (68) 的一个分岔点。

为了给出这些发现的一个数值示例，我们来考虑薛定谔型方程

$$u''(t)+(-\lambda^2-V(t))u(t)+f(\lambda,t,u)=0\qquad \lambda\in[1/2,3/2],$$

对于 Pöschl-Teller 势 $V(t)=-2\operatorname{sech}^2(t)$，即

$$u''(t)+(2\operatorname{sech}^2(t)-\lambda^2)u(t)=0, \tag{77}$$

其中，$f(\lambda,t,u)$ 是如（69）中的非线性扰动。因此，$p(\lambda,t)=0$ 以及 $q(\lambda,t)=2\operatorname{sech}^2(t)-\lambda^2$ 在（68）中，并且这些系数在 $t\to\pm\infty$ 时的极限为

$$p^\pm(\lambda)=0,\qquad q^\pm(\lambda)=-\lambda^2.$$

极限方程为 $u''-\lambda^2u=0$，并且它们满足上文所假设的双曲性条件。直接计算可得，

$$u_-(\lambda,t)=e^{\lambda t}(\lambda-\tanh t),\ u_+(\lambda,t)=e^{-\lambda t}(\lambda+\tanh t)$$

是（77）的解，使得当 $t\to-\infty$ 时，$u_-(\lambda,t)$ 趋于 0；当 $t\to\infty$ 时，$u_+(\lambda,t)$ 趋于 0。此外，

$$u_-'(\lambda,t)=e^{\lambda t}\left(\lambda^2-\lambda\tanh t-\operatorname{sech}^2 t\right),\quad u_+'(\lambda,t)=e^{-\lambda t}\left(-\lambda^2-\lambda\tanh t+\operatorname{sech}^2 t\right),$$

因此，在（76）中有

$$\mathcal{L}_D(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda&\lambda\\\lambda^2-1&1-\lambda^2\end{pmatrix}=2\lambda(1-\lambda^2).$$

由于 $\mathcal{L}_D(1/2)\cdot\mathcal{L}_D(3/2)<0$，我们看到 (68) 有一个分岔点。

参考文献

[1] A. Abbondandolo, P. Majer, 希尔伯特空间上的莫尔斯同调，《纯粹与应用数学通讯》54，2001年，689–760[2] A. Abbondandolo, P. Majer, 希尔伯特空间中的常微分算子与弗雷德霍姆对，《数学杂志》243，2003年，525–562[3] H. Amann，《常微分方程：非线性分析导论》，德格鲁伊特数学研究丛书13，1990年[4] M.F. Atiyah，《K 理论》，艾迪生-韦斯利，1989年[5] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne，《热核与狄拉克算子》，基础知识文本版丛书，施普林格出版社，柏林，2004年[6] W. Coppel，《稳定性理论中的二分性》，《数学讲义》629，施普林格，柏林等地，1978年。[7] T. tom Dieck，《代数拓扑》，欧洲数学学会数学教科书丛书，苏黎世，2008年[8] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz，线性弗雷德霍姆算子空间的基本群与半线性方程的整体分析，《当代数学》72，1988年，47–87[9]P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz，C^1-弗雷德霍姆映射的局部分岔定理，《美国数学会会刊》109，1990年，995–1002[10] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz，指标丛的不可定向性与多参数分岔，《泛函分析杂志》98，1991年，42–58[11] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz，《完全非线性椭圆边值问题的定向与勒雷-绍德理论》，《美国数学会回忆录》483，1993年[12] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek，《线性算子类》第一卷，《算子理论：进展与应用》第49卷，比克豪泽，1990年[13] A. Hatcher，《向量丛与 K 理论》。预印本，2017年[14] W. Hurewicz, H. Wallmann，《维数理论》，普林斯顿数学丛书4，普林斯顿大学出版社，1941年[15] D. Husemoller，《纤维丛》，第3版，《数学研究生教材》20，施普林格出版社，1993年[16] X. Hu, A. Portaluri，通过指标理论研究异宿轨道的分岔，《数学杂志》292，705–723，2019年[17] K. Jänich，《向量丛与弗雷德霍姆算子空间》，《数学年刊》161，1965年，129–142[18] N. Ju, S. Wiggins，《指数二分性的粗糙性》，《数学分析及其应用杂志》262，第1期，2001年，39–49

[19] I.P. Longo, C. Pötzsche, R. Skiba，同宿解的整体分岔，微分方程杂志 437，2025年，113334[20] E. Park，复拓扑K理论，剑桥高等数学研究丛书 111，剑桥大学出版社，剑桥，2008年[21] J. Pejsachowicz，分岔理论中的K理论方法，当代数学 72，193–205，1988年[22] J. Pejsachowicz，同宿轨道的分岔，《美国数学会会刊》 136，第1期，2008年，111–118[23] J. Pejsachowicz，哈密顿系统同宿轨道的分岔，《美国数学会会刊》 136，第6期，2008年，2055–2065[24] J.Pejsachowicz，分岔的拓扑不变量， C^*-代数与椭圆理论 II，Trends Math.，Birkhuser，巴塞尔，2008年，239–250[25] J. Pejsachowicz，Fredholm映射的分岔 I：指标丛与分岔，拓扑方法与非线性分析 38，2011年，115–168[26] J. Pejsachowicz，R. Skiba，离散动力系统同宿轨道的整体分岔，中欧数学杂志，10(6)，2012年，2088–2109[27] J. Pejsachowicz，R. Skiba，离散动力系统的拓扑学与同宿轨道，离散与连续动力系统，S辑，6(4)，2013年，1077–1094[28] A. Portaluri，N. Waterstraat，泛函族临界点的分岔结果，微分积分方程 27，2014年，369–386[29] C. Pötzsche，R. Skiba，Evans函数、奇偶性与非自治分岔，爱丁堡皇家学会会刊：A辑数学，在线发表于2025年，1-40，doi:10.1017/prm.2025.10062[30] R. Skiba，N. Waterstraat，离散动力系统的指标丛与多参数分岔，Discrete Contin. Dyn. Syst. 37，第11期，2017年，5603–5629[31] R. Skiba，N. Waterstraat，自伴Fredholm算子的指标丛与哈密顿系统的多参数分岔，分析及其应用杂志 41，第 3/4期，2022年，487-501[32] R. Skiba，N. Waterstraat，离散动力系统族的Fredholm理论及其在分岔理论中的应用，Discrete Contin. Dyn. Syst. 43，第5期，2023年，1878–1904[33] R. Skiba，N. Waterstraat，分岔理论中的相对 K理论方法，准备中[34] N. Waterstraat，Fredholm 态射的指标丛，都灵理工大学数学研讨会报告 69，2011年，299–315[35] N. Waterstraat，周期哈密顿系统与分岔的族指标定理，变分法与偏微分方程 52，2015年，727–753。[36]N. Waterstraat，半黎曼几何中莫尔斯指标定理的一个 K理论证明，《美国数学会会刊》 140，2012年，337–349

[37] N. Waterstraat，**关于Fredholm映射分岔的一个注记**，《Adv. Nonlinear Anal.》**7**，2018年，285–292

[38] N. Waterstraat，**论希尔伯特空间中的Fredholm拉格朗日Grassmann流形、谱流与常微分方程**，《J. Differential Equations》**303**，2021，667–700

[39] M.G. Zeidenberg、S.G. Krein、P.A. Kuchment、A.A.Pankov，**Banach 丛与线性算子**，《Russian Math. Surveys》**30**，1975，115–175

Robert Skiba、Daniel Strzelecki，尼古拉·哥白尼大学数学与计算机科学学院，Chopina 12/18，87-100 托伦，波兰。电子邮件：robert.skiba @mat.umk.pl 电子邮件：daniel.strzelecki@mat.umk.pl

Nils Waterstraat，哈勒-维滕贝格马丁·路德大学，自然科学第二学院，数学研究所，06099 哈雷（萨勒），德国。
n
ils.waterstraat
@mathematik.uni-halle.de