arXiv:2603.20552v1 [math.DS] 20 Mar 2026

几何有限双曲流形的强谱隙

Dubi Kelmer、Osama Khalil 和 Pratyush Sarkar

摘要。设 $\Gamma < G := \mathrm{SO}(d+1,1)$ 对于 $d \geq 1$ 是一个扎里斯基稠密、几何有限、离散的子群，其临界指数严格大于 $d/2$。我们证明 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 具有强谱隙，从而证实了 Mohammadi 和 Oh 的一个猜想。这推广了 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong L^2(\Gamma\backslash G/\mathrm{SO}(d+1))$ 上的球谱隙；该结果可由 Lax–Phillips、Patterson 和 Sullivan 以不同方法得出。作为推论，我们建立了矩阵系数的衰减率以及标架流指数混合的衰减率，这些速率由强谱隙的大小明确决定。

目录

1. 引言 1
2. 表示论预备知识 5
3. 矩阵系数关于 Harish-Chandra C 函数与拉普拉斯变换的渐近展开 11
4. 矩阵系数主项的非消失性 17
5. 带幂次节省误差项的矩阵系数衰减与拉普拉斯变换 18
6. 拉普拉斯变换的比较与定理的证明 1.3 和 1.6 19
参考文献 26

1. 引言

全文中，$G := \mathrm{SO}(d+1,1)^\circ$ 表示符号为 $(d+1,1)$ 的正交群的连通分支，其中 $d \geq 1$，而 $\Gamma < G$ 是一个离散子群。回顾一下，G 可实现为 $(d+1)$ 维双曲空间 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的保定向等距变换群。若离散子群 Γ 及相应的双曲轨形 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 满足下述条件，则称其为几何有限：$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 的凸核的 1-邻域具有有限体积；这里，凸核是包含 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 中所有闭测地线的最小闭凸子集。临界指数 $\delta_\Gamma \in [0,d]$ 是与 Γ 相关的一个基本参数，定义为对任意参考点 $o \in \mathbb{H}^{d+1}$，庞加莱级数 $s \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(o,\gamma o)}$ 的收敛横坐标。当 Γ 几何有限时，临界指数与 Γ 在 $\partial_\infty(\mathbb{H}^{d+1})$ 中的极限集的豪斯多夫维数相同；该极限集是任意 Γ 轨道在 $\mathbb{H}^{d+1}$ 中的极限点集合。我们主要研究 G 在空间 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的右正则表示，其中该空间由关于一个固定的 G-不变测度的 $\mathbb{C}$ 值 L^2 函数构成。

回顾：G的一个不可约酉表示若存在被 G的一个极大紧子群固定的非零向量，则称其为球的。1982年，Lax–Phillips 在 [LP82] 中证明，当 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$为几何有限时，拉普拉斯–贝尔特拉米算子的 L^2 谱与 $[0,d^2/4)$ 的交集由一个（可能为空的）有限特征值集合组成，且每个特征值均具有有限重数（即所谓拉普拉斯–贝尔特拉米算子的小特征值）。等价地，由于球面互补级数表示中的球面向量是拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征函数，其特征值属于 $[0,d^2/4)$，故在 $L^2(\Gamma\backslash G)$中至多出现有限多个球面互补级数，且均具有有限重数。此外，Patterson 在 $d=1$情形下的工作 [Pat76] ，以及 Sullivan 的一般性工作 [Sul79] 表明，当且仅当 $\delta_\Gamma > d/2$ 时，连续谱之下存在一个底部特征值（参见 Elstrodt 的工作 [Els73a, Els73b, Els74]）；因此在此情形下存在谱隙，通常称为 Lax–Phillips 谱隙。

在 [MO15, Definition 1.1], 中，Mohammadi–Oh 提出了一种更一般的强谱隙，其中既包括非球面互补级数，也包括球面互补级数（关于紧群的类似问题，参见 [KS09, Kel11] ）。很自然地，可将他们的定义扩展为如下定义，以涵盖所有准互补级数；这些级数穷尽了 G的酉对偶中的非温元素；$\widehat{\ }$见定理 2.6。为表述该定义，记 $M_{\text{s-d}}$ 为 $M \cong \mathrm{SO}(d)$的自对偶不可约表示的同构类集合。于是，准互补级数由满足 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 及 $s \in \mathcal{I}_\sigma$的对偶$\widehat{\ }$$(\sigma, s)$参数化，其中 $\mathcal{I}_\sigma \subset (d/2, d]$ 是由 σ确定的一个显式区间；精确定义见第 2.5 小节。相应的级数记为 $\mathcal{U}(\sigma, s)$。

定义 1.1 （强谱隙）。 我们称 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 具有强谱隙，如果以下两项均成立。

(1) 对所有非平凡的 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$，准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma, \delta_\Gamma)$ 不包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。$\widehat{\ }$(2) 存在 $\eta > 0$，使得对所有 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 以及 $s \in (\delta_\Gamma - \eta, \delta_\Gamma)$，准互补级数$\mathcal{U}(\sigma, s)$ 不弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。

注 1.2. 注意，对所有 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s > \delta_\Gamma$， $\mathcal{U}(\sigma, s)$ 都不弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中；见$\widehat{\ }$命题 6.5。因此，只要定义 1.1(2) 成立，对任意非平凡的 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$，若 $\mathcal{U}(\sigma, \delta_\Gamma)$ 弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中，则自动构成强包含，这也说明了定义 1.1(1) 中看似更强的要求是合理的。

事实上，结合 Lax–Phillips 谱隙以及非球拟互补级数在参数 $s > d - 1$时不存在这一观察，可以推出：若 $\Gamma < G$ 是一个扎里斯基稠密的几何有限离散子群，其临界指数为 $\delta_\Gamma > \max\{d/2, d-1\}$，则 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 具有强谱隙（参见 [MO15，定理 3。27]）。在 [MO15，猜想 1。2], Mohammadi 和 Oh 猜想，对于任意维数 $\delta_\Gamma > d/2$，条件 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 足以保证其在互补级数上具有强谱隙。本文的主要结果如下，并特别证明了他们的猜想。

定理 1.3。 若 $\Gamma < G$ 是一个扎里斯基稠密、几何有限的离散子群，且满足 $\delta_\Gamma > d/2$，则$L^2(\Gamma\backslash G)$ 具有强谱隙。

注记 1.4. 我们作如下观察：

(1) 根据上述讨论，定理 1.3 对 $d \geq 3$而言是新的。(2) 限于球面互补级数，我们得到 Lax–Phillips 谱隙的另一种证明；参见小节 1.2。我们还对 Patterson 和 Sullivan 提出的上述事实给出了另一种证明：L^2 谱的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的底部特征值是单重的，且等于 $\delta_\Gamma(d - \delta_\Gamma)$；参见命题 6.8。(3) 定理 η 在定义 1.1(2) 中给出的强谱隙大小1.3 对任何一族子群 $\Gamma < G$ 均保持一致，只要标架流的指数混合速率在该族上保持一致。特别地，对于固定的扎里斯基稠密凸余紧子群 Γ所含的某些算术群 G 的同余子群族，Oh–Winter 对 $d = 1$ [OW16], 的工作以及第三位作者对一般情形的工作表明，这种一致性成立 $d \geq 1$ [Sar22]。在第三位作者即将发表的工作中，这些结果将推广到 Γ 为几何有限的情形。

在确立了强谱隙存在性的定理 1.3之后，我们作如下定义。

定义 1.5 (强谱隙参数)。 复数域 的强谱隙参数，记作 Γ，是所有 κ_Γ的上确界，其中 $\eta \in (0, \delta_\Gamma - d/2]$ 使得定义 1.1(2) 成立。

定理 1.3 给出了矩阵系数衰减速率以及标架流指数混合速率的以下两个结果。这推广了 Edwards–Oh [EO21], 的结果；他们证明了测地流具有指数混合性，而无需依赖强谱隙的存在。关于矩阵系数、混合以及齐性动力系统中相关问题的简要综述，读者可参阅 Oh[Oh26，§7–8] 该文将发表于《2026 年国际数学家大会论文集》中。

记 m^{Haar}、 m^{BMS}、 m^{BR}和 m^{BR_*}为相容选取的 G-不变的 Bowen–Margulis–Sullivan 测度和 Burger–Roblin测度；参见第 5 节及其中的参考文献。我们还记 $\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)$ 为 L^2-阶 Sobolev空间，其阶数为 $m>0$，并使用沿固定极大紧子群的导数定义 $K<G$；精确定义见第 2.3 小节。

定理 1.6。 设 $\Gamma<G$ 是一个扎里斯基稠密、几何有限的离散子群，且满足 $\delta_\Gamma > d/2$。令$\kappa_0 :=$最小值$\{\kappa_\Gamma, 1\}$，其中 κ_Γ 是 Γ 的强谱隙参数。存在 $m>d(d+1)/2$，使得对所有 $\epsilon>0$，以及 ϕ、$\psi\in\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)$ 和 $t>0$，都有

$$e^{(d-\delta_\Gamma)t}\int_{\Gamma\backslash G}(\phi\circ a_t)\cdot\psi\, dm^{\mathrm{Haar}} = \int_{\Gamma\backslash G}\phi\, dm^{\mathrm{BR}}\int_{\Gamma\backslash G}\psi\, dm^{\mathrm{BR}_*} + O_\epsilon\big(e^{-(\kappa_0-\epsilon)t}\|\phi\|_{\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)}\|\psi\|_{\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)}\big).$$

注 1.7。 定理 1.6 强化了 [SW21、 LPS25] 在 $\delta_\Gamma > d/2$ 方面的结果，这体现在以下三个对应用至关重要的方面 [MO15、 KO21]:

- 误差项的指数衰减速率 κ_0 由强谱隙参数κ_Γ明确确定；
- 隐含常数不依赖于测试函数的支撑，尤其允许使用非紧支撑函数；
- 对测试函数的正则性控制被减弱为仅涉及 Sobolev范数 $\mathcal{S}^m_K$。

不过，我们注意到 [SW21、LPS25] 的结果被用作我们证明定理 1.3的输入。特别是，定理 1.6 并未为这些结果提供不同的证明。

下面的定理可由定理 1.6 采用与 [MO15、OW16、KO21] 中相同的证明得到，这些文献为 Roblin 横截交叉论证 [Rob03]提供了有效版本。事实上，指数速率的显式公式由 [OW16定理58]及其证明的推广得到。

定理1.8。**设** $\Gamma<G$ 是一个扎里斯基稠密的、几何有限的离散子群，其中 $\delta_\Gamma > d/2$。设$\kappa_1 := \frac{\kappa_0}{2(d+3+\kappa_0)}$，其中 κ_0 是定理 1.6中的常数。存在 $m>d(d+1)/2$，使得对所有ϕ、$\psi\in C^m(\Gamma\backslash G)$ 和 $t>0$，均有

$$\int_{\Gamma\backslash G}(\phi\circ a_t)\cdot\psi\, dm^{\mathrm{BMS}} = \int_{\Gamma\backslash G}\phi\, dm^{\mathrm{BMS}}\int_{\Gamma\backslash G}\psi\, dm^{\mathrm{BMS}} + O\big(e^{-\kappa_1 t}\|\phi\|_{C^m(\Gamma\backslash G)}\|\psi\|_{C^m(\Gamma\backslash G)}\big).$$

定理 1.3还直接给出以下推论。回想一下，Casimir算子在准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,s)$ 上的作用为标量 $s(d-s)$，且其在 K-不变函数上的作用与拉普拉斯–贝尔特拉米算子相同，因此有:

推论 1.9。 拉普拉斯–贝尔特拉米算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1})$ 上的底部特征值 $\delta_\Gamma(d-\delta_\Gamma)$ 与 *Casimir*算子在 $L^2(\Gamma\backslash G)$上的其余谱是分离的。

备注 1.10。 请注意，当 d 为奇数时，Casimir算子的特征值 $\delta_\Gamma(d-\delta_\Gamma)$ 可能不是单重的，这是因为存在（温和的）离散系列表示，其 Casimir特征值可能与某个（非温和的）准互补系列表示的特征值相同，而这些表示也可能出现在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。不过，由于对应于离散系列的 Casimir特征值构成一个离散集，因此无需担心它们会在 $\delta_\Gamma(d-\delta_\Gamma)$ 附近聚集。

1.1. 论文结构与证明概要。 我们的策略基于研究测试函数 $\phi,\psi\in L^2(\Gamma\backslash G)$ 的缩放矩阵系数的拉普拉斯变换，其定义如下:

$$F(z)=\int_0^{+\infty} e^{-(z+\delta_\Gamma-d)t}\langle\phi\circ a_t,\psi\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}\,dt \qquad \text{for all } z\in\mathbb{C} \text{ with } \Re(z)>0. \tag{1.1}$$

在第 2 节回顾必要的表示论背景后，我们在第3节回顾 Edwards 和 Oh [EO21] 关于互补系列表示的矩阵系数渐近展开的工作，并利用该工作证明命题 3.8，该命题为此类矩阵系数的拉普拉斯变换的全纯延拓提供了精确信息。

矩阵系数渐近展开中的主项以 Harish-Chandra 函数表示；定义 3.2。在第 4 节中，我们回顾了 [EKM99]，中 Harish-Chandra 函数的显式公式，这些公式使我们能够构造指定的 K-有限向量，使得 Edwards–Oh 展开中的主项不为零；推论 4.3。我们利用这些非零性结论来给出

矩阵系数的拉普拉斯变换无法全纯延拓至实数轴上的某些区域；这些区域对应该准互补级数，而该级数在 $L^2(\Gamma\backslash G)$中弱出现。

在第 5 节中，我们回顾 Winter 与第三位作者 [SW21]，以及 Li、Pan 与第三位作者 [LPS25] 关于相对于 Bowen–Margulis–Sullivan 测度的标架流指数混合的研究。通过 Roblin 横截交叉论证，该结果为缩放矩阵系数的渐近公式提供了一个幂次节省的误差项；定理 5.1。该结果立即推出拉普拉斯变换可亚纯延拓至虚轴左侧的一个带状区域，且至多在原点有一个简单极点；推论5.3。

在第 6 节中，我们通过比较以上述两种不同方式计算的拉普拉斯变换 $F(z)$ 来证明定理 1.3，即分别利用表示论（命题 3.8 ）和动力学（推论 5.3）。为说明这一思路，回顾一下， $L^2(\Gamma\backslash G)$ 可在 G 的酉对偶上作直积分分解，所用的测度为某些博雷尔测度，我们称之为 谱测度；参见第 2 节。因此，Edwards–Oh 渐近展开中的主项可表示为相对于此类测度的适当积分。

关键思想源于 Avila–Gouëzel [AG13，§3]，，即将命题 3.8 所提供的表示论公式解释为关于谱测度的某个绝对连续测度的斯蒂尔切斯变换（在命题 6.3中回顾）。我们情形的一个显著特点是，所涉测度的拉东–尼科迪姆导数一般取复数值；而在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-表示的情形中， [AG13], 所研究的此类密度则取实值且非负。接着，将推论 5.3中动力学所给出的全纯延拓，与推论 6.4中斯蒂尔切斯反演公式向复值测度的推广相结合，便可得到谱测度在某个开区间上消失，该开区间的右端点是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的谱底。该论证在命题 6.6中完成，将验证定义 1.1(2)。

定义 1.1(1) 中所述的谱底的简单性，可通过比较拉普拉斯变换的留数得出，并结合如下观察：动力学一侧的主项是秩为 1 的双线性形式（它是对 Burger–Roblin 测度积分的乘积）。这一论证见命题 6.8。

1.2. **与先前工作的关系**。 Avila、Gouëzel 和 Yoccoz 在研究$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 表示 [AGY06，附录 B],时，曾采用将指数混合与表示论相结合以获得谱隙的总体策略；该论证归功于 Anantharaman、Bufetov 和 Forni。这里的思路是，在给定的球面互补级数中考察球向量，即被极大紧子群所不变的向量。在该级数中，已知矩阵系数非负，事实上，其下界（相差一个一致常数因子）为 $e^{-\lambda t}$，其中 $\lambda \geq 0$取决于所讨论的互补级数。结合指数混合给出的矩阵系数上界，便可迅速得到所需的谱隙。

上述论证事实上很容易推广到更高维情形，从而利用测地流的指数混合，为 Lax–Phillips 的球面谱隙给出另一种证明。据我们所知，对于非球面准互补级数（即不包含非零球面向量的那些级数），矩阵系数尚无类似的正性和下界结果。在我们的情形中，Edwards–Oh 的工作以及第4节中的非消失结果，弥补了这类下界的缺失。正性的缺失带来了更多微妙之处；如上所述，我们通过斯蒂尔切斯变换形式的复分析，以较为间接的方式处理了这些问题。

最后，我们回顾 Dyatlov 和 Guillarmou 的工作 [DG16、DG18] ： 在 Axiom A 流的情形下，他们将向量丛截面的矩阵系数的拉普拉斯变换亚纯延拓到整个复平面，其中包括凸余紧流形上的测地流。至少对于凸余紧子群而言，[1] 这些结果表明，对于任意给定的 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$，至多存在有限多个参数 $s \in (d/2,\ \delta_\Gamma]$ 使得准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,\ s)$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$中弱出现。然而，由于 $M_{\text{s-d}}$ 是无限的，这些结果并不能推出按照定义1.1所述意义下强谱隙的存在。

致谢。我们感谢 Semyon Dyatlov、Alex Kontorovich、Amir Mohammadi 和 Amos Nevo 与我们进行富有启发性的讨论。我们感谢 Hee Oh 建议定理1.6可由我们的论证推出，

[1]针对负曲率对称空间的凸余紧商空间上的标量值函数，采用不同方法也得到了类似结果，见 [Kha23b]，；此外，这些方法还为几何有限群给出了亚纯延拓，其延拓范围是虚轴左侧一个由 δ_Γ 以及尖点的秩决定的明确条带 Γ。

并对本文早期版本提出意见。我们还感谢 Sam Edwards 指出互补级数端点的存在。O.K. 感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-2337911 和 DMS-2247713 提供支持。P.S. 在苏黎世联邦理工学院工作期间，感谢瑞士国家科学基金会通过资助项目 10003145 提供支持。

2. 表示论预备知识

如引言所述， $G := \mathrm{SO}(d+1,\ 1)^\circ$ 对于 $d \geq 1$ 和 $\Gamma < G$ 是一个临界指数为 $\delta_\Gamma \in [0, d]$的离散子群。此后我们假设 $\Gamma < G$ 是一个具有 $\delta_\Gamma > d/2$的扎里斯基稠密几何有限离散子群。相应地， $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}$ 是一个 $(d+1)$ 维几何有限双曲轨形。本节将汇集李代数、李群和酉表示论的必要背景知识。

2.1. 的李理论。我们回顾一下 G的结构，以及与 Γ 相关、对我们有用的主要动力系统。

我们始终用哥特体字母表示与李群相对应的李代数，例如， $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$。在 $\mathfrak{g}$上固定一个嘉当对合。通过 $\mathfrak{g}$上的基林形式，它在 G上诱导出一个左 G不变且右 K不变的黎曼度量。它还给出一个伊瓦萨瓦分解 $G = KAN \cong K \times A \times N$，其中

$$K < G, \qquad A < G, \qquad N < G,$$

分别为极大紧子群、极大可对角化子群和极大 horospherical 子群。令 $M := Z_K(A) < K$，即 K 中 A 的中心化子。我们将由 G 上的黎曼度量在 G 上诱导的哈尔测度记为 μ_G 或 dg，对于其他诱导的幺模拓扑群也作类似记号。分别用 $\mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1})$ 和 $\mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1})$ 表示 $\mathbb{H}^{d+1}$ 的单位切丛和定向正交标架丛。作为带有左 G-作用的黎曼流形，我们可以作如下识别：

$$\mathbb{H}^{d+1} \cong G/K, \qquad \mathrm{T}^1(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G/M, \qquad \mathrm{F}(\mathbb{H}^{d+1}) \cong G.$$

类似地，我们也可以作如下黎曼轨形识别：

$$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1} \cong \Gamma\backslash G/K, \qquad \mathrm{T}^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G/M, \qquad \mathrm{F}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^{d+1}) \cong \Gamma\backslash G.$$

回顾一下， G 为秩一，这意味着 A 是一个单参数子群。我们参数化 $A := \{a_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，使得其在 G 和 $\Gamma\backslash G$（分别在 G/M 和 $\Gamma\backslash G/M$）上的右平移作用是单位速度标架流（分别为测地流）。我们还可以进一步假设参数化满足： N 是 收缩 horospherical 子群；并令 $N < G$ 为扩张 horospherical 子群。也就是说，我们有

$$N = \left\{g \in G : \lim_{t\to-\infty} a_t g a_{-t} = e\right\}, \qquad \overline{N} = \left\{g \in G : \lim_{t\to+\infty} a_t g a_{-t} = e\right\}.$$

此外， N 和 N （分别为 $\mathfrak{n}$和 $\mathfrak{n}$）是与$\mathbb{R}^d$同构的 d维阿贝尔李群（分别为李代数）。上述参数化等价于 a_t的以下伴随作用：

$$\mathrm{Ad}(a_t)v = e^t v, \qquad \mathrm{Ad}(a_t)\overline{v} = e^{-t}\overline{v}, \qquad \text{for all } v \in \mathfrak{n},\ \overline{v} \in \overline{\mathfrak{n}},\ \text{and } t \in \mathbb{R}.$$

作为上述讨论的结果，我们有唯一的映射

$$\kappa : G \to K, \qquad H : G \to \mathbb{R}, \qquad n : G \to N,$$

使得

$$g = \kappa(g) a_{H(g)} n_g.$$

注意， H 的参数化方式使得对所有 $t \in \mathbb{R}$， $H(a_t) = t$ 。

2.2. 酉表示论：一般论述。 我们固定一些记号和约定，这些记号和约定适用于任意幺模局部紧豪斯多夫拓扑群，在本小节中我们将其记为 G 。关于细节，请读者参阅以下著作： [Dix77、Wal92、War72b] 。本文中，所有表示均为强连续且定义在 $\mathbb{C}$上，除非另有说明。因此， G的酉表示是一个映射

$$\pi : G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$$

到希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的酉群 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ 中，该空间配备内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 以及相应的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$，使得对于所有 $v \in \mathcal{H}$，由 $g \mapsto \pi(g)v$ 给出的映射 $G \to \mathcal{H}$ 都是连续的。为简便起见，我们

通常将其称为 G 的酉表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$。我们也用 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界算子的算子范数。

对于作用在局部紧豪斯多夫拓扑空间 X 上的任意左（分别为右） G-作用，该空间配备有一个 G-不变的博雷尔测度 μ_X，例如 G 本身，我们将由 $L^2(X)$ 表示配备标准内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2(X)}$ 的希尔伯特空间，该内积定义为 $\langle\phi,\ \psi\rangle_{L^2(X)}:=\int_X \phi\cdot\overline{\psi}\,d\mu_X$ 对所有 $\phi,\ \psi\in L^2(X)$。我们也将 $(\lambda_G,\ L^2(X))$（分别为 $(\rho_G,\ L^2(X))$）称为 G 的左（分别为右）正则表示，其定义为

$$\lambda_G(g)(\phi)(x)=\phi(g^{-1}x)\qquad(\text{resp. }\rho_G(g)(\phi)(x)=\phi(xg))$$

对于所有 $x\in X$、$\phi\in L^2(X)$ 和 $g\in G$。

G 的一个表示 $(\rho,\ \mathcal{V})$ 被（强）包含于 G 的另一个表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 中，如果 $(\rho,\ \mathcal{V})$ 同构于 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 的一个子表示。G 的一个酉表示 $(\rho,\ \mathcal{V})$ 被弱包含于 G 的另一个酉表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 中，如果 $(\rho,\ \mathcal{V})$ 的任意对角矩阵系数都是 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 的对角矩阵系数的线性组合序列在 G 的紧子集上一致极限。回顾一下，如果一个表示不严格包含任何非平凡的 G-不变子空间，则称其为不可约表示。G 的酉对偶，以 G 表示，是所有不可约酉表示的同构类集合，并配备壳核／费尔拓扑。我们用 $\mathbf{1}\in G$ 表示平凡不可约表示的等价类。

表示 $(\pi,\mathcal{H})$ 的对偶 是 G 上的一个新表示 $(\pi^*,\mathcal{H}^*)$，由 G 定义为

$$\pi^*(g)(f)(v)=f(\pi(g^{-1})v)$$

对所有 $v\in\mathcal{H}$、$f\in\mathcal{H}^*$ 和 $g\in G$ 均成立。若一个表示 $(\pi,\mathcal{H})$ 同构于 $(\pi^*,\mathcal{H}^*)$，则称其为自对偶 。我们用 $G_{\text{s-d}}\subset G$ 表示自对偶元素的子集。

G 上的酉表示 $(\pi,\mathcal{H})$ 称为温和的 ，如果其矩阵系数属于 $L^{2+\epsilon}(G)$，对所有 $\epsilon>0$均成立。我们将其分解为不相交并 $G=G_{\text{temp}}\sqcup G_{\text{q-comp}}$，其中 G_{temp} 是温和元素构成的子集，而 $G_{\text{q-comp}}$ 是非温元素构成的子集。

设 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 是 G的酉表示。我们介绍一些分解（参见 [Wal92，第14章§14.10，定理14.10。5]）。存在一个与之关联的博雷尔谱测度 $m^{\mathcal{H}}$ 定义在 $\widehat{G}$上，它还可以进一步分解为博雷尔谱测度 $m^{\mathcal{H}}_{\bullet}$定义在 $\widehat{G}_{\bullet}$ 上，对应于 $\bullet\in\{$温和，q-分量$\}$ 从而有如下正交直积分分解：

$$\begin{aligned}(\pi,\mathcal{H})&=\int_{\widehat{G}}^{\oplus}(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)\,dm^{\mathcal{H}}(\xi)\\&=(\pi_{\text{temp}},\mathcal{H}_{\text{temp}})\oplus(\pi_{\text{q-comp}},\mathcal{H}_{\text{q-comp}})\\&=\int_{\widehat{G}_{\text{temp}}}^{\oplus}(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)\,dm^{\mathcal{H}}_{\text{temp}}(\xi)\oplus\int_{\widehat{G}_{\text{q-comp}}}^{\oplus}(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)\,dm^{\mathcal{H}}_{\text{q-comp}}(\xi)\end{aligned}$$

其中 $(\pi_{\text{temp}},\ \mathcal{H}_{\text{temp}})$ 是温和子表示，$(\pi_{\text{q-comp}},\ \mathcal{H}_{\text{q-comp}})$ 是其正交补，而 $(\pi_\xi,\ \mathcal{H}_\xi)$ 是类型为 $\xi=(\pi_\xi,\ \mathcal{H}_\xi)\in G$的同型分量；也就是说，滥用记号可得同构 $(\pi_\xi,\ \mathcal{H}_\xi)\cong(\pi_\xi,\ \widehat{\mathcal{H}}_\xi)\widehat{\otimes}(\mathbf{1},\mathcal{M}_\xi)$，其中 $\mathcal{M}_\xi$是某个（可能是无限维的）重数希尔伯特空间。回顾一下，博雷尔测度的原子必为单点。此外，我们还有以下众所周知的性质（参见 [Wal92，第14章§14.10，引理14.10.6和14.10.7]）。

引理 2.1。设$(\pi,\mathcal{H})$ 是 G 的酉表示。以下结论成立。

(1) 元素 $\xi\in\widehat{G}$ 强包含于$(\pi,\mathcal{H})$ 当且仅当 ξ 是 $m^{\mathcal{H}}$ 的原子。*(2)* 元素 $\xi\in\widehat{G}$ 弱包含于 $(\pi,\mathcal{H})$ 当且仅当 $\xi\in\operatorname{supp}(m^{\mathcal{H}})$。

引理 2.2。设$(\pi,\mathcal{H})$ 是 G 的酉表示。假设 $\mathcal{H}$ 是可分的。那么， $m^{\mathcal{H}}$ 至多有可数个原子。

现在，设 $L<G$ 是一个紧子群。由于我们可以将 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 视为 L 的酉表示，即 $(\pi|_L,\ \mathcal{H})$，因此我们也有如下分解

$$(\pi|_L,\mathcal{H})=\widehat{\bigoplus_{\tau\in\widehat{L}}}(\tau,\mathcal{H}_\tau).$$

其中 $(\tau,\ \mathcal{H}_\tau)$ 如上所述是 $\tau \in L$ 型的同型分量——我们通常称其为 L-型。我们也称 $\tau \in L$ 包含于 $(\pi,\ \mathcal{H})$，只要 $\mathcal{H}_\tau$ 非平凡，并记作 $\tau \subset \pi$。包含于 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 的 $\tau \in \widehat{L}$ 的分类称为 分支律／分支规则。令 $\tau \in L$。回忆一下，与之对应的特征标 $\chi_\tau \in L^2(L)$ 定义为 $\chi_\tau(l) = \mathrm{tr}(\tau(l))$，而算子 $\mathsf{P}_\tau^{(\pi,\mathcal{H})}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为

$$\mathsf{P}_\tau^{(\pi,\mathcal{H})} v = \dim(\tau) \int_L \overline{\chi_\tau(l)} \cdot \pi(l) v \, dl \qquad \text{for all } v \in \mathcal{H}, \tag{2.1}$$

其中 dl 是 L上的 Haar 概率测度。因此，它实际上是投影到 $\mathsf{P}_\tau^{(\pi,\mathcal{H})}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_\tau$上的正交投影算子。对于极大紧子群 $K < G$，如果酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 含有非平凡的 K-不变向量，则称其为球型 表示。

2.3. **Sobolev 范数**。给定 K的酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$、$\mathfrak{k}$的固定基 $\{X_j\}_{j=1}^{\dim(\mathfrak{k})}$ 以及 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，在光滑向量 $v \in \mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 上定义 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_K^m(\mathcal{H})}$ 如下：

$$\|v\|^2_{\mathcal{S}_K^m(\mathcal{H})} = \|v\|^2_{\mathcal{H}} + \sum_U \|d\pi(U)(v)\|^2_{\mathcal{H}},$$

其中求和遍及 $X_1, \dots, X_{\dim(\mathfrak{k})}$中所有次数为 m的单项式 U。令 $\mathcal{S}_K^m(\mathcal{H})$ 表示 $\left\{v \in \mathcal{H}^\infty : \|v\|_{\mathcal{S}_K^m(\mathcal{H})} < +\infty\right\} \subset \mathcal{H}$ 关于 Sobolev 范数的完备化。虽然 Sobolev 范数取决于 $\mathfrak{k}$的基的选取，但不同的选取会导出等价的范数。注意，当 $\mathcal{H}$ 是有限维时，$\mathcal{S}_K^m(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$。

给定 G 的酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$，我们通过将 $(\pi|_K, \mathcal{H})$ 视为 K的酉表示，来定义 $\mathcal{H}$ 上的 Sobolev范数。众所周知，K-有限向量是光滑的，因此具有有限的 Sobolev范数。此外，我们注意到，对于固定 K-型的向量，Sobolev范数与 L^2 范数等价。具体而言，有如下结论。

引理 2.3. 设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的酉表示。对于任意 $\tau \in K$，存在常数 $C(\tau) > 0$，使得对于任意 $\phi \in \mathcal{H}_\tau$，有

$$\|\phi\|_{\mathcal{S}_K^1(\mathcal{H})} \leq C(\tau) \|\phi\|_{\mathcal{H}}.$$

证明。设 V_τ 表示实现 $\tau \in K$ 的有限维希尔伯特空间，并注意到作为 K-表示，有 $(\tau, \mathcal{H}_\tau) \cong (\tau, V_\tau) \otimes (\mathbf{1}, \mathcal{M}_\tau)$，其中 K 在一个（可能是无限维的）可分重数空间 $\mathcal{M}_\tau$上平凡作用。也就是说，

$$\pi(k)(u \otimes v) = (\tau(k)u) \otimes v \qquad \text{for all } u \otimes v \in V_\tau \otimes \mathcal{M}_\tau \text{ and } k \in K.$$

设 $\{v_j\}_{j=1}^n$ 为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$ 的一个可数正交归一希尔伯特基。令 $\phi \in \mathcal{H}_\tau \cong V_\tau \otimes \mathcal{M}_\tau$。注意，它具有分解 $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \otimes v_j$，其中 $\phi_j \in V_\tau$且 $\|\phi\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^n \|\phi_j\|^2_{V_\tau} < +\infty$。令 $X \in \mathfrak{k}$，则有

$$d\pi(X)\phi = \sum_{j=1}^n (d\tau(X)\phi_j) \otimes v_j,$$

因此，由基 $\{v_j\}_{j=1}^n$的正交归一性，我们有

$$\begin{aligned}
\|d\pi(X)\phi\|^2_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^n (d\tau(X)\phi_i) \otimes v_i, \sum_{j=1}^n (d\tau(X)\phi_j) \otimes v_j \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle d\tau(X)\phi_i, d\tau(X)\phi_j \rangle_{V_\tau} \cdot \langle v_i, v_j \rangle_{\mathcal{M}_\tau} \\
&= \sum_{j=1}^n \|d\tau(X)\phi_j\|^2_{V_\tau}.
\end{aligned}$$

由于 V_τ 是有限维的，对于任意 $v \in V_\tau$，我们可以得到如下界：$\|d\tau(X)v\|_{V_\tau} \leq \|d\tau(X)\|_{V_\tau} \|v\|_{V_\tau}$，其中 $\|d\tau(X)\|_{V_\tau}$ 是算子范数。因此，

$$\|d\pi(X)\phi\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|d\tau(X)\|_{V_\tau} \sum_{j=1}^n \|\phi_j\|^2_{V_\tau} = \|d\tau(X)\|_{V_\tau} \|\phi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

最后，对于 $\mathfrak{k}$ 的固定基 $\{X_j\}_{j=1}^{\dim(\mathfrak{k})}$，取 $C(\tau) = 1 + \max_{1\le j\le \dim(\mathfrak{k})} \|d\tau(X_j)\|_{V_\tau}$，即可得到 $\|\phi\|_{\mathcal{S}^1_K(\mathcal{H})}$ 所需的界，并完成证明。■

2.4. **SO(n) 的酉表示论。** 我们回顾关于任意 $\mathrm{SO}(n)$ 的不可约表示的一些基本事实 $n \ge 1$，这些事实随后也适用于 $K \cong \mathrm{SO}(d+1)$ 及其子群 $M \cong \mathrm{SO}(d)$（例如参见 [Thi73]）。

首先，$\mathrm{SO}(n)$ 的不可约表示由于 $\mathrm{SO}(n)$ 的紧致性而可酉化，因此$\widehat{}$构成 $\mathrm{SO}(n)$ 的酉对偶。根据彼得–外尔定理，它们是有限维的，并且包含于$(\lambda_{\mathrm{SO}(n)}, L^2(\mathrm{SO}(n)))$；事实上

$$\left(\lambda_{\mathrm{SO}(n)}, L^2(\mathrm{SO}(n))\right) = \bigoplus_{\tau\in\widehat{\mathrm{SO}(n)}} (\tau, V_\tau)^{\oplus \dim(\tau)}.$$

2.4.1. 情形 $2 \mid n$。 记 $n = 2m$ 为 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$。$\mathrm{SO}(2m)$ 的酉对偶可以自然地识别为

$$\{(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{Z}^m : \tau_1 \ge \tau_2 \ge \cdots \ge \tau_{m-1} \ge |\tau_m|\}$$

$\widehat{}$作为拓扑空间。因此，我们用 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathrm{SO}(2m)$ 表示一个不可约表示，整数所受的约束由此可知。注意，若 $4 \mid n$ 或等价地 $2 \mid m$，则 τ 是自对偶的；否则，$\tau^* = (\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, -\tau_m)$。暂且将 $\mathrm{SO}(2m-1) \subset \mathrm{SO}(2m)$ 视为一个$\widehat{}$子群，并令 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}) \in \mathrm{SO}(2m-1)$（见下文情形 $2 \nmid n$）。那么，相关的分支法则表明，σ 包含于 τ 当且仅当它们满足交错性质

$$\tau_1 \ge \sigma_1 \ge \tau_2 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \tau_{m-1} \ge \sigma_{m-1} \ge |\tau_m|;$$

此时重数为 1。

2.4.2. 情形 $2 \nmid n$。 我们记 $n = 2m+1$ 为 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。酉对偶 $\mathrm{SO}(2m+1)$ 可与下列对象典范地对应

$$\{(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{Z}^m : \tau_1 \ge \tau_2 \ge \cdots \ge \tau_m \ge 0\}$$

作为拓扑空间；对于 $m = 0$，我们约定后者是包含空$\widehat{}$元组的单点集。再次地，我们写作 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathrm{SO}(2m+1)$ 来指定一个不可约表示。注意到τ 总是自对偶的。同样，暂时将 $\mathrm{SO}(2m) \subset \mathrm{SO}(2m+1)$ 视为一个子群，并令 $\widehat{}\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathrm{SO}(2m)$（见上面的情形 $2 \mid n$）。于是，相应的分支法则表明，当且仅当它们满足交错性质时，σ 才包含于 τ 中

$$\tau_1 \ge \sigma_1 \ge \tau_2 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \tau_{m-1} \ge \sigma_{m-1} \ge \tau_m \ge |\sigma_m|;$$

此时重数为 1。

2.5. **关于 G 的酉表示论。** 本小节所需的背景知识包含于 [Kna01] 中，更多细节可参见其中的参考文献。在 [Kna01，第七章，第 §1] 节）的 $s \in \mathbb{C}$紧致图景中，对于所有 $s \in \mathbb{C}$，定义表示 $(U^s, L^2(K))$，其所在的 G 表示为

$$U^s(g)(\phi)(k) = e^{-sH(g^{-1}k)}\phi(\kappa(g^{-1}k)) \qquad \text{for all } k \in K,\ \phi \in L^2(K), \text{ and } g \in G.$$

尽管这一点在紧致图景中并不明显，但我们有以下事实：

- $(U^s|_K, L^2(K)) = (\lambda_K, L^2(K))$ 是 K 的左正则表示；
- $(U^s, L^2(K))$ 是酉表示，当且仅当 $s \in d/2 + i\mathbb{R}$。

回顾，$P := MAN \cong M \times A \times N$。对于任意 $s \in \mathbb{C}$，令 $\chi_s : A \to \mathbb{C}$ 为由$\chi_s(a_t) = e^{st}$ 定义的特征标，对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。对于任意 $\sigma \in \widehat{M}$和 $s \in \mathbb{C}$，将 $\sigma \otimes \chi_s \otimes \mathbf{1}$ 视为 P的表示，我们可以考虑诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_s \otimes \mathbf{1})$；这称为抛物诱导（参见 [Kna01，第 VII 章，§1]）。如果 $s \in i\mathbb{R}$，它们是称为主系列的酉表示，并且当且仅当$s \ne 0$ 时不可约（参见 [KS71，定理 5]）。更一般地，G 的所谓不可约容许表示的同构类（严格包含酉对偶 $\widehat{G}$）作为 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_s \otimes \mathbf{1})\widehat{}$的唯一商出现，其中 $\sigma \in M$ 且 $s \in \mathbb{C}$；这些称为朗兰兹商。此外，它们只有在 $s \in i\mathbb{R}$时才是温和的。

读者可参阅 [Kna01，第 XIV 章，§17，定理 14。92], [Kna01，第 VIII 章，§14，定理 8。53], 以及 [Lan89] 以了解更多详情。对于所有 $\sigma \in M$，定义

$$L^2(K:\sigma) := \mathsf{P}_\sigma^{(\rho_K|_M, L^2(K))}(L^2(K)) = \left\{ \phi \in L^2(K) : \dim(\sigma) \int_M \overline{\chi_\sigma(m)} \cdot \rho_K(m)\phi \, dm = \phi \right\}.$$

事实证明，对于所有 $\sigma \in M$ 和 $s \in \mathbb{C}$，我们可以将其识别为

$$(U^s, L^2(K:\sigma)) \cong \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1})^{\oplus \dim(\sigma)}. \tag{2.2}$$

现在我们引入一个交织算子，它在 G [KS67、KS71、Kna01] 的分类中发挥核心作用。回忆一下，$M_{\text{s-d}} \subset M$ 表示自对偶元素的子集。令 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$。对于所有 $s > d/2$，定义一个有界算子 $\mathcal{A}(\sigma, s) : L^2(K:\sigma) \to L^2(K:\sigma)$ 如下：

$$\mathcal{A}(\sigma, s) = \sigma(w_0)\gamma_\sigma(s)^{-1} \int_{\overline{N}} e^{-sH(\overline{n})} \rho_G(w_0 \kappa(\overline{n})^{-1}) \, d\overline{n}$$

其中 $w_0 \in N_K(A)/M$ 是唯一的非平凡 Weyl 元，$\sigma(w_0) : L^2(K:\sigma) \to L^2(K:\sigma)$ 是一个酉算子，它根据 σ 从 M 到 $N_K(A)$ 的唯一延拓（差一个符号）定义，而 $\gamma_\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个特定的亚纯正规化函数。它满足交织性质

$$\mathcal{A}(\sigma, s) U^s(g) = U^{-s}(g) \mathcal{A}(\sigma, s) \qquad \text{for all } g \in G. \tag{2.3}$$

略去记号上的区别，我们也用 $\mathcal{A}(\sigma, s)$ 表示通过 $L^2(K:\sigma)$ 的任意同构子表示，在 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1})$ 上诱导的算子。

令 $\sigma \in M$。记 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{\lfloor d/2 \rfloor})$，定义 $1 \le \ell(\sigma) \le \lfloor d/2 \rfloor$ 为具有正整数坐标的最大指标，并令 $\ell(\sigma) = 0$，其中 σ 为平凡不可约表示 $\mathbf{1} \in M$。定义相应的半闭区间

$$\mathcal{I}_\sigma := (d/2, d - \ell(\sigma)] \subset (d/2, d].$$

以下是 Knapp–Stein 的一个定理，[KS71，定理 6 以及命题 49 和 50]。

定理 2.4。 令 $\sigma \in \widehat{M}$ 和 $s \in \mathbb{R}$。那么，$(U^s, L^2(K:\sigma))$ 可酉化，且带有半正定内积，当且仅当 σ 是自对偶且 $s \in \mathcal{I}_\sigma$。此外，这种内积为正定，当且仅当 $s \in \operatorname{int} \mathcal{I}_\sigma$。$L^2(K:\sigma)$ 上的半正定内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\sigma,s)}$ 可定义为

$$\langle u, v \rangle_{(\sigma,s)} = \langle \mathcal{A}(\sigma, s) u, v \rangle_{L^2(K)} \qquad \textit{for all } u, v \in L^2(K:\sigma). \tag{2.4}$$

注记 2.5。事实上，$\mathcal{A}(\sigma, s)$ 的交织性质蕴含了相对于该（可能是半正定）内积的酉性。

设 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathbb{R}$。记

$$\mathcal{Z}(\sigma, s) := \{ v \in L^2(K:\sigma) : \|v\|_{(\sigma,s)} = 0 \} \subset L^2(K:\sigma)$$

为 $L^2(K:\sigma)$ 中关于与半正定内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\sigma,s)}$ 对应的半范数 $\| \cdot \|_{(\sigma,s)}$ 的零向量子空间；当且仅当 $s = d - \ell(\sigma) \in \partial \mathcal{I}_\sigma$ 时，该空间非平凡。接着注意到 $(U^s, \ker \mathcal{A}(\sigma, s)) = (U^s, \mathcal{Z}(\sigma, s))$，且它是 $(U^s, L^2(K:\sigma))$ 的子表示。

根据 Hirai 的分类结果，有如下定理 [Hir62]。另请参阅 [KZ77，第 152]，以了解如何从 Langlands [Lan89] 和 Knapp–Stein [KS71] 的一般结果推导出此结果。

定理 2.6。 G 的非温元素全部包含在拟互补级数 中，而该级数本身又是以下列表中两个族的并集：

(1) 由以下元素组成的互补级数

$$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma, s)) := \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1}) \qquad \textit{for } \sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}} \textit{ and } s \in \operatorname{int} \mathcal{I}_\sigma;$$

(2) 由以下元素组成的互补级数端点

$$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma, s)) := \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1}) / \ker \mathcal{A}(\sigma, s) \qquad \textit{for } \sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}} \textit{ and } s = d - \ell(\sigma) \in \partial \mathcal{I}_\sigma;$$

且在这两种情况下，均配备由 $L^2(K:\sigma)$ 上的（可能是半正定的）内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\sigma,s)}$ 所诱导的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$。

注 2.7。 事实上，由于 $\ker \mathcal{A}(\sigma,s) = \mathcal{Z}(\sigma,s)$，对于互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,s)$ 的端点 $\widehat{\ }$，内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$ 是正定的，其中 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s = d - \ell(\sigma) \in \partial\mathcal{I}_\sigma$。

$\widehat{\ }$当 $\sigma = \mathbf{1} \in M_{\text{s-d}}$ 时，存在一个 K-不变向量，因此这些表示称为球面准互补级数。其余的则称为非球面准互补级数。特别地，由于 G 非紧致，平凡不可约表示不是温和的，并且作为球面互补级数 $\mathbf{1} = (\pi_{\mathbf{1},d}, \mathcal{U}(\mathbf{1}, d)) \in G$ 的端点出现。注意，对于 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s = d - \ell(\sigma) \in \partial\mathcal{I}_\sigma$，交织算子还可下降为作用于 $\mathcal{U}(\sigma, s)$ 上的算子；同样出于记号简化，我们也将其记为 $\mathcal{A}(\sigma, s)$。

鉴于式（2.2），我们得出定理 2.6 的以下初等但至关重要的推论。

推论 2.8. 作为 G的酉表示，我们有如下结论：

(1) 对所有 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s \in$ 属于 $\mathcal{I}_\sigma$，$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma,s))$都包含于$(U^s, L^2(K:\sigma))$；*(2)* 对所有 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s = d - \ell(\sigma) \in \partial\mathcal{I}_\sigma$，$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma,s))$都包含于$(U^s, L^2(K:\sigma)/$ 核 $\mathcal{A}(\sigma,s))$。

$\widehat{\ }$注记 2.9. 提醒读者，对于互补级数端点$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma,s))$，当 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$和 $s = d - \ell(\sigma) \in \partial\mathcal{I}_\sigma$时，我们无法得到更强的形式：$(\pi_{\sigma,s}, \mathcal{U}(\sigma,s))$包含于$(U^s, L^2(K:\sigma))$。尽管如此，较弱的形式已足以满足我们的目的；参见推论 3.6 证明中的提升论证。

$\widehat{\ }$作为弗罗贝尼乌斯互反律的推论（参见 [War72a，第 5 章，§5.5.1]），对于任意 $\sigma \in M$ 和 $s \in \mathbb{C}$, $\text{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_s \otimes \mathbf{1})$ 中出现的一个 K-型 $\tau \in \widehat{K}$ 的重数，恰好等于 τ 中出现的 σ 的重数。因此，当且仅当 σ 包含于 τ时，τ包含于 $\text{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_s \otimes \mathbf{1})$，且在此情况下$\widehat{\ }$两个重数均为 1。现在，对于 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$，我们应用定理 2.6 得到如下结论。对于所有$s \in \text{int}\ \mathcal{I}_\sigma$，上述刻画适用于互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,s)$ 中的 K-型。对于$\frown$ $s = d - \ell(\sigma) \in \partial\mathcal{I}_\sigma$，则需要更加谨慎：当且仅当 σ 包含于 τ且 τ不包含于 $\ker \mathcal{A}(\sigma,s)$ 时，一个 K-型 $\tau \in K$ 包含于互补级数的端点 $\mathcal{U}(\sigma,s)$ 中，并且在此情况下重数为 1。这并不是一个简单的判据；不过，我们有定理 2.12 中引用的 Vogan 的一个结果，该结果将很有用。为此，我们需要引入文献所述的极小 K-型概念；为方便起见，我们针对 $K \cong \text{SO}(d+1)$ 的情形将其明确写出（参见 [Thi73，§4]）。

$\widehat{\ }$**定义 2.10**（极小 K-型）。 酉表示 G 的一个 K-型 $\tau = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_{\lceil d/2 \rceil}) \in K$ 被称为 $(\pi, \mathcal{H})$ $(\pi, \mathcal{H})$ 的极小 K-型，如果

$$\lambda_\tau := \sum_{j=1}^{\lceil d/2 \rceil} \left(\tau_j + \frac{d+1-2j}{2}\right)^2 \tag{2.5}$$

它在 $(\pi, \mathcal{H})$ 中所包含的所有 K-型中达到最小值。

注记 2.11。 鉴于（内在）卡西米尔特征值的公式 [Kna96，第 5 章 §4，命题 5。28]，，上述定义等价于以下条件：在 $(\pi, \mathcal{H})$ 中所包含的所有 K-型 中，（内在）卡西米尔特征值达到最小值。

以下是 Vogan 在 [Kna01，第 XV 章 §3，定理 15。10] 中的结果。

定理 2.12。 设 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathcal{I}_\sigma$。诱导表示$\text{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1})$ 的所有极小 K-型都包含于$\mathcal{U}(\sigma,s)$中。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$回顾分解 $G = G_{\text{temp}} \sqcup G_{\text{q-comp}}$。我们还有如下同一对应

$$\widehat{G}_{\text{q-comp}} \cong \{(\sigma, s) : \sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}, s \in \mathcal{I}_\sigma\}$$

$\widehat{\ }$作为拓扑空间，其中 G 赋予 Fell 拓扑，右侧赋予标准拓扑。

设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G的酉表示。利用上述分解以及第 2.2小节中的直积分分解，我们得到测度 $m_{\text{q-comp}}$的相应分解，分解为测度 $\{m_\sigma\}_{\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}}$，满足

$$\text{supp}(m_\sigma) \subset \mathcal{I}_\sigma \qquad \text{for all } \sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}},$$

and

$$(\pi,\mathcal{H})=\int_{\widehat{G}}^{\oplus}(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)\,dm(\xi)=\int_{\widehat{G}_{\mathrm{temp}}}^{\oplus}(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)\,dm_{\mathrm{temp}}(\xi)\oplus\widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}}\int_{\mathcal{I}_\sigma}^{\oplus}(\pi_{\sigma,s},\mathcal{H}(\sigma,s))\,dm_\sigma(s)\tag{2.6}$$

$\widehat{\ }$其中每个 $(\pi_\xi,\mathcal{H}_\xi)$ 都是类型为 $\xi\in G$ 的同型分量。

根据直积分的定义，对于任意向量 $\phi\in\mathcal{H}$，我们得到如下显式分解：存在一个可测截面 $\{\phi_\xi\}_{\xi\in\widehat{G}}=\{\phi_\xi\}_{\xi\in\widehat{G}_{\mathrm{temp}}}\sqcup\{\phi_{\sigma,s}\}_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}},\ s\in\mathcal{I}_\sigma}$ 满足 $\phi_\xi\in\mathcal{H}_\xi$ 且 $\phi_{\sigma,\ s}\in\mathcal{H}(\sigma,\ s)$，使得

$$\phi=\int_{\widehat{G}}^{\oplus}\phi_\xi\,dm(\xi)=\int_{\widehat{G}_{\mathrm{temp}}}^{\oplus}\phi_\xi\,dm_{\mathrm{temp}}(\xi)+\sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}\int_{\mathcal{I}_\sigma}^{\oplus}\phi_{\sigma,s}\,dm_\sigma(s).\tag{2.7}$$

最后，我们记录以下关于固定 K-型的光滑紧支撑函数稠密性的有用引理。回顾一下，对于任意 $L\in\{K,M\}$，我们得到的投影算子，并将它们分别记为任意 $\tau\in K$ 对应的 $\mathsf{P}_{\widehat{\tau}}$ 和任意 $\sigma\in M$对应的 $\mathsf{P}_{\widehat{\sigma}}$。我们省略指出所处的表示，因为上下文已足以说明；特别是，我们总将 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 视为右正则表示，将 $L^2(K)$ 视为左正则表示。

引理 2. **13.** 令 $\tau\in\widehat{K}$ 为 K型。子空间 $C_{\mathrm{c}}^\infty(\Gamma\backslash G)\cap L^2(\Gamma\backslash G)_\tau$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)_\tau$中稠密 .

证明。令 $\tau\in\widehat{K}$ 为 K型， $\widetilde{\phi}\in L^2(\Gamma\backslash G)_\tau\subset L^2(\Gamma\backslash G)$，且 $\epsilon>0$。由于 $\mathsf{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Gamma\backslash G)\subset L^2(\Gamma\backslash G)$ 稠密，存在 $\phi\in\mathsf{C}^\infty\mathsf{c}\,(\Gamma\backslash G)$，使得 $\|\phi-\widetilde{\phi}\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}<\epsilon$。现在我们应用 P_τ。首先，由于 $\widetilde{\phi}\in L^2(\Gamma\backslash G)_\tau$，我们$\widetilde{\ }$有 $\mathsf{P}_\tau\phi=\phi$。其次，由 P_τ 在式 (2.1) 中的定义可知，$\mathsf{P}_\tau\phi$仍然是一个紧支撑光滑函数。因此，应用 P_τ 得到 $\mathsf{P}_\tau\phi\in\mathsf{C}^\infty\mathsf{c}\,(\Gamma\backslash G)\cap L^2(\Gamma\backslash G)_\tau$，其中

$$\left\|\mathsf{P}_\tau\phi-\widetilde{\phi}\right\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}\le\left\|\phi-\widetilde{\phi}\right\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}<\epsilon$$

正如所希望的那样。 ■

3. 关于 Harish-Chandra C 函数和拉普拉斯变换的矩阵系数渐近展开

本节回顾 Edwards–Oh [EO21]关于矩阵系数的纯表示论渐近展开。随后，我们利用该结果证明命题 3.8，这是关于矩阵系数拉普拉斯变换解析延拓的一般性结果。粗略地说，结合下一节的结果，命题 3.8 刻画了准互补级数在给定表示 G 中的弱包含性，其依据是拉普拉斯变换无法全纯延拓到负实轴上的某些子集；这些子集对应于所讨论的准互补级数的参数集合。

3.1. 交织算子、艾森斯坦积分与 Harish-Chandra C 函数。 我们定义与前文引入的交织算子相关的常数，并定义其他重要算子。

令 $\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s>d/2$。由式（2.3）中的交织性质可知， $\mathcal{A}(\sigma,s)$ 与 λ_K交织。因此，根据舒尔引理， $\mathcal{A}(\sigma,s)$ 在 K-型的 $L^2(K:\ \sigma)$上作用为一个标量。根据 K中出现的 诱导表示$I_P^G(\sigma\otimes\chi_{s-d/2}\otimes\mathbf{1})$的 -型的刻画，我们可以写成

$$\mathcal{A}(\sigma,s)=\sum_{\tau\in\widehat{K}:\tau\supset\sigma}a(\sigma,s,\tau)\mathsf{P}_\tau$$

作为 $L^2(K:\ \sigma)$ 上的算子，其中标量取自某个集合 $\{a(\sigma,\ s,\ \tau)\}_{\tau\in\widehat{K}:\ \tau\supset\sigma}\subset\mathbb{C}$。$\widehat{\ }$内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{(\sigma,s)}$ 的正半定性意味着，对于所有包含 σ 的 $\tau\in K$，这些标量均为实数且非负。我们还从交织性质推出，$(\lambda_K,\ \ker\mathcal{A}(\sigma,\ s))$ 是 K 的酉表示。注意，$\widehat{\ }$利用 $\ker\mathcal{A}(\sigma,\ s)=\mathcal{Z}(\sigma,\ s)$，对于所有包含 σ 的 K- 型 $\tau\in K$，我们有

$$a(\sigma,s,\tau)=0\iff\tau\subset(\lambda_K,\ker\mathcal{A}(\sigma,s)).$$

设 $\sigma \in \widehat{M}$。对于 $L^2(K:\sigma)$ 的每个 K-型 $\tau \in \widehat{K}$，我们取任意一组正交归一基 $\{v_j\}_{j=1}^{\dim(\sigma)\dim(\tau)} \subset L^2(K:\sigma)_\tau$，以定义相应的特殊向量 $\omega_\tau \in L^2(K:\sigma)_\tau$，其定义为

$$\omega_\tau = \sum_{j=1}^{\dim(\sigma)\dim(\tau)} \overline{v_j(e)} v_j.$$

那么，对于每个向量 $v \in L^2(K:\sigma)_\tau$，我们有恒等式

$$v(k) = \langle v, \lambda_K(k)\omega_\tau \rangle_{L^2(K)} \qquad \text{for all } k \in K.$$

对于任意一对 K-类型 τ_1，$\tau_2 \in \widehat{K}$，定义算子 $\mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2}: L^2(K:\sigma)_{\tau_1} \to L^2(K:\sigma)_{\tau_2}$ 如下

$$\mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2} v = \int_M v(m)\lambda_K(m)\omega_{\tau_2}\, dm \qquad \text{for all } v \in L^2(K:\sigma)_{\tau_1}.$$

这些称为艾森斯坦积分。注意，$\mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2}$ 与 λ_M 交织。特别地，对于 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$，由舒尔引理可知，T_τ^τ 保持 M-类型。于是，对于任意 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathcal{I}_\sigma$，算子 T_τ^τ 保持核 $\mathcal{A}(\sigma, s)$，因此诱导出 $\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau$ 上的一个算子。我们还有以下引理。

引理 3.1 ([E O21，推论 3.9])。设 $\sigma \in \widehat{M}$。设 $\tau \in \widehat{K}$ 是 K 的一个 $L^2(K:\sigma)$-类型。那么，我们有

$$\mathsf{T}_\tau^\tau|_{L^2(K:\sigma)_\tau} = \frac{\dim(\tau)}{\dim(\sigma)} \mathsf{P}_{\sigma^*}|_{L^2(K:\sigma)_\tau}.$$

当 $s \in \mathcal{I}_\sigma$ 时，在 $\mathcal{U}(\sigma, s)$ 上也成立。

定义 3.2（Harish-Chandra C 函数）。设 $\sigma \in M$。对于所有 $s > d/2$，定义有界算子 $\mathsf{C}_+(s): L^2(K:\sigma) \to L^2(K:\sigma)$，如下：

$$\mathsf{C}_+(s) = \int_{\overline{N}} e^{-sH(\overline{n})} U^s(\kappa(\overline{n})^{-1})\, d\overline{n}.$$

由 $s \mapsto \mathsf{C}_+(s)$ 给出的有界算子值函数称为*Harish-Chandra C* 函数。

事实上，对于所有 $s > d/2$，$\mathsf{C}_+(s)$ 都是定义良好的有界算子，因为 U^s 是酉的，并且

$$\int_{\overline{N}} e^{-sH(\overline{n})}\, d\overline{n} < +\infty$$

根据 [HC58，引理的推论 45]（参见 [HC58，第 303]，其中给出了关于 Γ 函数的显式公式）。Harish-Chandra C 函数 $\mathsf{C}_+(s)$ 与 $U^s|_M = \lambda_M$ 交织（参见 [EO21，引理 42] 的证明）。当 $s \in \mathcal{I}_\sigma$ 时，它如上所述下降为 (σ, s) 上的有界算子。根据舒尔引理，我们可以记下 [EO21 引理 4 的一个略微精细的版本。

引理 3.3. 设 $\sigma \in M$ 且 $s > d/2$。*Harish-Chandra C* 函数 复数域$_+(s)$ 在每个不可约 M-子模上都作用为标量，因此它们保持 $L^2(K:\sigma)$的 M-型和 K-型。特别地，当 $s \in \mathcal{I}_\sigma$时，在 $\mathcal{U}(\sigma, s)$上也成立。

3.2. 矩阵系数的渐近展开

遵循 Edwards–Oh。对于 $s \in (d/2, d]$，记为

$$\eta_s := \min\{2s - d, 1\} > 0. \tag{3.1}$$

我们回顾 Edwards 和 Oh 给出的矩阵系数展开。

定理 *3.4*（[*EO21*，定理 *4.3*]）。设 I 是 $(d/2, d]$ 的一个紧子集。设 $\sigma \in M$, $s \in \mathcal{I}_\sigma \cap I$和$\tau_1, \tau_2 \in \widehat{K}$ 为 K-型。对于所有 $u \in L^2(K:\sigma)_{\tau_1}$, $v \in L^2(K:\sigma)_{\tau_2}$以及 $t \geq 0$，有

$$\langle \pi_{\sigma,s}(a_t)u, v\rangle_{L^2(K)} = e^{-(d-s)t}\langle \mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2}\mathsf{C}_+(s)u, v\rangle_{L^2(K)} + O_I\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}\left\|\mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2}\right\|_{L^2(K)}\|u\|_{L^2(K)}\|v\|_{\mathcal{S}^1_K(L^2(K))}\right).$$

注 3.5. 尽管 [EO21 定理 4.3] 的原始陈述和证明针对的是 $\mathcal{U}(\sigma, s)_{\tau_1}$ 和 $\mathcal{U}(\sigma, s)_{\tau_2}$，其中 $\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s \in$ 属于 int $\mathcal{I}_\sigma$，但针对 $L^2(K:\sigma)_{\tau_1}$ 和 $L^2(K:\sigma)_{\tau_2}$ 的证明也完全适用。

此外，原文中隐含常数的统一性是针对开区间 $(d/2,\ d)$ 的紧子集给出的；然而，他们的证明表明，这种统一性对半闭区间 $(d/2,\ d]$ 的紧子集也同样成立。

特化定理 3.4 至情形 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$，可得以下推论。

推论 3.6. 设 I 是 $(d/2,d]$ 的紧子集。设 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$，且 $s\in\mathcal{I}_\sigma\cap I$。设 $(\pi,\mathcal{H})=(\pi_{\sigma,s},\mathcal{U}(\sigma,s))\widehat{\otimes}(1,\mathcal{M}(\sigma,s))$ 是 G 的酉表示，其中 $\mathcal{M}(\sigma,s)$ 是一个（可能为无限维的）可分重数空间。则对于任意包含 σ 的 K-型 $\tau\in K$，对所有 $\phi,\psi\in\mathcal{H}_\tau$ 和 $t\geq 0$，有

$$\langle\pi(a_t)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}=e^{-(d-s)t}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}+O_{I,\tau}\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\psi\|_{\mathcal{H}}\right).\tag{3.2}$$

证明。设 I、σ、s 和 τ 如引理中所述。我们首先对 G 的酉表示 $(\pi_{\sigma,s},\mathcal{U}(\sigma,s))$ 得到所需结果，即假设 $\mathcal{M}(\sigma,s)$ 是一个一维重数空间。首先，我们处理互补级数，即 $s\in$ 属于 $\mathcal{I}_\sigma$ 的情形。由于根据推论 2.8，我们可以固定一个嵌入 $(\pi_{\sigma,s},\mathcal{U}(\sigma,s))\subset(U^s,L^2(K:\sigma))\subset(U^s,L^2(K))$，因此此情形更为简单。由式 (2.4)，对于任意 $u\in\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau$ 和 $v\in\mathcal{U}(\sigma,s)$，有

$$\langle u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}=a(\sigma,s,\tau)\langle u,v\rangle_{L^2(K)}.$$

令 $u,\ v\in\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau$，我们可以使用定理 3.4，然后利用上述恒等式得到

$$\begin{aligned}
&\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\\
&=a(\sigma,s,\tau)\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)u,v\rangle_{L^2(K)}\\
&=e^{-(d-s)t}a(\sigma,s,\tau)\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)u,v\rangle_{L^2(K)}+O_I\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}a(\sigma,s,\tau)\|\mathsf{T}_\tau^\tau\|_{L^2(K)}\|u\|_{L^2(K)}\|v\|_{\mathcal{S}^1_K(L^2(K))}\right)\\
&=e^{-(d-s)t}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}+O_I\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}a(\sigma,s,\tau)\|\mathsf{T}_\tau^\tau\|_{L^2(K)}\|u\|_{L^2(K)}\|v\|_{\mathcal{S}^1_K(L^2(K))}\right).
\end{aligned}$$

由引理 2.3，存在一个常数 $C(\tau)>0$，使得 $\|v\|_{\mathcal{S}^1_K(L^2(K))}\leq C(\tau)\|v\|_{L^2(K)}$。由于 $\|\mathsf{T}_\tau^\tau\|_{L^2(K)}$ 是 $O_\tau(1)$，且 $a(\sigma,s,\tau)\|v\|^2_{L^2(K)}=\|v\|^2_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$，我们得到如下界

$$a(\sigma,s,\tau)\|\mathsf{T}_\tau^\tau\|_{L^2(K)}\|u\|_{L^2(K)}\|v\|_{\mathcal{S}^1_K(L^2(K))}\ll_\tau\|u\|_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\|v\|_{\mathcal{U}(\sigma,s)}.$$

因此，我们得到

$$\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}=e^{-(d-s)t}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}+O_{I,\tau}\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}\|u\|_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\|v\|_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\right).\tag{3.3}$$

现在，我们讨论互补级数端点，即 $s=d-\ell(\sigma)\in\partial\mathcal{I}_\sigma$ 的情形。在此情形下，虽然我们没有与第一种情形相同的嵌入，但由推论 2.8 可知，$(\pi_{\sigma,s},\mathcal{U}(\sigma,s))\subset(U^s,L^2(K:\sigma)/\text{核 }\mathcal{A}(\sigma,s))$。对于任意给定的 $u,v\in\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau$，我们可以任取提升 $\tilde{u},\tilde{v}\in L^2(K:\sigma)_\tau\subset L^2(K)$，并用 $\tilde{u},\tilde{v},\langle\cdot,\cdot\rangle_{(\sigma,s)}$ 和 $\|\cdot\|_{(\sigma,s)}$ 分别替换 $u,v,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$，按照上述相同的论证，得到关于 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 的式 (3.3) 的对应结论。最后注意，由于内积和范数下降到 $\mathcal{U}(\sigma,s)$，且有 $(U^s,\text{核 }\mathcal{A}(\sigma,s))=(U^s,\mathcal{Z}(\sigma,s))$，并且它是 $(U^s,L^2(K:\sigma))$ 的子表示，因此式 (3.3) 对 u 和 v 也成立。

现在，考虑 G的更一般的酉表示 $(\pi,\mathcal{H})=(\pi_{\sigma,s},\mathcal{U}(\sigma,s))\widehat{\otimes}(1,\mathcal{M}(\sigma,s))$，其中$\mathcal{M}(\sigma,s)$是一个可分重数空间。设 $\{v_j\}_{j=1}^n$ 对某个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\sqcup\{\infty\}$ 是 $\mathcal{M}(\sigma,s)$ 的可数正交归一希尔伯特基。设 $\phi,\psi\in\mathcal{H}_\tau$。它们有分解$\phi=\sum_{i=1}^n\phi_i\otimes v_i$和$\psi=\sum_{j=1}^n\psi_j\otimes v_j$，其中 $\phi_i,\psi_j\in\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau$且 $\|\phi\|^2_{\mathcal{H}}=\sum_{i=1}^n\|\phi_i\|^2_{\mathcal{U}(\sigma,s)}<+\infty$和 $\|\psi\|^2_{\mathcal{H}}=\sum_{j=1}^n\|\psi_j\|^2_{\mathcal{U}(\sigma,s)}<+\infty$。由于$\{v_j\}_{j=1}^n$是正交归一的，且 G 在 $\mathcal{M}(\sigma,s)$ 上平凡作用，我们有

$$\begin{aligned}
\langle\pi(a_t)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}&=\left\langle\sum_{i=1}^n\pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_i\otimes v_i,\sum_{j=1}^n\psi_j\otimes v_j\right\rangle_{\mathcal{H}}\\
&=\sum_{i,j=1}^n\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_i,\psi_j\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\cdot\langle v_i,v_j\rangle_{\mathcal{M}}\\
&=\sum_{j=1}^n\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_j,\psi_j\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}.
\end{aligned}$$

现在对每一项应用公式（3.3），即可得到推论。∎

以下命题在文献中基本已为人所知，不过很难找到一篇文献完整讨论准互补级数。为求完整起见，我们给出证明。

命题 3.7. 设 $s_\star \in [d/2, d)$。设 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 的一个酉表示，它不弱包含任何满足 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 且 $s \in \mathcal{I}_\sigma \cap (s_\star, d]$ 的准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma, s)$。那么，对所有 $\epsilon > 0$ 以及K-有限向量 $u, v \in \mathcal{H}$，矩阵系数满足以下界：

$$\langle \pi(a_t)u, v\rangle_{\mathcal{H}} \ll_G (1+t)e^{-(d-s_\star)t}\big(\dim\langle \pi(K)u\rangle \dim\langle \pi(K)v\rangle\big)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \qquad \text{for all } t > 0.$$

证明。在证 明中，我们将遇到球函数 $\varphi_s :\ G \to \mathbb{R}$ 对于任意由以下方式定义的 $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi_s(g) = \int_K e^{-sH(g^{-1}k)}\, dk \qquad \text{for all } g \in G.$$

它们与 $(U^s, L^2(K\colon 1))$ 对应于 $\mathbf{1}_K \in L^2(K\colon 1)$ 的矩阵系数相同（或者对应于 $\mathcal{U}(1, s)$ 中任意一个 K-不变单位向量；见 [HC58，引理 5]）。特殊的球函数 $\Xi :\ = \varphi_{d/2}$ 称为 Harish-Chandra 函数。关于球函数的更多细节，请参阅 [Kna01，第 VII 章，§8] 以及 [GV88，第 4 章，§4.6]。特别地，我们将使用它们的界，这些界最初由 Harish-Chandra 给出 [HC58，定理 3]。

设 $s_\star$ 和 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 如命题中所述。根据定义，我们有正交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{temp}} \oplus \mathcal{H}_{\text{q-comp}}$，分为温和部分 $\mathcal{H}_{\text{temp}}$ 和非温和部分 $\mathcal{H}_{\text{q-comp}}$。我们分别处理这两部分。

我们首先处理温和部分。设 $u,\ v \in \mathcal{H}_{\text{temp}}$ 为 K-有限向量。那么，根据 Cowling– Haagerup–Howe 的一个结果 [CHH88、推论]以及 Harish-Chandra 函数的估计，我们有

$$|\langle \pi(a_t)u, v\rangle_{\mathcal{H}}| \le \Xi(a_t)\big(\dim\langle \pi(K)u\rangle \dim\langle \pi(K)v\rangle\big)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \tag{3.4}$$

$$\ll_G (1+t)e^{-(d/2)t}\big(\dim\langle \pi(K)u\rangle \dim\langle \pi(K)v\rangle\big)^{1/2}\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \qquad \text{for all } t > 0. \tag{3.5}$$

现在我们处理非温和部分。根据定理 2.6 中引用的分类结果，只有准互补级数可能弱包含于 $\mathcal{H}_{\text{q-comp}}$。我们首先对所有参数为 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathcal{I}_\sigma \smallsetminus$ 的准-$\widehat{\ }$互补级数 $\mathcal{U}(\sigma, s)$ 证明等式 (3.7)。由于互补级数端点可通过类似于推论 3.6 证明中的提升论证处理，我们将注意力限制在$\widehat{\ }$互补级数上。为此，设 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in$ 属于 $\mathcal{I}_\sigma \smallsetminus (s_\star, d]$，且设 $u, v \in \mathcal{U}(\sigma, s)$ 为 K- 有限向量。根据 [Kna01，第 VII 章第 8 节命题 7.14]，，我们有

$$\big|\langle \pi(a_t)u, v\rangle_{L^2(K)}\big| \ll_{u,v} \varphi_s(a_t).$$

定义子集

$$\mathcal{T} := \big\{\tau \in \widehat{K} : \tau \supset \sigma, \mathsf{P}_\tau(u) \neq 0, \mathsf{P}_\tau(v) \neq 0\big\} \subset \widehat{K}.$$

由 u 和 v 的 K-有限性，子集 $\mathcal{T}$ 是有限的。将其转换为酉内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$ 在$\mathcal{U}(\sigma,\ s)$ 上，并再次利用球函数的界，我们得到

$$\big|\langle \pi_{\sigma,s}(a_t)u, v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}\big| \ll_{u,v} \#\mathcal{T} \cdot \max_{\tau\in\mathcal{T}} a(\sigma, s, \tau) \cdot \varphi_s(a_t) \tag{3.6}$$

$$\ll_{u,v,s} (1+t)e^{-(d-s)t} \qquad \text{for all } t > 0. \tag{3.7}$$

将式（3.7）与 [Hel00第一章 §5，定理 5 中的事实8] 即哈尔测度在 G上由下式给出

$$dg = \mu_M(M)^{-1}\sinh(t)^d\, dk\, dt\, dk$$

并利用 $\sinh(t)^d \asymp e^{dt}$ 关于 $t \gg 1$ 的渐近行为，我们得出 $\mathcal{U}(\sigma, s)$ 对于 $p := \frac{d}{d-s_\star}$ 是强 L^p 的（按照——Shalom [Sha00] 的术语，在$\widehat{\ }$中），对任意 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathcal{I}_\sigma \smallsetminus (s_\star, d]$，即，由 $g \mapsto \langle \pi(g)u, v\rangle_{\mathcal{H}}$ 给出的矩阵系数 $G \to \mathbb{C}$ 对所有 $\epsilon > 0$ 都属于 $L^{p+\epsilon}(G)$。由于这对 $\mathcal{H}_{\text{q-comp}}$ 中弱包含于 $\widehat{G}$ 的所有元素均成立，根据 [Sha00，定理 2.1] 中条件 2 与条件 4 的等价性以及 $d/p = d - s_\star$ 这一事实，命题中关于 $\mathcal{H}_{\text{q-comp}}$ 的矩阵系数的所述界限随之成立。结合式 (3.5) 中关于 $\mathcal{H}_{\text{temp}}$ 的矩阵系数的界限，命题得证。■

We 现在将运用收集到的工具，证明本节的以下主要命题 .

命题 3.8. 设 $\delta_{\mathcal{H}} \in (d/2, d]$，且 $(\pi, \mathcal{H})$ 是 G 的酉表示，它不弱包含任何参数为 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in \mathcal{I}_\sigma \cap (\delta_{\mathcal{H}}, d]$ 的准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma, s)$。

设 $\tau \in K$ 是一个 K 型。对于所有的 ϕ、$\psi \in \mathcal{H}_\tau$，定义缩放矩阵系数 $F_\spadesuit$：$\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ 的实部和虚部的拉普拉斯变换如下

$$F_\spadesuit(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-d)t} \spadesuit(\langle \pi(a_t)\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}})\, dt \qquad \text{for all } z \in \mathbb{C} \text{ with } \Re(z) > 0,$$

当 $\spadesuit \in \{\Re, \Im\}$ 时。设 $\eta_0 =$最小值$\{\delta_{\mathcal{H}} - d/2, 1\}$。那么，$F_\Re$ 和 $F_\Im$ 都可以全纯延拓至$\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) > -\eta_0\} \smallsetminus (-\eta_0, 0]$。此外，在半平面 $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) > -\eta\}$ 上，对于任意固定的 $\eta < \eta_0$，我们可以写成

$$F_\spadesuit = A_\spadesuit + B_\spadesuit$$

其中 $A_\spadesuit$ 是全纯函数，而 $B_\spadesuit$ 是由下式定义的亚纯函数

$$B_\spadesuit(z) = \sum_{\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}: \sigma \subset \tau} \int_{[\delta_{\mathcal{H}}-\eta, \delta_{\mathcal{H}}]} \frac{\spadesuit\big(\langle \mathsf{T}_\tau^\tau \mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\big)}{z + \delta_{\mathcal{H}} - s}\, dm_\sigma(s) \qquad \text{for all } z \in \mathbb{C} \text{ with } \Re(z) > -\eta,$$

当 $\spadesuit \in \{\Re, \Im\}$ 时。此外，对于任意 $\eta_1 < \eta$，$A_\Re$ 和 $A_\Im$ 在半平面 $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) \geq -\eta_1\}$ 上一致有界。

证明。假设命题的条件成立。我们给出 $F_\Re$ 的证明；$F_\Im$ 的证明完全相同。回顾式（$\{m_\sigma\}_{\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}}$ 2.6）中给出的直积分分解和谱测度$\eta \in (0, \delta_{\mathcal{H}} - d/2)$，定义 $I_\eta := [\delta_{\mathcal{H}} - \eta, \delta_{\mathcal{H}}]$ 以及希尔伯特子空间

$$\mathcal{H}[\eta] = \widehat{\bigoplus_{\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}}} \int_{I_\eta}^{\oplus} \mathcal{H}(\sigma, s)\, dm_\sigma(s) \qquad \subset \mathcal{H}.$$

于是，$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\eta] \oplus \mathcal{H}[\eta]^\perp$ 是子表示的正交分解。对于任意 $\varphi \in \mathcal{H}$，分别记其在 $\mathcal{H}[\eta]$ 和 $\mathcal{H}[\eta]^\perp$上的投影为 $\varphi_\eta \in \mathcal{H}[\eta]$ 和 $\varphi_\eta^\perp \in \mathcal{H}[\eta]^\perp$。由这些空间的正交性可得

$$\langle \pi(a_t)\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \pi(a_t)\phi_\eta, \psi_\eta\rangle_{\mathcal{H}} + \big\langle \pi(a_t)\phi_\eta^\perp, \psi_\eta^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R},$$

取实部，可得

$$\Re(\langle \pi(a_t)\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}) = \Re(\langle \pi(a_t)\phi_\eta, \psi_\eta\rangle_{\mathcal{H}}) + \Re\big(\big\langle \pi(a_t)\phi_\eta^\perp, \psi_\eta^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}}\big) \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

利用上述 分解，我们得到相应的分解 $F_\Re(z) = F_{\Re,\,\eta}(z) + F^\perp_{\Re,\,\eta}(z)$，其中

$$F_{\Re,\eta}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-d)t} \Re(\langle \pi(a_t)\phi_\eta, \psi_\eta\rangle_{\mathcal{H}})\, dt$$

类似地，对于$F^\perp_{\Re,\,\eta}(z)$。根据命题3.7 我们有如下界

$$\big|\Re\big(\big\langle \pi(a_t)\phi_\eta^\perp, \psi_\eta^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}}\big)\big| \leq \big|\big\langle \pi(a_t)\phi_\eta^\perp, \psi_\eta^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}}\big| \ll_{\phi,\psi} (t+1)e^{-(d-\delta_{\mathcal{H}}+\eta)t} \qquad \text{for all } t > 0.$$

因此，对于 $\Re(z) > -\eta$，定义 $F^\perp_{\Re,\,\eta}(z)$ 的积分绝对收敛：

$$\big|F^\perp_{\Re,\eta}(z)\big| \leq \int_0^{+\infty} \big|e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-d)t} \Re\big(\big\langle \pi(a_t)\phi_\eta^\perp, \psi_\eta^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}}\big)\big|\, dt \ll \int_0^{+\infty} (t+1)e^{-(\Re(z)+\eta)t}\, dt < +\infty,$$

从而定义了一个全纯函数，并且在 $\{z \in \mathbb{C}$ 上一致有界：$\Re(z) \geq -\eta_1\}$，对任意$\eta_1 < \eta$均成立。

接下来，我们处理 $F_{\Re,\eta}(z)$。注意，对于任意固定的 K-型 τ的 $\varphi \in \mathcal{H}_\tau$，对所有 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$以及几乎所有 m_σ，分量 $\varphi_{\sigma,s}$ 也属于 K-型 τ。由于仅当 $\sigma \subset \tau$时，$\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau$才非平凡，因此我们得到

$$\varphi_\eta = \sum_{\sigma \in \widehat{M}_{\text{s-d}}: \sigma \subset \tau} \int_{I_\eta}^{\oplus} \varphi_{\sigma,s}\, dm_\sigma(s) \qquad \in \mathcal{H}[\eta]_\tau.$$

对 ϕ 和 ψ使用这样的分解，我们得到

$$\langle \pi(a_t)\phi_\eta, \psi_\eta\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} \langle \pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\, dm_\sigma(s) \qquad \text{for all } \ t\in\mathbb{R}.$$

对于紧区间 $I_\eta = [\delta_{\mathcal{H}} - \eta, \delta_{\mathcal{H}}] \subset (d/2, d]$ 以及有限多个 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 满足 $\sigma\subset\tau$的情形，我们使用推论 3.6 来估计所有 $s\in I_\eta$ 和 $t\geq 0$，可得

$$\langle \pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)} = e^{-(d-s)t}\langle \mathsf{T}_\tau^\tau \mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)} + O_{I_\eta,\tau}\left(e^{-(d-s+\eta_s)t}\,\|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\,\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\right).$$

因此，取实部并积分，可得

$$\begin{aligned} F_{\Re,\eta}(z) &= \int_0^{+\infty} \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-d)t}\Re\big(\langle \pi_{\sigma,s}(a_t)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\big)\, dm_\sigma(s)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} \Big(e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-s)t}\Re\big(\langle \mathsf{T}_\tau^\tau \mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\big) \\ &\quad + O_{I_\eta,\tau}\left(e^{-(z+\delta_{\mathcal{H}}-s+\eta_s)t}\,\|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\,\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\right)\Big)\, dm_\sigma(s)\, dt. \end{aligned}$$

记

$$F_{\Re,\eta}(z) = B_{\Re}(z) + E_{\Re}(z)$$

其中 $B_{\Re}(z)$ 是主项， $E_{\Re}(z)$ 是误差项。假设 $\Re(z) > 0$，使得这些积分绝对收敛，且我们可以交换积分次序。于是，我们得到

$$B_{\Re}(z) = \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} \frac{\Re\big(\langle \mathsf{T}_\tau^\tau \mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s}, \psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\big)}{z+\delta_{\mathcal{H}}-s}\, dm_\sigma(s).$$

注意， $B_{\Re}(z)$ 在 $\mathbb{C}\smallsetminus[-\eta,0]$ 上全纯。此外，定义 $E_{\Re}(z)$ 的积分在 $\{z\in\mathbb{C}$ 上绝对收敛： $\Re(z) > -\eta\}$，下面我们来证明这一点。将 $I_\eta = (I_\eta \smallsetminus ((d+1)/2, d])$ 分解为 $\sqcup (I_\eta \smallsetminus (d/2,(d+1)/2])$，并利用公式 (3.1) 中 η_s 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} |E_{\Re}(z)| &\ll_{I_\eta,\tau} \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)} \int_0^{+\infty} e^{-(\Re(z)+\delta_{\mathcal{H}}-s+\eta_s)t}\, dt\, dm_\sigma(s) \\ &= \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta\smallsetminus((d+1)/2,d]} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)} \int_0^{+\infty} e^{-(\Re(z)+\delta_{\mathcal{H}}+s-d)t}\, dt\, dm_\sigma(s) \\ &\quad + \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta\smallsetminus(d/2,(d+1)/2]} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)} \int_0^{+\infty} e^{-(\Re(z)+\delta_{\mathcal{H}}-s+1)t}\, dt\, dm_\sigma(s) \\ &\leq \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta\smallsetminus((d+1)/2,d]} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)} \int_0^{+\infty} e^{-(\Re(z)+2\delta_{\mathcal{H}}-d-\eta)t}\, dt\, dm_\sigma(s) \\ &\quad + \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta\smallsetminus(d/2,(d+1)/2]} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)} \int_0^{+\infty} e^{-(\Re(z)+1)t}\, dt\, dm_\sigma(s) \\ &\leq \left(\frac{1}{\Re(z)+2\delta_{\mathcal{H}}-d-\eta)} + \frac{1}{\Re(z)+1}\right) \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau} \int_{I_\eta} \|\phi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\|\psi_{\sigma,s}\|_{\mathcal{H}(\sigma,s)}\, dm_\sigma(s) \\ &\leq \left(\frac{1}{\Re(z)+\delta_{\mathcal{H}}-d/2)} + \frac{1}{\Re(z)+1}\right) \|\phi_\eta\|_{\mathcal{H}[\eta]}\|\psi_\eta\|_{\mathcal{H}[\eta]}. \end{aligned}$$

由此可知， $E_{\Re}(z)$ 在 $\{z\in\mathbb{C}$ 上有界且全纯： $\Re(z) > -\min\{\eta,1\}\}$。现在结合 $A_{\Re}(z) = F^{\perp}_{\Re,\ \eta}(z) + E_{\Re}(z)$ 即可得到该结果。■

4. 矩阵系数主项的非消失性

在 Edwards–Oh 的工作中，[EO21], 一个关键点是渐近展开中矩阵系数主项的消失：对于非平凡的 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$和 M-不变向量 $u \in \mathcal{U}(\sigma,\ s)_{\tau_1}$（定理3.4）——他们的目的是最终得到相对于 Bowen–Margulis–Sullivan 测度的测地流指数混合。另一方面，为了获得强谱隙，我们需要对于适当选取的测试向量，非平凡的主项不消失 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$。由此可知，可以利用矩阵系数的渐近行为检测是否存在给定的准互补级数。本节的目标是证明这样的非消失结果。

设 $s > d/2$。回忆引理 3.3，Harish-Chandra C 函数 $\mathsf{C}_+(s)$ 在 $L^2(K:\ \sigma)$ 的每个不可约 M-子模上都作用为标量。记 $\mathsf{C}_+(\tau:\ \sigma;\ s)$ 为 $\mathsf{C}_+(s)$ 在包含于某个 K-型 $\tau \in K$ 中的 M-型$\sigma \in M$ 上所作用的标量（其重数为 1；见第 2.4 小节）。Eguchi–Koizumi–Mamiuda 在 [EKM99] 中计算了这些标量。下面引用他们的定理。

定理 4.1 ([EKM99，定理 8。2])。设 $d \geq 2$ 和 $s > d/2$。设 $\sigma = (\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{\lfloor d/2 \rfloor}) \in M$ 为一个 M-型，且 $\tau = (\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{\lceil d/2 \rceil}) \in K$ 为一个 K-型，满足 σ 包含于 τ。则有：

(1) 若 $2 \mid d$，则

$$\mathsf{C}_+(\tau:\sigma;s) = \frac{(d-1)!}{(d/2-1)!} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s-d/2+j-\sigma_j) \prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s+d/2-j+\sigma_j)}{\prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s-d/2+j-\tau_j) \prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s+d/2-j+1+\tau_j)};$$

(2) 若 $2 \nmid d$，则

$$\mathsf{C}_+(\tau:\sigma;s) = (\tfrac{d-1}{2})!\, 2^{-2s+d}\, \Gamma(2s) \cdot \frac{\prod_{j=1}^{(d-1)/2} \Gamma(s-d/2+j-\sigma_j) \prod_{j=1}^{(d-1)/2} \Gamma(s+d/2-j+\sigma_j)}{\prod_{j=1}^{(d+1)/2} \Gamma(s-d/2+j-\tau_j) \prod_{j=1}^{(d+1)/2} \Gamma(s+d/2-j+1+\tau_j)}.$$

我们使用定理 4.1来证明以下命题。回顾与 λ_τ 相关的常数 K型$\tau \in K$ 来自公式（2.5）。

命题 4.2。设 $\sigma \in M$ 是一个 M型。存在一个 K型 $\tau \in K$，使得

(1) τ 同时包含 σ 及其对偶 σ^*；*(2)* τ 在满足性质（λ_τ *1*）的 K型中使 λ_τ 最小；*(3)* 复数域$\mathsf{C}_+(\tau:\ \sigma^*;\ s) \neq 0$ 对所有 $s > d/2$均成立。

证明。 设 $\sigma \in M$ 是一个 M型。分情况讨论，我们取一个显式的 K型 $\tau \in K$，并验证所声称的性质。

情形 *1*：$2 \mid d$。记 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{d/2})$，其中

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{d/2-1} \geq |\sigma_{d/2}|.$$

再记 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{d/2}^*)$。在当前情形下，回忆

- 若 $4 \mid d$，则 $\sigma^* = \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{d/2})$;
- 否则，$\sigma^* = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{d/2-1}, -\sigma_{d/2})$。

取 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{d/2-1}, \tau_{d/2}) := (\sigma_1, \ldots, \sigma_{d/2-1}, |\sigma_{d/2}|)$。那么 τ同时包含 σ和 σ^*，因为它们满足交错性质

$$\tau_1 \geq \sigma_1 \geq \tau_2 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \tau_{d/2-1} \geq \sigma_{d/2-1} \geq \tau_{d/2} \geq |\pm\sigma_{d/2}|.$$

这证明了性质（1）。逐项检查等式（2.5）即可验证性质（2）。

令 $s > d/2$。定理 4.1 给出的关于 σ^* 以及 τ的选取给出

$$\mathsf{C}_+(\tau:\sigma^*;s) = \frac{(d-1)!}{(d/2-1)!} \cdot \frac{\Gamma(s-\sigma_{d/2}^*) N_2}{\Gamma(s-|\sigma_{d/2}|) D_2}$$

分子和分母中第一组迭代乘积里，除最后一个因子外，其余因子均已约去，并且 $N_2 = \prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s+d/2-j+\sigma_j^*)$ 和 $D_2 = \prod_{j=1}^{d/2} \Gamma(s+d/2-j+1+\tau_j)$ 分别表示分子和分母中的第二组迭代乘积。为证明性质（3），我们需要验证分子中的零点 $\Gamma(s-\sigma_{d/2}^*)N_2$ 与分母中的极点 $\Gamma(s-|\sigma_{d/2}|)D_2$ 相互抵消。第一个条件

成立，这是因为 Γ 函数没有零点。现在我们验证第二个条件。回想一下， Γ 的极点都是单极点，且恰好位于非正整数处。因子 D_2 没有极点，因为

$$s + d/2 - j + 1 + \tau_j \geq s > 0 \qquad \text{for all } 1 \leq j \leq d/2. \tag{4.1}$$

因此，我们只需考察分母中的第一个因子 $\Gamma(s - |\sigma_{d/2}|)$。幸运的是，根据以下观察，它必定与分子中的因子 $\Gamma(s - \sigma_{d/2})$ 或 $\Gamma(s + \sigma_{d/2})$ 之一相消：

$$\Gamma(s - \sigma^*_{d/2})\Gamma(s + \sigma^*_{d/2}) = \Gamma(s - \sigma_{d/2})\Gamma(s + \sigma_{d/2}).$$

因此，$\mathsf{C}_+(\tau : \sigma^*; s) \neq 0$。

情形 *2*： $2 \nmid d$。令 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{(d-1)/2})$，其中

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{(d-1)/2} \geq 0.$$

在当前情形下， $\sigma^* = \sigma$。取 $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{(d-1)/2}, \tau_{(d+1)/2}) := (\sigma_1, \ldots, \sigma_{(d-1)/2}, 0)$。那么 τ包含 σ（因此也包含 σ^*），因为它们满足交错性质

$$\tau_1 \geq \sigma_1 \geq \tau_2 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \tau_{(d-1)/2} \geq \sigma_{(d-1)/2} \geq |\tau_{(d+1)/2}|.$$

这证明了性质（1）。逐项检查方程（2.5）即可验证性质（2）。

令 $s > d/2$。与情形 1 一样，定理 4.1 给出的关于 σ^* 的公式以及 选择 τ gi ves

$$\mathsf{C}_+(\tau : \sigma^*; s) = (\tfrac{d-1}{2})!\, 2^{-2s+d} \cdot \frac{\Gamma(2s)N_2}{\Gamma(s+1/2)D_2}$$

并且要证明性质（3），我们只需验证分母中的极点 $\Gamma(s+1/2)D_2$ 被消去。同样， D_2 由对所有 4.1 的同一不等式方程（ $1 \leq j \leq (d+1)/2$可知没有极点。同样，$\Gamma(s+1/2)$ 没有极点，因为 $s + 1/2 > 0$。因此，复数域$+(\tau : \sigma^*; s) \neq 0$。

■

下面的推论表明，对于合适的测试向量，定理 3.4给出的渐近展开中的主项非零。

推论 *4.3*。设 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 为一个自对偶 M-型。设 $\tau \in K$ 为命题 *4.2* 所给出的 K-型。那么，对于所有 $s \in \mathcal{I}_\sigma$，子空间 $\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau \cap \mathcal{U}(\sigma, s)_\sigma \subset \mathcal{U}(\sigma, s)$ 都是非平凡的，且算子 T^τ_τ复数域 $+(s)$ 通过一个非零标量作用于其上。

证明。令 σ 和 τ 如推论中所述。根据命题 4.2(1)， τ 包含 σ，因此 τ 包含于 诱导表示$I_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1})$ 中（见第 2.5 小节）。根据命题 4.2(2)， τ是 诱导表示$I_P^G(\sigma \otimes \chi_{s-d/2} \otimes \mathbf{1})$ 的一个极小 K-型，因此由定理 2.12，我们进一步推出子空间 $\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau$ 是非平凡的。再次由于 τ 包含 σ，我们得到 $\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau \cap \mathcal{U}(\sigma, s)_\sigma$ 是非平凡的。回顾引理 3.1 给出 $\mathsf{T}^\tau_\tau|_{\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau} = \dim(\tau)\dim(\sigma)\,\mathsf{P}_{\sigma^*}|_{\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau}$，且 $\mathsf{P}_{\sigma^*} = \mathsf{P}_\sigma$ 在 $\mathcal{U}(\sigma, s)_{\overline{\sigma}}$ 上作为恒等算子作用。此外，根据命题 4.2(3)， $\mathsf{C}_+(s)$ 在 $\mathcal{U}(\sigma, s)_\tau \cap \mathcal{U}(\sigma, s)_\sigma$ 上通过标量 $\mathsf{C}_+(\tau : \sigma; s) \neq 0$ 作用。综上可得

$$[\mathsf{T}^\tau_\tau \mathsf{C}_+(s)]|_{\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau \cap \mathcal{U}(\sigma,s)_\sigma} = \frac{\dim(\tau)}{\dim(\sigma)} \mathsf{C}_+(\tau : \sigma; s) \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau \cap \mathcal{U}(\sigma,s)_\sigma} \neq 0,$$

如所希望的。 ■

5. 带幂次节省误差项的矩阵系数衰减与拉普拉斯变换

本节介绍关键的动力学输入：带幂次节省误差项的矩阵系数衰减，这是标架流指数混合的推论。我们利用这一结果，将缩放矩阵系数的拉普拉斯变换亚纯延拓到虚轴左侧的一个条带内，且至多在原点有一个简单极点。

我们引用以下 [SW21中的定理 1。2] 以及 [LPS25中的定理 1。2] ，并将其简化表述。

定理 5.1 ([SW21、LPS25])。 存在非零的博雷尔测度 m^{BR} 和 m^{BR_*}，以及 $\eta > 0$ ，使得对于所有 ϕ，$\psi \in$ 复数域$_c^\infty(\Gamma\backslash G)$ 和 $t > 0$，都有

$$\int_{\Gamma\backslash G} (\phi \circ a_t)\psi \, dm^{\mathrm{Haar}} = e^{-(d-\delta_\Gamma)t} \int_{\Gamma\backslash G} \phi \, dm^{\mathrm{BR}} \int_{\Gamma\backslash G} \psi \, dm^{\mathrm{BR}_*} + O_{\phi,\psi}\big(e^{-(d-\delta_\Gamma+\eta)t}\big),$$

wh此处的隐含常数取决于 ϕ 和 ψ 的*Sobolev*范数，以及它们的支撑 $rts.$

如前所述，上述定理由 [SW21, Theorem 1.1] 和 [LPS25, Theorem 1.1] 推出，这两项结果涉及标架流相对于鲍恩–马古利斯–沙利文（BMS）测度的指数混合；该测度是最大熵的博雷尔概率测度。在 $\delta_\Gamma > \max\{d/2, d-1\}$ 的情形下，Mohammadi–Oh 已在 [MO15] 中证明了这一结果。测地流的指数混合归功于 Li–Pan [LP23]；另见 [Kha23a, Kha23b]。在凸余紧情形下，标架流的指数混合归功于 [SW21]。上述推导使用了 Roblin 横截交叉论证[Rob03]；关于该论证的更多阐述，另见 [OS13, MO15, KO21, ELO22]，其中最后一篇最为一般。我们也请读者参阅上述文献，了解 BMS 测度 m^{BMS}和 Burger–Roblin（BR）测度 m^{BR} 的显式公式及更多细节；这两种测度都出现在上述定理中。本文只需知道它们的存在，以及上述定理中主项的形式即可。

注记 5.2. [SW21，定理 1。2] 以及 [LPS25，定理 1。2] 先验地表述为适用于无挠 Γ。它也˜适用于非无挠 Γ，只需根据塞尔伯格引理转而考虑有限指标无挠子群 $\Gamma \le \Gamma$；测度 m^{Haar}、m^{BMS}、m^{BR}和 m^{BR_*} 在 $\tilde{\Gamma}\backslash G$上只是将 $\Gamma\backslash G$上的测度提升而来，差别仅在于归一化方式˜以及常数因子 $[\Gamma\colon\ \Gamma]$。

推论 5.3。 设 $\eta > 0$ 如定理 *5.1*中所述。对所有 $\phi,\ \psi \in$ 复数域$_c^\infty(\Gamma\backslash G)$，定义缩放矩阵系数的实部和虚部的拉普拉斯变换 $F_\spadesuit\colon\ \{z \in \mathbb{C}\colon\ \Re(z) > d - \delta_\Gamma\} \to \mathbb{C}$ 如下

$$F_\spadesuit(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z+\delta_\Gamma-d)t}\spadesuit\big(\langle \phi \circ a_t, \psi\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}\big)\, dt \qquad \textit{for all } z \in \mathbb{C} \textit{ with } \Re(z) > d - \delta_\Gamma, \tag{5.1}$$

对于 $\spadesuit \in \{\Re, \Im\}$。那么，$F_\spadesuit$ 可亚纯延拓至半平面 $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \Re(z) > -\eta\}$，且至多在 $z = 0$ 处有一个简单极点，其留数为 $\spadesuit\Big(\int_{\Gamma\backslash G} \phi\, dm^{\mathrm{BR}} \int_{\Gamma\backslash G} \psi\, dm^{\mathrm{BR}_*}\Big)$，对于¯$\spadesuit \in \{\Re, \Im\}$。

证明。 令 $\eta > 0$ 为满足定理 5.1 的参数，并令 $\phi, \psi \in$ 复数域$_c^\infty(\Gamma\backslash G)$。我们给出 $F_\Re$的证明，因为 $F_\Im$ 的证明完全相同。记 $M_{\phi,\psi} := \Re\Big(\int_{\Gamma\backslash G} \phi\, dm^{\mathrm{BR}} \int_{\Gamma\backslash G} \psi\, dm^{\mathrm{BR}_*}\Big)$。于是，根据定理 5.1，函数

$$F_\Re(z) - \int_0^{+\infty} e^{-zt} M_{\phi,\psi}\, dt = F_\Re(z) - \frac{M_{\phi,\psi}}{z},$$

最初定义在 $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > d - \delta_\Gamma\}$ 上，并全纯延拓至半平面 $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > -\eta\}$。该推论现在由此得出：$M_{\phi,\psi}/z$ 亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且在 $z = 0$ 处至多有一个简单极点，其留数为 $M_{\phi,\psi}$。■

6. C拉普拉斯变换的比较及定理 1.3 和1的证明 .6

本节中，我们证明定理 1.3。定义 2 的性质（1.1 ）将在命题6.6中建立，而性质（1）将在命题 6.8中证明。证明策略概要见小节1.1。

6.1. **斯蒂尔切斯变换的预备知识**。 回顾一下，对于一个符号测度 ν，允许取无穷值 $+\infty$ 和$-\infty$，但二者不能同时取无穷值。因此，在 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 的约当分解中，将其分解为正部分和负部分 $\nu^\pm$（它们均为正测度），ν 至少有一个 ν^+ 或 ν^- 必须是有限的。此外，若 ν 是有限的，则 ν^+ 和 ν^- 都必须是有限的，从而其全变差 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ 也是有限的。更多细节请参见 [Fol99第 3] 章。我们还记下如下初等引理。

引理 6.1. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间，$E \subset I$ 为一个稠密子集。设 ν 是定义在 I上的一个符号博雷尔测度，且对所有满足 $a,\ b \in E$的闭区间 $[a, b] \subset I$，都有 $\nu([a, b]) = 0$。则 ν是零测度。

证明。 设 I、E和 ν 如引理中所述。我们有约当分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$，其中正部和负部 $\nu^\pm$ 是 I上的正博雷尔测度。由假设可知，对所有满足 $a,\ b \in E$的区间 $[a, b] \subset I$，都有 $\nu^+([a, b]) = \nu^-([a, b])$。由于端点属于稠密子集 $E \subset I$ 的闭区间集合生成 I上的博雷尔 σ-代数，故 $\nu^+ = \nu^-$。因此，引理得证。■

备注 6.2。 对于闭区间 $I \subset \mathbb{R}$，我们无法重复上述证明，因为稠密子集 $E \subset I$ 可能不包含 I 的任一端点。

以下是针对符号测度的斯蒂尔切斯变换所对应的斯蒂尔切斯反演公式。该公式在 [Wal48第 XIII 章，第 65] 节中针对正测度给出了证明；不过，该公式的初等证明也可推广到符号测度。为求完整起见，我们在此列出该公式，尤其是因为这个命题在我们主定理的证明中起着关键作用。

命题 6.3（斯蒂尔切斯反演公式）。设 ν 是 $\mathbb{R}$ 上有限的带符号博雷尔测度。设 $F\colon\ \mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是由 ν 定义的斯蒂尔切斯变换，即

$$F(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-t}\,d\nu(t)\qquad \textit{for all } z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}.$$

则 F 在 $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$ 上全纯，并且对任意闭区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$，有

$$\frac{\nu([a,b))+\nu((a,b])}{2}=-\frac{1}{\pi}\lim_{y\searrow 0}\int_a^b \Im F(x+iy)\,dx.$$

特别地，若 $\nu(\{a\})=\nu(\{b\})=0$，且 F 连续延拓至（$\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$）$\cup[a,b]$，从而全纯延拓至（$\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$）$\cup(a,b)$，则 $\nu([a,b])=0$。

证明。设 ν、F 和 $[a,b]$ 如命题中所述。在 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 上定义有限的带符号博雷尔测度 $\tilde\nu\colon\ d\tilde\nu(x,\ t)=dx\,d\nu(t)$。对任意紧子集 $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}_{>0}$ 和 $y\in\mathcal{K}$，有如下统一界

$$\int_{[a,b]\times\mathbb{R}}\left|\frac{1}{x+iy-t}\right|\,d|\tilde\nu|(x,t)\le\frac{1}{\inf\mathcal{K}}\cdot|\tilde\nu|([a,b]\times\mathbb{R})<+\infty.$$

根据类似的一致界，我们可以对 F 在 $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$ 中任意平行于实轴或虚轴的线段上进行积分，并应用富比尼定理。因此，$z\mapsto\frac{1}{z-t}$ 在 $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$上的全纯性结合富比尼定理，意味着 F沿 $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$中的矩形轮廓（边平行于实轴和虚轴）积分为零。由此，根据莫雷拉定理（见 F在 $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$ 上全纯（见 [SS03，第2章，第5节，定理5，1]以及 [SS03，第2章，第7节，问题 3]）。

由上述界可知，对任意 $y>0$，我们可以对 F 的虚部在 $[a,b]$ 上积分，并再次应用富比尼定理，得到

$$\begin{aligned}\int_a^b \Im F(x+iy)\,dx&=\int_a^b\int_{\mathbb{R}}\frac{-y}{(x-t)^2+y^2}\,d\nu(t)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\int_a^b\frac{-1/y}{(x-t)^2/y^2+1}\,dx\,d\nu(t)\\&=\int_{\mathbb{R}}\arctan((t-b)/y)\,d\nu(t)-\int_{\mathbb{R}}\arctan((t-a)/y)\,d\nu(t).\end{aligned}$$

现在，我们引入阶跃函数 $h=-\chi_{(-\infty,0)}+\chi_{(0,+\infty)}\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，并观察其逐点极限

$$\lim_{y\searrow 0}\arctan(t/y)=\frac{\pi}{2}h(t)\qquad\text{for all } t\in\mathbb{R}.$$

回顾一下，$|\arctan|\le\frac{\pi}{2}$，且全变差 $|\nu|$ 有限，因为 ν 有限。因此，我们可以应用勒贝格控制收敛定理，得到极限

$$\begin{aligned}\lim_{y\searrow 0}\int_a^b\Im F(x+iy)\,dx&=\lim_{y\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\arctan((t-b)/y)\,d\nu(t)-\lim_{y\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\arctan((t-a)/y)\,d\nu(t)\\&=\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}h(t-b)\,d\nu(t)-\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}h(t-a)\,d\nu(t)\\&=-\frac{\pi}{2}\big(\nu((-\infty,b))-\nu((b,+\infty))-\nu((-\infty,a))+\nu((a,+\infty))\big)\\&=-\pi\frac{\nu([a,b))+\nu((a,b])}{2}.\end{aligned}$$

下面推导命题的最后一个结论。假设 F连续延拓到 $(\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R})\cup[a,b]$。注意，对于任何与 (a,b)相交的矩形闭曲线（其边平行于实轴和虚轴），我们都可以将其分解为 3 个矩形闭曲线，其中只有一个与 (a,b) 相交，且在虚方向上可以任意窄。根据这一观察，我们再次利用莫雷拉定理（参见 [SS03]中的相关内容）推得 F 在 $(\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R})\cup(a,b)$上全纯。现在，由于 ν是一个实值测度，我们有

性质：对于所有 $z \in \overline{\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}}$，$\overline{F}(z) = F(z)$，因此由连续性可得，对于所有 $z \in [a,b]$，$\Im F(z) = 0$。于是，由 F 在 $[a,b] + i[-1,1]$ 上的一致连续性，我们有

$$\lim_{y \searrow 0} \int_a^b \Im F(x+iy)\, dx = \int_a^b \lim_{y \searrow 0} \Im F(x+iy)\, dx = 0.$$

进一步假设 $\nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$。那么，由已证明的恒等式可得 $\nu([a,b]) = \frac{\nu([a,b)) + \nu((a,b])}{2} = 0$。■

推论 6.4. 设 $\nu = \nu_\Re + i\nu_\Im$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的复博雷尔测度，其中 $\nu_\Re$ 和 $\nu_\Im$ 是符号测度，并考虑由下式定义的函数 $F_\Re$ 和 $F_\Im$

$$F_\Re(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\nu_\Re(t), \qquad F_\Im(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\nu_\Im(t), \qquad \text{for all } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}.$$

假设存在一个闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$，使得以下条件成立：

(1) 存在一个稠密子集 $E \subset [a,b]$，使得对于所有 $x \in E$，$\nu(\{x\}) = 0$；*(2)* $F_\Re$ 和 $F_\Im$ 连续延拓到 $(\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}) \cup [a,b]$。

那么 $\nu|_{(a,b)}$ 是零测度。

证明。由于 $F_\Re$ 和 $F_\Im$ 连续延拓至 $[a,b]$，因此根据命题 6.3，我们得出 $\nu([\alpha,\beta]) = 0$ 对任意 α，$\beta \in E$ 满足 $\alpha < \beta$。于是，根据引理 6.1 可知，$\nu_\Re$ 和 $\nu_\Im$ 限制在 (a,b) 上均为零测度。推论即得，因为 $\nu = \nu_\Re + i\nu_\Im$。■

6.2. **定理 1.3的证明**。现在我们证明主定理。为了能够应用命题 3.8，我们需要下面的事实。

命题 6.5。对于所有 $\upsilon \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s > \delta_\Gamma$，准互补级数 $\mathcal{U}(\upsilon, s)$ 不弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。

证明。借助标架流的定性混合以及 Roblin 横截交叉论证，参见[Win15，定理 1.4]，对于所有 ϕ、$\psi \in C_c(\Gamma\backslash G)$，我们有估计 $\langle \phi \circ a_t, \psi \rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)} = O_{\phi,\psi}(e^{-(d-\delta_\Gamma)t})$，当 $t \to +\infty$ 时成立。[2] 因此，对于所有 $\epsilon > 0$，矩阵系数 $g \mapsto \langle \rho_G(g)\phi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}$ 属于 $L^{p+\epsilon}(G)$；并且对于 $p := \frac{d}{d-\delta_\Gamma}$。这可通过类似于命题 3.7 证明的论证得到，使用 G 上的哈尔测度公式。由于 $C_c(\Gamma\backslash G)$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中稠密，这意味着表示 $(\rho_G, L^2(\Gamma\backslash G))$ 按定义是强 L^p（采用 [Sha00] 的术语）。因此，[Sha00，定理 2.1] 蕴含：任何弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的表示也都是强 L^p。另一方面，给定 $\upsilon \in \widehat{M}_{\text{s-d}}$ 和 $s > \delta_\Gamma$，准互补级数 $\mathcal{U}(\upsilon, s)$ 不是强 L^p，因此不可能弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$。事实上，根据推论 4.3，存在一个 K-型 $\tau \in \widehat{K}$，使得对于所有 $s \in \mathcal{I}_\upsilon$，算子 $\mathrm{T}^\tau_\tau C_+(s)$ 在 $\mathcal{U}(\upsilon, s)_\tau$ 上非零。结合推论 3.6，这表明在 $\mathcal{U}(\upsilon, s)$ 中存在 K-有限向量，使得其矩阵系数对于任意充分小的 $\epsilon > 0$ 都不属于 $L^{p+\epsilon}(G)$。因此，[Sha00，定理 2.1] 蕴含表示 $\mathcal{U}(\upsilon, s)$ 不可能是强 L^p。■

在下文中，我们用 $\eta_{\text{rep}} > 0$ 和 $\eta_{\text{mix}} > 0$ 分别表示使命题 3.8 和推论 5.3成立的任意常数。

命题 6.6. 固定 $\eta := \min\{\eta_{\text{rep}}, \eta_{\text{mix}}\} \in (0, \delta_\Gamma - d/2)$. 对任意 $\upsilon \in M_{\text{s-d}}$ 和 $s \in (\delta_\Gamma - \eta, \delta_\Gamma)$，准互补级数 $\mathcal{U}(\upsilon, s)$ 不弱包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$。

证明。固定命题中所述的常数 $\eta := \min\{\eta_{\text{rep}}, \eta_{\text{mix}}\} \in (0, \delta_\Gamma - d/2)$。记 $\mathcal{L} := L^2(\Gamma\backslash G)$。

为证明之用，我们先为所有 K 型 $\tau \in K$ 和 M 型 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 定义以下对象。首先定义希尔伯特子空间

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} := \int_{\mathcal{I}_\sigma \cap (\delta_\Gamma - \eta, \delta_\Gamma)}^{\oplus} \mathcal{L}(\sigma, s)_\tau \, dm_\sigma(s) \qquad \subset \mathcal{L}_\tau \subset \mathcal{L},$$

$$\mathcal{J}_{\tau,\sigma} := \int_{\mathcal{I}_\sigma \cap (\delta_\Gamma - \eta, \delta_\Gamma)}^{\oplus} \mathcal{L}(\sigma, s)_\tau \cap \mathcal{L}(\sigma, s)_\sigma \, dm_\sigma(s) \qquad \subset \mathcal{L}_{\tau,\sigma} \subset \mathcal{L}_\tau \subset \mathcal{L}.$$

[2] 这是 定理 5.1 的定性形式，没有误差 率。

注意，希尔 $\widehat{\ }$与 $M_{\text{s-d}}$ 中不同元素对应的希尔伯特子空间彼此正交，即。 e.,

$$\sigma,\sigma'\in\widehat{M}_{\text{s-d}}\text{ such that }\sigma\neq\sigma'\Longrightarrow\mathcal{L}_{\tau,\sigma}\perp\mathcal{L}_{\tau,\sigma'}. \tag{6.1}$$

定义有界算子 $\mathsf{Q}_{\tau,\ \sigma}:\mathcal{L}_{\tau,\ \sigma}\to\mathcal{L}_{\tau,\ \sigma}$ 如下：

$$\mathsf{Q}_{\tau,\sigma}:=\int_{\mathcal{I}_\sigma\cap(\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma)}^{\oplus}\mathsf{T}_\tau^\tau|_{\mathcal{L}(\sigma,s)_\tau}\mathsf{C}_+(s)|_{\mathcal{L}(\sigma,s)_\tau}\,dm_\sigma(s).$$

接着，我们将其扩张为算子 $\mathsf{Q}_{\tau,\ \sigma}:\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$，令它在 $(\mathcal{L}_{\tau,\ \sigma})^\perp$ 上为零算子。最后，我们定义算子 $\mathsf{Q}_\tau:\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 如下：

$$\mathsf{Q}_\tau:=\sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau}\mathsf{Q}_{\tau,\sigma}. \tag{6.2}$$

现在我们正式开始证明。为导出矛盾，假设 $\mathcal{U}(v,\ s_\star)$ 弱包含$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$于 $\mathcal{L}$，其中 $v\in M_{\text{s-d}}$ 且 $s_\star\in(\delta_\Gamma-\eta,\ \delta_\Gamma)$。令 $\tau\in K$ 为相应的 K-型，由命题4.2给出。我们首先断言：

$$\text{there exist functions }\phi,\psi\in C_{\text{c}}^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau\text{ such that }\langle\mathsf{Q}_\tau\phi,\psi\rangle_{\mathcal{L}}\neq0. \tag{6.3}$$

事实上，根据我们的假设，$s_\star\in\operatorname{supp}(m_v)$，因此 $m_v((\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma))>0$。由推论 4.3，对所有 $s\in\mathcal{I}_v$，希尔伯特子空间 $\mathcal{L}(v,s)_\tau\cap\mathcal{L}(v,s)_v\subset\mathcal{L}(v,s)$ 非平凡，且算子 T_τ^τ复数域+(s) 在其上作用为一个非零标量。由直积分的定义可得：

- $\mathcal{J}_{\tau,\ v}\subset\mathcal{L}_{\tau,\ v}$ 是 $\mathcal{L}_\tau\subset\mathcal{L}$ 的非平凡希尔伯特子空间；
- $\mathsf{Q}_{\tau,\ v}$ 在 $\mathcal{L}_\tau$ 上是一个非零有界算子，v、$\mathcal{L}_\tau$ 和 $\mathcal{L}$；
- Q_τ 是非零有界算子，作用于 $\mathcal{L}_\tau$ 和 $\mathcal{L}$，这是由公式（6.1）中的正交关系所致 .

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$根据上述事实，存在 $\phi,\ \psi\in\mathcal{L}_\tau$ 使得

$$\left\langle\mathsf{Q}_\tau\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}\right\rangle_{\mathcal{L}}\neq0. \tag{6.4}$$

由于C_{c}^∞（$\Gamma\backslash G$）$\cap\mathcal{L}_\tau$是 $\mathcal{L}_\tau$<style id='15}的稠密子空间，这由引理2.13可知，因此命题（6.3）成立 .

接下来，我们可以将公式（6.3）更明确地改写如下：

$$\langle\mathsf{Q}_\tau\phi,\psi\rangle_{\mathcal{L}}=\sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau}\int_{(\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma)}\mathbf{1}_{\mathcal{I}_\sigma}(s)\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s},\psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,s)}\,dm_\sigma(s)\neq0.$$

这促使我们引入定义在 $\mathbb{R}$ 上的复测度 ν_τ，其定义为

$$d\nu_\tau(s)=\sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau}\mathbf{1}_{\mathcal{I}_\sigma}(s)\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s},\psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,s)}\,dm_\sigma(s).$$

于是，我们可以将等式（6.3）进一步改写为

$$\nu_\tau((\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma))\neq0. \tag{6.5}$$

由引理2.2可知，ν_τ 至多有可数多个原子。回顾一下，这些原子都是单点集。因此，我们得到一个稠密子集

$$E_\tau=\{x\in\mathbb{R}:\{x\}\text{ is not an atom of }\nu_\tau\}\subset\mathbb{R}$$

其具有如下性质：对于所有 $\nu_\tau(\{x\})=0$，都有 $x\in E_\tau$。因此，推论 1的性质（6.4）得到满足 .

现在，命题 6.5 表明，$(\rho_G,\mathcal{L})$ 不弱包含任何参数为 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 和 $s>\delta_\Gamma$ 的准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,s)\widehat{\ }$。因此，命题 3.8 适用于表示 $(\pi,\mathcal{H})=(\rho_G,\mathcal{L})$，其中 $\delta_{\mathcal{H}}=\delta_\Gamma$。令 $\spadesuit\in\{\Re,\Im\}$。应用该命题，由以下定义的缩放矩阵系数的 $\spadesuit$ 部分的拉普拉斯变换为

$$F_\spadesuit(z)=\int_0^{+\infty}e^{-(z+\delta_\Gamma-d)t}\spadesuit\left(\langle\phi\circ a_t,\psi\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}\right)dt\qquad\text{for all }z\in\mathbb{C}\text{ with }\Re(z)>0 \tag{6.6}$$

具有一个 全纯延拓至 $\{z\in\mathbb{C}:\ \Re(z)>-\eta_{\text{rep}}\}\smallsetminus(-\eta_{\text{rep}},\ 0]$ 且可写成一个 su m

$$F_\spadesuit=A_\spadesuit+B_\spadesuit$$

其中， $A_\spadesuit$ 是有界全纯函数， $B_\spadesuit$ 是在半平面$\{z\in\mathbb{C}$ 上的亚纯函数： $\Re(z)>-\eta_{\mathrm{rep}}\}$ ，而 $B_\spadesuit$ 由以下公式明确给出

$$B_\spadesuit(z)=\sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau}\int_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\frac{\spadesuit\big(\langle \mathsf{T}^\tau_\tau \mathsf{C}_+(s)\phi_{\sigma,s},\psi_{\sigma,s}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,s)}\big)}{z+\delta_\Gamma-s}\,dm_\sigma(s)\qquad\text{for all } z\in\mathbb{C}\text{ with }\Re(z)>-\eta_{\mathrm{rep}}. \tag{6.7}$$

注意， $B_\spadesuit$ 的定义中的积分是在闭区间 $[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]$ 上进行的，而Q_τ的定义中的积分是在开区间（$\delta_\Gamma-\eta$， δ_Γ）上进行的；这里只有右端点 δ_Γ 具有重要意义。特别要注意， $s=\delta_\Gamma$原则上可能会对 $F_\spadesuit$贡献一个极点；但在本命题中，我们只关心检测参数 $s\in$ （$\delta_\Gamma-\eta$， δ_Γ）是否会对 $F_\spadesuit$贡献极点。下面的命题6.8将处理端点 $s=\delta_\Gamma$。

记 $\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}=\big(\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\big)_\Re+i\big(\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\big)_\Im$， 其中 $\big(\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\big)_\Re$和 $\big(\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\big)_\Im$是符号测度。还要注意， $B_\spadesuit(z)$是 $\big(\nu_\tau|_{[\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma]}\big)_\spadesuit$ 在 $z+\delta_\Gamma$处的斯蒂尔切斯变换。

现在，推论 5.3 同样适用于我们对 ϕ 和 ψ 的选择。令 $\spadesuit\in\{\Re,\Im\}$。应用该推论， $F_\spadesuit$ 可亚纯延拓至 $\{z\in\mathbb{C}:\ \Re(z)>-\eta_{\mathrm{mix}}\}$，并且在 $z=0$ 处恰有一个留数为 $\spadesuit\Big(\int_{\Gamma\backslash G}\phi\,dm^{\mathrm{BR}}\int_{\Gamma\backslash G}\psi\,dm^{\mathrm{BR}_*}\Big)$ 的简单极点。特别地， $B_\spadesuit$ 可全纯延拓至实数轴上形如 $[a,b]$ 的区间，对所有 $-\eta<a<b<0$ 均成立。因此，推论 6.4 的性质（2）得到满足。现在我们可以应用推论 6.4，从而得出 $\nu_\tau|_{(\delta_\Gamma-\eta,\delta_\Gamma)}$ 是零测度。特别地，这与公式（6.5）矛盾，证明完成。■

为准备第二个命题的证明，我们先引入一些记号。给定 G 的一个酉表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$，更一般地，给定 M 的一个酉表示，我们记

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}^M\oplus\mathcal{H}^0$$

为 $\mathcal{H}$ 关于子空间 $\mathcal{H}^M$ 与其正交补 $\mathcal{H}^0$ 的正交分解，其中 $\mathcal{H}^M$ 是 M-不变向量构成的子空间。特别地，给定一个 K-型 $\tau\in\widehat{K}$，我们也记

$$\mathcal{H}_\tau=\mathcal{H}^M_\tau\oplus\mathcal{H}^0_\tau.$$

对于 $v\in\mathcal{H}$,我们分别用 v^M 和 v^0 表示其在 $\mathcal{H}^M$ 和 $\mathcal{H}^0$ 上的正交投影，即

$$v^M=\int_M\pi(m)v\,dm,\qquad\qquad v^0=v-v^M. \tag{6.8}$$

我们记录以下引理，它是引理 3.1 的直接推论。

引理 6.7。 设 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 和 $s\in\mathcal{I}_\sigma$。设 $\tau\in K$ 是一个包含 σ 的 K-型。那么，算子 T^τ_τ 保持正交分解 $\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau=\mathcal{U}(\sigma,s)^M_\tau\oplus\mathcal{U}(\sigma,s)^0_\tau$。此外，若 σ 非平凡，则$\mathsf{T}^\tau_\tau\big|_{\mathcal{U}(\sigma,s)^M_\tau}$ 为零。

证明。设 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 和 $s\in\mathcal{I}_\sigma$。第一项断言由回忆 T^τ_τ 保持 M-型这一事实即可得到。引理 3.1 断言，将算子 T^τ_τ 限制在 $\mathcal{U}(\sigma,s)_\tau$ 上时，由于 σ 是自对偶的，它是到 $\mathcal{U}(\sigma,s)_\sigma$ 上的正交投影的标量倍。注意到 $\mathcal{U}(\sigma,s)^M_\tau$与子空间 $\mathcal{U}(\sigma,s)_\sigma$ 正交，因为 σ 是非平凡的，即可得到第二项断言。■

回顾备注 1.2 ，一旦我们在命题 6.6中确立了定义 21.1 中的性质 6.6，对于任意非平凡的 $v\in\widehat{M}_{\text{s-d}}$， $\mathcal{U}(v,\delta_\Gamma)$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中的弱包含便自动成为强包含。现在我们证明第二个命题，从而确立定义 1.1(1)，并完成定理 1.3的证明。

命题 6.8。 设 $v\in M_{\text{s-d}}$ 满足 $\delta_\Gamma\in\mathcal{I}_v$。则有如下结论。

(1) 若 $v=\mathbf{1}$ 是平凡的，则准互补级数 $\mathcal{U}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)$ 恰好以重数 1包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中。*(2)* 若 v 非平凡，则准互补级数 $\mathcal{U}(v,\delta_\Gamma)$ 不包含于 $L^2(\Gamma\backslash G)$。

证明。固定某个 $v\in M_{\text{s-d}}$，使得 $\delta_\Gamma\in\mathcal{I}_v$。若 $\delta_\Gamma=d$，则 $v=\mathbf{1}$，因而 $\mathcal{U}(v,\delta_\Gamma)=\mathcal{U}(\mathbf{1},d)=\mathbf{1}\in G$，且，并且 $\Gamma<G$ 是一个格。因此，第（1）部分显然成立。现在可以假设 $\delta_\Gamma<d$。若 $v=\mathbf{1}$，令 $\tau=\mathbf{1}\in K$为平凡的 K-型。否则，若 v 非平凡，令 $\tau\in K$ 为命题 4.2 给出的 K-型。

记 $\mathcal{L} = L^2(\Gamma\backslash G)$。首先，在证明命题 6.6 后，我们可以如下分离出 $\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)$ 对满足 $\sigma\subset\tau$ 且 $\mathcal{U}(\sigma,\delta_\Gamma)\subset\mathcal{L}$ 的 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 的贡献$\widehat{\ }$（参见注 1.2）。固定 $s_\star := \delta_\Gamma - \eta$，其中 $\eta := \min\{\eta_{\text{rep}},\eta_{\text{mix}}\}$，如命题 6.6 中所述，并定义

$$\mathcal{L}(s_\star) := \widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}} \int_{\mathcal{I}_\sigma\cap(d/2,s_\star]}^{\oplus} \mathcal{L}(\sigma,s)\,dm_\sigma(s).$$

$\widehat{\ }$根据命题6.6，$(s_\star,\ \delta_\Gamma)\subset\mathcal{I}_\sigma\smallsetminus\operatorname{supp}(m_\sigma)$ 对所有 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 成立，因此利用引理2.1，可得正交分解

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{temp}}\oplus\widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}}\int_{\mathcal{I}_\sigma}^{\oplus}\mathcal{L}(\sigma,s)\,dm_\sigma(s)\\ &= \mathcal{L}_{\text{temp}}\oplus\widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}}\int_{\mathcal{I}_\sigma\cap(d/2,\delta_\Gamma)}^{\oplus}\mathcal{L}(\sigma,s)\,dm_\sigma(s)\oplus\widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:m_\sigma(\{\delta_\Gamma\})>0}}\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)\\ &= \mathcal{L}_{\text{temp}}\oplus\mathcal{L}(s_\star)\oplus\widehat{\bigoplus_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\mathcal{U}(\sigma,\delta_\Gamma)\subset\mathcal{L}}}\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma).\end{aligned}$$

令 $\phi,\psi\in$复数域 $^\infty_{\text{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau$；特别地，它们是 K-有限的。令 $\phi_\star$和 $\psi_\star$分别表示 ϕ 和 ψ 在 $\mathcal{L}_\star$ 上的正交投影：$=\mathcal{L}_{\text{temp}}\oplus\mathcal{L}(s_\star)$。对 3.7 应用命题，其中 $\mathcal{L}_\star$，得到

$$|\langle\phi_\star\circ a_t,\psi_\star\rangle_{\mathcal{L}}|\ll_{\phi_\star,\psi_\star}(1+t)e^{-(d-s_\star)t}\qquad\text{for all } t>0. \tag{6.9}$$

回顾方程（2.7）中的直积分记号。对上文的每个正交直和$\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)$ 应用推论3.6 ，可得

$$\begin{aligned}\langle\pi_{\sigma,\delta_\Gamma}(a_t)\phi_{\sigma,\delta_\Gamma},\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)} &= e^{-(d-\delta_\Gamma)t}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(\delta_\Gamma)\phi_{\sigma,\delta_\Gamma},\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)}\\ &\quad+O_\tau\left(e^{-(d-\delta_\Gamma+\eta_{\delta_\Gamma})t}\|\phi_{\sigma,\delta_\Gamma}\|_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)}\|\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}\|_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)}\right)\qquad\text{for all } t>0.\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$注意，对所有 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$，正交投影 $\phi_{\sigma,\delta_\Gamma}$ 和 $\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}$ 仅当 $\sigma\subset\tau$ 和$\mathcal{U}(\sigma,\delta_\Gamma)\subset\mathcal{L}$时才非平凡。因此，我们有

$$e^{(d-\delta_\Gamma)t}\langle\phi\circ a_t,\psi\rangle_{\mathcal{L}} = \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau,\mathcal{U}(\sigma,\delta_\Gamma)\subset\mathcal{L}}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(\delta_\Gamma)\phi_{\sigma,\delta_\Gamma},\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)}+O_{\phi,\psi}(e^{-\eta' t})\qquad\text{for all } t>0 \tag{6.10}$$

其中我们任取一个正的 $\eta'<$ 最小值$\{\eta,\eta_{\delta_\Gamma}\}$。这里我们注意到，$\widehat{\ }$式（6.10）右侧的和只有有限项，因为满足 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 且 $\sigma\subset\tau$ 的 只有有限个。

另一方面，由定理 5.1，我们有

$$e^{(d-\delta_\Gamma)t}\langle\phi\circ a_t,\psi\rangle_{\mathcal{L}} = \int_{\Gamma\backslash G}\phi\,dm^{\text{BR}}\int_{\Gamma\backslash G}\overline{\psi}\,dm^{\text{BR}_*}+O_{\phi,\psi}(e^{-\eta_{\text{mix}}t})\qquad\text{for all } t>0. \tag{6.11}$$

根据式（6.10）和（6.11），我们分别定义半双线性型 Q_{rep} 于 $\mathcal{L}_\tau$ 以及 Q_{mix} 于复数域$^\infty_{\text{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau$如下：

$$\begin{aligned}Q_{\text{rep}}(\phi,\psi) &:= \sum_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}:\sigma\subset\tau,\mathcal{U}(\sigma,\delta_\Gamma)\subset\mathcal{L}}\langle\mathsf{T}_\tau^\tau\mathsf{C}_+(\delta_\Gamma)\phi_{\sigma,\delta_\Gamma},\psi_{\sigma,\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)}\qquad\text{for all }\phi,\psi\in\mathcal{L}_\tau,\\ Q_{\text{mix}}(\phi,\psi) &:= \int_{\Gamma\backslash G}\phi\,dm^{\text{BR}}\int_{\Gamma\backslash G}\overline{\psi}\,dm^{\text{BR}_*}\qquad\text{for all }\phi,\psi\in C_{\text{c}}^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau.\end{aligned}$$

接着，将式（6.10）与（6.11）等同，并取 $t\to+\infty$，得到

$$Q_{\text{rep}}(\phi,\psi)=Q_{\text{mix}}(\phi,\psi)\qquad\text{for all }\phi,\psi\in C_{\text{c}}^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau. \tag{6.12}$$

$\widehat{\ }$现在证明第（1）部分。在此情形下，$\tau=\mathbf{1}\in K$ 是平凡的 K-型，并且有如下结果：

- $\sigma=\mathbf{1}\in\widehat{M}_{\text{s-d}}$是满足 $\sigma\subset\tau$ 的唯一 M-型；
- T_τ^τ 在 $\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)_\tau$ 上根据引理 3.1的结论作用为恒等算子；
- 复数域$^+(\delta_\Gamma)$ 以非零标量复数域$^+(\tau\colon\mathbf{1};\ \delta_\Gamma)$ 作用于 $\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)_\tau$；见第4节。

因此，我们有

$$Q_{\mathrm{rep}}(\phi,\psi)=\mathsf{C}_+(\tau:\mathbf{1};\delta_\Gamma)\cdot\langle\phi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma},\psi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)}\qquad\text{for all }\phi,\psi\in\mathcal{L}_\tau.\tag{6.13}$$

注意， $\mathcal{U}$（$\mathbf{1}$，δ_Γ）包含于 $\mathcal{L}$ 中，重数为 ≥ 1。事实上，否则， Q_{rep} 将是零半双线性型，这与公式（6.12）以及 Q_{mix} 显然不是零半双线性型这一事实相矛盾。

现在，假设 $\mathcal{U}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)$ 包含于 $\mathcal{L}$ 中，且重数至少为 2。于是，我们可以找到两个正交单位向量 u、$v\in\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)_\tau$。由于 $\mathsf{C}^\infty_{\mathsf{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau$ 是 $\mathcal{L}_\tau$ 的稠密子空间，根据引理 2.13，我们可以找到序列 $\{\phi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$，它们属于 $\mathsf{C}^\infty_{\mathsf{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau$，使得 $\phi^{(n)}\to u$ 和 $\psi^{(n)}\to v$ 在 $\mathcal{L}_\tau$ 中当 $n\to\infty$时成立。特别地，

$$\big\langle\phi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma},\phi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\big\rangle_{\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)},\big\langle\psi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma},\psi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\big\rangle_{\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)}\xrightarrow{n\to\infty}1,\qquad\text{and}\qquad\big\langle\psi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma},\phi^{(n)}_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\big\rangle_{\mathcal{L}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)}\xrightarrow{n\to\infty}0.\tag{6.14}$$

当 $n\in\mathbb{N}$ 足够大时，集合 $\{\phi^{(n)},\psi^{(n)}\}$ 线性无关，因此我们可以定义由其生成的二维子空间， $V(n)$：$=\operatorname{span}\{\phi^{(n)},\psi^{(n)}\}\subset\mathsf{C}^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}_\tau$。进一步定义 $Q^{(n)}_{\mathrm{rep}}$ 和 $Q^{(n)}$ mix 分别为半双线性型 Q_{rep} 和 Q_{mix} 在 $V^{(n)}$ 上的限制。由公式 (6.13) 和 (6.14) 以及行列式的连续性可知，当 $n\in\mathbb{N}$ 足够大时，半双线性型 $Q^{(n)}_{\mathrm{rep}}$ 是非退化的，因而其秩为 2。

另一方面，半双线性型 Q_{mix} 的秩至多为 1，因为它由两个线性形式的 标量 乘积给出。因此，当 $n\in\mathbb{N}$ 足够大时，对于限制 $Q^{(n)}$ mix 也同样成立。这与以下事实矛盾：根据公式 $Q^{(n)}_{\mathrm{rep}}=Q^{(n)}$ mix，对所有足够大的 $n\in\mathbb{N}$，均有 6.12，从而完成了第 1 部分的证明。

现在我们转向第（2）部分。回忆一下，按照上文公式（ $\mathcal{L}_\tau=\mathcal{L}^M_\tau\oplus\mathcal{L}^0_\tau$ 中的记号，M可正交分解为一个由 m^{BR} -不变向量构成的子空间及其正交补m^{BR_*}。由于测度 $\Gamma\backslash G\to\Gamma\backslash G/M$ 和 M沿投影m^{BR_*} 的纤维分解由我们固定的 M上的哈尔测度给出，因此有

$$Q_{\mathrm{mix}}(\phi,\psi)=0,\qquad\text{for all }\phi,\psi\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}^0_\tau.$$

现在，$C^\infty_{\mathrm{c}}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{L}^0_\tau$由引理 $\mathcal{L}^0_\tau$2.13 及正交投影$\mathcal{L}_\tau\to\mathcal{L}^0_\tau$的连续性可知，是 $\mathcal{L}^0_\tau$的稠密子空间。此外，由于T^τ_τ 和$\mathsf{C}_+(\delta_\Gamma)$ 都是有界算子，故 $\delta_\Gamma>d/2$上的 Q_{rep} 连续。结合公式（6.12），可得

$$Q_{\mathrm{rep}}(\phi,\psi)=0\qquad\text{for all }\phi,\psi\in\mathcal{L}^0_\tau.$$

此外， $\{\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)^0_\tau\}_{\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}}$是一组互相正交子空间。特别地，我们得出，对于所有包含在 τ中的 $\sigma\in\widehat{M}_{\text{s-d}}$，算子 $\mathsf{T}^\tau_\tau\mathsf{C}_+(\delta_\Gamma)$在 $\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)^0_\tau$上为零。此外，只要 σ 非平凡，引理 6.7 还表明该算子在 $\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)^M_\tau$上为零，因此在这种情况下，它在整个 $\mathcal{L}(\sigma,\delta_\Gamma)_\tau$上均为零。进一步取特例，这对 $\sigma=\upsilon$也成立；这与我们对 K-型 τ 的选取相矛盾。由此，根据推论 4.3，证明完成。■

6.3. **定理 1.6 的证明**。现在我们利用关于强谱隙的已建立定理 1.6 来证明定理 1.3 。我们需要 [EO21，定理 4。8]这是 Edwards–Oh 的定理，由他们的另一个定理推导而来，该定理此前已作为定理 3.4 引用。

定理 6.9 ([EO21，定理 4。8])。存在 $m>d(d+1)/2$，使得对于所有 $\sigma\in M_{\text{s-d}}$ 和 $s\in\mathcal{I}_\sigma$，如果准互补级数 $\mathcal{U}(\sigma,\ s)$ 包含非零的 M-不变向量，那么对于所有 $u,\ v\in\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)$和 $t\geq0$，我们有

$$e^{(d-\delta_\Gamma)t}\langle\pi_{\sigma,s}(a_t)u,v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}=\sum_{\tau_1,\tau_2\in\widehat{K}}\langle\mathsf{T}^{\tau_2}_{\tau_1}\mathsf{C}_+(s)\mathsf{P}_{\tau_1}u,\mathsf{P}_{\tau_2}v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}+O_s\big(e^{-\eta_s t}\|u\|_{\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)}\|v\|_{\mathcal{S}^m_K(\Gamma\backslash G)}\big).$$

这里，求和式

$$\sum_{\tau_1,\tau_2\in\widehat{K}}\langle\mathsf{T}^{\tau_2}_{\tau_1}\mathsf{C}_+(s)\mathsf{P}_{\tau_1}u,\mathsf{P}_{\tau_2}v\rangle_{\mathcal{U}(\sigma,s)}$$

绝对收敛。

注记 6.10。 尽管最初未被纳入， [EO21中的定理 48] （Edwards–Oh）也适用于互补级数的端 $\widehat{\ }$ （ $\mathcal{U}$）σ, s对于 $\sigma \in M_{\text{s-d}}$ 以及 $s = d - \ell$（σ） $\in \partial\mathcal{I}_\sigma$ 这要归功于推论 3.6证明中的提升论证。

定理 *1.6* 的证明。 令 $\kappa_0 :=$ 的最小值$\{\kappa_\Gamma, 1\} > 0$ 如定理中所述，其中 κ_Γ 是 Γ 在定义 1.5 中给出的强谱隙参数。令

$$s_1 := \delta_\Gamma - \kappa_0.$$

我们采用与命题 6.8 证明中相同的分解，只是将 $s_\star$ 替换为最优参数s_1。特别地，如命题 6.8 的证明中所示，我们有如下分解：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{temp}} \oplus \mathcal{L}(s_1) \oplus \mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma).$$

记作 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{\text{temp}} \oplus \mathcal{L}(s_1)$。令 ϕ， $\psi \in \mathcal{S}_K^m(\Gamma\backslash G)$，并将它们的正交分解记为

$$\phi = \phi_1 + \phi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma} \in \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma), \qquad \psi = \psi_1 + \psi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma} \in \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma).$$

与式（6.9）完全相同，应用命题 3.7 于 $\mathcal{L}_1$，可得

$$|\langle \phi_1 \circ a_t, \psi_1 \rangle_{\mathcal{L}}| \ll_{\phi_1,\psi_1} (1+t)e^{-(d-s_1)t} \qquad \text{for all } t > 0.$$

接下来需要处理正交直和项 $\mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma)$。显然，由于 $\mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma)$ 是球表示，它包含非零的 M-不变向量。因此，我们可以将定理 6.9 应用于 $\mathcal{U}(\mathbf{1}, \delta_\Gamma)$，从而对所有 $t > 0$

$$e^{(d-\delta_\Gamma)t}\langle \pi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}(a_t)\phi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}, \psi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{U}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)} = \sum_{\tau_1,\tau_2 \in \widehat{K}} \langle \mathsf{T}_{\tau_1}^{\tau_2}\mathsf{C}_+(s)\mathsf{P}_{\tau_1}\phi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}, \mathsf{P}_{\tau_2}\psi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\rangle_{\mathcal{U}(\mathbf{1},\delta_\Gamma)} + O\big(e^{-\eta_{\delta_\Gamma}t}\|\phi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\|_{\mathcal{S}_K^m(\Gamma\backslash G)}\|\psi_{\mathbf{1},\delta_\Gamma}\|_{\mathcal{S}_K^m(\Gamma\backslash G)}\big),$$

其中第一项中的求和绝对收敛。正如命题 6.8 的证明中那样，取 $t \to +\infty$，并应用定理 5.1，我们看到，第一项中的求和实际上等于 $\int_{\Gamma\backslash G}\phi\, dm^{\text{BR}} \int_{\Gamma\backslash G}\psi\, dm^{\text{BR}_*}$。

因此，结合这两个估计，我们得到对于每个 $\varepsilon > 0$，衰减率为 $\min\{d - s_1, \eta_{\delta_\Gamma}\} - \varepsilon$。注意到我们有平凡不等式 $d - s_1 \geq \delta_\Gamma - s_1 = \kappa_0$。根据定义，我们还有 $\eta_{\delta_\Gamma} = \min\{2\delta_\Gamma - d, 1\}$。进一步注意到，根据 κ_Γ 的定义，有 $s_1 \geq d/2$ ；参见定义 1.5。结合 $\delta_\Gamma > d/2$，我们有 $2\delta_\Gamma - d > \delta_\Gamma - d/2 \geq \delta_\Gamma - s_1 = \kappa_0$，从而 $\eta_{\delta_\Gamma} \geq \kappa_0$。这表明 $\min\{d - s_1, \eta_{\delta_\Gamma}\} \geq \kappa_0$，并完成证明。 ■

参考文献

[AG13] Artur Avila 和 Sébastien Gouëzel，模空间中代数测度的拉普拉斯算子小特征值，以及 Teichmüller 流的混合性质，《数学年刊》(2 **178** 2013 2, 385 442 4) ( )，第 – 期。[06] AGY Artur Avila、Sébastien Gouëzel 和 Jean-Christophe Yoccoz，Teichmüller 流的指数混合，《高等科学研究所数学出版物》(2006 104, 143 211 4)，第 – 期。CHH M. Cowling、U. Haagerup 和 R. Ho [88] we，近似矩阵系数，《纯粹与应用数学杂志》387 (1988)，97–110。14[DG16] Semyon Dyatlov 和 Colin Guillarmou，开放系统的 Pollicott–Ruelle 共振，《Henri Poincaré 年刊》17 (2016)，第 11, 3089 3146 4 – 期。DG 后记：Axiom A 流的动力学ζ函数，《美国数学会通报》(N.S.) 55 3，337 2018 342 4 ( )，第 – 期。[Dix77] Jacques Dixmier， C^*-代数，North-Holland 数学丛书，第 Vol. 15 卷，North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977年，由 Francis Jellett 从法文译出。5[EKM99] Masaaki Eguchi、Shin Koizumi 和 Masaichi Mamiuda，半单李群 Spin(n, 1)、SU(n, 1) 的 Harish-Chandra C-函数表达式，《日本数学会杂志》51 (1999)，第 4 期，955–985。3, 17[ELO22] Sam Edwards、Minju Lee 和 Hee Oh，Anosov 群的共形测度唯一性与局部混合，《密歇根数学杂志》72 (2022)，243–259。19[Els73a] Jürgen Elstrodt，双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 I，《数学年刊》 **203** 1973 295 300 1 ( )，– 。Els b 双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 II，《数学杂志》 [73] **132** 1973 99 134 1 ( )，– 。Els 双曲平面上自守形式特征值问题的预解式 III，《数学年刊》208 (1974)，99–132。1[EO21] Sam Edwards 和 Hee Oh，几何有限双曲流形上的谱隙与指数混合，《杜克数学杂志》 [74] **170** 2021 15, 3417 3458 2, 3, 11, 12, 17, 25, 26 ( )，第 – 期。Fol Gerald B. Folland，《实分析》，第 2 版，《纯粹与应用数学》（纽约），John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1999，现代技巧及其应用，Wiley-Interscience 出版物。19 [99]

[GV88] Ramesh Gangolli 和 V. S. Varadarajan，《实约化群上球函数的调和分析》，数学及其边界领域成果 [数学及相关领域成果], 第 101 卷，施普林格出版社，柏林，1988。14

[58] **80** 1958 241 310 12, 14 HC [00] 83, Harish-Chandra，半单李群上的球函数 I，《美国数学杂志》 ( )，– 。Hel Sigurdur Helgason，《群与几何分析》，数学调查与专著，第 American Math- ematical Society 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000，积分几何、不变微分算子与球函数，1984 14 原版修订重印本。Hir Takeshi Hirai，关于 $n-$ 阶洛伦兹群的不可约表示，《日本 [62] 学士院纪要》38 (1962)，258–262。9[Kel11] Dubi Kelmer，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^d$ 的紧商空间同余覆盖的一致强谱隙，《国际数学研究通知》(2011 5, 1135 1164 2)，第 – 期。Kha a Osama Khalil，通过加法组合学实现的指数混合，arXiv: [23] 2305 00527 2023 1 53, 19 。( )，– 预印本。[23] ———, 4, 19 Kha b 几何有限局部对称空间上的混合、共振与谱隙，预印本 (2023)，1–41，预印本。[96] Kna Anthony W. Knapp，《超越导论的李群》，数学进展，第 140 卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1996。10[Kna01] ，《半单群表示论》，普林斯顿数学经典，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001，基于实例的概述，1986年原版重印本。8, 9, 10, 14[KO21] Dubi Kelmer 和 Hee Oh，几何有限双曲流形上测地流的收缩目标，《现代动力系统杂志》 **17** 2021 401 434 3, 19 ( )，– 。KS R. A. Kunze 和 E. M. Stein，一致有界表示 III：半单群上主系列的交织算子，[67] 《美国数学杂志》 **89** 1967 385 442 9 ( )，– 。KS A. W. Knapp 和 E. M. Stein，半单群的交织算子，[71] 《数学年刊》(2) 93 (1971)，489–578。8, 9[KS09] Dubi Kelmer 和 Peter Sarnak，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的乘积之紧商空间的强谱隙，《欧洲数学会杂志》(JEMS) **11** 2009 2, 283 313 2 ( )，第 – 期。KZ A. W. Knapp 和 Gregg Zuckerman，[77] 半单李群表示的分类定理，《非交换调和分析》（1976年马赛—吕米尼讨论会论文集），《数学讲义》，第 Vol. 587 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1977， 138 159 9 第 – 页。Lan R. P. Langlands，关于实代数群不可约表示的分类，《半单李群的表示论与调和分析》，《数学调查专著》，第 31 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989，第 101–170 页。9[LP82] Peter D. Lax 和 Ralph S. Phillips，欧几里得空间与非欧几里得空间中格点的渐近分布，《泛函分析杂志》46 (1982)，第 3 期，280–350。1[LP23] Jialun Li 和 Wenyu Pan，带尖点的几何有限双曲流形上测地流的指数混合，《数学发明》231 (2023)，第 3 期，931–1021。19[LPS25] Jialun Li、Wenyu Pan 和 Pratyush Sarkar，几何有限双曲流形上标架流的指数混合，《欧洲数学会杂志》(JEMS) (2025 1 62, 3, 4, 18, 19)，– 已接收。MO Amir Mohammadi 和 Hee [15] Oh，几何有限群轨道的矩阵系数、计数与素数，《欧洲数学会杂志》(JEMS) **17** 2015 4, 837 897 2, 3, 19 ( )，第 – 期。Oh Hee Oh，通过圆的视角看动力系统与刚性，预 [26] 印本，arXiv: 2510 10771 2 。OS Hee Oh 和 [13] Nimish A. Shah，几何有限双曲群轨道的等分布与计数，《美国数学会杂志》26 (2013)，第 2 期，511–562。19[OW16] Hee Oh 和 Dale Winter，$\mathrm{SL}_2\,\mathbb{Z}$ **29** 2016 4, 1069 1115 2, 3 ( ) 的凸余紧同余子群的一致指数混 [76] 合与无共振区域，《美国数学会杂志》 ( )，第 – 期。Pat S. J. Patterson，福克斯群的极限集，《数学学报》 ( )，第 **136** 1976 3 4, 241 273 1 — 期。Rob Thomas [03] Roblin，《负曲率下的遍历性与等分布》，《法国数学会回忆录》(N.S.) (2003)，第 95 期，vi+96。3, 19[Sar22] Pratyush Sarkar，Selberg 关于 $\mathrm{SO}(n,1)$ 的凸余紧薄子群的 3/16 定理之推广，《数学进展》409 (2022)，论文编号 108610，58 页。2[Sha00] Yehuda Shalom，刚性、半单群的酉表示，以及具有秩一变换群的流形的基本群，《数学年刊》(2 **152** 2000 1, 113 182 14, 21) ( )，第 – 期。SS Elias M. Stein 和 [03] Rami Shakarchi，《复分析》，普林斯顿分析讲义，第 2 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2003 20 。Sul Dennis Sullivan，双曲运动离散群在无穷远处的密度，《高等科学研究所数学出版物》 [79] (1979)，第 50 期，171–202。1[SW21] Pratyush Sarkar 和 Dale Winter，凸余紧双曲流形上标架流的指数混合，《综合数学》 **157** 2021 12, 2585 2634 3, 4, 18, 19 ( )，第 – 期。Thi Ernest Thieleker，关于洛伦兹群的准单不可约 [73] 表示，《美国数学会汇刊》 **179** 1973 465 505 8, 10 ( )，– 。Wal H. S. Wall，《连分数解析理论》，D. Van Nostrand 公司，[48] 纽约，1948 20 。Wal Nolan [92] R. Wallach，《实约化群 II》，《纯粹与应用数学》，第 -II 卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1992。5, 6[War72a] Garth Warner，《半单李群上的调和分析 I》，《数学及其边界领域成果》，第 188 卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1972。10

[War72b] ———, 半单李群上的调和分析。*II*，数学科学基础丛书，第 189, 1972 5 施普林格出版社，纽约—海德堡，。 Win Dale [15] Winter，秩一局部对称空间上标架流的混合与测度分类，《以色列数学杂志》 **210** (2015)，第 **1** 期，467–507。 21波士顿学院数学系，美国马萨诸塞州栗山 02467电子邮件地址： dubi.kelmer@bc.edu伊利诺伊大学芝加哥分校数学、统计学与计算机科学系，美国伊利诺伊州芝加哥 60607电子邮件地址： okhalil@uic.edu

苏黎世联邦理工学院数学系，瑞士苏黎世 8092电子邮件地址： psarkar@ethz.ch