arXiv:2603.20598v1 [math.CO] 21 Mar 2026

非平面二叉森林上的霍普夫代数

Elizabeth Xiao

Abstract. 我们通过定义一种余乘，为由非平面有根二叉树生成的分次多项式代数赋予霍普夫代数结构；该余乘不允许切割任意给定顶点的两个子节点，从而细化了 Connes-Kreimer 的可容许割概念。我们证明，这种余乘中的各项还可以通过叶子子集获得另一种组合解释，这有助于构造涉及该霍普夫代数的霍普夫代数态射，并建立它与 Bruned 用于随机过程重整化的一个霍普夫代数之间的联系。最后，我们证明，该霍普夫代数与一个李代数的包络代数对偶；这个李代数源自一种基于二叉树边插入的前李算子。

人们普遍认为，每种组合对象都有一种与之相关的唯一自然分解，并且这种分解保留某种基数或分次概念。我们提出一种余乘运算，并论证它定义了非平面（或抽象）二叉森林上的一种自然分解。这些森林是 Marcolli、Chomsky 和 Berwick 数学模型中 Merge 的基本对象；在该模型中，森林表示句法对象的工作空间 [10]。

带标记叶子的非平面二叉树在文献中也称为系统发育树 [1]。它们用于表示一种交换但不结合的二元运算。

本文结构如下。第1节中，我们介绍有根树的向量空间，以及将其对称扩张为森林向量空间的过程。这些向量空间将作为本文所有代数的底层向量空间。我们回顾霍普夫代数和前李代数的定义，并在此过程中确立本文的记号。我们始终以重整化的 Connes-Kreimer 霍普夫代数为例。

第 2 节中，我们根据二叉可容许割（不允许切割同一顶点的两个子节点）定义二叉森林上的霍普夫代数结构。第3节中，我们基于在边上插入来定义二叉树上的前李算子。根据 Poincar´e-Birkhoff-Witt 定理，这个前李代数的包络代数本身也是一个霍普夫代数，且它与第 2 节中所述的霍普夫代数互为对偶。对偶性的概念基于第4节中定义的配对；我们通过考察切割和插入的重数来证明对偶性。

最后，在第5节中，我们探讨对偶配对的一些进一步结果，并利用它计算单顶点树的前李指数的系数。

1. Preliminaries

1.1. 有根树。 我们假设图是抽象的，也就是说，我们不固定平面嵌入。若任意一对顶点之间都存在一条路径，则称图是连通的。圈是一条不重复经过任何边、且首尾顶点相同的路径。

树是没有环的连通图。非平面有根树是一个带有指定根顶点的抽象树图。我们绘制所有树时，都会将根置于顶部。

选择一个根会在树上诱导出一种有向图结构；所有边的方向都将背离根。

森林是由树作为连通分量构成的图。此后，我们将仅用“树”一词指非平面有根树；同样，“森林”指由非平面有根树组成的森林。我们可以将森林视为树的多重集。

如果 F 是森林，我们用 $V(F)$ 表示 F 的顶点集；用 $E(F)$ 表示边集；用 $L(F) \subseteq V(F)$ 表示叶子的子集，即度为一的顶点。

树的全部或部分顶点和边上可以带有标记。我们考察的大多数树只会在叶子上带有标记；其他标记仅用于阐释示例并辅助某些证明。

给定一个顶点 $v \in V(F)$，紧邻其上方的顶点称为它的 *父节点*，而其下方的顶点称为它的 *子节点*。其下方的任何顶点都称为它的 *后代* 。如果$w \in V(F)$是 v的子节点，我们也可以将从 w 开始的整个 *子树* 称为 v的子节点。

设 $\mathcal{T}$ 为某个根非平面树族。设 k 为特征为零的域。我们将由基 $\mathcal{T}$ 张成的、定义在 k 上的向量空间记作 $k\{\mathcal{T}\}$ 。我们将 $k[\mathcal{T}]$ 与 $\mathrm{Sym}(k\{\mathcal{T}\})$ 等同，后者是树的多项式代数 k，作为向量空间由其分支均属于 $\mathcal{T}$ 的森林张成。

1.2. 霍普夫代数。 关于代数、余代数和霍普夫代数的详尽介绍，请参见 [3] ；本节概述主要术语。设 k 为特征为零的域。定义在 k 上的双代数 $(\mathcal{B},\ m,\ \eta,\ \Delta,\ \varepsilon)$ 由以下数据组成：

- 底层的 k-向量空间 $\mathcal{B}$；
- 乘积 $m\colon \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，其单位元为 $\eta\colon k\to\mathcal{B}$（含幺代数结构）；
- 余乘 $\Delta\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$，其余单位为 $\varepsilon\colon \mathcal{B}\to k$（余幺余代数结构）

使得 Δ 和 ε 是代数同态。我们常用*Sweedler* 记号将元素 $x\in\mathcal{B}$ 的余乘表示为如下求和：

$$\Delta(x)=\sum_{(x)} x'\otimes x''.$$

由于假设单位元和余单位存在，我们可以将 $\mathcal{B}$ 写成三元组 $\mathcal{B}=(\mathcal{B},\ m,\ \Delta)$。我们通常还假设 m 是结合的，且 Δ 是余结合的。在不会引起混淆时，我们通常将 $m(x,\ y)$写作 xy。

如果其底层向量空间是分次的，且 $(\mathcal{B},\ m)$ 是分次代数，$(\mathcal{B},\ \Delta)$ 是分次余代数，我们就称 $\mathcal{B}$ 是分次双代数，其含义是：

- 若 $x\in\mathcal{B}_n$ 且 $y\in\mathcal{B}_m$，则 $m(x,\ y)\in\mathcal{B}_{n+m}$；
- 若 $x\in\mathcal{B}_n$，则 $\Delta(x)\in\bigoplus_{k=0}^{n}\mathcal{B}_k\otimes\mathcal{B}_{n-k}$。

分次双代数 $\mathcal{B}$ 在满足 $\mathcal{B}_0\cong k$ 时称为*连通的*。若对于所有 n，$\dim\mathcal{B}_n$ 均有限，则称其*局部有限*。霍普夫代数 $\mathcal{H}$ 是带有反极映射 $S\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 的双代数，满足

$$\eta(\varepsilon(x))=\sum_{(x)} S(x')x''=\sum_{(x)} x'S(x'')$$

对所有 $x\in\mathcal{H}$ 均成立。若一个双代数存在反极，则该反极唯一。反极是反同态：对于 $x,\ y\in\mathcal{H}$，

$$S(xy)=S(y)S(x).$$

如果 $\mathcal{H}$ 是交换的，那么 S 是一个同态。

如果 $\mathcal{B}$ 是分次连通双代数，那么它自动具有一个通过递归方式定义的反 antipode： $S(1) = 1$ ，并且

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} S(x')x''$$

对于 $x \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$。因此，任何分次连通双代数自动都是分次霍普夫代数。

1.3. **Connes-Kreimer 霍普夫代数**。 令 $\mathcal{T}$ 为所有无标号非平面根树的集合。Connes-Kreimer 霍普夫代数 $\mathcal{H}_{CK}$ 定义在向量空间 $k[\mathcal{T}]$上。其乘积由森林的不交并定义，这正是$k[\mathcal{T}]$上的多项式乘积。其余乘 Δ_{CK} 由树上的可容许割 定义，并通过乘法性扩展到森林。

T 的可容许割是一个子集 $C \subseteq E(T)$，满足从根到任意叶子的路径上至多出现一条 $e \in C$ 。考虑删除 T中属于 C的所有边后得到的森林 F 。这会产生一对 $P^C(T) \otimes R^C(T)$，其中 $R^C(T)$是F中包含 T的根的唯一一棵树，而 $P^C(T)$是由切割边下方的树组成的森林。空切割 $C = \varnothing$ 是可容许的，对应于一对 $1 \otimes T$。 T 中所有可容许割的集合称为 $\mathrm{Adm}(T)$。除了所有可容许割之外，还有一个全切割，它贡献项 $T \otimes 1$。

Connes-Kreimer 余乘以所有此类切割为索引：

$$\Delta_{CK}(T) = T \otimes 1 + \sum_{C \in \mathrm{Adm}(T)} P^C(T) \otimes R^C(T)$$

$\mathcal{H}_{CK}$ 按森林中的顶点数分次。相对于这一分次，它是连通的。

例 1.1. 令 $T =$  。则

$$\Delta_{CK}(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T + \bullet \otimes$$  $$+ \bullet \otimes$$  $$+$$  $$\otimes$$  $$x + \bullet\bullet \otimes$$  $$+ \bullet$$  $$\otimes \bullet.$$

Connes-Kreimer 霍普夫代数于 [4] 被引入，用于描述量子场论中的重整化结构。$\mathcal{H}_{CK}$ 的入门介绍见于 [5], [8],[15]。

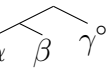
注 1.1. 当我们将讨论限定于满二叉树时，图示中将不再明确绘出顶点。不过，我们仍将使用 •表示无标记的单顶点树。带标记的单顶点树则用其标记表示。

1.4. **二叉树的 Connes-Kreimer 变体**。 在 [10], 中，Marcolli、Chomsky 和 Berwick 为二叉森林提出了三种类似 Connes-Kreimer 的余乘。每种余乘都以 Connes-Kreimer 意义下的可容许割为索引，左侧通道中的修剪后森林对三者而言相同，但每种余乘在右侧通道的余项中采用了不同的商概念。它们分别是

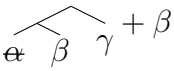
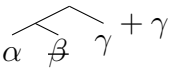
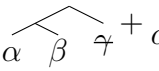
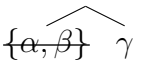
(1) Δ^c，收缩余乘，其中修剪后森林中的每棵子树都收缩为一个顶点，并带有原子树的迹。(2) Δ^ρ，Connes-Kreimer 余乘 Δ_{CK} 对二叉森林的限制。

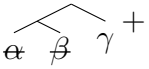
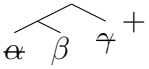
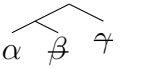
(3) Δ^d，删除余乘法，其中 Δ^ρ 中的商被投影到通过边收缩得到的唯一极大二叉树。

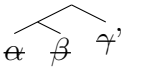
注意， Δ^c 和 Δ^d 对二叉树封闭，而 Δ^ρ 则不然，因为切割后的余项通常不是二叉的。

例 1.2。 我们将 Δ^c 和 Δ^d 应用于$T =$  。

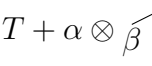
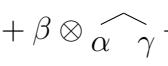
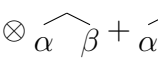
收缩余乘为

$$\Delta^c(T) = T\otimes 1 + 1\otimes T + \alpha\otimes$$  $$+\beta\otimes$$  $$+\gamma\otimes$$  $$+\alpha\ \beta\otimes$$ 

$$+\alpha\sqcup\beta\otimes$$  $$+\alpha\sqcup\gamma\otimes$$  $$+\beta\sqcup\gamma\otimes$$ 

$$+\alpha\sqcup\beta\sqcup\gamma\otimes$$  ,

而删除余乘法给出

$$\Delta^d(T) = T\otimes 1 + 1\otimes T + \alpha\otimes$$  $$+\beta\otimes$$  $$+\gamma\otimes$$  $$+$$  $$\otimes\gamma$$

$$+\alpha\sqcup\beta\otimes\gamma+\alpha\sqcup\gamma\otimes\beta+\beta\sqcup\gamma\otimes\alpha+\alpha\sqcup\beta\sqcup\gamma\otimes 1.$$

1.4.1. 的问题。 收缩余乘是余结合的：事实上，它是将费曼图的 Connes-Kreimer 霍普夫代数限制到二叉树上所得的余乘。此余乘保留了 $\mathcal{H}_{bin}$ 按边数定义的分次。该分次的奇数度分量为零，因为所有满二叉树的边数都是偶数。

然而，所得的分次代数并不连通，因为任意单顶点树的度都是 0。此外，该分次代数作为分次向量空间甚至不是局部有限的，因为可以将任意多个单顶点树乘到一个度为 $2k$ 的现有树上，从而得到无限多个线性无关的度为 $2k$的元素。一种可能的解决办法是用由 $1-\alpha$生成的理想对该代数取商，其中 α遍历所有单顶点树，这样就得到一个连通双代数。

局部有限性的另一个障碍是，每个商都带有一个迹，这意味着通过对较大的树取余乘，可以生成无限多个叶子标签。一个可能的解决办法是为每棵树配备一个头函数，并使用头函数的值而非迹。 [10]的第1.13.3节和第3.4节介绍了头函数。

1.4.2. 关于 Δ^d 的问题。删除余乘法不是余结合的：尽管（$\Delta^d\otimes\mathbb{1}$）$\circ\Delta^d$和（$\mathbb{1}\otimes\Delta^d$）$\circ\Delta^d$ 枚举了相同的项，但它们出现的重数可能不同。

关于这些余乘（包括其语言学解释）的深入讨论，见 [10]的第1.2节。

1.5. **Pre-Lie代数**。设 $\mathcal{L}$ 为一个向量空间。双线性乘积 $\triangleleft$： $\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 称为一个（右）前李算子，如果它满足（右）*Vinberg* 恒等式

$$(x\triangleleft y)\triangleleft z - x\triangleleft(y\triangleleft z) = (x\triangleleft z)\triangleleft y - x\triangleleft(z\triangleleft y),$$

使 $(\mathcal{L},\ \triangleleft)$ 成为一个（右）前李代数。表达式 $(x\triangleleft y)\triangleleft z - x\triangleleft(y\triangleleft z)$ 是相对于 $\triangleleft$的结合子$A(x,\ y,\ z)$；如果 $\triangleleft$ 是结合的，那么 $A(x,\ y,\ z) = 0$ 均成立。Vinberg

恒等式断言，交换第二个和第三个参数后，结合子保持不变；也就是说，对于所有 x， y， $z \in \mathcal{L}$，

$$A(x, y, z) = A(x, z, y).$$

前李算子诱导出的李括号定义如下：

$$[x, y] := x \triangleleft y - y \triangleleft z,$$

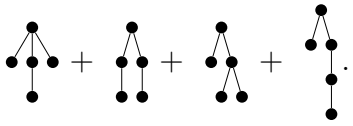
它自动满足反对称性和雅可比恒等式，从而使 $\mathcal{L}$ 成为李代数。然而，并非所有李代数都由前李代数产生。 [3] 的第6章全面阐述了前李代数。

1.6. 顶点插入前李代数。 按照第1.3节中的 $\mathcal{T}$，我们来定义树上的插入运算。若 T， $S \in \mathcal{T}$和 $v \in V(T)$，则将 v 与 S的根连接起来形成一条边，所得结果定义为 $T \triangleleft_v S$。那么， $\triangleleft$ 就是所有这类顶点插入的总和

$$T \triangleleft S = \sum_{v \in V(T)} T \triangleleft_v S.$$

通过将 $\triangleleft$ 扩展到 $k\{\mathcal{T}\}$，我们赋予 $k\{\mathcal{T}\}$ 前李代数结构。

例 1.3。 设 $T =$ 和 $S =$ 。那么

$T \triangleleft S =$ 

存在一种将 $\triangleleft$ 扩展为 $k[\mathcal{T}]$上的非交换乘积 $*$ 的方法，以及一个由单项式的非交错拆分给出的余交换余乘法X；这是李代数$(k\{\mathcal{T}\}, \triangleleft)$的包络代数 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$的一种表示，该李代数由前李代数诱导而来。根据Poincar´é-Birkhoff-Witt定理， $\mathcal{U}(\mathcal{L})$总是一个霍普夫代数。我们将 $= (k[\mathcal{T}], *, \mathrm{X})$称为树上的Grossman-Larson霍普夫代数，记作$\mathcal{H}_{GL} = \mathcal{U}(\mathcal{L})$。

此处不再描述 $*$ 的扩展；它是一般 Guin-Oudom 构造的结果，该构造见第 3 节。

2. The Hopf algebra of subsets of leaves

现在，我们将 $\mathcal{T}$限制为二叉有根非平面树的集合，因此 $k[\mathcal{T}]$ 由二叉森林张成一个向量空间。我们还将用 $\mathcal{T}_n$ 表示具有 n个叶子的二叉树集合。本节将定义一个作用于 $k[\mathcal{T}]$ 上的霍普夫代数，并将其记为 $\mathcal{H} = (\mathcal{H},\ \sqcup,\ \Delta)$。

注记 2.1. 如果 $\mathcal{T}$ 中的树是无标记的，那么有 $|\mathcal{T}_n| = W_n$ 种不同的二叉树，其叶子数为 n ，其中 W_n 是第 n 个韦德伯恩-埃瑟林顿数（OEIS A001190 [9]）。从 W_1 开始， W_n 的前几个值为

$$1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, \ldots$$

对应于

$\mathcal{T}_1 = \{\bullet\}$, $\mathcal{T}_2 = \{$  $\}$, $\mathcal{T}_3 = \{$  $\}$, $\mathcal{T}_4 = \{$  $\}$,

$\mathcal{T}_5 = \{$  $\}, \dots$

$\mathcal{H}_n$ 由具有 n 个叶子的森林张成。我们将 $\mathcal{H}_0$ 与 k 视为相同，因为它由唯一的空树生成（这意味着 $\mathcal{H}$ 是连通的）。从 $n = 1$ 开始，$\dim \mathcal{H}_n$ 的取值为（OEIS A003214 [9]）：

$$1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 37, \dots$$

乘积 $\sqcup$ 继承自多项式代数；此记号表示它产生森林的不交并。生成 $\mathcal{H}$ 的森林按叶子的数量分次，且余乘与此分次相容。

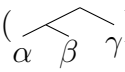
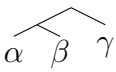
在 $\mathcal{H}$ 上的余乘 Δ 按照 Connes-Kreimer 的意义，对所有不切断任何给定顶点的两个子节点的可容许切割进行索引，此外还包括唯一的全切割。第一类切割称为二元可容许切割。

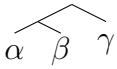
定义 2.1。 T 的二元可容许割 是边的一个子集 $C \subseteq E(T)$，满足

(1) C 中没有一对边出现在同一条从根到叶的路径上，(2) C 中没有两条边具有相同的父顶点。

反之， E（T）的任意子集只要满足这两个性质，就定义了一个二元可容许割。

令 Δ_{CK} 表示 Connes-Kreimer 余乘。设 T 为一棵二叉有根非平面树：我们设想其所有原始叶子都带有标记（或有某种指示表明它们原本就存在），而在 $\Delta_{CK}(T)$的第二通道中出现的任何新叶子均无标记（或有某种指示表明它们是新出现的，即由切割产生）。

$\Delta($  $) = 1 \otimes$  $+ \alpha \otimes$$+ \beta \otimes$$+ \gamma \otimes$

$+$$\otimes \gamma + \alpha \sqcup \gamma \otimes \beta + \beta \sqcup \gamma \otimes \alpha +$  $\otimes 1$

依次而言，这些项分别对应于子集 $\varnothing$、$\{\alpha\}$、$\{\beta\}$、$\{\gamma\}$、$\{\alpha, \beta\}$、$\{\alpha, \gamma\}$和 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$。

令 Φ 为一个修剪映射，它将所有带有新叶子的树映射为 0；令$\Pi_{d、\rho}$ 为投影映射，将至多二叉树映射为通过边收缩得到的唯一满二叉树。若一棵至少含有两个顶点的树的根是新叶子，则$\Pi_{d、\rho}$会收缩该根，此时根标记将丢失。特别地，当$\Pi_{d、\rho}$ 作用于一条至少含有一条边的路径时，结果是一个携带底部叶顶点标记的单个顶点。这确保了随后由 Φ删除正确的项。

那么 Δ 是一个有序划分

$$\Delta = (\mathbb{1} \otimes \Phi) \circ (\mathbb{1} \otimes \Pi_{d,\rho}) \circ \Delta_{CK}.$$

*Ex*宽 2.1。 我们将展示一个这样的有序划分序列的例子。Le t

$$T = \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma}$$

Connes-Kreimer 余乘产生的新出现的叶子用 $*$ 标记。

$$\Delta^{CK}(T) = 1 \otimes \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} + \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} \otimes 1 + \alpha \otimes \begin{array}{c} * \\ | \\ \beta\ \gamma \end{array} + \beta \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \gamma \end{array} + \gamma \otimes \begin{array}{c} * \\ | \\ \alpha\ \beta \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} \otimes * + \alpha \sqcup \beta \otimes \begin{array}{c} \frown \\ *\ \ \gamma \end{array} + \alpha \sqcup \gamma \otimes * + \beta \sqcup \gamma \otimes *$$

$$\begin{array}{c|} \\ \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{c|} \\ \cdot \\ \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c|} \\ \cdot \\ \alpha \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} \sqcup \gamma \otimes * + \alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma \otimes *$$

$$\begin{array}{c|} \\ * \end{array}$$

Upon 将 $\Pi_{d,\ \rho}$ 应用于前一个表达式的第二通道，我们得到 in

$$(\mathbb{1} \otimes \Pi_{d,\rho})(\Delta^{CK}(T)) = 1 \otimes \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} + \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} \otimes 1 + \alpha \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \beta\ \ \gamma \end{array} + \beta \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \gamma \end{array} + \gamma \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} \otimes \gamma + \alpha \sqcup \beta \otimes \begin{array}{c} \frown \\ *\ \ \gamma \end{array} + \alpha \sqcup \gamma \otimes \beta + \beta \sqcup \gamma \otimes \alpha$$

$$+ \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} \sqcup \gamma \otimes * + \alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma \otimes *.$$

特别注意 $\Pi_{d,\ \rho}$ 对最后两项的作用。最后， Φ 删除第二通道中仍有用 $*$ 标记的新出现叶子的所有树，因此

$$(\mathbb{1} \otimes \Phi)((\mathbb{1} \otimes \Pi_{d,\rho})(\Delta^{CK}(T))) = 1 \otimes \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} + \overset{\frown}{\alpha\ \beta\ \gamma} \otimes 1 + \alpha \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \beta\ \ \gamma \end{array} + \beta \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \gamma \end{array}$$

$$+ \gamma \otimes \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} + \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array} \otimes \gamma + \alpha \sqcup \gamma \otimes \beta + \beta \sqcup \gamma \otimes \alpha$$

$$= \Delta(T).$$

命题 2.1。 $\Delta(T)$ 的项与 T 的叶子子集构成双射。

证明。 当我们谈到 $L(T)$—— T 的叶子集合时，可以默认这些叶子带有不同标签，并将每片叶子与其标签对应起来。严格来说，如果 T 的叶子中存在重复标签，我们仍假设这些叶子是不同的对象，即使它们带有相同的标签。

对于只有一片叶子的树，唯一的切割是空切割和全切割，它们分别对应空集和包含唯一叶子的单元素子集。

在继续进行归纳步骤之前，用樱桃树 $T = \begin{array}{c} \frown \\ \alpha\ \ \beta \end{array}$ 的例子来说明会很有帮助。 T 的唯一非平凡切割是切割 α 或 β。不能同时切割两片叶子，因为那样就必须切断根的两个子节点。因此

$$\Delta(T) = 1 \otimes T + T \otimes 1 + \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha,$$

其中各项分别对应于 $\varnothing, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}$ 和 $\{\beta\}$。

现在设 T 是一棵有 $n \geq 3$ 个叶子的树，并假设结论对所有叶子数少于 n 的树都成立。设 T_ℓ 和 T_r 分别是 T 的左子树和右子树。由于 T_ℓ和 T_r 的叶子数都严格少于 G，因此可以对它们应用归纳假设。

考虑对 T 的一次切割。由于不允许同时切割根的两个子节点，全切割唯一对应于 $L(T) = L(T_\ell) \sqcup L(T_r)$。对 T 的任何其他切割，都唯一对应于对 T_ℓ 和 T_r 的一次切割（其中任一个都可以为空），反之亦然。同样，$L(T)$ 的任意子集都是 $L(T_\ell)$ 的一个子集与 $L(T_r)$ 的一个子集的不交并。□

定理 2.1。 Δ 是余结合的。

证明。考虑从根到叶子的同一路径上的两次连续切割。如果这两次切割对应于原树上不相邻的边，那么无论先切割哪条边，另一条边都保持不变，仍可用于第二次切割。由于切割的顺序无关紧要，同一项会同时出现在 $(\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta$ 和 $(\mathbb{1} \otimes \Delta) \circ \Delta$中。

现在考虑（$\Delta \otimes \mathbb{1}$）$\circ \Delta$ 中的一个项，该项由两次切割组成，其中第二次切割紧接着发生在第一次切割所得子树的根下方。我们声称，同一个项也出现在（$\mathbb{1} \otimes \Delta$）$\circ \Delta$中。在图示中，待切割的两条边在原树中分别标记为 1 和 2。

假设先切割底部的边，如左图所示：在商树中，它的兄弟边与其父节点变成同一条边。切割这条合并后的边所得的商，与一开始就切割顶部边所得的商相同。

我们的下一个结论是，（$\Delta \otimes \mathbb{1}$）$\circ \Delta$ 至少包含与（$\mathbb{1} \otimes \Delta$）$\circ \Delta$一样多的项。由于我们已将（$\Delta \otimes \mathbb{1}$）$\circ \Delta$ 中的每一项与（$\mathbb{1} \otimes \Delta$）$\circ \Delta$中的唯一一项对应起来，这就足以说明二者相等。

回顾一下， Δ可以表示为关于 Connes-Kreimer 余乘的有序划分，令 $\widetilde{\Phi} := \Phi \circ \Pi_{d,\ \rho}$。那么

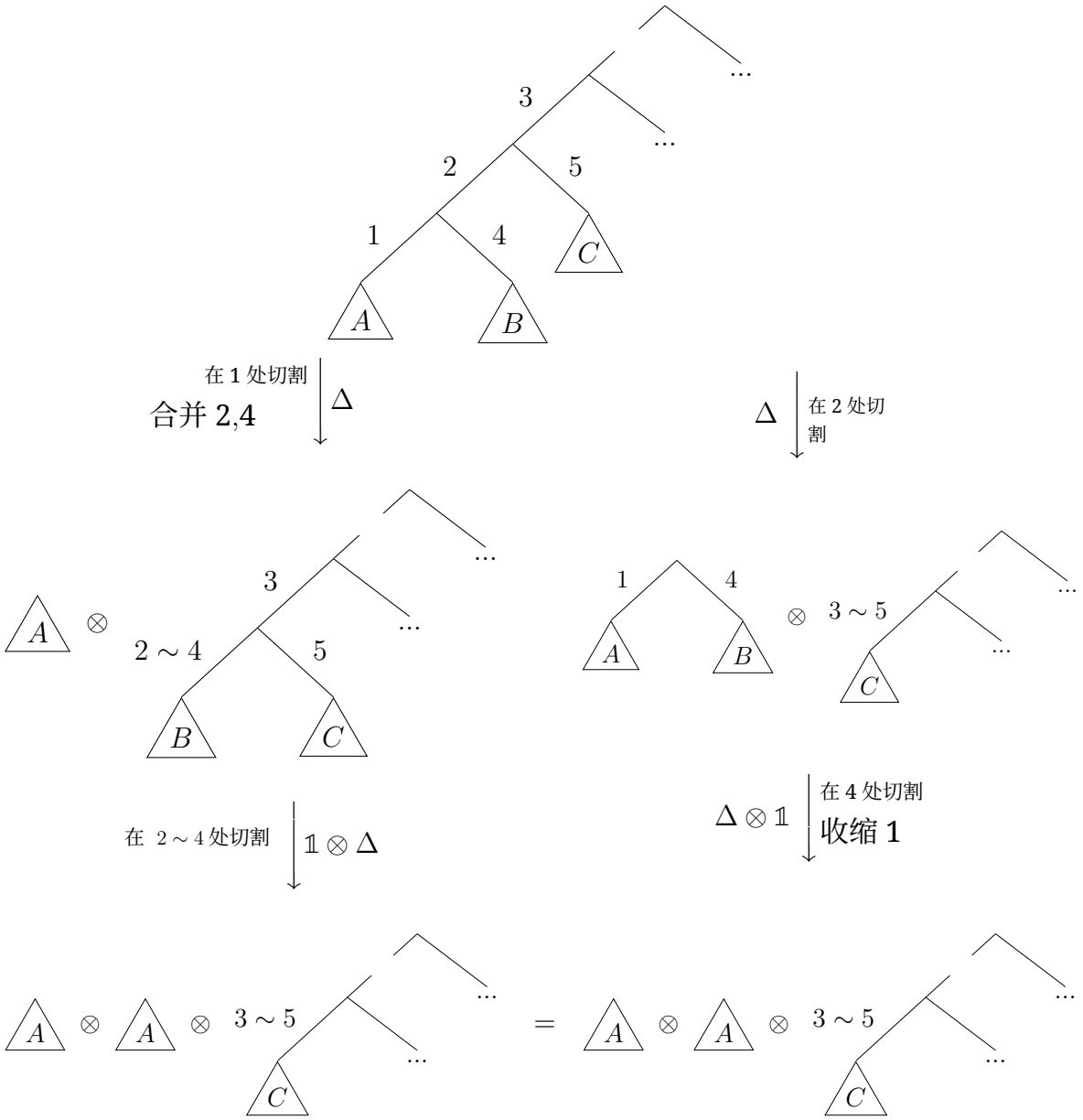
$$\begin{aligned}\Delta &= (\mathbb{1} \otimes \Phi) \circ (\mathbb{1} \otimes \Pi_{d,\rho}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \Phi \circ \Pi_{d,\rho}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK}\end{aligned}$$

我们还记得，Connes-Kreimer 余乘是余结合的。那么

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \\ &= ((\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \otimes \mathbb{1}) \circ (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \\ &= ((\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ (\Delta_{CK} \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ (\mathbb{1} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CK},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式运用了 Connes-Kreimer 的余结合性。同时，

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} \otimes \Delta)\Delta &= (\mathbb{1} \otimes ((\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK})) \circ \Delta \\ &= (\mathbb{1} \otimes ((\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK})) \circ (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ (\mathbb{1} \otimes \Delta_{CK}) \circ (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK} \\ &= (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ (\mathbb{1} \otimes \Delta_{CK}) \circ (\mathbb{1} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{CK}.\end{aligned}$$



最后一个等式之所以成立，是因为在 $(\mathbb{1}\otimes\Delta)\circ\Delta$ 中出现的任意项都没有包含带有新出现的叶子的树、也没有包含非二叉树的分量，因此对中间分量应用 Φ 不会改变任何项。

由于 $\Phi\circ\tilde{\Delta}_{CK}$ 用于收缩某些边并删除某些项，(通道中进一步应用 Δ_{CK} 也不会引入更多项， $\mathbb{1}\otimes\Phi\otimes\Phi$ 能保留的项数也不会超过上述数量。

因此 $(\Delta\otimes\mathbb{1})\circ\Delta$ 的项数至少与 $(\mathbb{1}\otimes\Delta)\circ\Delta$ 一样多，而且二者相等 l.

同样的原理也适用于同时切割对：这类切割会产生由森林而非单棵树构成的余项，因此 Δ 是余结合的。□

注记 2.2。 Joachim Kock 指出，二叉森林是 Schmitt 意义下的一种限制物种 [14], ，其中子集的限制对应于提取某些子树并收缩其余的边。这为余结合性提供了另一种证明。

2.1. 迭代余积。 第 n次迭代余积是映射 $\Delta^{(n)}:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$，递归定义为 $\Delta^{(1)}:=\Delta$ 以及

$$\Delta^{(k)}:=(\Delta^{(k-1)}\otimes\mathbb{1})\circ\Delta$$

对于 $k\geq 2$。我们也可以同样轻松地将 $\Delta^{(k)}$ 定义为 $(\mathbb{1}\otimes\Delta^{(k-1)})\circ\Delta$；余结合性保证这会产生相同的映射序列。

给定有限集 S，S 的划分是由两两不相交的非空集合 S_1、……、S_m 组成的无序集族，其并集为 S。S 的有序划分是 S 的有序划分。T 的迭代余积由 $L(T)$ 的集合有序划分索引。

2.2. 反 antipode。由于 $\mathcal{H}$ 是分次连通霍普夫代数，反 antipode 可以递归地定义为 $S(1)=1$，并且

$$S(T)=-T-\sum_{(T)}S(T')T''$$

其中，求和是对 T 的约化余积中的所有项进行的，也就是说，对空切割和全切割以外的所有项求和。

例2.2。下面给出一些至多有三个叶子的较小树的反 antipode：

$$S(\alpha)=-\alpha$$

$$S(\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet})=-\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet}+2\alpha\sqcup\beta$$

$$S(\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet}\ \overset{\gamma}{\bullet})=-\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet}\ \overset{\gamma}{\bullet}+\alpha\sqcup\overset{\beta}{\bullet}\ \overset{\gamma}{\bullet}+\beta\sqcup\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\gamma}{\bullet}+2\gamma\sqcup\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet}-4\alpha\sqcup\beta\sqcup\gamma.$$

$S(T)$ 中的项与 T 的全切割一一对应，且这些切割不会同时切断任何节点的两个子节点。我们将这类切割称为二元全切割。

由二元全切割得到的森林中的每棵树，随后都会经由边收缩投影为唯一的满二叉树。$\Pi_{d,\rho}$（这与 Connes-Kreimer 反元的行为形成对照；后者以给定树的所有全切割为索引。）

空切割被视为不切断任何边的唯一二元全切割，它对应于 T in $S(T)$ 中唯一的一项，该项的系数恒为 -1。

我们将在下面的证明中，将这一观察以及其他一些观察形式化：

定理 2.2. 若 T 是一个有 n 片叶子的树，则：

(1) $S(T)$ 中的每一项都对应于 T的一个唯一的二元全切割，反之亦然。(2) $S(T)$ 中某一项的系数为负，当且仅当该项是由奇数棵树组成的森林；若该森林由偶数棵树组成，则系数为正。(3) $S(T)$ 中系数绝对值之和为 3^{n-1}。

证明。当 $n=1$ 为单个叶子且唯一的二元全切割为空切割时，这些性质显而易见。对于 $n=2$，考虑 $S(\overset{\alpha}{\bullet}\ \overset{\beta}{\bullet})$：其中有一个空切割，以及两个 $\alpha\sqcup\beta$ 副本，一个由切割 α 上方的边得到，另一个由切割 β 上方的边得到。接下来我们对更大的树给出一般性证明。

(1) 设 T 是一棵有 $n\geq 2$ 个叶子的树。我们将建立 T 的非空全切割与数对 $(T'',\ C_{T'})$ 之间的一个双射，其中 $T''\otimes T'$ 是 $\Delta(T)$ 的一项，而 $C_{T'}$ 是森林 T' 的一个全切割。简单来说，我们证明 T 的每个二元全切割

都能唯一表示为对 T 的一个二元可容许割，以及割后森林的一个二元全切割。

由于 T'' 是每棵树至多有 $n-1$ 个叶子的森林，且 S 是乘法的，$S(T')$ 的每一项都对应于森林 T'' 的一个二元全切割。根据 $S(T)$ 的递归定义，除 $-T$ 之外的每一项都对应于一对 $(T'',\ C_{T'})$。

设 C 是 T 的一个全切割。设 $C' \subseteq C$ 是从根出发的任意路径上的第一条边所构成的集合。那么 C' 描述了 T 的一个可容许割。令 $\sim T' \otimes T''$ 为 $\Delta(T)$ 中与切割 C 对应的项；那么 $C_{T'} := C \setminus C'$ 是 T' 的一个二元全切割，从而得到一对 $(T'',\ C_{T'})$。

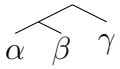
反过来，给定一对 $(T'',\ C_{T'})$，令 C' 为产生 $T' \otimes T''$ 的可容许割。由于 C' 中的所有边都出现在 T'' 之上，$C' \cup C_{T'}$ 是 T 的一个二元全切割。此外，由于每个全切割都可以递归地构造为对割后森林依次进行可容许割，$S(T)$ 中的项恰好是对 T 执行同时二元全割后，再将每棵树投影到其在 $\Pi_{d,\ \rho}$ 下的像所得到的结果。

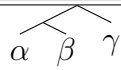
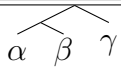
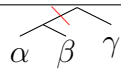
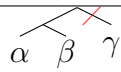
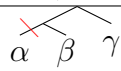
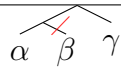
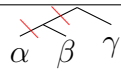
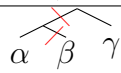
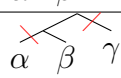
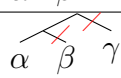
(2) 如果 $S(T')$ 中的一项是由 k 棵树组成的森林，那么它会在 $-S(T')T''$ 中产生一项，该项由 $k+1$ 棵树组成，且系数相反。

由于 T 在 $S(T)$ 中的系数为负，所有奇数森林的系数都为负，而偶数森林的系数为正。

(3) 对于无符号系数之和：每个二元全切割都由每个内部节点处三种选项之一的选择唯一确定；反过来，每组选择也决定一个全切割。对于一棵有 n 个叶子的树，其内部节点数为 $n-1$；在每个内部节点处，我们可以选择保持其两个子节点完整，或者恰好切割其中一个子节点。因此，可能的二元全切割共有 3^{n-1} 个。

□

示例 2.3. 我们枚举 $T =$  上的所有二元全切割，并将它们与 $S(T)$ 中的相应项配对。

二元全切割	$S(T)$ 中的一项
	 （空切割）
	$\gamma \sqcup$ 
	$\gamma \sqcup$ 
	$\alpha \sqcup$ 
	$\beta \sqcup$ 
	$\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma$
	$\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma$
	$\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma$
	$\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma$

2.3. 梳状树子代数。 梳状树是指这样一种二叉树：除最低层深度的两个特殊叶子中的一个外，其余所有叶子都朝向右侧。

我们将具有 n 个叶子的唯一抽象无标记梳状树记为 C_n。前四个无标记梳状树为

$$C_1 = \bullet, \quad C_2 = \wedge, \quad C_3 = \text{  }, \quad C_4 = \text{  }.$$

我们还作如下认同： $C_0 = 1$。梳状树是 $\mathcal{H}$的一个霍普夫子代数，因为对 C_n 的任意切割，都会在余乘中产生形如 $C_m C_1^i \otimes C_{n-m-i}$ 的项（其中可能出现 $m = 0$）。

C_n 的余乘显式公式为

$$\Delta(C_n) = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} C_1^i \otimes C_{n-i} + 2\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} C_1^{j+1} \otimes C_{n-j-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{\ell} C_k C_1^{\ell} \otimes C_{n-k-\ell} \right) + C_n \otimes 1$$

帕斯卡递推公式使我们能够将前两个求和式部分合并，从而得到等价表达式

$$\Delta(C_n) = \sum_{i=1}^{n-2} \left[\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] C_1^i \otimes C_{n-i} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{\ell} C_k C_1^{\ell} \otimes C_{n-k-\ell} \right) + 2C_1^{n-1} \otimes C_1 + 1 \otimes C_n + C_n \otimes 1.$$

2.4. 第一个多项式不变量。 多项式代数 $k[X]$ 配备了一个霍普夫代数结构，其余乘由 $\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1$ 给出。由于余乘中的项由叶子的子集索引，将具有 n 个叶子的任意森林映射到X^n，便定义了一个满射霍普夫代数态射 $\mathcal{H} \to k[X]$。

我们还注意到，在 $\mathcal{H}$ 的无标记版本中，由单顶点树生成的霍普夫子代数是 $\mathcal{H}$ 中 $k[X]$ 的一个嵌入副本。

假设 $\mathcal{H}$ 有 m 个可能的叶子标签 ℓ_1、.....、ℓ_m。那么存在一个满态射$\mathcal{H} \to k[X_1, \ldots, X_m]$。类似地， $\mathcal{H}$ 中存在 $k[X_1, \ldots, X_m]$ 的一个嵌入副本，其中 X_i 映射到带有标签 ℓ_i 的单顶点树。

2.5. 与 Bruned 的类 Connes-Kreimer 霍普夫代数的联系。 Bruned 在其博士论文中定义了有根非平面树上的余乘 δ^+，其项同样由叶子子集 [2] 索引。这个余乘应用于随机过程的重整化。

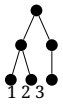
我们的阐述基于 [7], 中的记号，该记号为 Bruned 的构造提供了另一种描述。请注意， [2]和 [7] 都采用了与我们相反的约定：余乘中包含根的余项出现在左通道。

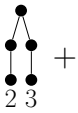
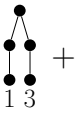
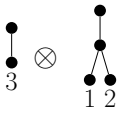
对于 $\mathcal{H}_{CK}$ 中的一棵树，将 δ^+ 定义为

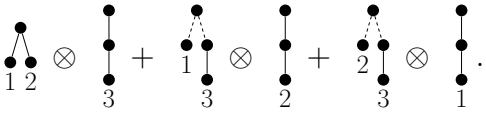
$$\delta^+(T) = T \otimes 1 + \sum_{C \in \mathrm{Adm}'(T)} B^+(P^C(T)) \otimes R^C(T),$$

其中，Adm′(T) 表示 T 的可容许割子集（按 Connes-Kreimer 的定义），其中 $R^c(T)$ 的非根叶子是 T 的叶子。这些恰好是那些可容许割

不会切断某个节点的所有子节点的可容许割，因为切断一个节点的所有子节点会使它变成新的叶子。项 $P^C(T) \otimes R^C(T)$ 是 Δ_{CK} 中可容许割 C 对应的项；算子 B^+ 是1-余循环，它将森林中的所有树连接到一个公共根上。

例2.4。令 $T =$  。于是

$$\delta^+(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T + \bullet_1 \otimes$$  $$+ \bullet_2 \otimes$$  $$+$$ 

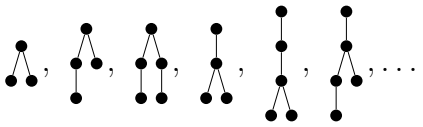
$$+$$ 

虚线边是由 B^+ 创建的边。

于是，我们的余乘 Δ 是有序划分 $(B^- \otimes \Pi_{d,\ \rho}) \circ \delta^+$，其中 B^- 是删除森林中所有根的算子，而 δ^+ 在 $\mathcal{H}_{CK}$ 中限制为二叉树。

考虑对 $\mathcal{H}_{CK}$ 的一个商：将图中的所有有向路径收缩为一条边，其中每个起始顶点至多有一棵树。例如，所有梯形图都被视为同一个顶点。具体而言，这个商 $\mathcal{H}_{CK}/\sim$ 由约化树作为代数生成；约化树是除根以外不含度为2的顶点的树。

例 2.5. $\mathcal{H}_{CK}$ 中的以下树在商 $\sim$下都属于同一个等价类：



$\mathcal{H}_{CK}$ 中任何只有一个子节点的树边都不符合 δ^+的切割条件，因此该商保持 δ^+。

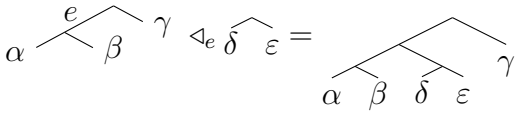
注 2.3. 将二元可容许割的概念推广到任意元数的树上，规定不得切断任一给定节点的所有子节点，这种做法看似可行，但会对对偶性造成不利影响，因为第3节的边插入过程只能生成具有二叉分支的新顶点。因此，我们将讨论范围限制在二叉树上。

3. The edge-insertion Lie algebra

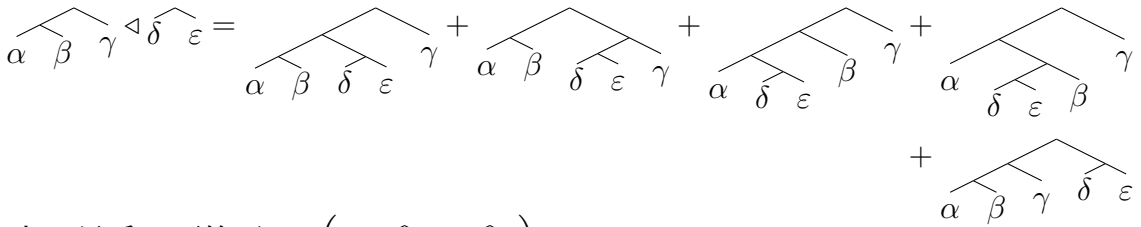
在上一节中，我们通过明确地定义其余乘并验证其余结合性，构造了一个新的霍普夫代数 $\mathcal{H}$ 。之后，我们将介绍另一种构造 $\mathcal{H}$ 的方法，即将其视为某个李代数的包络代数的对偶。本节讨论二叉树上的李代数的构造；对偶性将在第4节中证明。

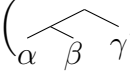
我们将把 $k\{\mathcal{T}\}$ 上的这个前李代数称为（$\mathcal{L}$, $\triangleleft$）。

3.1. 边插入运算。设 $T, S \in \mathcal{T}$，并设 e 是 T 的一条边。要将 S 插入 T 的 e 处（我们将此运算记作 $T \triangleleft_e S$），将边 e 分开以创建一个新顶点，并用一条新边将 S 的根连接到该顶点。以下是一个例子：



定义 $T \triangleleft S$ 为：将 S 插入 T 的每条边所产生的树之和，再加上将 T 和 S 嫁接到一个公共根所得到的树（该树与 $\mathfrak{M}(T,S)$ 相同，后者是对 T 和 S 应用 Merge 的结果）。例如，

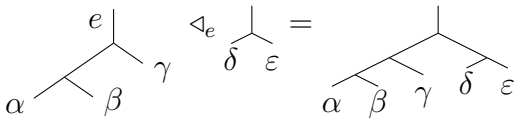


事实上，最后一项等于 $\mathfrak{M}\Big($  $\Big)$。

每次插入都会将一条边变为两条边，随后再创建一条新边，这意味着边的总数增加两条。同样，树上存在一种自然的分次方式，即按叶子的数量分次。

注 3.1。将边插入过程与上一节定义的余乘进行比较：在余乘中，切割树的一条边会将剩余边中的两条合并为一条。这已经暗示了这两个过程之间的对偶性。

注 3.2。我们也可以将有根树视为在根处多了一条边。根据这种解释，插入操作涉及拆分 T 的一条边，并将新顶点与 S 根部的上方顶点合并。于是，和式 $T \triangleleft S$ 以 T 的所有边为指标，因为项 $\mathfrak{M}(T,\ S)$ 是通过将 S插入到 T的根边处得到的。



然而，根边的源点绝不会被视为叶子。因此，这条边将被视为幽灵或虚拟边。

为了遵循现有文献中的约定，我们主要采用第一种模型；但在证明时，例如下文所示的情况，第二种模型会更方便，我们便会采用它。

定理 3.1. $\triangleleft$是一个前李运算。

证明。设 T_1, T_2, T_3 是三棵树。所有树都视为带有一条根边。我们将赋予结合子以几何意义，

$$A(T_1, T_2, T_3) = (T_1 \triangleleft T_2) \triangleleft T_3 - T_1 \triangleleft (T_2 \triangleleft T_3),$$

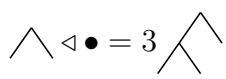
这将表明　　注意，当 T_2 和 T_3 的位置互换时，结合子保持不变　　.

注意，$T_2 \triangleleft T_3$ 包含项 $\mathfrak{M}(T_2,\ T_3)$：由$T_1 \triangleleft \mathfrak{M}(T_2,\ T_3)$得到的 $T_1 \triangleleft (T_2 \triangleleft T_3)$中的项，与$(T_1 \triangleleft T_2) \triangleleft T_3$ 中的项完全对应；在后者中，T_2 插入 T_1的一条边中，然后 T_3 插入原本是 T_2的根的那条边中。

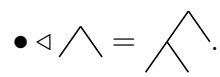
结合子 $A(T_1, T_2, T_3)$ 中的项由以下树构成：将 T_2 和 T_3 插入 T_1 的不同边，或将二者都插入同一条边所得到的树。在后一种情况下，每条边都会产生两项：将 T_2 插入 T_1 的边 e 时，该边会被分成两条边，因此随后可将 T_3 插入上边或下边，从而使 T_3 （的根）位于 T_2（的根）上方或下方。

$A(T_1, T_2, T_3)$ 中出现的项完全相同，因为插入 T_2 和 T_3 的顺序最终并不重要。因此，$\triangleleft$ 满足 Vinberg 恒等式，因而是一个前李算子。□

注 3.3. $\mathcal{L}$ 不是自由前李代数，因为



and



3.2. 歌剧代数视角。 由于所有有根非平面二叉树都是 Merge 歌剧代数 $\mathcal{M}$ 的元素，我们可以将 $\triangleleft$算子分解为一系列带色歌剧代数插入。该分解的一个分量是 $\widehat{\ell_1\ \ell_2} \in \mathcal{M}(2)$，它是 Merge 运算的歌剧代数表示。重要的是，这进一步表明，项 $\mathfrak{M}(T, S)$ 自然应当出现在 $T \triangleleft S$ 中。

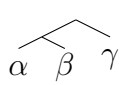
设 $T \in \mathcal{M}(n)$ 和 $S \in \mathcal{M}(m)$。考虑 $T \triangleleft_e S$，即将 S 插入 T 的边 e 所得到的 $T \triangleleft S$ 中的项。（对于项 $\mathfrak{M}(T,\ S)$，这就是根上方的虚边。）设 $T' \in \mathcal{M}(n')$ 是从 e 的底端点开始的子树（如果该项为 $\mathfrak{M}(T,\ S)$，则为 $T' = T$）。

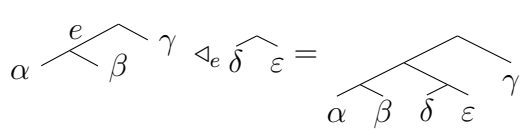
设 $T'' = T/^cT' \in \mathcal{M}(n - n' + 1)$ 是 T 的商，其中所有 T' 都收缩为一个标号为 ℓ 的叶子。事实上，$T = T'' \circ_\ell T'$。于是

$$T \triangleleft_e S = T'' \circ_\ell (\widehat{\ell_1\ \ell_2}) \circ_{\ell_1} T' \circ_{\ell_2} S = T'' \circ_\ell \mathfrak{M}(T', S).$$

事实上，如果 e 是根上方的虚边，那么 $T' = T$（如上所述），而 $T'' = \ell \in \mathcal{M}(1)$ 是唯一标号为 ℓ 的叶子，它相对于带色合成 $\circ_\ell$ 充当单位元。于是

$$T \triangleleft_e S = \ell \circ_\ell \mathfrak{M}(T, S) = \mathfrak{M}(T, S).$$

例 3.1. 设 $T =$  和 $S = \widehat{\delta\ \varepsilon}$。我们来说明插入



作为一种拟运算组合。接下来

$$T' = \widehat{\alpha\ \beta}, \quad T'' = \widehat{\ell\ \gamma},$$

SO

$$T'' \circ_\ell \mathfrak{M}(T', S) = \overbrace{\ell \quad \gamma}^{} \circ_\ell \begin{array}{c} \\ \alpha\ \ \beta\ \ \delta\ \ \varepsilon \end{array} = \begin{array}{c} \\ \alpha\ \ \beta\ \ \delta\ \ \varepsilon \end{array} = T \triangleleft_e S.$$

3.3. **Guin-Oudom 构造**。 Guin 和 Oudom [12] 对由前李运算构造的李代数的包络代数给出了明确描述，而该代数是一个霍普夫代数。我们将重述这一构造，并指出 Connes-Kreimer 霍普夫代数是通过这一过程得到的某个霍普夫代数的对偶；这里的对偶性基于一种特定的内积，该内积将在第4节中描述。

关于 Guin-Oudom 过程及其与 Connes-Kreimer 霍普夫代数的李代数构造之间关系的另一种阐述见 [6]。

设 $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ 是一个前李代数，且 Sym($\mathcal{L}$) 是由 $\mathcal{L}$ 上的交换多项式构成的对称代数。那么 Sym($\mathcal{L}$) 自然带有混洗余乘法，其定义为

$$\text{Ш}(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{I \subseteq [n]} x_I \otimes x_{[n]\setminus I}$$

其中每个 $x_i \in \mathcal{L}$，并且给定一个指标集 $J = \{j_1, \dots, j_k\}$，记作 $x_J = x_{j_1} \cdots x_{j_k}$。混洗余乘法是余结合且余交换的。

前李运算 $\triangleleft$ 可扩展为 Sym($\mathcal{L}$) 上的一个运算，该运算满足以下性质

(1) $A \triangleleft 1 = A$(2) $X \triangleleft AY = (X \triangleleft A) \triangleleft Y - X \triangleleft (A \triangleleft Y)$ (3) $AB \triangleleft C = \sum_{(C)} (A \triangleleft C_{(1)})(B \triangleleft C_{(2)})$

对于元素 X, $Y \in \mathcal{L}$和 A, B, $C \in$Sym($\mathcal{L}$)。递归地，这唯一确定了任意两个单项式 A, $B \in$ Sym($\mathcal{L}$) 的 $A \triangleleft B$，并通过线性性扩展到 Sym($\mathcal{L}$) 的所有元素。

我们指出，若考虑带有元素 $Z \in \mathcal{L}$ 的性质 (2)，则

$$X \in ZY = (X \triangleleft Z) \triangleleft Y - X \triangleleft (Z \triangleleft Y)$$

等于 X, Z, Y 关于 $\triangleleft$的结合子 $A(X, Z, Y)$。由于 $\mathcal{L}$ 是一个前李代数，Vinberg 恒等式 $A(X, Z, Y) = A(X, Y, Z)$ 成立。

$\mathcal{U}(\mathcal{L})$ 作为霍普夫代数的乘积并非 $\triangleleft$，而是对其作进一步修正。

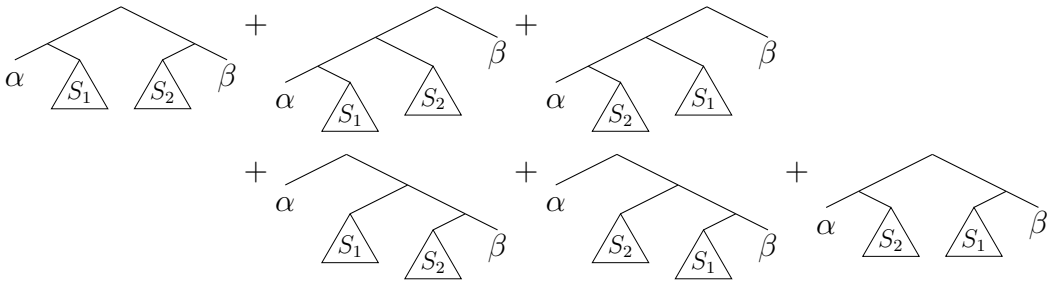
我们在 Sym($\mathcal{L}$) 上构造另一个乘积 $*$：首先将 $\triangleleft$扩展到 Sym($\mathcal{L}$)，然后定义

$$A * B := \sum_{(B)} (A \triangleleft B_{(1)}) B_{(2)}$$

或单项式 A, B，其中求和遍及混洗余乘法的各项（使用 Sweedler 记号）。Guin 和 Oudom 证明了 $*$ 是结合的。

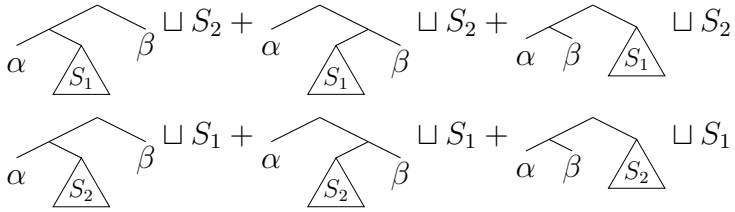
$*$ 和 $\triangleleft$的区别在于， $\triangleleft$表示将单项式 B 中的所有因子同时插入 A。也就是说，$A \triangleleft B$ 只包含这样的项： B中的所有树都同时插入森林 A中，即 B 中的每棵树都成为 A中某棵树的一部分。与此同时， $A * B$ 允许出现这样的项： B 中的部分树插入 A中；B 中未使用的树则作为额外元素保留在生成的森林中。

例 3.2. 设 $T = \overbrace{\alpha \quad \beta}^{}$和 $F = S_1 \sqcup S_2$，其中 S_1, S_2 是树。则

$T \triangleleft F =$ 

而

$$T * F = T \triangleleft F + \quad \sqcup S_2 + \quad \sqcup S_2 + \quad \sqcup S_2$$



$$+ \quad \sqcup S_1 + \quad \sqcup S_1 + \quad \sqcup S_1$$

$$+ T \sqcup S_1 \sqcup S_2.$$

这赋予 (Sym($\mathcal{L}$) $*$,X) 非交换且余交换的霍普夫代数结构，它与 $\mathcal{L}$ 的包络代数同构。我们将这个霍普夫代数称为 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ =($\mathcal{U}(\mathcal{L})$ $*$,X)，因为这是我们将明确使用的包络代数的唯一表示。

4. Duality of Hopf algebras

我们所依据的对偶性概念，建立在 Hoffman [8], 定义的树的多项式代数上的内积之上，该内积涉及一个对称系数。事实证明，将同一配对限制在二叉树上，也会在 $\mathcal{H}$（叶子子集霍普夫代数）与 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$（由边插入前李代数诱导的包络代数）之间导出一种对偶性。这里的许多记号都源自 Hoffman。

Hoffman 证明，Connes-Kreimer 霍普夫代数与 Grossman-Larson霍普夫代数在此配对下互为对偶，并纠正了 Panaite 最初尝试做同一件事时的错误 [13]。

4.1. 森林的对称性。 令 $SG(F)$ 表示 F 上的自同构群，即将根映射到根并隐式保留由根节点诱导的有向图结构的图同构。

我们用 $s_F = |SG(F)|$ 表示自同构群的基数。
F 的每个图自同构都会在其边上诱导一个自同构 .
若 $F = T_1^{a_1} \cdots T_k^{a_k}$，其中 T_1，....., T_k 是两两不同的树，且每个 a_i 都是正整数指数，则

$$s_F = a_1! \cdots a_k! \cdot s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_k}^{a_k},$$

这可直接由以下识别得出

$$SG(F) \cong \mathfrak{S}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_{a_k} \oplus SG(T_1)^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus SG(T_k)^{\oplus a_k}.$$

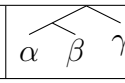
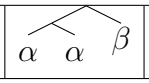
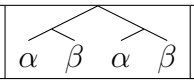
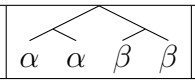
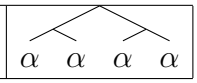
当 T 是一棵二叉树时， T 的唯一自同构涉及交换具有一对相同子节点的内部节点的子节点。因此，对于二叉树 T,

$$s_T = 2^r,$$

其中 r 是具有相同子节点的内部节点数：在每个这样的节点处，该映射要么交换其两个孪生子节点，要么不交换。

注 4.1。 回顾注 3.2，我们可以将二叉树视为在根处带有一条额外的虚拟边。由于所有自同构都固定这条虚拟边，因此它不会影响自同构群。因此，无论是否认为树带有虚拟根边，我们都可以明确地指称 $SG(F)$。

例 4.1。 下面给出一些带标记叶子的较小树的 s_T 取值 ：

T	α							
s_T	1	1	2	1	2	2	4	8

4.2. **定义内积**。 令 $k[\mathcal{T}]$ 表示非平面二叉树的多项式代数。这个代数以森林为线性基。配对定义如下

$$\langle F, F' \rangle := s_F \delta_{F,F'}$$

对于任意森林 F， $F' \in k[\mathcal{T}]$。

现在，我们将上述在 $k[\mathcal{T}]$ 上的配对视为一个映射

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{U}(\mathcal{L}) \times \mathcal{H} \to k.$$

$\mathcal{H}$的乘积记作 $\cdot_{\text{Ш}}$，由恒等式定义

$$\langle \text{Ш}(F_1), F_2 \otimes F_3 \rangle = \langle F_1, F_2 \cdot_{\text{Ш}} F_3 \rangle.$$

由于 X 是余交换的， $\cdot_{\text{Ш}}$ 是交换的。 $\mathcal{H}$ 的余乘定义为

$$\langle F_1 * F_2, F_3 \rangle = \langle F_2 \otimes F_1, \Delta_*(F_3) \rangle;$$

注意，右侧的 F_2 和 F_1 的位置互换了。

这使得 $(\mathcal{H}, \cdot_{\text{Ш}}, \Delta_*)$ 成为一个霍普夫代数，它与 $(\mathcal{U}(\mathcal{L}) *, \mathrm{X})$ 的反代数对偶。还需证明 $\cdot_{\text{Ш}}$ 是不交并 $\sqcup$，而 Δ_* 是第 2 节中定义的同一个余乘 Δ 。

4.3. **证明** $\cdot_{\text{Ш}} = \sqcup$。 设 $F_1 = T_1^{a_1} \cdots T_k^{a_k}$ 是一个森林，其中 T_1，……，T_k 是一组互不相同的树类。设 $F_2 = T_1^{b_1} \cdots T_k^{b_k}$ 满足 $b_i \leq a_i$，并令 $F_3 = T_1^{a_1 - b_1} \cdots T_k^{a_k - b_k}$。那么 $F_2 \otimes F_3$ 在 $\mathrm{X}(F)$ 中出现时的系数为

$$\prod_{i=1}^{k} \binom{a_i}{b_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{a_i!}{b_i!(a_i - b_i)!}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle F_1, F_2 \cdot_{\text{Ш}} F_3\rangle &= \langle \text{Ш}(F_1), F_2 \otimes F_3\rangle \\ &= s_{F_2} s_{F_3} \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{a_i!}{b_i!(a_i-b_i)!} \Big) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{k} b_i! s_{T_i}^{b_i} \Big) \Big(\prod_{i=1}^{k} (a_i-b_i)! s_{T_i}^{a_i-b_i} \Big) \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{a_i!}{b_i!(a_i-b_i)!} \Big) \\ &= \prod_{i=1}^{k} a_i! s_{T_i}^{a_i} \\ &= s_{F_1} \\ &= \langle F_1, F_2 \sqcup F_3\rangle.\end{aligned}$$

因此，$\cdot_{\text{Ш}} = \sqcup$。

4.4. 证明 $\Delta = \Delta_*$。我们的目标是证明

$$\langle F_1 * F_2, F_3\rangle = \langle F_2 \otimes F_1, \Delta(F_3)\rangle.$$

在下面的证明中，将所有树视为带有一条虚拟根边会很方便。说到边集 $E(F)$ 时，F 中每棵树的根边都包含在内；但是，其源点不视为叶子。

4.4.1. 切割的枚举。给定一个森林 $F \in k\{\mathcal{T}\}$，令 $\mathcal{C}(F)$ 表示 F上的二元可容许切割的集合。每个 $C \in \mathcal{C}(F)$ 都是 $E(F)$ 的一个子集，满足

(1) C 中的任意一对边都不会同时出现在 F中任何一棵树的同一条从根到叶的路径上；

(2) C 中没有两条边具有相同的父顶点。

这是利用 Δ 的乘法性，将单棵树上的二元可容许切割自然推广到森林的方式。

F 的余乘是对 $\mathcal{C}$（F）中所有切割求和：

$$\Delta(F) = \sum_{C \in \mathcal{C}(F)} P^C(F) \otimes R^C(T)$$

其中，P^C（F）是通过取出 C中每条被删除的边下方的所有树而得到的森林，而R^C（T）是包含所有被删除的边上方有根树的二叉森林。

注意，如果 F中的树 T的根边位于 C中，那么 T会出现在 P^C（F）中，并且在 R^C（F）中没有余项。例如，项 $F \otimes 1$对应于选中所有根边的切割。

4.4.2. 图的枚举。给定两个森林 $F_1, F_2 \in k\{\mathcal{T}\}$，令 $\mathcal{G}$（F_1, F_2）表示将 F_1 嫁接到 F_2上得到的不同嫁接的集合。这里所说的嫁接也包括由 $\triangleleft$在 Sym($\mathcal{L}$)上的扩展到 $\triangleleft$而引入的那些项，因此 F_1 中的某些树可能无法插入 F_2的任何一条边，而是作为所得森林中的一项保留下来。每个嫁接 G都对 $F_2 * F_1$贡献一个森林 $F_2 *_G F_1$，因此

$$F_2 * F_1 = \sum_{G \in \mathcal{G}(F_1, F_2)} F_2 *_G F_1.$$

每个嫁接由以下数据组成：

(1) 一个映射 μ_G，将 F_1 中的树映到 $E(F_2)\sqcup\{e_0\}$，其中 e_0 是一个哑元，任何未插入 F_2 的边中的树都映到该哑元；(2) 对每个 $e\in E(F_2)$，在 $\mu_G^{-1}(e)$ 上给定一个线性序。

e_0的原像不规定线性序。

4.4.3. 切割与嫁接的重数。设 F_1, F_2 和 F_3 为森林。按照Hoffman的记号，我们定义

$$\begin{aligned} n(F_1,F_2;F_3) &= |\{G\in\mathcal{G}(F_1,F_2) : F_2 *_G F_1 = F_3\}| \\ &= \text{the coefficient of } F_3 \text{ in } F_2 * F_1 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} m(F_1,F_2;F_3) &= |\{C\in\mathcal{C}(F_3) : P^C(F_3)=F_1 \text{ and } R^C(F_3)=F_2\}| \\ &= \text{the coefficient of } F_1\otimes F_2 \text{ in } \Delta(F_3), \end{aligned}$$

因此

$$\langle F_1 * F_2, F_3\rangle = n(F_1,F_2;F_3)\langle F_3,F_3\rangle = n(F_1,F_2;F_3)s_{F_3}$$

and

$$\begin{aligned} \langle F_2\otimes F_1, \Delta(F_3)\rangle &= m(F_1,F_2;F_3)\langle F_2\otimes F_1, F_2\otimes F_1\rangle \\ &= m(F_1,F_2;F_3)\langle F_2,F_2\rangle\langle F_1,F_1\rangle = m(F_1,F_2;F_3)s_{F_1}s_{F_2}. \end{aligned}$$

定理 4.1。设 F_1、F_2 和 F_3 为三个森林。则

$$\langle F_1 * F_2, F_3\rangle = \langle F_2\otimes F_1, \Delta(F_3)\rangle,$$

因此 $\Delta=\Delta_*$。

证明。固定 F_1, F_2, F_3，我们的目标是证明

$$n(F_1,F_2;F_3)s_{F_3} = m(F_1,F_2;F_3)s_{F_1}s_{F_2}.$$

定义

$$\mathcal{C}' = \{C\in\mathcal{C}(F_3) : P^C(F_3)=F_1 \text{ and } R^C(F_3)=F_2\}$$

使得 $n(F_1, F_2; F_3) = |\mathcal{C}'|$。

考虑任意一个切割 $C\in\mathcal{C}'$，将其视为 $E(F_3)$ 的子集。取一个自同构 $\sigma\in SG(F_3)$，并令 $SG(F_3)$ 作用于 $2^{E(F_3)}$。令 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{C}}(C, F_3)$ 表示 $C\in 2^{E(F_3)}$ 在 $SG(F_3)$ 作用下的轨道。那么 $\sigma(C)\in\mathcal{C}'$，所以 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{C}}(C, F_3)\subseteq\mathcal{C}'$。

然而，$\mathcal{C}'$ 中可能还有其他切割不属于 C 的轨道。因此，$\mathcal{C}'$ 可分解为切割类的不交并，每个切割类都是该类中任意一个切割的轨道：

$$\mathcal{C}' = \mathrm{Orb}_{\mathcal{C}}(C_1,F_3)\sqcup\cdots\sqcup\mathrm{Orb}_{\mathcal{C}}(C_k,F_3)$$

其中每个 C_i 都是一个不同切割类的代表元。

对于上述相同的森林 F_1, F_2, F_3，我们定义

$$\mathcal{G}' = \{G\in\mathcal{G}(F_1,F_2) : F_2 *_G F_1 = F_3\}$$

因此 $m(F_1, F_2; F_3) = |\mathcal{G}'|$，并将 $\mathcal{G}'$ 划分为嫁接类。

我们将对嫁接中的一些数据进行抽象。对于每条 $E(F_2)$，在 $\mu_G^{-1}(e)$中的树上定义的线性序，不再针对各棵树，而只针对每棵树的同构类。现在，每个 $G\in\mathcal{G}'$ 由一个边集 $E_G\subseteq E(F_3)\sqcup\{e_0\}$以及一个装饰$L_G(e)$组成；对于每个 $e\in G\setminus\{e_0\}$，该装饰是一个由树的同构类构成的有限序列。对于每条边 e

在 F_2 中，若有一些来自 F_1 的树嫁接其上，我们就从上到下列出这些树，顺序从 e 的源点到其目标点。我们写作 $G = (E_G,\ L_G)$。

现在令 $\sigma \in SG(F_2)$。我们允许 $SG(F_2)$ 作用于嫁接：对于一个嫁接 G，定义为

$$\sigma(G) = (E_{\sigma(G)}, L_{\sigma(G)})$$

其中，对于每个 $e \in E_G$，$E_{\sigma(G)} = \sigma(E_G)$ 和 $L_{\sigma(G)}(\sigma(e)) = L_G(e)$。现在，自同构也会将每条边上的装饰映射到其像上。

令 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{G}}(G, F_2)$ 表示 $SG(F_2)$ 在嫁接上的作用下，G 的轨道。令 $F_1 = T_1^{a_i} \cdots T_r^{a_r}$，其中每个 T_i is 都代表一个不同的树同构类。令 $\mathcal{G}''$ 为这些轨道的不交并，称为嫁接类：

$$\mathcal{G}'' = \mathrm{Orb}_{\mathcal{G}}(G_1, F_2) \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Orb}_{\mathcal{G}}(G_\ell, F_2)$$

最后，若 $F_1 = T_1^{a_i} \cdots T_r^{a_r}$，其中每个 T_i 都代表一个不同的树同构类，则 $\mathcal{G}'$ 是以下对象的不交并

$$a_1!a_2! \cdots a_r! = \frac{s_{F_1}}{s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_r}^{a_r}}$$

$\mathcal{G}''$ 的副本；每个副本对应于对每个装饰中的树所作的一种明确选择。

现在我们声称，切割类与嫁接类之间存在一个双射。我们构造两个映射：一个从切割类映射到嫁接类，另一个从嫁接类映射到切割类。

- 设 C 是 $\mathcal{C}'$中某个割类的一个代表。若存在 C 上的路径子图 P，使得 P 中除第一条和最后一条边以外的任意边的兄弟边都被切断，那么 P 会在 $F_2 = R^C(F_3)$ 中压缩为一条边。我们提取 C 中所有符合这一描述的路径子图，并将每个子图与 F_2中剩余的边相匹配。若 F_3 中任意一棵树的根被切断，则将该边映射到虚拟边 e_0。这就唯一确定了 $\mathcal{G}''$ 中的一个嫁接。
- 另一方面，设 G是 $\mathcal{G}''$中某个嫁接类的代表。设 C 是对 F_3 所作的切割，其中 F_1 中所有嫁接树的根都被切断；这就唯一确定了 $\mathcal{C}'$中的一个割类。

这两个对应互为逆映射。

既然我们知道割类与嫁接类之间存在双射，就可以重新编排这些代表，使得 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{C}}(C_i, F_2)$ 是与嫁接类 $\mathrm{Orb}_{\mathcal{G}}(G_i,\ F_2)$ 相对应的割类。

由于 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{G}'$ 都是轨道的不交并，其基数分别由以下求和给出

$$|\mathcal{C}'| = \sum_{i=1}^{k} |\operatorname{Orb}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3)|, \quad |\mathcal{G}'| = \sum_{i=1}^{k} a_1! \cdots a_r! |\operatorname{Orb}_{\mathcal{G}}(C_i, F_2)|.$$

轨道-稳定子定理指出

$$|\operatorname{Orb}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3)| = \frac{s_{F_3}}{|\operatorname{Stab}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3)|}$$

and

$$|\operatorname{Orb}_{\mathcal{G}}(G_i, F_2)| = \frac{s_{F_2}}{|\operatorname{Stab}_{\mathcal{G}}(G_i, F_2)|},$$

其中，$\mathrm{Stab}_{\mathcal{C}}(C_i,\ F_3)$ 是 $SG(F_3)$ 中固定 C_i 中各条边的子群，而 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(G_i,\ F_2)$ 固定 E_{G_i} 中的各条边（同时也固定它们的所有装饰）。

令 $\mathfrak{F}(C_i) \subseteq E(F_3)$ 表示 F_3 中出现在 C_i 各条边下方的所有边的集合。回顾 $F_1 = T_1^{a_i} \cdots T_r^{a_r}$，其中每个 T_i 均表示一个不同的树同构类。于是

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3) \cong \mathrm{Stab}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{F}(C_i), F_3) \oplus SG(T_1)^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus SG(T_r)^{\oplus a_r},$$

so

$$|\operatorname{Orb}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3)| = \frac{s_{F_3}}{|\operatorname{Stab}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{F}(C_i), F_3)| \cdot s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_r}^{a_r}}$$

因此

$$|\mathcal{C}'| = \sum_{i=1}^{k} |\operatorname{Orb}_{\mathcal{C}}(C_i, F_3)| = \frac{s_{F_3}}{s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_r}^{a_r}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\operatorname{Stab}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{F}(C_i), F_3)}$$

而

$$|\mathcal{G}'| = a_1! \cdots a_r! s_{F_2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\operatorname{Stab}_{\mathcal{G}}(G_i, F_2)|}$$

但对于每个 i，$\mathrm{Stab}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{F}(C_i)\ F_3)$ 与 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(G_i,\ F_2)$ 存在一个对应关系，因此这两个求和相等，并且

$$|\mathcal{C}'| \frac{s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_r}^{a_r}}{s_{F_3}} = |\mathcal{G}'| \frac{1}{a_1! \cdots a_r! s_{F_2}}$$

等价地，

$$|\mathcal{C}'| \cdot (a_1! \cdots a_r! \cdot s_{T_1}^{a_1} \cdots s_{T_r}^{a_r}) \cdot s_{F_2} = |\mathcal{G}'| \cdot s_{F_3}$$

因此

$$n(F_1, F_2; F_3) s_{F_1} s_{F_2} = m(F_1, F_2; F_3) s_{F_3}.$$

□

注 4.2。 $\mathcal{C}'$ 分解为若干割类之并，这正是边插入前李代数与顶点插入前李代数之间的关键区别。考虑顶点插入时，每个 $\mathcal{C}'$ 都是单个切割的轨道。

类似地，将 $\mathcal{G}''$ 的划分与顶点插入李代数的情形作比较。顶点嫁接无需记录插入的树上的任何线性序，因为所有树都是非平面树。在一个顶点处同时插入多棵树，与这些树的任何排序都无关。

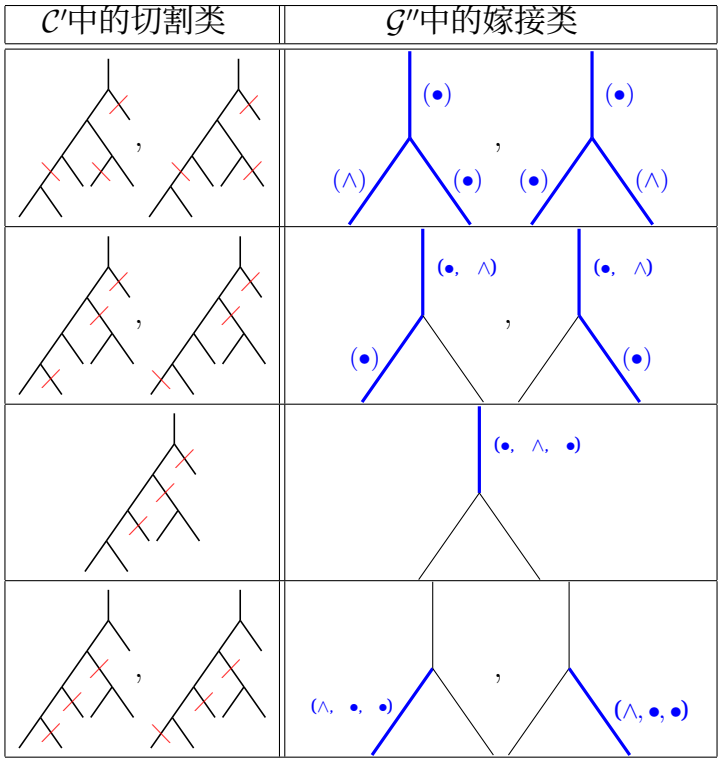
示例 4.2。 这个示例说明了前一个证明中使用的割类和嫁接类的概念。设

$$F_1 = \wedge, \quad F_2 = \bullet\bullet\wedge, \quad F_3 = $$



它们具有对称系数

$$s_{F_1} = 2, s_{F_2} = 4, s_{F_3} = 4.$$



由于 F_2 包含两个 $\bullet$ 和一个 $\wedge$，因此 $\mathcal{G}'$中有 $2!\cdot 1!$ 个 $\mathcal{G}''$ 的不相交副本。所以 $|\mathcal{C}'|=7$ 和 $|\mathcal{G}'|=2!\cdot|\mathcal{G}''|=14$。因此，

$$|\mathcal{C}'|s_{F_1}s_{F_2}=7\cdot 2\cdot 4=56=14\cdot 4=|\mathcal{G}'|s_{F_3}.$$

5. The pre-Lie exponential

我们将重数 $n(F_1,\ F_2;F_3)$ 和 $m(F_1,\ F_2;F_3)$ 特化到 $F_2=T$ 为一棵树且 $F_1=\bullet$ 的情形。按照 Hoffman 的记号，定义增长算子 $\mathfrak{N}:k\{\mathcal{T}_n\}\to k\{\mathcal{T}_{n+1}\}$ 为

$$\mathfrak{N}(T)=T\triangleleft\bullet=\sum_{T'\in\mathcal{T}}n(\bullet,T;T')T'$$

以及修剪算子 $\mathfrak{P}$: $k\{\mathcal{T}_n\}\to k\{\mathcal{T}_{n-1}\}$ 为

$$\mathfrak{P}(T)=\sum_{T'\in\mathcal{T}}m(\bullet,T';T)T'.$$

注意，这两个算子都表示为对所有树同构类求和，而不论其度数。这是合理的，因为只要 $|T|\neq|T'|-1$，$n(\bullet,\ T;\ T')=0$；并且只要 $|T|\neq|T'|+1$，$m(\bullet,\ T';\ T)=0$，因此 $\mathfrak{N}(T)$ 和 $\mathfrak{P}(T)$ 都是有限且齐次的。

这种索引也不会产生由多棵树组成的森林项，因为我们使用的是原始的 $\triangleleft$ 算子，而不是它在 $*$ 上的扩展。

命题 5.1。 $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{P}$ 在 $k\{\mathcal{T}\}$ 上关于配对$\langle-,\ -\rangle$互为伴随。

证明。 只需验证 $\langle\mathfrak{N}(T)\ T'\rangle=\langle T,\mathfrak{P}(T')\rangle$。事实上，

$$\langle\mathfrak{N}(T),T'\rangle=\langle\sum_{T''\in\mathcal{T}}n(\bullet,T;T'')T'',T'\rangle=n(\bullet,T;T')\langle T',T'\rangle=n(\bullet,T;T')s_T$$

and

$$\langle T, \mathfrak{P}(T')\rangle = \langle T, \sum_{T''\in\mathcal{T}} m(\bullet, T''; T')T''\rangle = m(\bullet, T; T')\langle T, T\rangle = m(\bullet, T; T')s_{T'},$$

且 $n(\bullet,\ T;\ T')s_T = m(\bullet,\ T;\ T')s_{T'}$。 □

作为推论， $\mathfrak{N}^k$ 和 $\mathfrak{P}^k$ 对任意 $k \geq 1$互为伴随。

引理 5.1。 设 $k \geq 2$。若 $T \in \mathcal{T}_k$，则 $\mathfrak{P}^{k-1}(T) = k!\ \cdot \bullet$。

直观地看， $\mathfrak{P}^{k-1}(T)$中 $\bullet$ 的系数，等于逐次每次移除一个叶子、将 T 化为单个叶子的方式数，假设所有叶子各不相同。这一点可通过归纳证明予以形式化。

证明。对于 基本情形，考虑 $k = 2$。度为 2 的无标记树只有一种，即 and $\bigwedge$

$$\mathfrak{P}(\bigwedge) = 2\bullet = 2! \cdot \bullet.$$

现在设 $k > 2$，并假设对于所有 $T' \in \mathcal{T}_{k-1}$，均有 $\mathfrak{P}^{k-2}(T') = (k-1)!\ \cdot \bullet$。那么， $\mathfrak{P}(T)$是 k 棵树 T_1, ..., $T_k \in \mathcal{T}_{k-1}$之和，这些树不一定各不相同，且每棵树都对应于选择 T 中的一个叶子将其剪除。因此

$$\mathfrak{P}^{k-1}(T) = \mathfrak{P}^{k-2}(\mathfrak{P}(T)) = \mathfrak{P}^{k-2}\Big(\sum_{i=1}^{k} T_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{P}^{k-2}(T_i) = \sum_{i=1}^{k} (k-1)! \cdot \bullet = k! \cdot \bullet.$$

□

元素 $x \in \mathcal{L}$ 的前李指数定义为形式级数

$$W(x) = x + \frac{1}{2!} x \triangleleft x + \frac{1}{3!}(x \triangleleft x) \triangleleft x + \cdots.$$

当配备乘法运算时

$$W(x) \star W(y) = W(C(x, y))$$

根据 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

$$C(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}([x,[x,y]] + [y,[y,x]]) - \frac{1}{24}[y,[x,[x,y]]] + \cdots,$$

形式级数 $W(x)$具有乘法群的结构。更多参考文献见 [11] ， 而完整展开式的 Baker-Campbell-Hausdorff 公式见 [3] 的第 3.6 节。

设 $\bullet$ 为边插入前李代数中的一棵无标记单顶点树。那么，$W(\bullet)$是对增长算子 $\mathfrak{N}$ 反复作用于 $\bullet$所得的形式和，

$$W(\bullet) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathfrak{N}^{k-1}(\bullet),$$

其中 $\mathfrak{N}^0(\bullet) = \bullet$。

由于每个具有 k 个叶子的无标号树的同构类都会作为 $\mathfrak{N}^{k-1}(\bullet)$ 中的一项出现，因此每个线性生成元在 $W(\bullet)$ 中的系数都是正的。事实证明， $W(\bullet)$ 中每棵树的系数都有一种组合解释。

• 的前几次迭代插入如下：

$$\mathfrak{N}(\bullet) = \wedge$$

$$\mathfrak{N}^2(\bullet) = 3$$



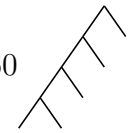
$$\mathfrak{N}^3(\bullet) = 12$$



$$+ 3$$



$$\mathfrak{N}^4(\bullet) = 60$$



$$+ 15$$



$$+ 30$$



因此， $W(\bullet)$ 中度不超过 5 的项为

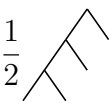
$$W(\bullet) = \bullet + \frac{1}{2}$$



$$+ \frac{1}{2}$$



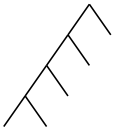
$$+ \frac{1}{2}$$



$$+ \frac{1}{8}$$



$$+ \frac{1}{2}$$



$$+ \frac{1}{8}$$



$$+ \frac{1}{4}$$



$$+ \cdots .$$

其系数 $W(\bullet)$ 中每一项的系数都是 2 的某次幂的倒数。下面将此结论形式化 .

命题 5.2. *T 在 $W(\bullet)$ 中的系数为 $1/s_T$。*

证明。 如果 T 有 k 片叶子，那么 T 会出现在 $\mathfrak{N}^{k-1}(\bullet)$ 中。令 c_T 为 T 在 $W(\bullet)$ 中的系数；那么

$$\left\langle \frac{1}{k!}\mathfrak{N}^{k-1}(\bullet), T \right\rangle = c_T s_T$$

因此

$$k! \cdot c_T s_T = \langle \mathfrak{N}^{k-1}(\bullet), T \rangle = \langle \bullet, \mathfrak{P}^{k-1}(T) \rangle,$$

其中第二个 等式源于 $\mathfrak{N}^{k-1}$ 和 $\mathfrak{P}^{k-1}$的伴随性。由于 $\mathfrak{P}^{k-1}(T) = k! \cdot \bullet$,

$$\langle \bullet, \mathfrak{P}^{k-1}(T) \rangle = k! \cdot s_\bullet = k!,$$

因此 $k! \cdot c_T s_T = k!$，故 $c_T = 1/s_T$。 □

Acknowledgements

我谨向我的导师 Matilde Marcolli 致谢，感谢她的指导；也感谢 Lo¨ıc Foissy 提供有关对偶性的有益参考资料。我还要感谢 Yassine El Maazouz 和 Isabella Senturia 在不同阶段倾听我的想法。

References

[1] Louis J Billera、Susan P Holmes 和 Karen Vogtmann。系统发育树空间的几何。《应用数学进展》，27(4):733–767，2001。[2] Yvain Bruned。奇异 *KPZ* 型方程。博士论文，巴黎第六大学皮埃尔与玛丽·居里大学，2015。https://theses.hal.science/tel-01306427v2/document。[3] Pierre Cartier 和 Fr´éd´éric Patras。经典霍普夫代数及其应用，第29卷，丛书《代数与应用》。施普林格，尚贝里， [2021] ©2021。[4] Alain Connes 和 Dirk Kreimer。霍普夫代数、重整化与非交换几何。载于量子场论：展望与前景，第59–109页。施普林格，1999。[5] Lo¨ıc Foissy。树的霍普夫代数导论。预印本，2013。

[6]Lo¨ıc Foissy。代数运算子、多重指标的双代数及诺维科夫代数。*arXiv*预印本 *arXiv:2510.18432*，2025。[7] Lo¨ıc Foissy 等。带类型装饰根树上的代数结构。*SIGMA.* 对称性、可积性与几何：方法与应用，17:086，2021。[8] Michael Hoffman。根树组合学与霍普夫代数。美国数学会汇刊，355(9):3795–3811，2003。[9] OEIS基金会。在线整数数列百科全书。https://oeis.org。[10] Matilde Marcolli、Noam Chomsky 和 Robert C Berwick。句法合并的数学结构：生成语言学的一个代数模型。麻省理工学院出版社，2025。[11] Matilde Marcolli 和 Alexander Port。图文法、插入李代数与量子场论。计算机科学中的数学，9(4):391–408，2015。[12] J-M Oudom 和 Daniel Guin。前李代数的李包络代数。*K*理论杂志，2(1):147–167，2008。[13] Florin Panaite。探讨基于有根树构造的 Connes–Kreimer 霍普夫代数与 Grossman–Larson霍普夫代数之间的关系。数学物理快报，51(3):211–219，2000。[14]William R Schmitt。组合结构的霍普夫代数。加拿大数学杂志，45(2):412–428，1993。[15] Karen Yeats。量子场论的组合学视角，第15卷。施普林格，2017。

Department of Mathematics, California Institute of Technology,
1200 E CaliforniaBlvd, Pasadena, CA 91125电子邮箱地址：exiao@caltech.edu