群胚 G-跨越与群环上的矩阵 S

JOACHIM KOCK 和 JESPER M. MØLLER

Abstract. 当 G 是有限阿贝尔群时，我们定义群胚的 G-跨越及其关联矩阵，矩阵元素取自群环$\mathbf{Q}G$，并证明跨越的复合对应于矩阵乘法。

arXiv:2603.20787v1 [math.CT] 21 Mar 2026

Contents

1. 引言 1
2. 群胚的同伦拉回 3
3. 群胚的 G-跨越及其矩阵 4
4. G-跨越的范畴论方面 5
5. 示例 12
参考文献 18
27

1. Introduction

对于任意有限集合的跨越，即任意形如以下的有限集图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{R} & T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

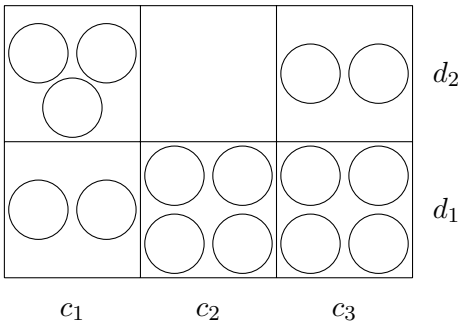
令 $[M]\colon S \times T \to \mathbf{Z}_{\geq 0}$为由下式给出的函数

$$[M](c,d) = |c\backslash M/d|, \qquad c \in S,\, d \in T$$

其中 $|c\backslash M/d|$ 是双侧纤维 $c\backslash M/d = \{x \in M \mid c = Lx,\, Rx = d\}$的基数。例如，

$$[M] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

如果 $S = \{c_1, c_2, c_3\}$、 $T = \{d_1, d_2\}$，且集合 M 看起来是这样



Date: 2026年3月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18B10，20L05。
Key words and phrases. 群胚、跨越、同伦纤维、欧拉示性数、矩阵。

当其元素（以圆圈标示）被分组成双侧纤维时。这种构造一个引人入胜且浅显易懂的特点是，由拉回定义的跨度复合对应于矩阵乘法。然而，只有非负整数项的矩阵才能由集合跨度实现。因此，(1×1)-矩阵 $\binom{1}{2}$ 和 (-1) 无法通过集合跨度实现。

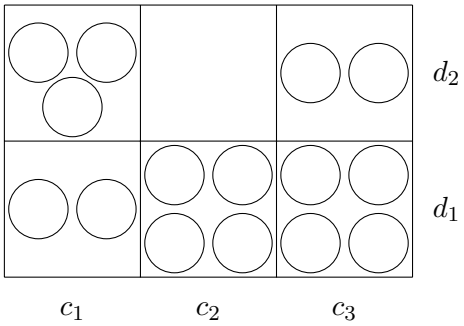
Baez、Hoffnung 和 Walker [1, 定理 34] 进一步为任意有限群胚的跨越赋予了

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{R} & T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

函数 $[M]\colon \pi_0(S)\times\pi_0(T)\to\mathbf{Q}_{\geq 0}$ 定义为

$$[M](c,d)=|T(d,d)|^{-1}\chi(c\backslash M/d),\qquad c\in\pi_0(S),\, d\in\pi_0(T)$$

其中 $T(d,d)$ 是 d 在 T 中的自同构群，而 $\chi(c\backslash M/d)$ 是 M 关于 c 和 d 的双侧同伦纤维的欧拉示性数（即群胚基数）。例如，若 $\pi_0(S)=\{c_1,c_2,c_3\}$、$\pi_0(T)=\{d_1,d_2\}$，则 M 的双侧同伦纤维及其连通子群胚（以圆圈标示）如下所示



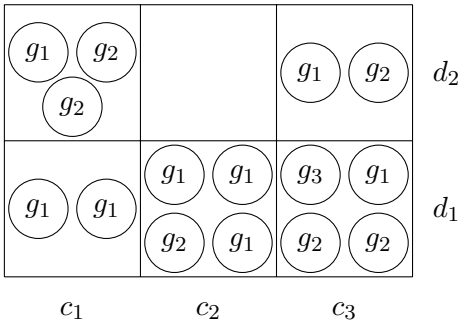
那么 $[M](c_2,d_1)$ 等于 $|T(d_1,d_1)|^{-1}$ 乘以四个子群胚的欧拉示性数之和，而 $[M](c_2,d_2)=0$，因为双侧同伦纤维 $c_2\backslash M/d_2$ 为空。同样，群胚跨度的复合对应于矩阵乘法 [1, 定理 34]，但此时矩阵的元素是非负有理数。(1×1)-矩阵 $\binom{1}{2}$ 现在可以实现，但 (-1) 仍然无法实现。

本文旨在介绍一种更一般的构造方法，以实现范围更广的一类矩阵。在我们的论文 [3] 中，我们引入了一种框架，使得含负元素的矩阵也能够实现。本文更进一步，将范围拓展到复数。为此，自然需要先发展取值于群环的理论。

本文中，G 是一个有限阿贝尔群，BG 是由单个对象构成、其自同构群为 G 的群胚，而 $\mathbf{Q}_{\geq 0}G$ 是有理群半环。我们构造所需的输入数据是一个 G-群胚跨越，具体而言，它是由群胚和群胚态射构成的图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\qquad R\qquad} & T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon\colon HL\implies VR & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & \xrightarrow[\qquad H\qquad]{} & BG \end{array}$$

伴有一个自然变换 $\varepsilon\colon \mathrm{Ob}(M)\to G$，它从函子 HL 指向函子 VR。M 的双侧同伦纤维现在可以表示为



其中表示连通子群胚的圆现在带有来自集合 G 的标签。对于上述任意 G-跨越，我们关联函数 $[M,\varepsilon]\colon \pi_0(S) \times \pi_0(T) \to \mathbf{Q}_{\geq 0}G$，其定义如下

$$[M,\varepsilon](c,d) = |T(d,d)|^{-1} \sum_{g\in G} \chi((c\backslash M/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\})g, \qquad c \in \pi_0(S),\, d \in \pi_0(T)$$

g 的非负有理系数为 $|T(d,\ d)|^{-1}$ 乘以带有 g标记的子群胚（$c\backslash M/d$）$\{c\backslash\varepsilon/d = g\}$ 的双侧同伦纤维 $c\backslash M/d$的欧拉示性数。例如，如果 M 的双侧同伦纤维如上所示，则只有 g_1 和 g_2 在 $[M,\varepsilon](c_2,\ d_1) \in \mathbf{Q}_{\geq 0}G$中具有非负系数。

函数 $[M,\varepsilon]\colon \pi_0(S) \times \pi_0(T) \to \mathbf{Q}G$与复特征 $\rho\colon \mathbf{Q}G \to \mathbf{C}$的复合是一个函数

$$[[M,\varepsilon]]\colon \pi_0(S) \times \pi_0(T) \xrightarrow{[M,\varepsilon]} \mathbf{Q}G \xrightarrow{\rho} \mathbf{C}$$

其值属于复数。这两个关联矩阵 $[M,\varepsilon]$ 和 $[[M,\varepsilon]]$将 G-跨越的复合转换为矩阵乘法，如定理 3.7所述。$[[M,\varepsilon]]$ 的取值可以是复数，不一定是非负有理数。例如，如果 $\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$ 是由复四次单位根构成的循环群，那么 $\sqrt[4]{1}$-跨越

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & \varepsilon(1) = z & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & B\sqrt[4]{1} \end{array}$$

实现任意 1×1 的矩阵 $[[\{1\},\varepsilon]] = (z)$，其中 $z = \pm 1,\ \pm i$。（更多详情请参见示例 5.5 。）因此，利用我们的构造，可以实现（1×1）矩阵（-1）和（i）。

现在我们简要概述本文的内容。第 2 节介绍一些记号，并回顾群胚的同伦拉回概念。第3.1 节中的定义3 给出了 G-跨越及其在群半环$\mathbf{Q}_{\geq 0}G$上的关联矩阵的核心定义。本文的主要结果定理 3.7指出， G-跨越的复合对应于关联矩阵的乘法。第 G4 节概述了跨越范畴4.9的形式结构，而命题 G则揭示了与 G-跨越相关联的矩阵的一般性质。最后的第 5 节中，我们给出了由群胚的

2. Homotopy pull-backs of groupoids

我们回顾群胚同伦拉回的理论，并引入一些将在本文中通篇使用的记号。

定义 *2.1*（同伦拉回群胚 [1, §2]）。设 $M_1 \xrightarrow{R} T \xleftarrow{L} M_2$ 为群胚余跨度[1, 定义 *A.*15]。同伦拉回群胚 $M_1 \times_T M_2$是一个群胚，其对象为所有三元组 (a_1, t, a_2)，其中 $a_1 \in Ob(M_1)$、 $a_2 \in Ob(M_2)$，且 $t \in T(Ra_1, La_2)$ 是 T中的一个态射，从 Ra_1 到La_2。 $M_1 \times_T M_2$ 中的态射 $(a_1, t, a_2) \to (b_1, u, b_2)$ 是所有满足以下条件的有序对 $(m_1, m_2) \in M_1(a_1, b_1) \times M_2(a_2, b_2)$:

$$\begin{array}{ccc} Ra_1 & \xrightarrow{t} & La_2 \\ {\scriptstyle R(m_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(m_2)} \\ Rb_1 & \xrightarrow[u]{} & Lb_2 \end{array}$$

在 T中可交换。

同伦拉回方块

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times_T M_2 & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & Rp_1 \implies Lp_2 & \downarrow{\scriptstyle L} \\ M_1 & \xrightarrow[R]{} & T \end{array}$$

在自然变换 $Rp_1(a_1,\ t,\ a_2) = Ra_1 \xrightarrow{t} La_2 = Lp_2(a_1,\ t,\ a_2)$ 下交换。

或者，同伦拉回，

$$M_1 \times_T M_2 = \int_{(a_1,a_2)\in \mathrm{Ob}(M_1^{\mathrm{op}}\times M_2)} T(Ra_1, La_2) \tag{2.2}$$

是元素范畴 关于函子在 $M_1^{\mathrm{op}} \times M_2$ 上的作用：将对象 $(a_1,\ a_2)$ 映射到集合 $T(Ra_1,\ La_2\ )$.

注 2.3 （双侧同伦拉回）。 由群胚态射 $P \xrightarrow{R_1} S \xleftarrow{L} M \xrightarrow{R} T \xleftarrow{L_2} Q$，我们可以构造同伦拉回

$$\begin{array}{ccccc} (P\times_S M)\times_M (M\times_T Q) & \longrightarrow & M\times_T Q & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_2} \\ P\times_S M & \longrightarrow & M & \xrightarrow[R]{} & T \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} & & \\ P & \xrightarrow{R_1} & S & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (P\times_S M)\times_T Q & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ P\times_S M & \longrightarrow & T \end{array}$$

并且存在群胚等价

$$(P \times_S M) \times_M (M \times_T Q) \rightleftarrows (P \times_S M) \times_T Q \tag{2.4}$$

因为同伦拉回的同伦拉回等价于沿复合态射取的同伦拉回。双侧同伦拉回 $P \times_S M \times_T Q$ 的对象为 (x, s, a, t, y)，其中 $(x, a, y) \in \mathsf{Ob}(P) \times \mathsf{Ob}(M) \times \mathsf{Ob}(Q)$，且 $s \in S(R_1x, La)$，$t \in T(Ra, L_2v)$。态射 $(x_1, s_1, a_1, t_1, y_1) \to (x_2, s_2, a_2, t_2, y_2)$ 是三元组 $(u, m, v) \in P(x_1, x_2) \times M(a_1, a_2) \times Q(y_1, y_2)$，使得 S 和 T 中相关的图表交换。存在一个群胚跨度 $P \leftarrow P \times_S M \times_T Q \to Q$。

记号 2.5. 设 T为一个群胚，$A \subseteq \mathsf{Ob}(T)$ 为 T的对象集合，$d \in \mathsf{Ob}(T)$ 为 T的一个对象，且$\varepsilon : \mathsf{Ob}(T) \to Y$ 是定义在 T对象集合上、取值于某个集合 Y的函数。

(1) $T\{A\}$是 T在 A和 $T\{\varepsilon = y\} = T\{\varepsilon^{-1}y\}$中的对象上形成的满子群胚，适用于任意 $y \in Y$。**(2)** $1\{d\}$ 是 T 的子群胚，其中 d 是其唯一对象，而恒等式是其唯一态射。

若 c 是 S的一个对象， d 是 T的一个对象，且 $S \xleftarrow{L} M \xrightarrow{R} T$ 是一个群胚跨度，则左、右和双侧同伦纤维

$$c\backslash M = 1\{c\} \times_S M = \int_{a\in \mathrm{Ob}(M)} S(c, La) \qquad M/d = M \times_T 1\{d\} = \int_{a\in \mathrm{Ob}(M)} T(Ra, d)$$
$$c\backslash M/d = 1\{c\} \times_S M \times_T 1\{d\} = c\backslash M \times_M M/d = \int_{a\in \mathrm{Ob}(M)} S(c, La) \times T(Ra, d)$$

位于由同伦拉回方块组成的图表中

$$\begin{array}{ccccc} c\backslash M/d & \longrightarrow & M/d & \longrightarrow & 1\{d\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c\backslash M & \longrightarrow & M & \xrightarrow[R]{} & T \\ \downarrow & & \downarrow L & & \\ 1\{c\} & \longrightarrow & S & & \end{array}$$

有限群胚的欧拉示性数，亦即群胚基数 S 为 $\chi(S) = \sum_{c\in\pi_0(S)} |S(c,\ c)|^{-1}$[4, 定义 2.2，例 2。7], [1, 定义 2。4]。

引理 2.6。 [2, 引理 3。8] 定义 2.1 中的同伦拉回群胚，其欧拉示性数为

$$\chi(M_1 \times_T M_2) = \sum_{d\in\pi_0(T)} \chi(M_1/d)\chi(T\{d\})\chi(d\backslash M_2)$$

证明。设 $k^1_\bullet$ 是 M_1 上的余加权， $k^\bullet_2$ 是 M_2上的加权。Grothendieck 构造 $M_1 \times_T M_2 = \int_{M_1^{\mathrm{op}}\times M_2} T$ $(Ra_1,\ La_2)$的欧拉示性数为 [4, 命题 2.8]

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \times_T M_2) &= \sum_{a_1,a_2} k^1_{a_1} k^{a_2}_2 |T(Ra_1, La_2)| = \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{\substack{a_1\in\mathrm{Ob}(M_1), a_2\in\mathrm{Ob}(M_2)\\ T(Ra_1,d)\neq\emptyset, T(d,La_2)\neq\emptyset}} k^1_{a_1} k^{a_2}_2 |T(Ra_1, La_2)| \\ &= \sum_{d\in\pi_0(T)} |T(d,d)|^{-1} \sum_{\substack{a_1\in\mathrm{Ob}(M_1), a_2\in\mathrm{Ob}(M_2)\\ T(Ra_1,d)\neq\emptyset, T(d,La_2)\neq\emptyset}} k^1_{a_1} k^{a_2}_2 |T(Ra_1, d)||T(d, La_2)| \\ &= \sum_{d\in\pi_0(T)} \chi(T\{d\}) \sum_{a_1\in\mathrm{Ob}(M_1), a_2\in\mathrm{Ob}(M_2)} k^1_{a_1} k^{a_2}_2 |T(Ra_1, d)||T(d, La_2)| \\ &= \sum_{d\in\pi_0(T)} \chi(T\{d\}) \Big(\sum_{a_1} k_{a_1} |T(Ra_1, d)|\Big) \Big(\sum_{a_2} k^{a_2} |T(d, La_2)|\Big) \\ &= \sum_{d\in\pi_0(T)} \chi(M_1/d)\chi(T\{d\})\chi(d\backslash M_2) \end{aligned}$$

如所述。对于第二个等式，我们用到 $|T(Ra_1,\ La_2)|$ 非零当且仅当存在 T 的某个对象 d，使得 d、 Ra_1、 La_2 属于 T的同一个连通分支。□

注释 2.7（同伦纤维与完全逆像 [1, 定义 2.8]）。参考$L\colon\ M \to S$，对象 c在 S中的完全逆像是群胚 $L^{-1}(c) = M\{a \in \mathrm{Ob}(M)\ |S(c, La) \neq \emptyset\}$。左同伦纤维 $c\backslash M = c\backslash L^{-1}(c) = \int_{a\in L^{-1}(c)} S(c, La)$的欧拉示性数为 $\chi(c\backslash M) = |S(c, c)|\chi(L^{-1}(c))$ [4, 命题 2.8]。我们可以将其改写为 $\chi(L^{-1}(c)) = \chi(S\{c\})\chi(c\backslash M)$ （由此可得 $\chi(M) = \sum_{\pi_0(S)} \chi(S\{c\})\chi(c\backslash M)$）。本文不会使用完全逆像，而是更倾向于使用同伦纤维；不过，本注释说明了如何在这两个概念之间进行转换。

3. G-SPANS OF GROUPOIDS AND THEIR MATRICES

在本节中，我们引入 G-跨越的群胚，其中 G 是一个有限阿贝尔群。对于每个 G-跨越，我们将其与一个系数取自群半环 $\mathbf{Q}_{\geq 0}G$ 的矩阵相关联，并证明 G-跨越的复合对应于矩阵乘法（定义 3.1，定理3.7）。

BG 是 以 $\bullet$ 为唯一对象且自同构群为 $BG(\bullet,\ \bullet) = G$ 的群胚 .

定义 3.1。 设 S、 T 和 M 为有限群胚。

(1) 一个以 M 为顶点、从 S 到 T 的 G-跨越是一个由群胚和函子构成的群胚图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad R \quad} & T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & HL \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} VR & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & \xrightarrow[\quad H \quad]{} & BG \end{array}$$

以及一个函数 $\varepsilon\colon \mathrm{Ob}(M) \to G$，满足 $\varepsilon\ (a_2)\ \ (HL)\ \ (m)\ \ =\ (VR)\ \ (m)\ \varepsilon\ (a_1)$ 在 G 中对所有 a_1、 $a_2 \in \mathrm{Ob}(M)$以及 $m \in M\ (a_1,\ a_2)$ ：

$$\begin{array}{ccc} HLa_1 & \xrightarrow{\quad \varepsilon(a_1) \quad} & VRa_1 \\ {\scriptstyle (HL)(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (VR)(m)} \\ HLa_2 & \xrightarrow[\quad \varepsilon(a_2) \quad]{} & VRa_2 \end{array}$$

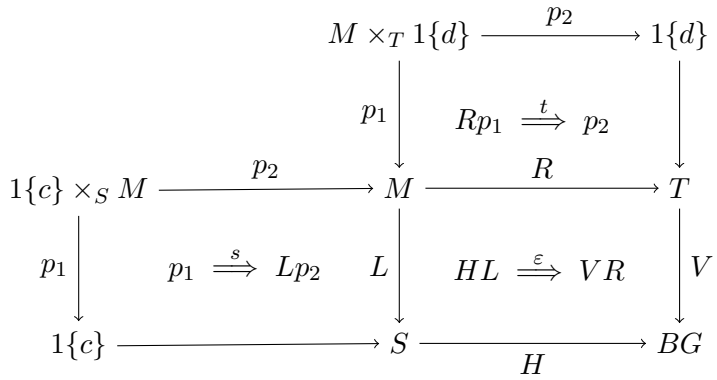
(2) 在(1)的情形下，令 $c \in \mathrm{Ob}(S)$ 和 $d \in \mathrm{Ob}(T)$。在 c 上的同伦纤维是一个 G-跨越，其顶点为 $c\backslash M = 1\{c\} \times_S M$

$$\begin{array}{ccc} c\backslash M & \xrightarrow{\quad \dot{R} = Rp_2 \quad} & T \\ \downarrow & e \overset{c\backslash\varepsilon}{\Longrightarrow} V\dot{R} & \downarrow{\scriptstyle V} \\ 1\{c\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

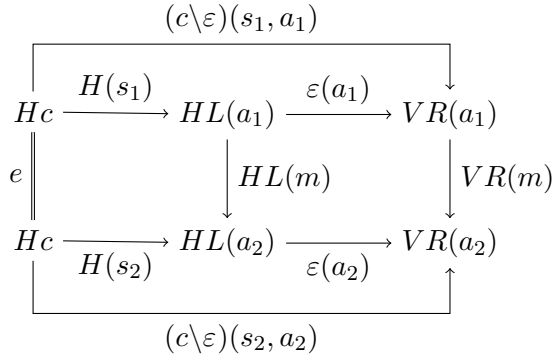
从 $1\{c\}$ 到 T，且在 d 上的同伦纤维是一个 G-跨越，其顶点为 $M/d = M \times_T 1\{d\}$

$$\begin{array}{ccc} M/d & \longrightarrow & 1\{d\} \\ {\scriptstyle \dot{L} = Lp_1}\downarrow & H\dot{L} \overset{\varepsilon/d}{\Longrightarrow} e & \downarrow \\ S & \xrightarrow[\quad H \quad]{} & BG \end{array}$$

图表中从 S 到 $1\{d\}$

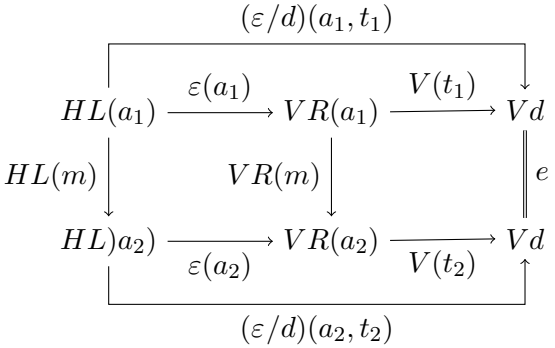


$c\backslash M$的对象是有序对 (s,a)，其中 $a\in\mathrm{Ob}(M)$且 $s\in S(c,La)$。函数 $c\backslash\varepsilon:\mathrm{Ob}(c\backslash M)\to G$ 由 $(c\backslash\varepsilon)(s,a)=\varepsilon(a)H(s)$ 给出，使得图表



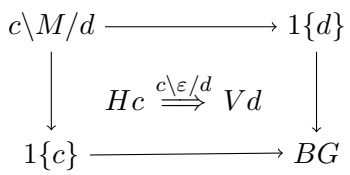
对于任意态射 $m:(s_1,a_1)\to(s_2,a_2)$ *in* $c\backslash M$，交换。

M/d的对象是有序对 (a,t)，其中 $a\in\mathrm{Ob}(M)$且 $t\in T(Ra,d)$。函数 $\varepsilon/d:\mathrm{Ob}(M/d)\to G$ 由 $(\varepsilon/d)(a,t)=V(t)\varepsilon(a)$ 给出，使图表

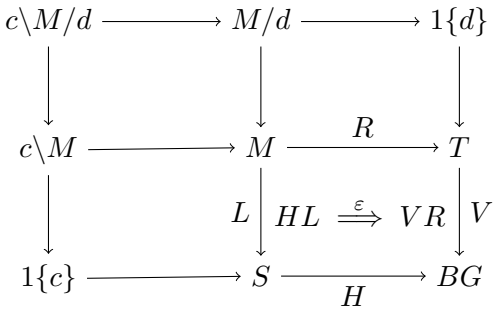


对于任意态射 $m:(a_1,t_1)\to(a_2,t_2)$ *in* M/d，交换。

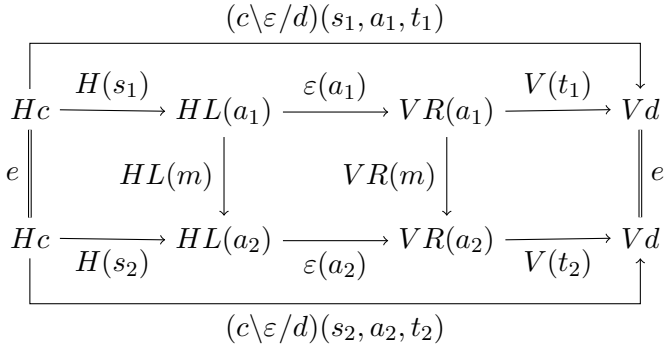
(3) 在 (1) 的情形中，令 c 为 S 的一个对象，且 d 为 T的一个对象。关于 (c,d) 的双侧同伦纤维是一个 G-跨越，其顶点为 $c\backslash M/d=1\{c\}\times_S M\times_T 1\{d\}$，从 $1\{c\}$ 到 $1\{d\}$



由正方形的外边构成



$c\backslash M/d$ 的对象都是三元组 (s,a,t)，其中 a 是 M 的一个对象，且 $s \in S(c,La)$、$t \in T(Ra,d)$。函数 $c\backslash\varepsilon/d$: $Ob(c\backslash M/d) \to G$ 是 $(c\backslash\varepsilon/d)(s,a,t) = V(t)\varepsilon(a)H(s)$。对于 $c\backslash M/d$ 中的任意态射 m: $(s_1,a_1,t_1) \to (s_2,a_2,t_2)$，图表

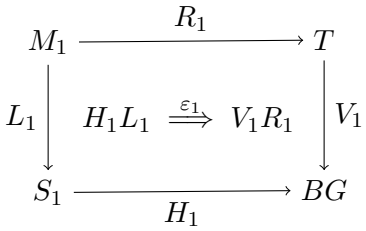


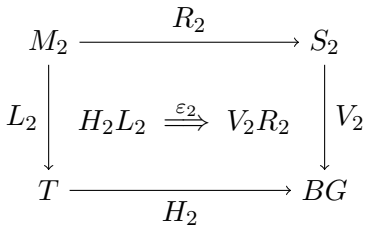
在 BG 中可交换。

(4) 定义 **3.1** 中跨越的矩阵 $[M,\varepsilon]$: $\pi_0(S) \times \pi_0(T) \to \mathbf{Q}G$ G-跨越 3.1.(1) 为

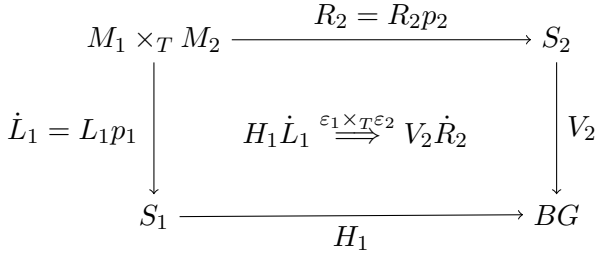
$$[M,\varepsilon](c,d) = \sum_{g\in G} \chi((c\backslash M/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\})\chi(T\{d\})g \qquad c \in \pi_0(S), d \in \pi_0(T)$$

（5）从 S_1 到 T 的 G-跨越与从 T 到 S_2 的 G-跨越的复合

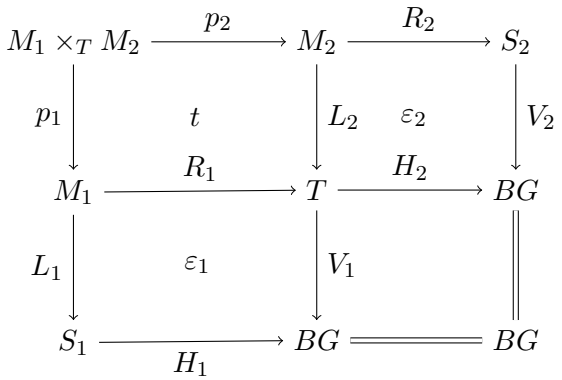




若 $V_1 = H_2$: $T \to BG$，则定义为从 S_1 到 S_2 的 G-跨越

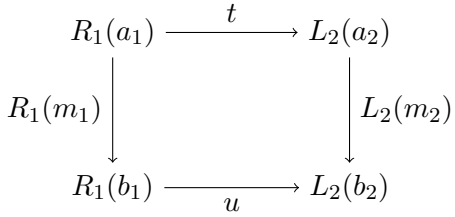


在同伦交换图的外边



其中 $\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2$: $\mathrm{Ob}(M_1 \times_T M_2) \to G$ 是映射 $(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)(a_1, t, a_2) = \varepsilon_2(a_2)V_1(t)\varepsilon_1(a_1)$。

对于任意态射(m_1, m_2): $(a_1, t, a_2) \to (b_1, u, b_2)$ 属于 $M_1 \times_T M_2$, $uR_1(m_1) = L_2(m_2)t$, 如 T 中的交换图所示



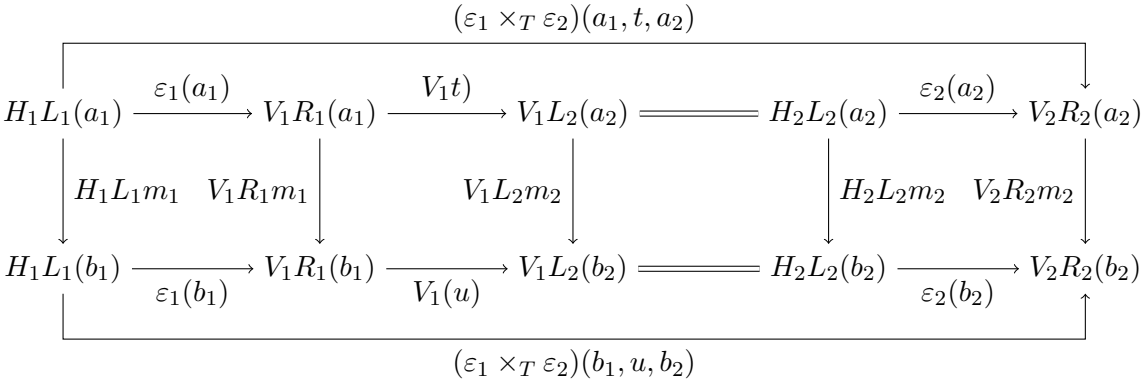
使得

$$(V_1L_2)(m_2)V_1(t) = V_1(u)(V_1R_1)(m_1) \quad (H_2L_2)(m_2)H_2(t) = H_2(u)(H_2R_1)(m_1) \tag{3.2}$$

在 G中。恒等式

$$(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)(b_1, u, b_2)(V_2\dot{R}_2)(m_1, m_2) = (H_1\dot{L}_1)(m_1, m_2)(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)(a_1, t, a_2)$$

成立，因为



在群胚 BG中可交换。

存在函子 $c\backslash M \to \bullet\backslash BG$、 $M/d \to BG/\bullet$和 $c\backslash M/d \to G$ ，定义如下

$c\backslash M \to \bullet\backslash BG$: $(c\backslash\varepsilon)(s_1, a_1) \xrightarrow{VR(m)} (c\backslash\varepsilon)(s_2, a_2)$ for $m \in (c\backslash M)((s_1, a_1), (s_2, a_2))$

$M/d \to BG/\bullet$: $(\varepsilon/d)(a_1, t_1)) \xrightarrow{HL(m)} (\varepsilon/d)(a_2, t_2)$ for $m \in (M/d)((a_1, t_1), (a_2, t_2))$

$c\backslash M/d \to G$: $(c\backslash\varepsilon/d)(s_1, a_1, t_1) \xrightarrow{e} (c\backslash\varepsilon/d)(s_2, a_2, t_2)$ for $m \in (c\backslash M/d)((s_1, a_1, t_1), (s_2, a_2, t_2))$

双侧同伦纤维的情形尤其重要。

引理 3.3。 设 $c\backslash M/d$ 为定义 3.1 中的双侧同伦纤维（3）。

(1) 定义 *3.1* 中的函数 $c\backslash\varepsilon/d$: $\mathrm{Ob}(c\backslash M/d) \to G$ 3.1。(3) 定义了一个从双侧同伦纤维到集合 G 的函子，并诱导出一个集合间的函数 $\pi_0(c\backslash\varepsilon/d)$: $\pi_0(c\backslash M/d) \to G$ 。

(2) 对于任意 $g \in G$，受限双侧同伦纤维的连通分支集为

$$\pi_0((c\backslash M/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\}) = \pi_0(c\backslash M/d)\{\pi_0(c\backslash\varepsilon/d) = g\}$$

而满子群胚$(c\backslash M/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\}$ 是 $c\backslash M/d$在$\pi_0(c\backslash M/d)\{\pi_0(c\backslash\varepsilon/d) = g\}$中的连通分支之并。

证明。 我们在定义 3.1.(3) 中看到， $c\backslash\varepsilon/d$ 在 $c\backslash M/d$的同构对象上取值相同。第二个断言由第一个断言推出。 □

引理 ε-限制的双侧同伦纤维以及引理 3.3 中的双侧同伦纤维都是 Grothendieck 构造

$$c\backslash M/d = \int_{a\in \mathrm{Ob}(M)} S(c, La) \times T(Ra, d)$$
$$(c\backslash M/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\} = \int_{a\in \mathrm{Ob}(M)} \{(s,t) \in S(c, La) \times T(Ra, d) \mid V(t)\varepsilon(\alpha)H(s) = g\}$$

注 3.4（关于可复合的 G-跨越的更多说明）。考虑定义 3.1.(5) 中的两个可复合的 G-跨越。设 c_1, c_2 为 S_1, S_2中的对象。定义 3.1.(4) 的群胚 $c_1\backslash(M_1 \times_T M_2)/c_2$ 的对象是所有满足以下条件的 (s_1, a_1, t, a_2, s_2)： $a_1 \in \mathrm{Ob}(M_1)$, $a_2 \in \mathrm{Ob}(M_2)$, $t \in T(R_1a_1, L_2a_2)$, $s_1 \in S_1(c_1, L_1a_1)$, $s_2 \in S_2(R_2a_2, c_2)$：

$$c_1 \xrightarrow{s_1} L_1a_1 \qquad R_1a_1 \xrightarrow{t} L_2a_2 \qquad R_2a_2 \xrightarrow{s_2} c_2$$

函数 $c_1\backslash(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)/c_2$: $\mathrm{Ob}(c_1\backslash(M_1 \times_T M_2)/c_2) \to G$ 来自定义 3.1.(3) 为

$$\begin{aligned}(c_1\backslash(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)/c_2)(s_1, a_1, t, a_2, s_2) &= V_2(s_2)(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)(a_1, t, a_2)H_1(s_1) = V_2(s_2)\varepsilon_2(a_2)V_1(t)\varepsilon_1(a_1)H_1(s_1)\\ &= (\varepsilon_2(a_2)/d)(a_2, s_2)V_1(t)(c_1\backslash\varepsilon_1)(s_1, a_1) = ((c_1\backslash\varepsilon_1) \times_T (\varepsilon_2/c_2))(s_1, a_1, t, a_2, s_2)\end{aligned}$$

这意味着 $c_1\backslash(M_1 \times_T M_2)/c_2 = (c_1\backslash M_1) \times_T (M_2/c_2)$ 和 $c_1\backslash(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)/c_2 = (c_1\backslash\varepsilon_1) \times_T (\varepsilon_2/c_2)$.

对于固定对象 d，在 T 中， a_1 和 a_2 是 M_1 中的对象，且 M_2 满足 R_1a_1 和 L_2a_2 与 d 位于 T 的同一连通分支中，并且 $g \in G$，存在一个映射

$$\coprod_{g_2g_1=g} \big(T(R_1a_1, d)\{\varepsilon_1/d = g_1\} \times T(d, L_2a_2)\{d/\varepsilon_2 = g_2\}\big) \to T(R_1a_1, L_2a_2)\{\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2 = g\} \tag{3.5}$$

将 (t_1, t_2) 映到 t_2t_1。这是因为若 $t_1 \in T(R_1a_1, d)$ 且 $t_2 \in T(d, L_2a_2)$，则

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2)(a_1, t_2t_1, a_2) &= \varepsilon_2(a_2)V_1(t_2t_1)\varepsilon_1(a_1) = \varepsilon_2(a_2)V_1(t_2)V_1(t_1)\varepsilon_1(a_1))\\ &= \varepsilon_2(a_2)H_2(t_2)V_1(t_1)\varepsilon_1(a_1) = (d\backslash\varepsilon_2)(t_2, a_2)(\varepsilon_1/d)(a_1, t_1)\end{aligned}$$

如 $V_1 = H_2$ 所示。映射 (3.5) 是 $|T(d, d)|$ 对 1 满射，因为任意态射 $t \in T(R_1a_1, L_2a_2)$ 都存在经过 d 的 $|T(d, d)|$分解 $t = t_2t_1$, $t_1 \in T(R_1a_1, d)$, $t_2 \in T(d, L_2a_2)$。

引理 3.6. 对于可复合的 G-群胚跨越，如定义 3.1所述(5)，

$$\chi((M_1 \times_T M_2)\{\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2 = g\}) = \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \chi((M_1/d)\{\varepsilon_1/d = g_1\})\chi(T\{d\})\chi((d\backslash M_2)\{d\backslash\varepsilon_2 = g_2\})$$

证明. 令 $k_\bullet$ 为一个余纤维 在 M_1 和 $k^\bullet$ 上的加权，以及在 M_2 上的加权。群胚的欧拉示性数 d

$$(M_1 \times_T M_2)\{\varepsilon_1 \times_T \varepsilon_2 = g\} = \int_{(a_1,a_2)\in \mathrm{Ob}(M_1^{\mathrm{op}}\times M_2)} \{t \in T(R_1a_1, L_2a_2) \mid \varepsilon_2(a_2)V_1(t)\varepsilon_1(a_1) = g\}$$

是[4,定义 1.10 命题 2.8 p]

$$\sum_{a_1,a_2} k_{a_1}k^{a_2}|\{t\in T(R_1a_1,L_2a_2)\mid \varepsilon_2(a_2)V_1(t)\varepsilon_1(a_1)=g\}|$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{\substack{a_1,a_2\\ T(R_1a_1,d)\neq\emptyset, T(d,L_2a_2)\neq\emptyset}} k_{a_1}k^{a_2}|\{t\in T(R_1a_1,L_2a_2)\mid \varepsilon_2(a_2)V_1(t)\varepsilon_1(a_1)=g\}|$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} |T(d,d)|^{-1} \sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \sum_{\substack{a_1,a_2\\ T(R_1a_1,d)\neq\emptyset, T(d,L_2a_2)\neq\emptyset}} k_{a_1}k^{a_2}\times$$
$$|\{t_1\in T(R_1a_1,d)\mid V_1(t_1)\varepsilon_1(a_1)=g_1\}||\{t_2\in T(d,L_2a_2)\mid \varepsilon_2(a_2)H_2(t_2)=g_2\}|$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \chi(T\{d\}) \sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \Big(\sum_{a_1} k_{a_1}|\{t_1\in T(R_1a_1,d)\mid V_1(t_1)\varepsilon_1(a_1)=g_1\}|\Big)\times$$
$$\Big(\sum_{a_2} k^{a_2}|\{t_2\in T(d,L_2a_2)\mid \varepsilon_2(a_2)H_2t_2)=g_2\}|\Big)$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{g_2g_1=g} \chi((M_1/d)\{\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})\chi((d\backslash M_2)\{d\backslash\varepsilon_2=g_2\})$$

因子 $|T(d,d)|^{-1}=\chi(T\{d\})$ 出现在第二个等号处，因为 (3.5) 是 $|T(d,d)|$-对-1。 □

定理 3.7。 如定义 G 中所述的群胚可合成 3.1 的 (5) ，

$$[M_1\times_T M_2,\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2]=[M_1,\varepsilon_1][M_2,\varepsilon_2]$$

证明。 引理 3.6应用于

$$((c_1\backslash M_1)\times_T(M_2/c_2))\{(c_1\backslash\varepsilon_1)\times_T(\varepsilon_2/c_2)=g\}=(c_1\backslash(M_1\times_T M_2)/c_2)\{c_1\backslash(\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2)/c_2=g\}$$

给出

$$\chi((c_1\backslash(M_1\times_T M_2)/c_2)\{c_1\backslash(\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2)/c_2=g\})$$
$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \chi((c_1\backslash M_1/d)\{c_1\backslash\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})\chi((d\backslash M_2/c_2)\{d\backslash\varepsilon_2/c_2=g_2\}) \tag{3.8}$$

对所有 $g\in G$, $c_1\in\in\mathrm{Ob}(S_1)$、 $c_2\in\in\mathrm{Ob}(S_2)$, 等式链

$$([M_1,\varepsilon_1][M_2,\varepsilon_2])(c_1,c_2) \overset{\text{Rmk 3.9}}{=} \sum_{d\in\pi_0(T)} [M_2,\varepsilon_2](d,c_2)[M_1,\varepsilon_1](c_1,d)$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \Big(\sum_{g_2\in G} \chi((d\backslash M_2/c_2)\{d\backslash\varepsilon_2/c_2=g_2\})\chi(S_2\{c_2\})g_2\Big)\Big(\sum_{g_1\in G} \chi((c_1\backslash M_1/d)\{c_1\backslash\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})g_1\Big)$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \big(\chi((d\backslash M_2/c_2)\{d\backslash\varepsilon_2/c_2=g_2\})\chi(S_2\{c_2\})\chi((c_1\backslash M_1/d)\{c_1\backslash\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})\big)g$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \Big(\sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \chi((c_1\backslash M_1/d)\{c_1\backslash\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})\chi((d\backslash M_2/c_2)\{d\backslash\varepsilon_2/c_2=g_2\})\chi(S_2\{c_2\})\Big)g$$

$$= \sum_{d\in\pi_0(T)} \Big(\sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}} \chi((c_1\backslash M_1/d)\{c_1\backslash\varepsilon_1/d=g_1\})\chi(T\{d\})\chi((d\backslash M_2/c_2)\{d\backslash\varepsilon_2/c_2=g_2\})\chi(S_2\{c_2\})\Big)g$$

$$\overset{(3.8)}{=} \sum_{g\in G} \chi((c_1\backslash(M_1\times_T M_2)/c_2)\{c_1\backslash(\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2)/c_2=g\})\chi(S_2\{c_2\})g$$

$$= [M_1\times_T M_2,\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2](c_1,c_2)$$

现在证明该定理。 □

注 3.9。 定理 3.7 对非阿贝尔有限群同样成立 G 前提是我们采用约定

$$([M_1,\varepsilon_1][M_2,\varepsilon_2])(c_1,c_2)=\sum_{d\in\pi_0(T)}[M_2,\varepsilon_2](d,c_2)[M_1,\varepsilon_1](c_1,d)$$

用于可能定义在非交换群环$\mathbf{Q}G$上的矩阵乘积。

借助复特征 $\rho\colon \mathbf{Q}G\to\mathbf{C}$，我们可以关联一个取复值函数

$$[[M,\varepsilon]]=\rho\circ[M,\varepsilon]\colon \pi_0(S)\times\pi_0(T)\xrightarrow{[M,\varepsilon]}\mathbf{Q}G\xrightarrow{\rho}\mathbf{C} \tag{3.10}$$

到任意 G-跨越。这些复矩阵仍满足 $[[M_1\times_T M_2,\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2]]=[[M_1,\varepsilon_1]][[M_2,\varepsilon_2]]$ 对于可复合的 G-跨越成立。

注 3.11（列向量和行向量）。 对于形如以下形式的 G-跨越

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{1\} \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon_1\colon HL\Longrightarrow e & \downarrow \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{R} & T \\ \downarrow & \varepsilon_2\colon e\Longrightarrow VR & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \{1\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

我们分别关联了列向量和行向量

$$[A,\varepsilon_1](c,1)=\sum_{g\in G}\chi((c\backslash A)\{c\backslash\varepsilon_1=g\})g\qquad [B,\varepsilon_2](1,d)=\sum_{g\in G}\chi((B/d)\{\varepsilon_2/d=g\})T(\{d\})g$$

其中 $c\in\pi_0(S)$、 $d\in\pi_0(T)$，并且

$$\mathrm{Ob}(c\backslash A)=\{(a,s)\mid a\in\mathrm{Ob}(A),s\in S(c,La)\}\quad \mathrm{Ob}((c\backslash A)\{c\backslash\varepsilon_1=g\})=\{(a,s)\in\mathrm{Ob}(c\backslash A)\mid\varepsilon_1(a)H(s)=g\}$$
$$(c\backslash A)((a_1,s_1),(a_2,s_2))=\{m\in A(a_1,a_2)\mid L(m)s_1=s_2\}$$
$$\mathrm{Ob}(B/d)=\{(b,t)\mid b\in\mathrm{Ob}(B),t\in T(Rb,d)\}\quad \mathrm{Ob}((B/d)\{\varepsilon_2/d=g\})=\{(b,t)\in\mathrm{Ob}(B/d)\mid V(t)\varepsilon_2(b)=g\}$$
$$(B/d)((b_1,t_1),(b_2,t_2))=\{m\in B(b_1,b_2)\mid t_1=t_2R(m)\}$$

4. Categorical aspects of G-spans

根据定理 3.7 存在函子 **跨越**$_G\to$ **矩阵**$_R$ 对于 $R=\mathbf{Q}G$ 或 $R=\mathbf{C}$ 其中

跨越$_G$**：** 其对象为有限群胚的范畴 $S\xrightarrow{H}BG$ 在 BG，且其态射（$S\xrightarrow{H}BG$）$\to$（$T\xrightarrow{V}BG$）是 G-跨越，如定义 3.1.(1)所述。 G-跨越的复合由同伦拉回给出，如定义3.1.(5)所述。

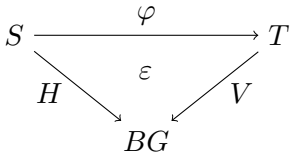
矩阵$_R$**：** 是一个范畴，其对象为有限集，态射 $I\to J$ 是函数 $I\times J\to R$。复合为矩阵乘法。

函子 $\mathsf{span}_G\to\mathsf{mat}_R$ 将群胚态射 $S\xrightarrow{H}BG$ 在 BG 上的对象映为集合 $\pi_0(S)$，并将定义 3.1.(1) 中顶点为 M、自然变换为 $\varepsilon\colon \mathsf{Ob}(M)\to G$ 的 G-跨越映为定义 3.1.(4) 中对于 $R=\mathsf{Q}G$ 或 $[[M,\varepsilon]]$ 对于 $R=\mathsf{C}$ 的矩阵$[M,\varepsilon]$（3.10）。我们有如下交换图，其中竖直映射按照定义 3.1.(4) 将矩阵赋给 G-跨越

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{span}_G(S_1\xrightarrow{H}BG,T\xrightarrow{R}BG)\times\mathbf{span}_G(T\xrightarrow{R}BG,S_2\xrightarrow{V}BG) & \longrightarrow & \mathbf{span}_G(S_1\xrightarrow{H}BG,S_2\xrightarrow{V}BG) \\ {\scriptstyle [\cdot,\cdot]\times[\cdot,\cdot]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\cdot,\cdot]} \\ \mathbf{mat}_R(\pi_0(S),\pi_0(T))\times\mathbf{mat}_R(\pi_0(T),\pi_0(S_2)) & \longrightarrow & \mathbf{mat}_R(\pi_0(S_1),\pi_0(S_2)) \end{array}$$

而上方的水平映射是 G-跨越的复合，如定义3.1.（5）所示，而下方的映射表示在 R上进行矩阵乘法。

假设



这是一个有限群胚的图表，并且函数 $\varepsilon\colon \mathrm{Ob}(S) \to G$ 是自然变换 $H \Longrightarrow V\varphi$，满足

$$\begin{array}{ccc} Ha_1 & \xrightarrow{\varepsilon(a_1)} & V\varphi a_1 \\ {\scriptstyle H(s)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (V\varphi)(s)} \\ Ha_2 & \xrightarrow[\varepsilon(a_2)]{} & V\varphi a_2 \end{array}$$

对每个态射 $s\colon a_1 \to a_2 \in S$，在 G 中交换。设 $(\varphi,\varepsilon)_* \in$ **跨越**$_G(S \xrightarrow{H} BG, T \xrightarrow{V} BG)$ 和 $(\varphi,\varepsilon^{-1})^* \in$ **跨越**$_G(T \xrightarrow{V} BG, S \xrightarrow{H} BG)$ 为 G-跨越

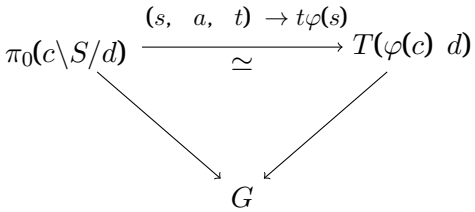
$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & T \\ \| & \varepsilon(a) & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} S & = & S \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \varepsilon(a)^{-1} & \downarrow{\scriptstyle H} \\ T & \xrightarrow[V]{} & BG \end{array}$$

并设 $T(\varphi(c)\ d) \xrightarrow{\varphi_*\ c\ d} G \xleftarrow[(,)(c,d)]{\varphi^*} T(d,\varphi(c))$ 为映射 $\varphi_*(c,d)(t) = V(t)\varepsilon(c)$，$\varphi^*(d,c)(t) = \varepsilon(c)^{-1}V(t)$，$c \in \pi_0(S)$，$d \in \pi_0(T)$。

命题 4.1. 函数 $[(\varphi,\varepsilon)_*]\colon \pi_0(S) \times \pi_0(T) \to \mathbf{Q}G$ 和 $[(\varphi,\varepsilon^{-1})^*]\colon \pi_0(T) \times \pi_0(S) \to \mathbf{Q}G$ 是

$$[(\varphi,\varepsilon)_*](c,d) = \chi(T\{d\}) \sum_{g\in G} |\varphi_*(c,d)^{-1}(g)|g \qquad [(\varphi,\varepsilon^{-1})^*](d,c) = \chi(S\{c\}) \sum_{g\in G} |\varphi^*(d,c)^{-1}(g)|g$$

证明。设 c 是 S 的一个对象，d 是 T 的一个对象。在 $(\varphi,\varepsilon)_*$ 中，$c\backslash S/d$ 的对象是三元组 (s,a,t)，其中 $a \in \mathrm{Ob}(S)$，$s \in S(c,a)$，$t \in T(\varphi(a)\ d)$。$c\backslash S/d$ 中的态射 $(s_1,a_1,t_1) \to (s_2,a_2,t_2)$ 是一个态射 $m \in S(a_1,a_2)$，满足 $s_2 = ms_1$ 属于 S，且 $t_1 = t_2\varphi(m)$ 属于 T。注意，$c\backslash S/d$ 等价于其连通分支集，因为从一个对象到另一个对象至多只有一个态射。事实上，(s_1,a_1,t_1) 和 (s_2,a_2,t_2) 同构，当且仅当 $t_1\varphi(s_1) = t_2\varphi(s_2)$。图表



由于 $(c\backslash\varepsilon/d)(s,\ a,\ t) = V(t)\varepsilon(a)H(s) = V(t)V(\varphi(s))\varepsilon(c) = V(t\varphi(s))\varepsilon(c)$ 成立。这表明 $\pi_0(c\backslash S/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\} = \varphi_*(c,\ d)^{-1}(g)$。

$(\varphi,\ \varepsilon)^*$ 的证明类似。关键在于图表

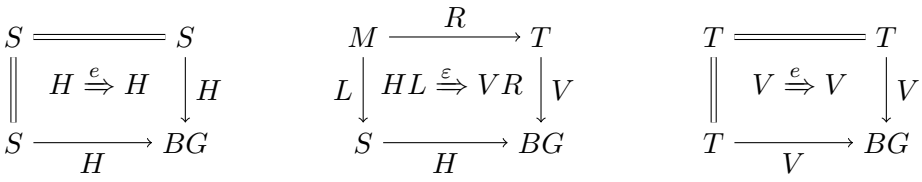


FIGURE 1. 三 G-跨越

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(d\backslash S/c) & \xrightarrow[\simeq]{(t,a,s)\to\varphi(s)t} & T(\varphi(c),d) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & G & \end{array}$$

是可交换的，因为 $(d\backslash\varepsilon/c)(t,\ a,\ s) = H(s)\varepsilon(a)^{-1}V(t) = \varepsilon(c)^{-1}V(\varphi(s))V(t) = \varepsilon(c)^{-1}V(\varphi(s)t)$。这表明 $\pi_0(d\backslash S/c)\{d\backslash\varepsilon/c = g\} = \varphi^*(d,\ c)^{-1}(g)$。□

对于 G 的任意有限子群 U，其元素在 $\mathbf{Q}G$ 中的平均和

$$\overline{U} = \frac{1}{|U|}\sum_{g\in U} g \tag{4.2}$$

是 $\mathbf{Q}G$ 中的一个幂等元 $\overline{U}^2 = U$。

考虑图 1 中的 G-跨越，其中 H、L、R、V 是群胚态射，且 $e\colon \mathrm{Ob}(S) \to G$、$e\colon \mathrm{Ob}(T) \to G$ 是分别映到 G 的单位元 e 的常值函数。我们将 $[M,\varepsilon]$ 记作中间的一般 G-跨越的矩阵。另外两个 G-跨越是 $(\mathrm{id}_S, e)_* = (\mathrm{id}_S, e)^*$ 和 $(\mathrm{id}_T, e)_* = (\mathrm{id}_T, e)^*$，它们由 BG 上的恒等态射定义。

引理 4.3。 $[(\mathrm{id}_S, e)_*]$ 是 $\mathbf{Q}G$ 上的幂等对角矩阵，其对角线元素为

$$[(\mathrm{id}_S, e)_*](c,c) = \overline{HS(c,c)}, \qquad c \in \pi_0(S)$$

证明。 这是命题 G-跨越 $(\mathrm{id}_S,\ e)_*$ 的矩阵，该命题 4.1 的对角线上有

$$[(\mathrm{id}_S, e)_*](c,c) = \sum_{g\in G}\frac{1}{|S(c,c)|}|\{s \in S(c,c) \mid H(s) = g\}| = \sum_{g\in HS(c,c)}\frac{1}{|HS(c,c)|}g = \overline{HS(c,c)}$$

而非对角元素为 0。 □

注记 4.4。 引理 4.3 中的对角幂等矩阵及其复数伴随矩阵

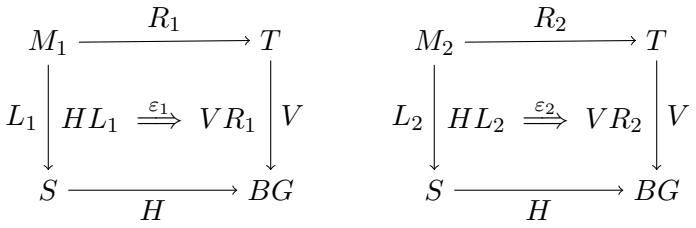
$$[(\mathrm{id}_S, e)_*] = \mathrm{diag}(\overline{HS(c,c)})_{c\in\pi_0(S)} \qquad [[(\mathrm{id}_S, e)_*]] = \rho([(\mathrm{id}_S, e)_*])$$

除非对所有对象 c，$HS(c,\ c)$ 都是平凡群，否则它们可能不是单位矩阵。例如，如果$G \le U(1)$ 是由复数单位元构成的有限循环群，

$$[[(\mathrm{id}_S, e)_*]](c,c) = \rho(\overline{HS(c,c)}) = \begin{cases} 1 & |HS(c,c)| = 1 \\ 0 & |HS(c,c)| > 1 \end{cases} \qquad c \in \pi_0(S)$$

因此 $[[(\mathrm{id}_S,\ e)_*,\ e]]$ 是一个对角线上元素为 0 或 1 的对角矩阵。

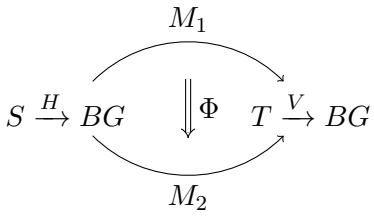
考虑两个 G-跨越



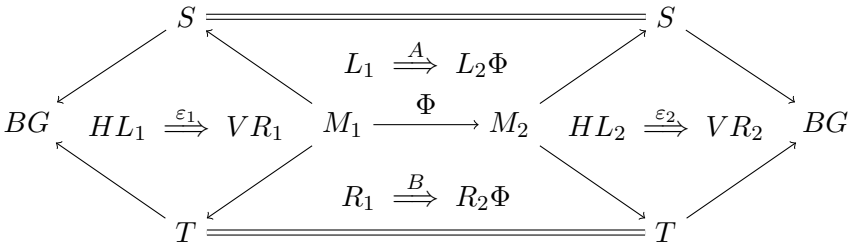
从 $S \xrightarrow{H} BG$ 到 $T \xrightarrow{V} BG$。

定义 4.5. 从 G-跨越 M_1 到 G-跨越 M_2 的 G-跨越态射是由一个函子 $\Phi\colon M_1 \to M_2$ 和两个自然变换 $A\colon L_1 \Longrightarrow L_2\Phi$, $B\colon R_1 \Longrightarrow R_2\Phi$ 组成的三元组 (A, Φ, B)，满足 $V(Bx)\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(\Phi x)H(Ax)$ 对所有 $x \in \mathrm{Ob}(M_1)$ 均成立。

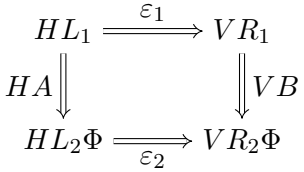
数据为 G-跨越态射 $(A, \Phi, B)\colon M_1 \Longrightarrow M_2$ 的数据，有时以图形方式表示为



构成图表



其中



是一个交换图，展示了从 M_1 到 BG 的群胚态射之间的自然变换。

函子 $\Phi\colon M_1 \to M_2$ 诱导出一个函子 $c\backslash\Phi/d\colon c\backslash M_1/d \to c\backslash M_2/d$，它作用于 $c \in \pi_0(S)$ 和 $d \in \pi_0(T)$ 上的双侧同伦纤维，其作用为

$$(c \xrightarrow{\alpha} L_1x, x, R_1x \xrightarrow{\beta} d) \to (c \xrightarrow{\alpha} L_1x \xrightarrow{Ax} L_2\Phi x, \Phi x, R_2\Phi x \xrightarrow{(Bx)^{-1}} R_1x \xrightarrow{\beta} d)$$

在对象上。由于

$$\begin{aligned}(c\backslash\varepsilon_2/d)&(c \xrightarrow{\alpha} L_1x \xrightarrow{Ax} L_2\Phi x, \Phi x, R_2\Phi x \xrightarrow{(Bx)^{-1}} R_1x \xrightarrow{\beta} d)\\ &= V(\beta \circ (Bx)^{-1})\varepsilon_2(\Phi x)H(Ax \circ \alpha) = V(\beta)V(Bx)^{-1}\varepsilon_2(\Phi x)H(Ax)H(\alpha) = V(\beta)\varepsilon_1(x)H(\alpha)\\ &= (c\backslash\varepsilon_1/d)(c \xrightarrow{\alpha} L_1x, x, R_1x \xrightarrow{\beta} d)\end{aligned}$$

函子 $c\backslash\Phi/d$ 限制为受限双侧同伦纤维之间的函子

$$(c\backslash M_1/d)\{c\backslash\varepsilon_1/d = g\} \xrightarrow{c\backslash\Phi/d} (c\backslash M_2/d)\{c\backslash\varepsilon_2/d = g\}$$

对于所有 $g \in G$。

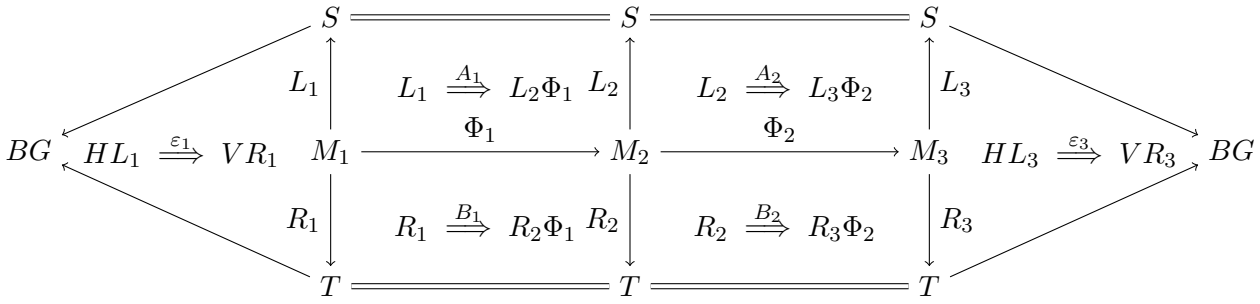
G-跨越态射 $M_1 \overset{(A_1,\Phi_1,B_1)}{\Longrightarrow} M_2 \overset{(A_2,\Phi_2,B_2)}{\Longrightarrow} M_3$ 在 G-跨越 $(S \xrightarrow{H} BG) \xrightarrow{M_1\ M_2\ M_3} (T \xrightarrow{V} BG)$ 之间的纵向复合，定义为 G- 跨越态射

$$(A_2,\Phi_2,B_2) * (A_1,\Phi_1,B_1) = (A_2\Phi_1 \circ A_1, \Phi_2 \circ \Phi_1, B_2\Phi_1 \circ B_1) \colon M_1 \implies M_3 \tag{4.6}$$

这确实是一个从 M_1 到 M_3 的 G-跨越态射，因为

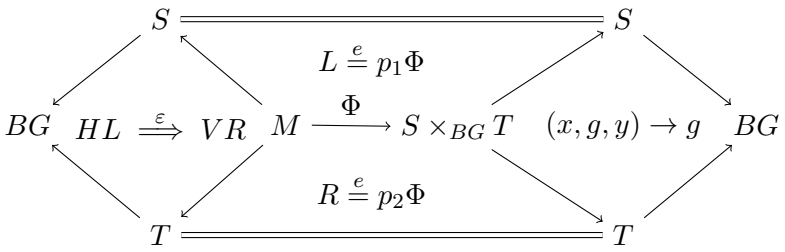
$$\begin{aligned} V(B_2\Phi_1(x) \circ B_1x)\varepsilon_1(x) &= V(B_2\Phi_1(x))V(B_1x)\varepsilon_1(x) = V(B_2\Phi_1(x))\varepsilon_2(\Phi_1x)H(A_1x) \\ &= \varepsilon_3(\Phi_2\Phi_1x)H(A_2(\Phi_1x))H(A_1x) = \varepsilon_3(\Phi_2\Phi_1x)H(A_2(\Phi_1x) \circ A_1x) \end{aligned}$$

对于所有 $x \in \mathsf{Ob}(M_1)$。该图表展示了我们可以从中提取可复合的自然变换$L_1 \overset{A_1}{\Longrightarrow} L_2\Phi_1 \overset{A_2\Phi_1}{\Longrightarrow} L_3\Phi_2\Phi_1$ 和 $R_1 \overset{B_1}{\Longrightarrow} R_2\Phi_1 \overset{B_2\Phi_1}{\Longrightarrow} R_3\Phi_2\Phi_1$,



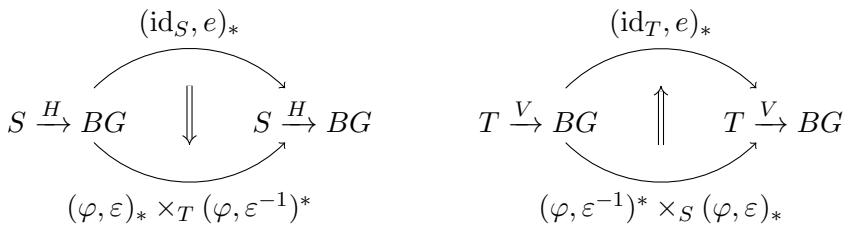
展示了这两个 G-跨越态射纵向复合所需的要素。（ G-跨越 M_2 的自然变换 $HL_2 \overset{\varepsilon_2}{\Longrightarrow} VR_2$ 已省略。）

例 4.7. 任意 G-跨越 $M \in$ **跨越**$_G(S \xrightarrow{H} BG, T \xrightarrow{V} BG)$都存在一个显然的 G-跨越态射 (e,Φ,e)，指向同伦拉回 $S \times_{BG} T \in$ **跨越**$_G(S \xrightarrow{H} BG, T \xrightarrow{V} BG)$



其中，对于所有 $x \in \mathsf{Ob}(M)$， $\Phi(x) = (Lx, \varepsilon x, Rx)$。在同伦拉回中，$\mathsf{Ob}(S \times_{BG} T) = \mathsf{Ob}(S) \times G \times \mathsf{Ob}(T)$，且 $p_1(x,g,y) = x$, $p_2(x,g,y) = y$。

例 4.8. 存在 G-跨越态射



基于函子 $S \to S \times_T S\colon x \to (x,\ \mathrm{id}_{\varphi x},\ x)$, $S \times_S S \to T\colon (x,\ s,\ x) \to \varphi x$。关键在于 $(\varepsilon \times_T \varepsilon^{-1})(x,\ \mathrm{id}_{\varphi x},\ x) = \varepsilon(x)^{-1}\varepsilon(x) = e$ 且 $(\varepsilon^{-1} \times_S \varepsilon)(x,\ s,\ x) = \varepsilon(x)H(s)\varepsilon(x)^{-1} = V(\varphi x)$。

任意 G-跨越 $M \in$ **跨越**$_G(S \xrightarrow{H} BG,\ T \xrightarrow{V} BG)$ 的矩阵 $[M,\varepsilon]$ 始终属于左乘 $[(\mathrm{id}_S,\ e)_*]$ 和右乘 $[(\mathrm{id}_T,\ e)_*]$ 的 $(+1)$-特征子空间。

命题 4.9。 图 G-跨越的矩阵 1 满足以下方程

$$[(\mathrm{id}_S, e)_*][M,\varepsilon] = [M,\varepsilon] = [M,\varepsilon][(\mathrm{id}_T, e)_*]$$

证明。 G-跨越 $(\mathrm{id}_S, e)_*$ 与 M 的复合是如下的 G-跨越

$$\begin{array}{ccc} S \times_S M & \xrightarrow{Rp_2} & T \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & e \times_S \varepsilon & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG \end{array}$$

由图表导出

$$\begin{array}{ccccc} S \times_S M & \xrightarrow[\simeq]{p_2} & M & \xrightarrow{R} & T \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & = & S & \xrightarrow[H]{} & BG \\ \| & e & \downarrow{\scriptstyle H} & & \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG & & \end{array}$$

由定理 3.7 可知 $[(\mathrm{id}_S, e)_*][M,\varepsilon] = [S \times_S M, e \times_S \varepsilon]$，因此只需证明 $[S \times_S M, e \times_S \varepsilon] = [M,\varepsilon]$。 $S \times_S M$的对象为 (x_1, s, x_2)，其中 $x_1 \in \mathrm{Ob}(S)$、 $x_2 \in \mathrm{Ob}(M)$、 $s \in S(x_1, Lx_2)$ 且 $(e \times_s \varepsilon)(x_1, s, x_2) = \varepsilon(x_2)H(s)$，由定义 3.1.(5) 得出。

函子 $p_2 \colon S \times_S M \to M$ 将对象 (x_1, s, x_2) 映射到 x_2，它是一个等价：存在函子 $q \colon M \to S \times_S M$，其在对象上的映射为 $x \to (Lx, \mathrm{id}_{Lx}, x)$，且两个复合都同构于恒等函子。 q 和 p_2 都可以很容易地提升为 G-跨越态射，介于$S \times_S M$与 M之间。这些态射在受限双侧同伦纤维 $(c\backslash(S \times_S M)/d)\{c\backslash\varepsilon/d = g\}$ 和 $(c\backslash M/d)\{c\backslash(e \times_S \varepsilon)/d = g\}$ 之间诱导出等价。由于等价群胚具有相同的欧拉示性数 [4, 命题 2.4]，故 $[S \times_S M, e \times_S \varepsilon] = [M,\varepsilon]$ 成立。□

我们强调，命题 4.9，它等价于

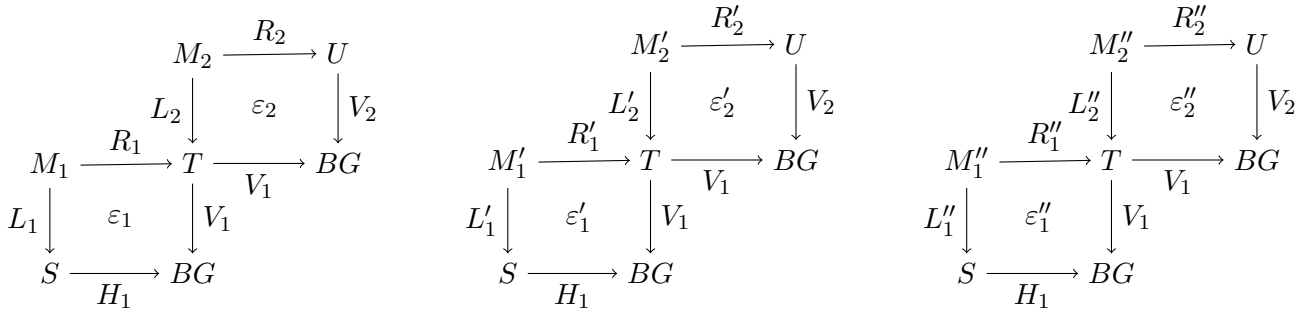
$$[M,\varepsilon](c,d) \in \overline{VT(d,d)} \cdot \mathbf{Q}G \cdot \overline{HS(c,c)}$$
$$[[M,\varepsilon]](c,d) \in \rho(\overline{VT(d,d)}) \cdot \mathbf{C} \cdot \rho(\overline{HS(c,c)})$$

对所有 $c \in \pi_0(S)$、 $d \in \pi_0(T)$，都限制了函数 $[M,\varepsilon]$的可能取值。例如，若 $G = C_6 \le U(1)$ 是 6 阶循环群，且对于某个 $c \in \pi_0(S)$、 $d \in \pi_0(T)$， $\overline{HS(c,\ c)} = C_2$, $\overline{VT(d,\ d)} = C_3$，则 $[M,\varepsilon](c,\ d) \in \mathbf{Q} \cdot C_6$ 如 $C_2C_3 = C_6 = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{5} X^i$ 在 $\mathbf{Q}C_6 = \mathbf{Z}[X]/(X^6 - 1)$ 中。

当 $\overline{G \le U(1)}$ 时，式（3.10）所对应的复矩阵会产生更剧烈的后果：此时 $\rho(\overline{HS(c,\ c)}) = 0$（$\rho(\overline{VT(d,\ d)}) = 0$）对任意非平凡的 $\overline{HS(c,\ c)}$（$\overline{VT(d,\ d)}$。

推论 4.10。 如果 $G \le U(1)$ 是一个由复单位根构成的有限群，那么 $[[M,\varepsilon]](c,d) = 0$，除非 $HS(c,c)$ 和 $VT(d,d)$ 都是平凡群。

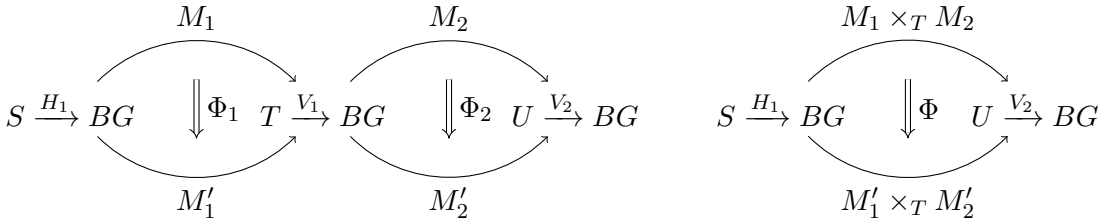
注 4.11 （严格2-范畴**跨越**G）。 假设



有三对可复合的 G-跨越。令 $M_1 \ {}_{(A_1,\ \Phi_1,\ B_1)}\!\Longrightarrow\ M_1'$ 和 $M_2 \ {}_{(A_2,\ \Phi_2,\ B_2)}\!\Longrightarrow\ M_2'$ 为 G-跨越态射。它们的水平复合是 G-跨越态射

$$(A_1,\Phi_1,B_1)\times_T(A_2,\Phi_2,B_2)=(A_1p_1,\Phi_1\times_T\Phi_2,B_2p_2)\colon M_1\times_T M_2 \Longrightarrow M_1'\times_T M_2' \tag{4.12}$$

图示为



其中函子 $\Phi=\Phi_1\times_T\Phi_2\colon\ M_1\times_T M_2\to M_1'\times_T M_2'$给出为

$(\Phi_1\times_T\Phi_2)(x_1,\ t,\ x_2)=(\Phi_1x_1,\ A_2x_2\circ t\circ B_1x_1^{-1},\ \Phi_2x_2)\qquad x_1\in\mathsf{Ob}(M_1)\ \ t\in T(R_1x_1,\ L_2x_2)\ \ x_2\in\mathsf{Ob}(M_2)$ 在对象上。由于 T 中的态射 $R_1'\Phi_1x_1\xleftarrow{B_1x_1}R_1x_1\xrightarrow{t}L_2x_2\xrightarrow{A_2x_2}L_2'\Phi_2x_2$，右侧是 $M_1'\times_T M_2'$ 的一个对象。由于

$$\begin{aligned}V_2(B_2x_2)(\varepsilon_1\times_T\varepsilon_2)(x_1,t,x_2)&\overset{\text{Defn 3.1.(5)}}{=}V_2(B_2x_2)\varepsilon_2(x_2)V_1(t)\varepsilon_1(x_1)\\&=\varepsilon_2'(\Phi_2x_2)V_1(A_2x_2)V_1(t)\varepsilon_1(x_1)=\varepsilon_2'(\Phi_2x_2)V_1(A_2x_2)V_1(t)V_1(B_1x_1^{-1})V_1(B_1x_1)\varepsilon_1(x_1)\\&=\varepsilon_2'(\Phi_2x_2)V_1(A_2x_2)V_1(t)V_1(B_1x_1^{-1})\varepsilon_1'(\Phi_1x_1)H_1(A_1x_1)=(\varepsilon_1'\times_T\varepsilon_2')(\Phi_1\times_T\Phi_2)(x_1,t,x_2)H_1(A_1x_1)\end{aligned}$$

(4.12) 确实是一个 G-跨越态射。

此外，如果 $M_1' \ {}_{(A_1',\ \Phi_1',\ B_1')}\!\Longrightarrow\ M_1''$和 $M_2' \ {}_{(A_2',\ \Phi_2',\ B_2')}\!\Longrightarrow\ M_2''$是 G-跨越态射，则

$$\begin{aligned}&((A_1',\Phi_1',B_1')*(A_1,\Phi_1,B_1))\times_T((A_2',\Phi_2',B_2')*(A_2,\Phi_2,B_2))\\&\quad=((A_1',\Phi_1',B_1')\times_T(A_2',\Phi_2',B_2'))*((A_1,\Phi_1,B_1)\times_T(A_2,\Phi_2,B_2))\colon M_1\times_T M_2\Longrightarrow M_1''\times_T M_2''\end{aligned}$$

这意味着交换律成立。这两个G-跨越态射的函子连通分支 $M_1\times_T M_2\to M_1''\times_T M_2''$均将（$x_1,\ t,\ x_2$）$\in\mathsf{Ob}(M_1\times_T M_2)$、 $R_1x_1\xrightarrow{t}L_2x_2$映到

$$(\Phi_1'\Phi_1x_1,R_1''\Phi_1'\Phi_1x_1\xleftarrow{B_1'\Phi_1x_1}R_1'\Phi_1x_1\xleftarrow{B_1x_1}R_1x_1\xrightarrow{t}L_2x_2\xrightarrow{A_2x_2}L_2'\Phi_2x_2\xrightarrow{A_2'\Phi_2x_2}L_2''\Phi_2'\Phi_2x_2,\Phi_2'\Phi_2x_2)$$

在 $M_1''\times_T M_2''$中。两种情况下，这两个自然变换分别为 $L_1x_1\overset{A_1x_1}{\Longrightarrow}L_1'\Phi_1x_1\overset{A_1'\Phi_1x_1}{\Longrightarrow}L_1''\Phi_1'\Phi_1x_1$和 $L_2x_2\overset{B_2x_2}{\Longrightarrow}L_2'\Phi_2x_2\overset{B_2'\Phi_2x_2}{\Longrightarrow}L_2''\Phi_2'\Phi_2x_2$。因此，**跨越**$_G$ 是一个严格2-范畴，其对象为 BG上的有限群胚，1-态射为 G-跨越，2-态射为 G-跨越态射。

5. Examples

本节包含群胚 G-跨越及其矩阵的示例。

例5.1（用 G-跨越实现矩阵）。 假设 M 是一个有限群胚，而 S 和 T 是有限集合。设 L、 R和 ε 是定义在 M 的对象集上、分别以 S、 T、 G 为值的任意函数。那么

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad R \quad} & T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon\colon \mathrm{Ob}(M)\to G & \downarrow \\ S & \longrightarrow & BG \end{array}$$

是一个矩阵为

$$[M,\varepsilon](c,c)=\sum_{g\in G}\chi(M\{L^{-1}c\cap\varepsilon^{-1}g\cap R^{-1}d\})g \qquad c\in S,\ d\in T,\ g\in G$$

更具体地说，若 K_1、 K_2 是有限群，且 g_1、 g_2 是 G 的元素，则该跨越的 (1×1)-矩阵（取值于 $\mathbf{Q}G$ ）

$$\begin{array}{ccc} BK_1 \amalg BK_1 \amalg BK_2 & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & \varepsilon(\mathrm{Ob}(BK_i))=g_i\in G & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

只有一个非零项 $[BK_1 \amalg BK_1 \amalg BK_2,\varepsilon](1,1)=\left(\frac{2}{|K_1|}g_1+\frac{1}{|K_2|}g_2\right)\in\mathbf{Q}_{\geq 0}G$.

此外，作为例5.1中最简单的情形， G-跨越

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & \varepsilon\colon \mathrm{Ob}(M)\to G & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

对任意函数 $\varepsilon\colon \mathrm{Ob}(M)\to G$，其矩阵为 $[M,\varepsilon](1,1)=\sum_{g\in G}\chi(M\{\varepsilon=g\})g$.

例 5.2. 设 $H\colon S\to BG$、 $V\colon T\to BG$ 是群胚态射，且 $c\in\pi_0(S)$、 $d\in\pi_0(T)$ 分别是 S、 T 的连通分支。跨越的列向量 $[(S\{c\}\hookrightarrow S,e)^*]\colon \pi_0(S)\to\mathbf{Q}G$ 和行向量 $[(T\{d\}\hookrightarrow T,e)_*]\colon \pi_0(T)\to\mathbf{Q}G$ 中，唯一的非零值为

$$\begin{array}{ccc} S\{c\} & = & S\{c\} \\ \downarrow & e & \downarrow{\scriptstyle H|S\{c\}} \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} T\{d\} & \longrightarrow & T \\ \| & e & \downarrow{\scriptstyle V} \\ T\{d\} & \xrightarrow[V|T\{d\}]{} & BG \end{array}$$

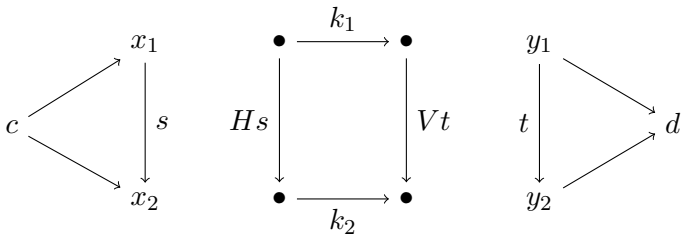
是 $[(S\{c\}\hookrightarrow S,\ e)^*](c)=\overline{HS(c,\ c)}$ 和 $[(T\{d\}\hookrightarrow T,\ e)_*](d)=\overline{VT(d,\ d)}$。证明与引理 4.3 的证明类似。

例 5.3 （从 S 到 T的普适 G跨越）。 设 $S\xrightarrow{H}BG\xleftarrow{V}T$ 是一个群胚余跨度。考虑同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} S\times_{BG}T & \xrightarrow{\quad p_2 \quad} & T \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \varepsilon\colon Hp_1\implies Vp_2 & \downarrow{\scriptstyle V} \\ S & \xrightarrow[H]{} & BG \end{array}$$

其中，对于所有属于 $S\times_{BG}T$ 的对象 x， k， y，都有 $\varepsilon(x,\ k,\ y)=k$，且 $=$属于 S， $\times G\times$属于 T。

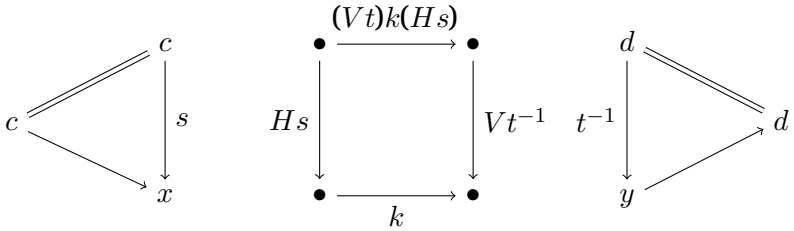
对于 $c\in\pi_0(S)$、 $t\in\pi_0(T)$，双侧同伦纤维 $c\backslash(S\times_{BG}T)/d$的对象为 (s,x,k,y,t)，其中 $(x,k,y)\in\mathrm{Ob}(S\times_{BG}T)$， $s\in S(c,x)$， $t\in T(y,d)$。态射 $(s_1,x_1,k_1,y_1,t_1)\to(s_2,x_2,k_2,y_2,t_2)$ 是一对 $(s,t)\in S(x_1,x_2)\times T(y_1,y_2)$，满足



可交换。存在群胚态射

$$c\backslash(S\times_{BG}T)/d \overset{c\backslash\varepsilon/d}{\rightleftarrows} G$$

其中，以 G 为定义域的函子将 $k\in G$ 映为 $(c\xrightarrow{1}c,\ c,\ k,\ d,\ d\xrightarrow{1}d)$。从 G 到 G 的复合显然是恒等函子。交换图



定义恒等函子与另一个复合之间的自然变换。这些群胚等价限制为满子群胚 $(c\backslash(S\times_{BG}T)/d)$ $\{c\backslash\varepsilon/d=g\}$ 与 $\{g\}$ 之间的等价，其中任意 $g\in G$ 均成立。由此可得

$$[S\times_{BG}T,\varepsilon](c,d)=\frac{1}{|T(d,d)|}\sum G\overset{(4.2)}{=}\frac{|G|}{|T(d,d)|}\overline{G},\qquad c\in\pi_0(S),\,d\in\pi_0(T),$$

下一个例子使用 作用群胚。

定义 5.4. </style右作用 -集合 的作用群胚 是一个群胚，其对象集为，态射为 $(X//G)(x_1,x_2)=\{g\in G\mid x_2g=x_1\}$，对所有 $x_1,x_2\in X$ 均成立。

将 X 视为 BG 上的集合值函子，并将 $X//G=\int_{BG}X$ 视为其 Grothendieck 构造，则欧拉示性数为 $\chi(X//G)=\chi(\int_{BG}X)=|X|/|G|$，根据 [4, 命题 2.8]。

特别地，对于 G 的子群 H，$H\backslash G//G$ 是作用群胚，对应于右陪集 $H\backslash G=\{Hg\mid g\in G\}$ 所构成的右 G-集合，其中这些右陪集是 G 中 H 的右陪集。此时，态射集是双 H-陪集

$$(H\backslash G//G)(Hg_1,Hg_2)=g_2^{-1}Hg_1,\quad g_1,g_2\in G$$

且欧拉示性数为 $\chi(H\backslash G//G)=\frac{1}{|H|}$。两个极端情形分别是 $EG=\{e\}\backslash G//G=G//G$，其对象是 G 的元素；以及 $BG=G\backslash G//G$，它只有 G/G 这一个对象。当 $H\le K\le G$ 时，存在一个函子 $H\backslash G//G\to K\backslash G//G$，它在对象集上是满射的，$H\backslash G\to K\backslash G$，并且在态射集上是单射的，$g_2^{-1}Hg_1\subseteq g_2^{-1}Kg_1$

例 5.5（(1×1)-矩阵）。如果 $S\xrightarrow{H}G\xleftarrow{V}T$ 是群的余跨度，则存在一个群作用 $G\curvearrowright(S\times T)\to G$，定义为 $x\cdot(s,t)=V(t)^{-1}xH(s)$，对所有 $x\in G,\ s\in S,\ t\in T$均成立。设 M是 G的有限（$S\times T$）-不变子集，并令 $M//(S\times T)$ 为作用群胚，其 $\mathrm{Ob}(M//(S\times T))=M$，且态射 $M//(S\times T)(x_1,x_2)=\{(s,t)\mid x_2\cdot(s,t)=x_1\}=\{(s,t)\mid V(t)x_1=x_2H(s)\}$。存在一个 G-跨越

$$\begin{array}{ccc} M//(S\times T) & \xrightarrow{R} & \bullet//T \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon(x)=x & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \bullet//S & \xrightarrow[H]{} & \bullet//G \end{array}$$

其中 $L(s,\ t)\ =s$, $R(s,\ t)\ =t$，对于 $M//(S\times T)$ 中的所有态射 $(s,\ t)$ 均成立。包含映射 $\varepsilon\colon\ M\hookrightarrow G$ 是函子 $HL\implies VR$ 的自然变换，定义为

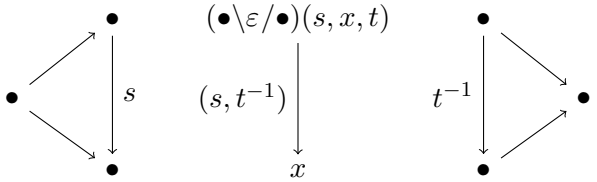
$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{x_1} & \bullet \\ {\scriptstyle H(s)\ =HL(s,\ t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle VR(s,t)\ =V(t)} \\ \bullet & \xrightarrow[x_2]{} & \bullet \end{array}$$

对于每个 $(s,\ t)\ \in M//(S\times T)(x_1,\ x_2)$，$BG=\bullet//G$ 中交换。

对象集 o f 该 t 双边同伦纤维 $\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet$ 是 $S\times M\times T$，而态射集 s

$$(M//(S\times T))((s_1,x_1,t_1),(s_2,x_2,t_2))=\{(s,t)\mid V(t)x_1=x_2H(s),ss_1=s_2,t_2t=t_1\}$$

至多包含一个态射。因此 $\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet=\pi_0(\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet)$. 函数 $(\bullet\backslash\varepsilon/\bullet)(s,x,t)\ =x\cdot(s,t^{-1})\ =V(t)xH(s)$: $S\times M\times T\to M$ 诱导出一个双射 $\pi_0(\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet)\ \to M$，如引理 3.3 所示。事实上，函子 $\bullet\backslash\varepsilon/\bullet$: $\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet\to M$ 与函子 $M\to\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet$（将 x 映射到 (e,x,e)）由一个自然同构连接。



这个群胚等价限制为 $(\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet)\{\bullet\backslash\varepsilon/\bullet=x\}$ 与 $\{x\}$ 之间的等价，对所有 $x\in M$ 均成立。若 $g\in G$ 位于 M 之外，则 $(\bullet\backslash(M//(S\times T)/\bullet)\{\bullet\backslash\varepsilon/\bullet=x\}$ 是一个欧拉示性数为 0 的空群胚。

我们现在已经看到，与 $M//(S\times T)$ 的 G-跨越相关联的 (1×1)-矩阵的元素为

$$[M//(S\times T),\varepsilon](\bullet,\bullet)=\frac{1}{|T|}\sum M$$

特别地，如果 $S=T=\{e\}$ 是 G 的平凡子群，而 M 是 G 中任意有限个元素组成的有限集，那么 G-跨越的矩阵

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & \varepsilon(x)=x & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

就是 (1×1)-矩阵 $[M,\varepsilon](1,\ 1)=\sum M$。例如，对于任意 $x\in G$，G-跨越

$$\begin{array}{ccc} \{x\} & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & \varepsilon(x)=x & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

实现了 1×1-矩阵 x，其定义在 $\mathbf{Q}G$ 上。（取 $G=\sqrt[4]{1}$ 为复四次单位根，即可得到第 1 节中的一个例子。）

例5.6（群的张成）。考虑这两个图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{R} & K_2 \\ {\scriptstyle L}\downarrow & {\scriptstyle HL=(VR)^x} & \downarrow{\scriptstyle V} \\ K_1 & \xrightarrow[H]{} & G \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} BM & \xrightarrow{BR} & BK_2 \\ {\scriptstyle BL}\downarrow & {\scriptstyle \varepsilon=x} & \downarrow{\scriptstyle BV} \\ BK_1 & \xrightarrow[BH]{} & BG \end{array}$$

左侧是一个有限群图表，它在共轭意义下可交换，即存在一个 $x \in G$，使得对所有 $m \in M$， $x(HL)(m) = (VR)(m)x$。右侧的图表由右边的图表诱导而来，是一个 G-跨越，其中 ε 是取值为 x 的常值函数。

$\bullet\backslash BM/\bullet$ 的对象集是 $K_1 \times K_2$，并且 $(\bullet\backslash\varepsilon/\bullet)\ (k_1,\ k_2) = V(k_2)\, xH(k_1)$。此外，群 M 作用于集合 $K_1 \times K_2$， $m \cdot (k_1,\ k_2) = (L(m)\, k_1,\ k_2 R(m)^{-1})$，并且

$$\bullet\backslash BM/\bullet = (K_1 \times K_2)//M \qquad (\bullet\backslash BM/\bullet)\{\bullet\backslash\varepsilon/\bullet = g\} = \{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2 \mid V(k_2)xH(k_1) = g\}//M$$

是作用群胚。由此我们得出

$$[BM,\varepsilon](\bullet,\bullet) = \frac{1}{|M||K_2|}\sum_{g\in G} |\{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2 \mid V(k_2)xH(k_1) = g\}|g$$

根据定义 3.1。（4）。

现在假设我们有可复合的群跨度

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M_2 & \xrightarrow{R_2} & K_3 \\
 & & {\scriptstyle L_2}\downarrow & VL_2 = (V_2R_2)^{x_2} & \downarrow{\scriptstyle V_2} \\
M_1 & \xrightarrow{R_1} & K_2 & \xrightarrow[V]{} & G \\
{\scriptstyle L_1}\downarrow & H_1L_1 = (VR_1)^{x_1} & \downarrow{\scriptstyle V} & & \\
K_1 & \xrightarrow[H_1]{} & G & &
\end{array}$$

其中可以找到 $x_1,\ x_2 \in G$，使得对于所有 $m_1 \in M_1$， $x_1(H_1L_1)\ (m_1) = (VR_1)\ (m_1)\, x_1$；并且对于所有 $m_2 \in M_2$， $x_2(VL_2)\ (m_2) = (V_2R_2)\ (m_2)\, x_2$。对于所有 $(m_1,\ m_2) \in M_1 \times_{K_2} M_2$、 $R_1m_1 = L_2m_2$，又由于 $x_2x_1(H_1L_1)\ (m_1) = (V_2R_2)\ (m_2)\, x_2x_1$，我们可以提取出这两个图表

$$\begin{array}{ccc}
M_1 \times_{K_2} M_2 & \xrightarrow{R_2p_2} & K_3 \\
{\scriptstyle L_1p_1}\downarrow & H_1L_1p_1 = (V_2R_2p_2)^{x_2x_1} & \downarrow{\scriptstyle V_2} \\
K_1 & \xrightarrow[H_1]{} & G
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
B(M_1 \times_{K_2} M_2) & \xrightarrow{B(R_2p_2)} & BK_3 \\
{\scriptstyle B(L_1p_1)}\downarrow & \varepsilon = x_2x_1 & \downarrow{\scriptstyle BV_2} \\
BK_1 & \xrightarrow[BH_1]{} & BG
\end{array}$$

由于 $[B(M_1 \times_{K_2} M_2)\ \varepsilon = x_2x_1] = [BM_1, \varepsilon = x_1][BM_2, \varepsilon = x_2]$ 根据定理 3.7 我们得到组合恒等式

$$\begin{aligned}
&|M_1||K_2||M_2||\{(k_1,k_3) \in K_1 \times K_3 \mid V_2(k_3)x_2x_1H_1(k_1) = g\}| \\
&= |M_1 \times_{K_2} M_2| \sum_{\substack{g_1,g_2\in G \\ g_1g_2=g}} |\{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2 \mid V(k_2)x_1H_1(k_1) = g_1\}||\{(k_2,k_3) \in K_2 \times K_3 \mid V_2(k_3)x_2V(k_2) = g_2\}|
\end{aligned}$$

对所有 $g \in G$均成立。

例 5.7（作用群胚的跨度）。设 H_1、 K_1 和 K_2 是 G 的子群，且满足 $H_1 \leq K_1 \cap K_2$，使得

$$\begin{array}{ccc}
H_1\backslash G//G & \xrightarrow{R} & K_2\backslash G//G \\
{\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon_1 \colon H_1\backslash G \to \{e\} & \downarrow{\scriptstyle V} \\
K_1\backslash G//G & \xrightarrow[H]{} & G\backslash G//G
\end{array}$$

是作用群胚的一个 G-跨越。函数 ε_1 是常值函数，其值为单位元 $e \in G$，因为图表是交换的。

双侧同伦纤维 $K_1g_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2g_2$ 的对象是所有三元组 $(x^{-1}k_1g_1,\ H_1x,\ g_2^{-1}k_2x)$，其中 $k_1\in K_1$、$k_2\in K_2$、$x\in G$，并且

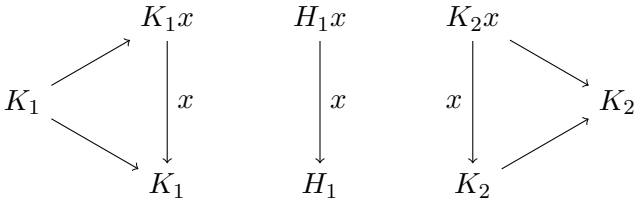
$$(K_1g_1\backslash\varepsilon_1/K_2g_2)(x^{-1}k_1g_1,H_1x,g_2^{-1}k_2x)=g_2^{-1}k_2k_1g_1=g_2^{-1}(K_1\backslash\varepsilon_1/K_2)(x^{-1}k_1,k_2g_1)$$

根据定义 3.1.(3)，对所有 $g_1,\ g_2,\ g\in G$，都有显然的群胚同构

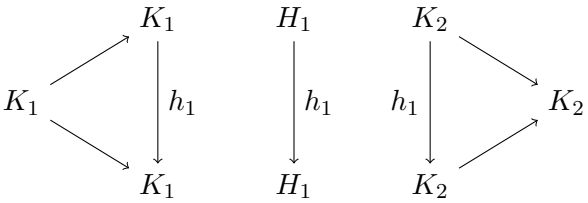
$$K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2\longleftrightarrow K_1g_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2g_2$$

$$(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)\{K_1\backslash\varepsilon_1/K_2=g_2gg_1^{-1}\}\longleftrightarrow(K_1g_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2g_2)\{K_1g_1\backslash\varepsilon_1/K_2g_2=g\}$$

因此，我们只需考虑双侧同伦纤维 $K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2$。首先注意到，任意态射集中至多有一个态射，因此 $K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2$ 等价于其连通分支集。$K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2$中的交换图



表明 $(x^{-1}k_1,\ H_1x,\ k_2x)\cong(k_1,\ H_1,\ k_2)$，另一个图表



表明

$$(k_{11},H_1,k_{21})\cong(k_{12},H_1,k_{22})\iff\exists h_1\in H_1\colon(h_1k_{11},k_{21}h_1^{-1})=(k_{12},k_{22})$$

结论是，$(k_1,\ k_2)\to(k_1,\ H_1,\ k_2)$ 诱导出一个双射

$$H_1\backslash(K_1\times K_2)\xrightarrow{\cong}\pi_0(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)$$

在自由左作用 $h_1\cdot(k_1,k_2)=(h_1k_1,k_2h_1^{-1})$ 下的轨道集合与双侧同伦纤维 $K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2$ 的连通分支集之间。欧拉示性数为

$$\chi(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)=|\pi_0(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)|=|H\backslash(K_1\times K_2)|=\frac{|K_1||K_2|}{|H_1|}$$

引理 3.3 中的函数 $\pi_0(K_1\backslash\varepsilon_1/K_2)\colon\ \pi_0(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)\ =\ H_1\backslash(K_1\times K_2)\ \to\ G$，将$H_1(k_1,k_2)$ 映射到 k_2k_1，并诱导出一个双射

$$H\backslash\{(k_1,k_2)\in K_1\times K_2\mid k_2k_1=g\}\xrightarrow{\cong}\pi_0(K_1\backslash(H_1\backslash G//G/)K_2)\{K_1\backslash\varepsilon_1/K_2=g\}$$

因此欧拉示性数为

$$\chi(K_1\backslash(H_1\backslash G//G)/K_2)\{K_1\backslash\varepsilon_1/K_2=g\})=\frac{|\{(k_1,k_2)\in K_1\times K_2\mid k_2k_1=g\}|}{|H_1|}$$

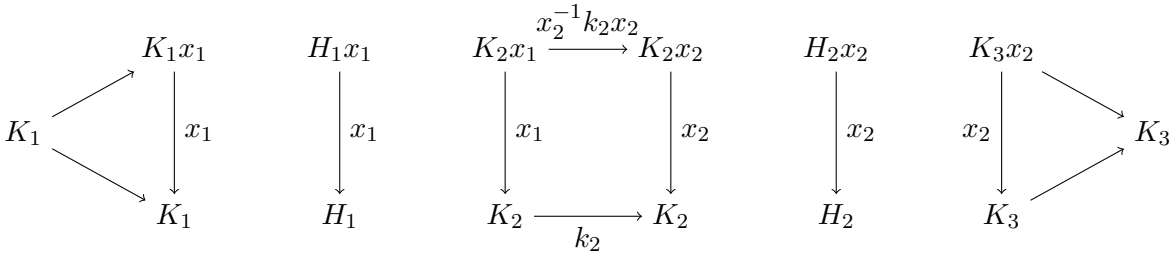
现在我们可以说

$$[H_1\backslash G//G,\varepsilon_1](K_1g_1,K_2g_2)=\frac{1}{|H_1||K_2|}\sum_{g\in G}|\{(k_1,k_2)\in K_1\times K_2\mid k_2k_1=g_2gg_1^{-1}\}|g$$

进一步假设 G 有子群 H_2 和 K_3，且 $H_2\le K_2\cap K_3$。可复合的 G-跨越

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_2\backslash G//G & \longrightarrow & K_3\backslash G//G \\
 & & \downarrow \quad \varepsilon_2\colon H_2\backslash G \to \{e\} & & \downarrow \\
H_1\backslash G//G & \xrightarrow{R} & K_2\backslash G//G & \xrightarrow[V]{} & G\backslash G//G \\
L\downarrow & \quad \varepsilon_1\colon H_1\backslash G \to \{e\} & \downarrow V & & \\
K_1\backslash G//G & \xrightarrow[H]{} & G\backslash G//G & &
\end{array}$$

从 $K_1\backslash G//G$ 到 $K_3\backslash G//G$生成一个 G-跨越 $(H_1\backslash G//G)^{\times_{K_2\backslash G//G}}(H_2\backslash G//G)$。群 $H_1\times H_2$按规则 $(h_1,\ h_2)\cdot(k_1,\ k_2,\ k_3)=(h_1k_1,\ h_2k_2h_1^{-1},\ k_3h_2^{-1})$ 作用于 $K_1\times K_2\times K_3$。与前面的论证大致相同，我们发现，双侧同伦纤维 $K_1\backslash(H_1\backslash G//G\times_{K_2\backslash G//G}H_2\backslash G//G)/K_3$ 的任意对象都同构于以下形式之一：$(k_1,\ H_1,\ k_2,\ H_2,\ k_3)$



其中 $k_1\in(K_1\backslash G//G)(K_1,K_1)=K_1,\ k_2\in(K_2\backslash G//G)(K_2,K_2)=K_2,\ k_3\in(K_3\backslash G//G)(K_3,K_3)=K_3$，并且当且仅当相应的 (k_1,k_2,k_3) 属于同一个 $(H_1\times H_2)$-轨道时，这两个对象同构。这些观察可用于确定引理 3.3 中的函数

$$\pi_0(K_1\backslash(\varepsilon_1\times_{K_2\backslash G//G}\varepsilon_2)/K_3)\colon \pi_0(K_1\backslash(H_1\backslash G//G\times_{K_2\backslash G//G}H_2\backslash G//G)/K_3)=(H_1\times H_2)\backslash(K_1\times K_2\times K_3)\to G$$
$$(H_1\times H_2)(k_1,k_2,k_3)\to k_3k_2k_1$$

以及欧拉示性数

$$\chi((K_1\backslash(H_1\backslash G//G)\times_{K_2\backslash G//G}(H_2\backslash G//G)/K_3)\{K_1\backslash(\varepsilon_1\times_{K_2\backslash G//G}\varepsilon_2)/K_3=g\})$$
$$=\frac{|\{(k_1,k_2,k_3)\in K_1\times K_2\times K_3\mid k_3k_2k_1=g\}|}{|H_1||H_2|}$$

对于任意 $g\in G$。

恒等式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|K_3|}\frac{1}{|H_1|}\frac{1}{|H_2|}\sum_{g\in G}|\{(k_1,k_2,k_3)\in K_1\times K_2\times K_3\mid k_3k_2k_1=g\}|g\\
&\overset{\text{Thm 3.7}}{=}[H_1\backslash G//G\times_{K_2\backslash G//G}H_2\backslash G//G,\varepsilon_1\times_{K_2\backslash G//G}\varepsilon_2](K_1,K_3)\\
&=[H_1\backslash G//G,\varepsilon_1](K_1,K_2)[H_2\backslash G//G,\varepsilon_2](K_2,K_3)\\
&=\frac{1}{|K_2|}\frac{1}{|H_1}\frac{1}{|K_3}\frac{1}{|H_2|}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{g_2g_1=g}|\{(k_1,k_2)\mid k_2k_1=g_1\}||\{(k_2,k_3)\mid k_3k_2=g_2\}|\Big)g
\end{aligned}$$

这等价于

$$|K_2||\{(k_1,k_2,k_3)\mid k_3k_2k_1=g\}|=\sum_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_1g_2=g}}|\{(k_1,k_2)\mid k_2k_1=g_1\}||\{(k_2,k_3)\mid k_3k_2=g_2\}|$$

当然，也可以直接通过 $|K_2|$ 对 1 映射来验证

$$\coprod_{\substack{g_1,g_2\in G\\ g_2g_1=g}}(\{(k_1,k_{21})\mid k_{21}k_1=g_1\}\times\{(k_{22},k_3)\mid k_3k_{22}=g_2\})\to\{(k_1,k_2,k_3)\mid k_3k_2k_1=g\}$$

将 $(k_1,\ k_{21},\ k_{22},\ k_3)$ 映射为 $(k_1,\ k_{22}k_{21},\ k_3)$。

下面是一个 $O(1)$-跨越的例子，其中 $O(1) = \{\pm 1\}$，且带有可逆复矩阵。下面这些群胚将会用到：

Fin：有限集及其双射构成的群胚。Fin_n：Fin 中由所有基数为 n的集合构成的满子群胚。
FinPerm：群胚 FinPerm 的一个对象是一个有序对（$X,\ \sigma$），其中 σ 是有限集 X上的一个置换。态射（$X_1,\ \sigma_1$）$\to$（$X_2,\ \sigma_2$）是一个双射 $f:\ X_1 \to X_2$，满足 $\sigma_1 = \sigma_2^f$。$\mathsf{FinPerm}_{n,k}$：FinPerm 中由所有（$X,\ \sigma$）构成的满子群胚，其中 X 的基数为 n，且 σ 恰有 k 个循环。
FinRel：群胚 FinRel 的一个对象是一个有序对（$X,\ \rho$），其中 $\rho \subseteq X \times X$ 是有限集 X上的一个等价关系。态射（$X_1,\ \rho_1$）$\to$（$X_2,\ \rho_2$）是一个双射 $f:\ X_1 \to X_2$，满足（$f \times f$）$\rho_1 = \rho_2$。
$\mathsf{FinRel}_{n,k}$：FinRel 中由所有（$X,\ \rho$）构成的满子群胚，其中 X 的基数为 n，且 ρ 恰有k 个等价类。

对于任意有限集 X，置换群 $\Sigma(X)$ 对 X 作用于

- $S_1(X,\ k)$，具有 k 个循环的 X 的置换集合
- $S_2(X,\ k)$，X 上具有 k 个等价类的等价关系集合

命题 5.8。取一个基数为 n 的集合 X。

- $\mathbf{FinPerm}_{n,\ k}$ 等价于作用群胚 $S_1(X,k)//\Sigma(X)$。
- $\mathbf{FinRel}_{n.k}$ 等价于作用群胚 $S_2(X,k)//\Sigma(X)$。

证明。*FinPerm*$_n$中的任意对象$(Y,\tau)_k$都同构于某个形如 (X,σ) 的对象，其中$\sigma \in S_1(X,k)$是一个置换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle \tau^f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ X & \xrightarrow[\quad f \quad]{} & Y \end{array}$$

并且对于任意两个元素 $\sigma_1, \sigma_2 \in S_1(X,k)$，$S_1(X,k)//\Sigma(X))(\sigma_1,\sigma_2) = \mathbf{FinPerm}((X,\sigma_1),(X,\sigma_2))$。

$\mathbf{FinRel}_n$中的任意对象$(Y,T)_k$都同构于某个形如 (X,ρ) 的对象，其中 $\rho \in S_2(X,k)$ 是一个关系，并且对于任意两个元素 $\rho_1, \rho_2 \in S_2(X,k)$ □，$S_2(X,k)//\Sigma(X))(\rho_1,\rho_2) = \mathbf{FinRel}((X,\rho_1),(X,\rho_2))$。

这些群胚支持函子，它们将 (X,σ) 或 (X,ρ) 映到集合 $\mathbf{Fin}(X,X)$ 中的 X 的置换。相应的 Grothendieck 构造是这样的群胚，其对象是所有三元组 (X,σ,τ) 或 (X,ρ,τ)，其中 τ 是 X 的一个置换。命题 5.8 和 [4, 命题 2。8]表明

$$\chi(\mathbf{FinPerm}_{n,k}) = S_1(n,k)/n! \qquad \chi(\mathbf{FinRel}_{k,m}) = S_2(k,m)/k!$$

$$\chi(\int_{\mathbf{FinPerm}_{n,k}} \mathbf{Fin}(X,X)) = S_1(n,k) \qquad \chi(\int_{\mathbf{FinRel}_{k,m}} \mathbf{Fin}(X,X)) = S_2(k,m)$$

其中 $S_1(n,\ k)$ 和 $S_2(k,\ m)$ 分别是第一类和第二类斯特林数 [5, pp 18, 33]。在 $O(1)$-跨越中

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathbf{FinPerm}} \mathbf{Fin}(X,X) & \xrightarrow{\quad R \quad} & \mathbf{Z} \\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon_1(X,\sigma) = (-1)^{|X|-|\sigma|} & \downarrow \\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & BO(1) \end{array}$$

$L(X,\ \sigma,\ \tau)\ =|X|$，$X$ 的基数为 $R(X,\ \sigma,\ \tau)\ =|\sigma|$ 中循环的数量，而到$BO(1)$ 的函子是常值的。对于任意两个自然数 n 和 k，双侧同伦纤维

$$n\backslash\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X,X)/k=\int_{\mathbf{FinPerm}_{\mathbf{n,k}}}\mathbf{Fin}(X,X)$$

并且此外，对于任意 $g\in O(1)$,

$$(n\backslash\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X,X)/k)\{n\backslash\varepsilon_1/k=g\}=\begin{cases}n\backslash\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X,X)/k & g=(-1)^{n-k}\\ \emptyset & g\neq(-1)^{n-k}\end{cases}$$

矩阵元素为

$$[\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X,X),\varepsilon_1](n,k)=S_1(n,k)\cdot(-1)^{n-k}\qquad[[\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X,X),\varepsilon_1]](n,k)=(-1)^{n-k}S_1(n,k)$$

分别属于$\mathbf{Q}O(1)$ 和 $\mathbf{Q}$。

类似地，在 $O(1)$-跨越中

$$\begin{array}{ccc}\int_{\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X,X) & \xrightarrow{\quad R\quad} & \mathbf{Z}\\ {\scriptstyle L}\downarrow & \varepsilon_2(X,\rho)=+1 & \downarrow\\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & BO(1)\end{array}$$

$L(X,\rho,\tau)\ =|X|$，X 的基数，以及 $R(X,\rho,\tau)\ =|\rho|$，等价关系 ρ 的等价类数。相应的复矩阵为

$$[[\int_{\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X,X),\varepsilon_2]]=S_2$$

因为双侧同伦纤维

$$k\backslash\int_{\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X,X)/m=\int_{\mathbf{FinRel}_{k,m}}\mathbf{Fin}(X,X)$$

对于任意两个自然数 k 和 m，其欧拉示性数为 $S_2(k,m)$。

在复合 O从$\mathbf{Z}$到 $\mathbf{Z}$的 (1)-跨越（定义3.1.(5)）

$$\begin{array}{ccc}\int_{\mathbf{FinPerm}\times_{\mathbf{Z}}\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X_1,X_1)\times\mathbf{Fin}(X_2,X_2) & \xrightarrow{\quad R\quad} & \mathbf{Z}\\ {\scriptstyle L}\downarrow & (\varepsilon_1\times_{\mathbf{Z}}\varepsilon_2)(X_1,\sigma,X_2,\rho,\tau_1,\tau_2)=(-1)^{|X_1|-|\sigma|} & \downarrow\\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & BO(1)\end{array}$$

顶点是集合值函子 $(X_1,X_2)\ \to\mathsf{Fin}(X_1,X_1)\ \times\mathsf{Fin}(X_2,X_2)$ 在群胚 $\mathsf{FinPerm}\ \times_{\mathbf{Z}}\mathsf{FinRel}$ 上的元素范畴，其中包含所有 (X_1,σ,X_2,ρ)，其中 σ 有限集 X_1 的一个置换，ρ 是有限集 X_2 上的一个等价关系，其基数为 $|X_2|=|\sigma|$。于是 $|\rho|\leq|X_2|=|\sigma|\leq|X_1|$。函子 L 和 R 是 $L(X_1,\sigma,X_2,\rho,\tau_1,\tau_2)\ =|X_1|$ 以及 $R(X_1,\sigma,X_2,\rho,\tau_1,\tau_2)\ =|\rho|$。相应的矩阵

$$\begin{aligned}&[[\int_{\mathbf{FinPerm}\times_{\mathbf{Z}}\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X_1,X_1)\times\mathbf{Fin}(X_2,X_2),\varepsilon_1\times_{\mathbf{Z}}\varepsilon_2]]\\ &=[[\int_{\mathbf{FinPerm}}\mathbf{Fin}(X_1,X_1),\varepsilon_1]][[\int_{\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X_2,X_2),\varepsilon_2]]=\big((-1)^{n-k}S_1(n,k)\big)_{n,k}\big(S_2(k,m)\big)_{k,m}=\big(\delta_{n,m}\big)_{n.m}\end{aligned}$$

根据定理，该矩阵是恒等矩阵 3.7 和 [5,命题 1.4。1]。或者，也可以利用以下事实：

$$n\backslash\int_{\mathbf{FinPerm}\times_{\mathbf{Z}}\mathbf{FinRel}}\mathbf{Fin}(X_1,X_1)\times\mathbf{Fin}(X_2,X_2)/m = \begin{cases}\int_{\mathbf{Fin}_n}\mathbf{Fin}(X_1,X_1)\times\int_{\mathbf{Fin}_n}\mathbf{Fin}(X_2,X_2) & n=m\\ \coprod_{m\le k\le n}\int_{\mathbf{FinPerm}_{n,k}}\mathbf{Fin}(X_1,X_1)\times\int_{\mathbf{FinPerm}_{k,m}}\mathbf{Fin}(X_2,X_2) & n\neq m\end{cases}$$

从而得出相同的结论。

References

[1] John C. Baez、Alexander E. Hoffnung 和 Christopher D. Walker，*Higher dimensional algebra VII: Groupoidification*，《范畴理论与应用》**24** 2010 18, 489 553 2770073 ( )，第 – 期。MR Imma Galvez-Carrillo、Joachim Kock 和 Andrew Tonks，*Homotopy linear algebra*，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》**148** 2018 2, 293 325 3777576 ( )，第 – 期。[2] MR Joachim Kock 和 Jesper M. Møller，*Signs in objective linear algebra, exemplified with exterior powers and determinants*，可从 arXiv 获取。[3] *The Euler characteristic of a category* **13** 2008 21 49, 2393085 Tom Leinster，，《数学文献》（），–《数学文献》MR MR Richard P. Stanley，《剑桥高等数学研究丛书》第 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997 年，Gian-Carlo Rota 作序，1986 年原版的修订重印本。MR MR1442260 (98a:05001)[4] *Enumerative combinatorics. Vol. 1* 49, [5]

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, E–08193 Bellaterra, Spain*Email address*: Joachim.Kock@uab.cat

Matematisk Institut, Universitetsparken 5, DK–2100 København, Denmark*Email address*: moller@math.ku.dk