arXiv:2603.20793v1 [math.RA] 21 Mar 2026

具有扭曲雅可比恒等式的 $\mathfrak{sl}_2$ 无穷小变形

Haoran Zhu*

摘要

我们证明，只要

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1, \qquad \alpha_t = \mathrm{id} + t\alpha_1$$

定义了 $\mathfrak{sl}_2(\mathrm{K})$ 上的无穷小 Hom–李变形，且 $\mathrm{K}[t]/(t^2)$ 与 $(\mathfrak{sl}_2(\mathrm{K}), [\cdot,\cdot]_0, \alpha_1)$ 是 Hom–李代数，那么变形后的括号 $[\cdot,\cdot]_t$ 在 $\mathrm{K}[t]$ 上满足普通雅可比恒等式。这解决了 Makhlouf 和 Silvestrov 于 2010 年提出的一个猜想。

关键词： Hom–李代数、形式变形、无穷小变形、李代数 $\mathfrak{sl}_2$、变形上同调

数学主题分类：17B40, 17B56, 16S80,17B37

1 引言

全文中，设 K 是一个特征为 0 的域。K 上的一个 **Hom–李代数** 是一个三元组 $(V, [\cdot,\cdot], \alpha)$，由一个 K-向量空间 V 和一个双线性斜对称括号组成

$$[\cdot,\cdot]\colon V \times V \longrightarrow V,$$

以及一个线性映射 $\alpha\colon\ V \to V$，使得 Hom–Jacobi 恒等式

$$\sum_{\circlearrowleft x,y,z} [\alpha(x), [y,z]] = 0$$

*数学科学部，南洋理工大学，新加坡 637371，21 Nanyang Link。电子邮箱：zhuh0031@e.ntu.edu.sg

对所有 $x,\ y,\ z \in V$ 均成立，其中求和遍历$(x,\ y,\ z)$的循环置换。

Hom–李代数由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov [2] 提出，作为李代数的扭曲类比。其动机尤其来自 q–变形，以及向量场李代数的离散化和相关构造，这些工作处于拟李代数的框架之中；参见 [5, 6]及其中的参考文献。此后，这一概念在许多方向上得到推广，产生了各种 Hom 型结构，例如 Hom–结合 [6], 、Hom–Hopf [1], 、Hom–Novikov [9], 、BiHom–李代数 [4], 以及 Hom-量子群 [8]。

沿着 Gerstenhaber [3]以及 Nijenhuis–Richardson [7]针对结合代数和李代数所采用的方法，Makhlouf 和 Silvestrov [5] 发展了 Hom–结合代数与 Hom–李代数的单参数形式变形理论。在 Hom–李代数情形中，给定一个固定的 Hom– 李代数 $(V,\ [\cdot,\ \cdot]_0,\ \alpha_0)$，其单参数形式变形由形式幂级数给出

$$[\cdot,\cdot]_t = \sum_{i\geqslant 0} t^i [\cdot,\cdot]_i, \qquad \alpha_t = \sum_{i\geqslant 0} t^i \alpha_i$$

系数为 $[\cdot,\cdot]_i\colon\ V\times V\to V$和 $\alpha_i\colon\ V\to V$，使得 $(V[[t]],[\cdot,\cdot]_t,\alpha_t)$ 是形式幂级数环 K[[t]]上的 Hom–李代数。一阶项$([\cdot,\cdot]_1,\alpha_1)$ 是 §5] 中引入的上同调理论的一个 2-Hom-余循环。

类比李代数的经典变形理论，无穷小变形可通过模 t^2 截断得到。具体而言，我们在环 K$[t]/(t^2)$ 上进行研究，并考虑

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1, \qquad \alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1,$$

满足 K$[t]/(t^2)$ 中的 Hom–Jacobi 恒等式。在这种情况下，我们将$([\cdot,\cdot]_1,\alpha_1)$ 称为变形的**无穷小** 部分。

单李代数 $\mathfrak{sl}_2$(K) 作为李代数在经典意义下是刚性的： $\mathfrak{sl}_2$(K) 的每个形式李代数变形都等价于平凡变形，这一事实反映了 $H^2(\mathfrak{sl}_2(\mathrm{K}),\mathfrak{sl}_2(\mathrm{K}))$ 的消失（Whitehead 引理）。在 §6], 中，Makhlouf 和 Silvestrov 指出，尽管如此，在更广的 Hom–李代数范畴中，仍可构造许多非平凡的 $\mathfrak{sl}_2$(K) 的 Hom–李变形，包括 $\mathfrak{sl}_2$(K) 的 Jackson 型变形以及 Witt 型的 q–变形。他们还描述了所有线性映射

$$\alpha\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$$

使固定的经典括号

$$[x_1,x_2]_0 = 2x_2, \qquad [x_1,x_3]_0 = -2x_3, \qquad [x_2,x_3]_0 = x_1 \tag{1.1}$$

赋予 $(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}),\ [\cdot,\ \cdot]_0,\ \alpha)$ 一个 Hom–李代数结构；参见 $[5, \text{命题 } 6.1]$。

在同一节中，他们按照上述意义考察了$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$的无穷小 Hom–李变形，其形式为

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1, \qquad \alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1,$$

其中 $\alpha_0 = \mathrm{id}_V$，使得 $(V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{K}[t]/(t^2), [\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 是 Hom–李代数，并且$([\cdot,\ \cdot]_1,\ \alpha_1)$ 是 Hom–李上同调中的一个 2-Hom-余循环。他们给出了若干这类配对 $([\cdot,\ \cdot]_1,\ \alpha_1)$的显式族。对于这些特定的族，他们发现，经过适当选择参数，可以令 $\alpha_1 = \mathrm{id}_V$，从而 $\alpha_t = (1+t)\mathrm{id}_V$，且 Hom–Jacobi 恒等式化为通常的 Jacobi 恒等式。换言之，所有这些变形实际上都给出了李代数。

随后，Makhlouf 和 Silvestrov 借助计算机代数系统进行了进一步计算，构造出 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$的其他无穷小 Hom–李变形。在此过程中，他们施加了一个额外条件：要求一阶扭曲 $(V,\ [\cdot,\ \cdot]_0,\ \alpha_1)$ 本身是一个 Hom–李代数。在这一附加限制下，他们发现，计算机生成的每个例子仍然都给出了李代数。基于这一证据，他们在 $[5, \S 6.1, \text{注 } 6.3]$中提出了以下猜想。

猜想 1 (Makhlouf–Silvestrov)**：** 令 $(V、\ [\cdot、\ \cdot]_0) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$，并令 $\alpha_0 = \mathrm{id}_V$。假设

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1, \qquad \alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1$$

定义 $K[t]/(t^2)$, 上的无穷小 *Hom*–李变形，也就是说，$(V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t]/(t^2), [\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 是一个 *Hom*–李代数。

进一步假设 $(V、\ [\cdot、\ \cdot]_0、\ \alpha_1)$ 是一个 *Hom*–李代数。那么所得的 *Hom*–李代数 $(V、\ [\cdot、\ \cdot]_t、\ \alpha_t)$ 实际上是一个李代数，即括号 $[\cdot、\ \cdot]_t$ 满足普通雅可比恒等式。

由于 α_t 在 $\mathbf{K}[t]/(t^2)$ 中可逆（因为它是 id_V的一个变形），如果 $[\cdot,\ \cdot]_t$ 是一个李括号，那么可以通过令下式来对 Hom–李结构进行去扭转

$$\{x,y\}_t := \alpha_t^{-1}([x,y]_t),$$

这定义了 $\mathbf{K}[t]/(t^2)$ 上的李代数结构 $(V, \{\cdot,\cdot\}_t)$。反过来，从一个李代数 $(V, \{\cdot,\ \cdot\}_t)$ 和一个代数自同态 α_t 出发，Yau 扭曲$[x,y]_t := \alpha_t(\{x,y\}_t)$ 可得到一个 Hom–李代数。从这个意义上说，条件$[\cdot,\cdot]_t$ 是李括号，意味着 $(V, [\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 是由通常的李代数经 Yau 扭曲得到的。

本文旨在通过对 K) 的一个固定基进行显式计算，直接证明 Makhlouf–Silvestrov 猜想。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $(V,[\cdot,\cdot]_0)\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$。固定一个基 x_1,x_2,x_3，并定义 $[\cdot,\cdot]_0$，如(1.1)所示。考虑

$$[\cdot,\cdot]_t=[\cdot,\cdot]_0+t[\cdot,\cdot]_1,\qquad \alpha_t=\alpha_0+t\alpha_1,\qquad \alpha_0=\mathrm{id}_V,$$

其中 $[\cdot,\cdot]_1\colon\ V\times V\to V$是双线性且斜对称的，而 $\alpha_1\colon\ V\to V$是线性的。假设 $([\cdot,\cdot]_t,\alpha_t)$ 在 $\mathbb{K}[t]/(t^2)$ 上定义了 $(V,[\cdot,\cdot]_0)$的无穷小 ***Hom***–李变形，并且 $(V,[\cdot,\cdot]_0,\alpha_1)$ 是一个 ***Hom***–李代数。

那么括号 $[\cdot,\cdot]_t$ 在$\mathbb{K}[t]$上满足通常的 ***Jacobi*** 恒等式，因此，对于 t的任意取值，$(V,[\cdot,\cdot]_t)$ 都是李代数。

证明将在下一节给出，完全是初等的。我们固定$\mathfrak{sl}_2$(K)的一组基，写出最一般的一阶扰动 $[\cdot,\ \cdot]_1$ 以及满足条件 $(V,\ [\cdot,\ \cdot]_0,\ \alpha_1)$ 构成 Hom–李代数的最一般扭曲映射 α_1 ，然后分别展开 $([\cdot,\ \cdot]_t,\ \alpha_t)$ 的 Hom–Jacobi 恒等式和 $[\cdot,\ \cdot]_t$ 的通常 Jacobi 恒等式。在对 α_1施加附加约束后，我们从这两个恒等式中得到关于 $[\cdot,\ \cdot]_1$ 结构常数完全相同的一阶关系，而这些关系已经足以迫使 $[\cdot,\ \cdot]_t$ 的 Jacobiator 的二阶部分为零。这意味着 $[\cdot,\ \cdot]_t$ 是一个李括号。

2 Makhlouf–Silvestrov 猜想的证明

在本节中，我们证明定理 1.1。以下始终固定一个特征为 0 的域 K，以及一个带有基 (x_1,x_2,x_3) 的 3 维 K-向量空间 V，并赋予其由 (1.1) 给出的李括号 $[\cdot,\cdot]_0$。因此，$(V,[\cdot,\cdot]_0)$ 可视为 $\mathfrak{sl}_2$(K)。

2.1 $(V,[\cdot,\cdot]_0,\alpha_1)$ 是 Hom–Lie 的约束

设 $\alpha_1\colon V\to V$是一个线性自同态。我们将其相对于所选基的矩阵形式写为

$$\alpha_1(x_1)=a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3, \tag{2.1}$$
$$\alpha_1(x_2)=a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3, \tag{2.2}$$
$$\alpha_1(x_3)=a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3, \tag{2.3}$$

因此 $(a_{ij})_{1\leqslant i,\ j\leqslant 3}$ 是 α_1 在基 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$下的矩阵。

$(V,[\cdot,\cdot]_0,\alpha_1)$ 本身是 Hom–李代数的条件可以表示为 Hom–Jacobi 恒等式

$$\sum_{\circlearrowleft x,y,z}[\alpha_1(x),[y,z]_0]_0=0\qquad \text{for all } x,y,z\in V.$$

根据三线性和反对称性，只需在三元组(x_1,x_2,x_3)上施加此恒等式。写出三个循环项

$$[\alpha_1(x_1),[x_2,x_3]_0]_0,\qquad [\alpha_1(x_2),[x_3,x_1]_0]_0,\qquad [\alpha_1(x_3),[x_1,x_2]_0]_0$$

并利用 (1.1)，可验证

$$\sum_{\circlearrowleft}[\alpha_1(x_i),[x_j,x_k]_0]_0=(2a_{22}-2a_{33})x_1+(4a_{13}-2a_{21})x_2+(-4a_{12}+2a_{31})x_3,$$

其中求和遍历 $(1,2,3)$的循环置换 (i,j,k)。因此，$(V,[\cdot,\cdot]_0,\alpha_1)$ 是 Hom–李代数当且仅当

$$2a_{22}-2a_{33}=0,\qquad 4a_{13}-2a_{21}=0,\qquad -4a_{12}+2a_{31}=0. \tag{2.4}$$

等价地，

$$a_{22}=a_{33},\qquad a_{21}=2a_{13},\qquad a_{31}=2a_{12}.$$

因此，α_1 由六个自由参数 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{32}\in \mathbf{K}$ 确定，其中a_{21},a_{31},a_{33} 受 (2.4) 约束。这以略有不同的坐标形式重现了 [5, 命题 6.1]，中所述的六参数族。

2.2 一阶 Hom–Lie 变形

现在我们考虑 $(V,[\cdot,\cdot]_0,\alpha_0)$ 在环 $\mathbf{K}[t]/(t^2)$上的无穷小 Hom–李变形，其形式为

$$[\cdot,\cdot]_t=[\cdot,\cdot]_0+t[\cdot,\cdot]_1,\qquad \alpha_t=\mathrm{id}_V+t\alpha_1,$$

其中 $[\cdot,\ \cdot]_1\colon V\times V\to V$是双线性且斜对称的。我们可以将这种最一般的括号写作

$$\begin{aligned}[x_1,x_2]_1&=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3,\\ [x_1,x_3]_1&=q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3,\\ [x_2,x_3]_1&=r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3,\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $p_i,\ q_i,\ r_i \in \mathbf{K}$，其余括号由反对称性确定。

变形结构 $(V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{K}[t]/(t^2), [\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 的 Hom–Jacobi 恒等式为

$$\sum_{\circlearrowleft x,y,z} [\alpha_t(x), [y,z]_t]_t = 0 \qquad \text{in } \mathbb{K}[t]/(t^2) \tag{2.6}$$

对所有 $x, y, z \in V$。同样，只需考虑三元组 (x_1, x_2, x_3) .

将 (2.6) 的左端按 t 的幂展开，得到

$$\sum_{\circlearrowleft} [\alpha_t(x_i), [x_j, x_k]_t]_t = J_0 + tJ_1 + t^2 J_2 + t^3 J_3,$$

其中 $J_0, J_1, J_2, J_3 \in V$。常数项 J_0 为零，因为 $(V, [\cdot,\cdot]_0)$ 是一个李代数，且 $\alpha_0 = \mathrm{id}_V$。由于我们是在 $\mathbf{K}[t]/(t^2),$ 中进行讨论，Hom–Jacobi 恒等式等价于条件 $J_1 = 0$。

利用 (1.1)、(2.1) 和 (2.5) 直接计算可得

$$J_1 = \big(2a_{22}-2a_{33}-p_2-q_3\big)x_1+\big(4a_{13}-2a_{21}+2q_1+2r_2\big)x_2+\big(-4a_{12}+2a_{31}+2p_1-2r_3\big)x_3.$$

因此，无穷小 Hom–Jacobi 条件 $J_1 = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} 2a_{22} - 2a_{33} &= p_2 + q_3, \\ 4a_{13} - 2a_{21} &= -2(q_1 + r_2), \\ -4a_{12} + 2a_{31} &= -2(p_1 - r_3). \end{aligned} \tag{2.7}$$

将 (2.7) 与关系式 (2.4) 结合起来，这些关系式表明 $(V,\ [\cdot,\ \cdot]_0,\ \alpha_1)$ 是 Hom–李代数，由此得到仅涉及 $[\cdot,\ \cdot]_1$的结构常数的方程。

引理 2.1。 假设 $(V, [\cdot,\cdot]_0, \alpha_1)$ 是一个 *Hom–*李代数，即假设(2.4) 成立。那么，无穷小 *Hom–Jacobi* 条件 (2.7) 等价于

$$p_2 + q_3 = 0, \qquad q_1 + r_2 = 0, \qquad p_1 - r_3 = 0. \tag{2.8}$$

证明。 将 (2.4) 的各项逐项从 (2.7) 中相减，立即得到 (2.8)。反过来，若 (2.4) 和 (2.8) 成立，则 (2.7) 也成立。 □

因此，在对 α_1 施加附加约束后，无穷小 Hom–Jacobi 条件完全由关于一阶括号 $[\cdot、\ \cdot]_1$ 的三个线性方程 (2.8) 表示。

2.3 $[\cdot,\cdot]_t$的普通雅可比恒等式

现在我们转而讨论括号的通常 Jacobi 恒等式

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1$$

在 V上。将 $[\cdot,\cdot]_t$ 的 Jacobiator 定义为

$$K_t(x,y,z) = [x,[y,z]_t]_t + [y,[z,x]_t]_t + [z,[x,y]_t]_t.$$

同样，只需在三元组 (x_1,x_2,x_3)上计算 K_t 。利用 (1.1) 和 (2.5) 直接计算可得

$$K_t(x_1,x_2,x_3) = tK_1 + t^2K_2,$$

其中

$$K_1 = (-p_2 - q_3)x_1 + (2q_1 + 2r_2)x_2 + (2p_1 - 2r_3)x_3$$

and

$$\begin{aligned} K_2 = {} & (p_1r_2 - p_2r_1 + q_1r_3 - q_3r_1)x_1 \\ & + (-p_1q_2 + p_2q_1 + q_2r_3 - q_3r_2)x_2 \\ & + (-p_1q_3 - p_2r_3 + p_3q_1 + p_3r_2)x_3. \end{aligned}$$

$[\cdot,\cdot]_t$ 的通常 Jacobi 恒等式等价于以下条件

$$K_t(x_1,x_2,x_3) = 0 \quad \text{for all } t,$$

其中在 这一转化等价于 K_1 和 K同时为零 $_2$.

现在我们将这些条件与 (2.8) 联系起来。

引理 2.2。 等式 $K_1 = 0$ 等价于方程组 (2.8)。

证明。 K_1中 x_1、 x_2、 x_3的系数分别为 $-p_2 - q_3$、 $2q_1 + 2r_2$和 $2p_1 - 2r_3$。由于 K 的特征为零，这些系数为零当且仅当 (2.8) 成立。 □

引理 2.3。假设 (2.8) 成立。那么 $K_2 = 0$。等价地，在关系 (2.8) 下，对于所有 t，$[\cdot,\cdot]_t$ 满足通常的 *Jacobi* 恒等式。

证明。 由 (2.8) 可得

$$p_2 = -q_3, \qquad r_2 = -q_1, \qquad r_3 = p_1.$$

将这些关系代入 K_2 的系数中，我们得到:

- 的系数为 x_1

$$p_1r_2 - p_2r_1 + q_1r_3 - q_3r_1 = p_1(-q_1) - p_2r_1 + q_1p_1 - q_3r_1 = -(p_2 + q_3)r_1 = 0.$$

- x_2 的系数是

$$\begin{aligned} -p_1q_2 + p_2q_1 + q_2r_3 - q_3r_2 &= -p_1q_2 + p_2q_1 + q_2p_1 - q_3(-q_1) \\ &= (p_2 + q_3)q_1 = 0. \end{aligned}$$

- x_3 的系数是

$$\begin{aligned} -p_1q_3 - p_2r_3 + p_3q_1 + p_3r_2 &= -p_1q_3 - p_2p_1 + p_3q_1 + p_3(-q_1) \\ &= -p_1(q_3 + p_2) = 0. \end{aligned}$$

因此，三个系数均为零，从而 $K_2 = 0$。 □

现在我们可以完成主定理的证明。

定理 *1.1* 的证明。 根据假设， $(V, [\cdot,\cdot]_0, \alpha_1)$ 是一个 Hom–李代数，因此 (2.4) 成立。由于 $([\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 是一个无穷小 Hom–李变形，Hom–Jacobi 恒等式 (2.6) 模 t^2 成立，因此 (2.7) 得以满足。根据引理 2.1，这等价于 $[\cdot,\cdot]_1$ 的结构常数满足线性关系 (2.8)。

引理 2.2 表明，(2.8) 等价于 Jacobiator $K_t(x_1, x_2, x_3)$ 中 K_1 关于 t 的系数为零；引理 2.3 表明，相同的关系也使 t^2 中 K_2 的系数为零。因此，对于所有 t， $K_t(x_1, x_2, x_3) = 0$ 。由三线性和反对称性可知，Jacobi 恒等式对所有三元组 $(x, y, z) \in V^3$ 均成立。

因此，对于任意的 t， $[\cdot,\cdot]_t$ 都是 V 上的李括号，而相应的 Hom–李代数 $(V, [\cdot,\cdot]_t, \alpha_t)$ 按照 Makhlouf– Silvestrov 猜想的意义都是李代数。 □

推论 2.4 (Makhlouf-Silvestrov 猜想)。 每个无穷小 *Hom*–李形变

$$[\cdot,\cdot]_t = [\cdot,\cdot]_0 + t[\cdot,\cdot]_1, \qquad \alpha_t = \mathrm{id}_V + t\alpha_1$$

在 $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot]_0)$ 上，取值于 $\mathbb{K}[t]/(t^2)$，若 $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot]_0, \alpha_1)$ 是一个 *Hom*–李代数，则实际上是一个李代数，也就是说，括号 $[\cdot,\cdot]_t$ 满足普通雅可比恒等式。

证明。 这直接由定理 1.1 得出，取 $V \cong \mathfrak{sl}_2(\mathrm{K})$和 $\alpha_0 = \mathrm{id}_V$ 即可。 □

参考文献

[1] S. Caenepeel 和I. Goyvaerts, 《幺半 Hom-Hopf 代数》, 《Communications in Algebra》**39**(6) (2011), 2216–2240。[2] J. T. Hartwig、D. Larsson 和 S. D. Silvestrov, 《利用 σ-导子 对李代数进行变形》, 《Journal of Algebra》**295**(2006), 314–361。[3] M. Gerstenhaber, 《环与代数的变形》, 《数学年刊》**79**,**84**,**88** (1964, 1966, 1968)。[4] G. Graziani、A. Makhlouf、C. Menini 和 F. Panaite, 《BiHom-结合代数、BiHom-Lie 代数和 BiHom-双代数》, SIGMA **11**(2015), 086, 34 页[5] A. Makhlouf 和 S. D. Silvestrov, 《Hom-结合代数与 Hom-Lie 代数的一参数形式变形札记》, 《Forum Mathematicum》22 (2010), no. 4, 715–739。[6] A. Makhlouf 和 S. D. Silvestrov, 《Hom-代数结构》, 《Journal of Generalized Lie Theory and Applications》2 (2008), no. 2, 51–64。[7] A. Nijenhuis 和 R. W. Richardson, 《分次李代数中的上同调与变形》, 《美国数学会通报》**72** (1966), 1–29。[8] D. Yau, 《Hom-量子群 I：拟三角 Hom-双代数》, 《物理学杂志 A：数学与理论》, **45**(6) (2012), 065203。[9] D. Yau, 《Hom-Novikov 代数》, 《物理学杂志 A：数学与理论》**44** (8) (2011), 085202。