arXiv:2603.20822v1 [math.GT] 21 Mar 2026

二桥链环和三弦蒙特西诺斯链环的有限生成刚性

TAMUNONYE CHEETHAM-WEST 和 XIAOYU XU

摘要。 对于任意二桥链环或三缠结蒙特西诺链环 $L \subset S^3$ （包括纽结），本文证明了 π_1（$S^3 - L$）在紧致可定向三维流形的基本群中具有有限生成刚性。

1. Introduction

对于一个紧三维流形 M （可能带边界），基本群 π_1（M）的有限商群在实际中有助于将 M 与其他三维流形区分开来。这一思想在其应用于纽结补空间时得到了很好的体现。例如，当 M 是一个非平凡纽结 K 在 S^3中的外部时，Kup [已知，可以通过找到 M的一个非阿贝尔有限覆盖来证明这种非平凡性，而该覆盖的次数仅取决于 K的交叉数。根据 Whitten [Whi87] 和 Gordon–Luecke [GL89], 的结果， S^3 中的两个素纽结 K_1 和 K_2，若具有π_1（$S^3 - K_1$）$\cong$ π_1（$S^3 - K_2$），则它们在同伦和镜像意义下等价。Boileau 和 Friedl [BF20，问题 1.3], 提出了进一步的问题： S^3 中的素纽结K 是否能由π_1（$S^3 - K$）的有限商群集合确定，且确定到同伦和镜像为止。

对于有限生成群 Γ，令 $\mathcal{C}(\Gamma)$ 表示 Γ 的有限商群集合。若两个有限生成群 Γ和 Δ 满足 $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Delta)$，则称它们副有限等价。这等价于说， Γ 和 Δ 的副有限^ “完备化 $\Gamma \cong \Delta$ [DFPR82]同构。给定一个有限生成群的集合 $\mathscr{A}$，若任意与 Γ 副有限等价的群 $\Delta \in \mathscr{A}$都与 Γ同构，则称群 $\Gamma \in \mathscr{A}$在 $\mathscr{A}$中有限剩余刚性。

本文中，令 $\mathscr{M}$ 表示紧致可定向三维流形的基本群类。本文对 Boileau–Friedl 问题中的一类实例给出了肯定回答，并将其推广至 S^3中的链环。具体而言，我们证明：

定理 1.1. 对于任意二桥链环（包括纽结） $L \subseteq S^3$，$\pi_1(S^3 - L)$，它在 $\mathscr{M}$中有限剩余刚性。

定理 1.2。 对于任意由 *3* 个有理缠结组成的蒙特西诺斯链环（包括纽结） $L \subseteq S^3$，$\pi_1(S^3 - L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中是有限剩余刚性的。

我们指出，双桥链环恰好是由不超过 2 个有理缠结组成的蒙特西诺斯链环。不过，由于两者涉及的技术细节略有不同，因此将结果分开列出。定理 1.1 作为定理 5.6 得到证明，定理 1.2 则由定理 6.13 和定理 6.15 共同证明。

有限剩余刚性的重要意义之一在于它与同构问题的关联。事实上，如果群 Γ在有限表示群类 $\mathscr{A}$ 中是有限剩余刚性的，那么就存在一种算法：给定任意一个 $\Delta \in \mathscr{A}$ 的有限表示，可以在有限时间内判定 Γ 与 Δ 是否同构；参见 [BCR16，第 5]页。该算法通过同时搜索以下两者来实现：一个属于 $\mathcal{C}(\Gamma) \triangle \mathcal{C}(\Delta)$ 的有限群——如果

Date：2026年3月24日。

若 Γ 与 Δ 并非副有限等价，则搜索会在有限时间内终止；或者搜索 Γ 与 Δ 之间的一个明确同构——只要二者同构，搜索就会在有限时间内终止。特别地，定理 1.1 和定理 1.2 中出现的群 $\pi_1(S^3 - L)$ 的同构问题在 $\mathscr{M}$ 中是可解的。这为二桥结和三缠结蒙特西诺斯结的识别问题提供了一种新解法，不同于基于正规曲面理论的 [Hem93] 。

推论 1.3。 设 $K \subseteq S^3$ 为一个双桥纽结，或一个具有 *3* 个有理缠结的蒙特西诺斯结。存在一种算法，输入一个多边形纽结结图 D，即可判定该图 D 是否表示纽结 K。

证明。设 K' 为结图 D所表示的纽结。利用魏廷格表示，可以得到 $\pi_1(S^3 - K')$ 的一个有限表示。然后应用前述算法，判定 $\pi_1(S^3 - K')$ 是否与 $\pi_1(S^3 - K)$ 同构。若它们不同构，则显然 D 不表示纽结 K。若它们同构，由于 K 是一个素结， [Whi87] 和 [GL89] 可推出 D 表示 K 或其镜像。我们可以固定 K 及其镜像的结图，并通过有限次搜索里德迈斯特变换，验证 D 表示 K ，或 D表示 K的镜像。若 D 表示 K，则问题解决。否则，若 D 表示 K的镜像，则 D 表示 K 当且仅当 K 与其镜像同痕；这一点可通过这些纽结族的完整分类（定理 5.1、命题 6.1）加以验证。□

作为一条历史性的补充说明，定理 1.1 和定理 1.2 涵盖了此前关于 S^3 的一些结果，这些纽结和链环的 $\mathscr{M}$补空间的基本群具有有限剩余刚性。其中包括 Bridson-Reid 以一种不同方法研究的八字结 [BR20] ，以及第二作者研究的一系列例子 [Xu24] ，例如怀特海德链环、一些椒盐链环族（包括 $(-2,3,7)$ 和 $(-2,3,8)$）、（完全）扭结，以及 $\mathbf{b}(10,3)$ 等。关于纽结群有限生成刚性的更多结果，见[Wil19、BF20、CW23]。

定理 1.1 和定理 1.2 的证明受到这样一个观察的启发：相关链环在同伦和镜像意义下由其二重分支覆盖的同胚类型刻画。这里简要概述定理 1.1 的证明策略。举例来说，设 $L \subseteq S^3$ 是一个双曲二桥链环， N 是一个紧致可定向三维流形，且其 $\pi_1(N)$ 与 $\pi_1(S^3 - L)$ 副有限等价。 [Xu24，定理 4.1] 推出 N 是某个双曲链环的外部 $L' \subseteq S^3$。 π 轨形群 L 是一个有限二面体群，它是 $\pi_1(S^3 - L)$ 的一个有限商群。因此，该有限二面体群也是 $\pi_1(N)$ 的一个有限商群。谨慎应用 [Xu24] 可推出， $\pi_1(N)$ 的这个有限二面体商群也来自 π 轨形群 L'。接着，可以应用一个分类定理（例如 [BZ89，命题 3.2]），证明 L' 也是一个二桥链环。然而，存在基本群同构但并不等价的二桥链环。为排除这种可能性，我们应用 Burde 的一个定理 [Bur75]，该定理通过链环补空间中与这个有限二面体商群的核相对应的有限层大圆链环覆盖上的链接数不变量，区分这些二桥结。

虽然它们不能直接用于定理 1.1 和定理 1.2 的证明，但我们在此提出另外两个判据，用以判断 $\mathscr{M}$ 中纽结群或链环群的有限生成刚性，这些判据遵循相同的思路。

定理 1.4。 假设 L 是 S^3 中的一个双曲链环，且不是二桥链环。如果 L 的 π-轨形群在 S^3中所有双曲链环的 π-轨形群中是有限剩余刚性的，那么 $\pi_1(S^3 - L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中是有限剩余刚性的。

定理 1.5。 设 K 是 S^3中的一个双曲结。假设对于无穷多个整数 $r \geq 2$，沿着 K 分支的 S^3 的 r重循环覆盖，其基本群在 $\mathscr{M}$中是有限剩余刚性的。那么， $\pi_1(S^3 - K)$ 在 $\mathscr{M}$中也具有有限剩余刚性。

定理 1.4 和定理 1.5 将在第 7 节证明。

致谢。 TCW 感谢 Alan Reid 和 Ryan Spitler 就本项目进行的有益讨论。XX 感谢刘毅与其交流讨论。

2. Preliminaries.

2.1. **有限生成完备化**。 除本节所介绍的内容外，我们还请读者参阅 [RZ10] 以获取关于有限生成群的标准参考资料。

有限生成群是以有向偏序集为指标的有限群的逆极限，并赋予从乘积拓扑继承的子空间拓扑。抽象群 Γ 的有限生成完备化定义为一个有限生成群

$$\widehat{\Gamma} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} \Gamma/N$$

其中 $\mathcal{N}$ 是 Γ 的所有有限指数正规子群的集合，并按反向包含关系编排。

存在一其像稠密的连续同态将每个元素 $\gamma \in \Gamma$ 映射到一个元组 $(\pi_N(\gamma))_{N \in \mathcal{N}} \in \widehat{\Gamma}$，其中 $\pi_N \colon \Gamma \to \Gamma/N$ 是商映射。显然， i_Γ 是单射当且仅当 Γ 是剩余有限的。为方便记号，当 Γ 是剩余有限的时，我们总将 Γ 视为其在 $\widehat{\Gamma}$中的像，而 $\widehat{\Gamma}$中的元素也视为 Γ中的元素。

所谓有限群之间的同态 $\Phi \colon G_1 \to G_2$，我们总是指连续同态。然而，Nikolov–Segal 的一项深刻定理 [NS07]表明，从拓扑有限生成有限群到有限群的任意抽象同态都是连续的。因此，当G_1 和 G_2 是拓扑有限生成的时，我们不再特别强调连续性，尤其是在它们是有限生成群的有限生成完备化时。

有限生成完备化编码了有限商群的全部信息。

定理 2.1 ([DFPR82])。 对于两个有限生成抽象群 Γ_1 和 Γ_2，$\mathcal{C}(\Gamma_1) = \mathcal{C}(\Gamma_2)$ 当且仅当 $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$。

除有限商群集合外，抽象群的有限生成完备化还编码了其有限指数子群格。

命题 2.2 ([RZ10，命题 3.2。2])。 对于抽象群 Γ，其有限指数子群格与 Γ 的开子群格之间存在一个同构，该同构在 Γ 中定义如下。

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Finite-index subgroups of } \Gamma\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\textit{Open subgroups of } \widehat{\Gamma}\} \\ H & \longmapsto & \overline{i_\Gamma(H)} \cong \widehat{H} \\ i_\Gamma^{-1}(U) & \longmapsfrom & U \end{array}$$

此外，这种对应关系将正规子群映射为正规子群。

定义 2.3. 设 Γ_1 和 Γ_2 为抽象群。给定一个同构 $\Phi \colon \widehat{\Gamma}_1 \to \widehat{\Gamma}_2$，若两个有限指数子群 $H_1 \leq \Gamma_1$ 和 $H_2 \leq \Gamma_2$ 满足 Φ–对应 关系，则称它们$\Phi(i_{\Gamma_1}(H_1)) = i_{\Gamma_2}(H_2)$。

有限生成完备化也是函子性的。抽象群$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$之间的任意同态 $\phi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 都会以如下意义诱导有限群之间的同态 $\phi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$。设 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 分别为 Γ_1 和 Γ_2的有限指数正规子群的逆系统。那么， $\phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ 是 $\mathcal{N}_1$ 的一个子系统，且该同态

$$\widehat{\Gamma_1} \longrightarrow \prod_{N\in\phi^{-1}(\mathcal{N}_2)} \Gamma_1/N \xrightarrow{\ \phi\ } \prod_{M\in\mathcal{N}_2} \Gamma_2/M$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其像包含于 $\lim_{\longleftarrow M\in\mathcal{N}_2} \Gamma_2/M = \Gamma_2$ 中。由此得到的映射定义为 ϕ。显然， $\phi \circ i_{\Gamma_1} = i_{\Gamma_2} \circ \phi$。

2.2. **三维流形群的有限生成完备化**。对于 M 一个紧三维流形，$\pi_1(M)$ 是剩余有限的。这是由 Hempel 的定理 [Hem16]与 Agol 对 Thurston 虚拟 Haken 猜想的肯定性解决 [Ago13]结合得出的。因此，三维流形拥有大量有限覆盖。由于我们只关注基本群，本文中提到的紧致三维流形均假定不含边界球面。

在具有重大影响的论文中，Wilton–Zalesskii 证明了三维流形群的有限生成完备化能够识别几何分解。以下定理简要总结了他们的结果，另请参见 [Wil18] 关于带边界三维流形的推广。

定理 2.4 ([WZ17a,WZ17b,WZ19])。 对于边界为空或具有环面边界的紧致可定向三维流形 M， $\widehat{\pi_1}(M)$ 的同构类型可以判定 M是否按照 *Thurston* 的意义具有几何结构。若 M 具有几何结构，则可判定其几何类型；若其不具有几何结构，则可判定其素分解和 *JSJ* 分解。M

Thurston 的八种几何结构中，有七种的有限生成刚性已得到充分理解，参见[Fun13] 关于 Sol 几何结构的讨论，以及 [Hem14、Wil17] 关于 Seifert 纤维空间的讨论。双曲三维流形群的有限生成刚性问题仍未解决。

2.3. **有限群的上同调**。 关于有限群上同调理论的标准参考文献是 [RZ10，第 6]章。本文篇幅有限，无法全面回顾有限群上同调理论，因此这里只作简要介绍。

对于有限群 G， G 的有限群上同调——记作 $\mathbf{H}^*(G;\,–)$——是 G 的连续上同调，通常定义为取值于离散 G-模的上同调；而 G 的有限群同调——记作 $\mathbf{H}_*(G;\,–)$——是 G 的连续同调，通常定义为取值于有限群 G-模的同调，其中这些模都带有连续的 G 作用。以下性质可视为有限群（上）同调的等价定义：

(1) 对任意离散 G-模 A， $\mathbf{H}^k(G;\,A) = \lim_{\longrightarrow U} H^k(G/U;\,\mathrm{Fix}_U A)$； (2) 对任意有限群 G-模 B， $\mathbf{H}_k(G;\,B) = \lim_{\longleftarrow U} H_k(G/U;\,\mathrm{Cofix}_U B)$，
其中 U 遍历 G 在两个陈述中，参见 [RZ10、推论 6.5.6 和推论 6.5。8]。

设 $\Phi\colon G_1 \to G_2$ 是有限群之间的同态。那么， Φ 对每个离散的 G_2-模 A，都会诱导同态 $\Phi^*\colon \mathbf{H}^*(G_2;\,A) \to \mathbf{H}^*(G_1;A)$；对每个有限的 G_2-模 B，也会诱导同态$\Phi_*\colon \mathbf{H}_*(G_1;B) \to \mathbf{H}_*(G_2;B)$。

给定从抽象群 Γ 到连通群 G 的同态 $\phi\colon \Gamma \to G$， ϕ 还会对每个离散 $\prec G$-模 A 诱导出同态 $\phi^*\colon \mathbf{H}^*(G;\,A) \to H^*(\Gamma;A)$。我们还注意到，任何有限离散 Γ-模自然也是一个 Γ-模。

定义 2.5。 如果对于每个有限 Γ-$\widehat{\text{模}}$ M，由典范同态诱导的同态 i_Γ^*： $\mathbf{H}^*(\Gamma; M) \to H^*(\Gamma; M)$ 都是同构，则称抽象群 Γ 是<style id='4'>上同调良好的。

上同调良性这一概念最初由 Serre 在 [Ser01]中引入。本文主要将这一概念应用于虚拟曲面群。

命题 2.6 ([GJZZ08，引理 3.2 和命题 3。6])。 虚拟曲面群是上同调良好的。

3. Dehn filling

3.1. 外围正则性。

定义 3.1. 设 M 和 N 是具有环面边界的紧致可定向三维流形，且 Φ: $\widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$ 是一个同构。若存在同胚 $h: \partial M \to \partial N$，并且在每个连通分支上将其记作$h_i: \partial_i M \to \partial_i N$，满足以下性质，则称 Φ为周边正则。对于每个 i，都存在 $g_i \in \widehat{\pi_1}(N)$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\pi_1}(\partial_i M) & & \xrightarrow{\widehat{h_{i*}}} & & \widehat{\pi_1}(\partial_i N) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathrm{incl}_*}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathrm{incl}_*}} \\ \widehat{\pi_1}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \widehat{\pi_1}(N) & \xrightarrow{C_{g_i}} & \widehat{\pi_1}(N) \end{array}$$

这里，$C_{g_i}(x) = g_i x g_i^{-1}$表示在左侧对 g_i 进行共轭。为明确该同胚，我们还称 Φ相对于 h是外围正则的。

定理 3.2. 设 M 和 N 是定向带尖点双曲三维流形。那么，任意同构 Φ： $\widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$都相对于某个$h_\Phi$： $\partial M \rightrightarrows \partial N$是外围正则的。同胚 h_Φ 在同伦意义下唯一，而 h_Φ 要么在所有分支上均保向，要么在所有分支上均反向。

证明。 的外围正则性 [由 [Xu25a，定理 1 得出。4]的唯一性 h_Φ 直接由外围子群闭包的自正规性得出 $\{\pi_1(\partial_1 N) \cdots, \pi_1(\partial_i N)\}$ 在 $\widehat{\pi_1}(N)$ [WZ17a，引理 4 中。5]。此外，h_Φ 在所有分支上均保向或在所有分支上均反向这一事实，由 [Xu25a，命题 7 得出。1]。 □

我们称同构 $\Phi: \widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$ 为保向（分别为反向），当且仅当同胚 $h_\Phi: \partial M \to \partial N$ 保向（分别为反向）。事实上，这等价于有限生成完备映射度$\mathbf{deg}(\Phi)$ 等于 1 或 -1，见 [Xu25a，命题 7。1]。

3.2. 对齐德恩填充。

设 M是一个边界非空且由环面组成的紧三维流形 $\partial_1 M, \cdots, \partial_n M$。$\partial_i M$上的斜率定义为
$\mathrm{slp}(\partial_i M) = \{\partial_i M\}$. 上无向本质简单闭曲线的自由同伦类
令 $\mathrm{slp}^*(\partial_i M) = \mathrm{slp}(\partial_i M) \cup \{\varnothing\}$，其中符号 $\varnothing$ 表示“空斜率”，并令 $\mathrm{slp}^*(\partial M) = \mathrm{slp}^*(\partial_1 M) \times \cdots \times \mathrm{slp}^*(\partial_n M)$。

定义 3.3。 设 M是一个边界非空且由 n 个环面组成的紧三维流形。对于 $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathrm{slp}^*(\partial M)$，沿 M进行 $\mathbf{c}$ 德恩填充，记作$M_{\mathbf{c}}$，是通过将实心环面粘接到边界分支 $\partial_i M$ 上而由 M 构造出的紧三维流形，其中 $c_i \neq \varnothing$；实心环面的子午线粘接到斜率 $c_i \in \mathrm{slp}(\partial_i M)$ 上。

定理 3.4（[Xu24，定理 A]）。设 M 和 N 是具有环面边界的紧致可定向三维流形，且设 $\Phi: \widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$ 是一个关于 $h: \partial M \to \partial N$ 周边正则的同构。那么，对于 ∂M 上任意选取的斜率 $\mathbf{c}$，存在一个同构 $\Psi: \widehat{\pi_1}(M_{\mathbf{c}}) \to \widehat{\pi_1}(N_{h(\mathbf{c})})$，使其符合下列交换图。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi_1}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \widehat{\pi_1}(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{incl_*}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{incl_*}} \\ \widehat{\pi_1}(M_{\mathbf{c}}) & \xrightarrow{\Psi} & \widehat{\pi_1}(N_{h(\mathbf{c})}) \end{array}$$

4. Link complements

本文中始终固定环境空间 S^3 的一个定向。链环 L在S^3中总是指驯链环。我们用 $n(L)$表示 L的开正则邻域，用 $N(L)$表示 $n(L)$的闭包。最后， $E_L = S^3 \setminus n(L)$表示 L 的紧致外部。

若固定链环 L 各连通分支的一个排序，则称其为分支排序的，记作 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$。对于分支有序链环 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$，链接矩阵$\mathrm{lk}(L)$是一个 $n \times n$整数矩阵，其元素为 $\mathrm{lk}(L)_{i,\ j}$ =当 $i \neq j$时为 $\mathrm{lk}(K_i,\ K_j)$，而 $\mathrm{lk}(L)_{i,\ i} = 0$。

设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3中的一个定向链。对每个 $1 \leq i \leq n$，令$(m_i,\ l_i)$为 $\pi_1(\partial N(K_i))$的子午线—经线基，使得 l_i 与 K_i的定向一致，并且$(m_i,\ l_i)$相对于 S^3继承的 $N(K_i)$的边界定向为正向。我们还通过同态 $\pi_1(\partial N(K_i)) \to \pi_1(E_L)$，在选定基点后，将$(m_i,\ l_i)$与其在 $\pi_1(E_L)$中的像等同，并将其视为 L的优选子午线—经线基。于是，根据 K_i 是否为分裂的平凡结分量， m_i 和 l_i 在 $\pi_1(E_L)$中生成一个同构于 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}^2$ 的子群。

4.1. 完美同构。

定义 4.1. 设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$和 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_n$是 S^3中的两个按连通分支排序的定向链环，且 (m_i, l_i) 和 (m'_i, l'_i) 分别是 L 和 L'的优选子午线—经线基。若同构 $\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 关于同胚 $h{:}\partial(E_L) \to \partial(E_{L'})$ 周边正则，且满足 $h(m_i) = m'_i$ 和 $h(l_i) = l'_i$，则称其为完美同构 。

命题 4.2. 设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$和 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_n$是 S^3中的两个按连通分支排序的定向链环，且 $\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个完美同构。则$\mathrm{lk}(L) = \mathrm{lk}(L')$。

证明。对于固定的指数 $1 \leq j \leq n$，我们证明对于任意$i \neq j$，$\mathrm{lk}(K_i, K_j) = \mathrm{lk}(K'_i, K'_j)$。注意， $H_1(E_L)$ 是以基 $\{[m_1], \cdots, [m_n]\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$-模；根据我们对定向的选择， $[l_j] = \sum_{i \neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m_i]$ 属于 $H_1(E_L)$。类似地， $H_1(E_{L'})$ 是以基 $\{[m'_1], \cdots, [m'_n]\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$-模，且 $[l'_j] = \sum_{i \neq j} \mathrm{lk}(K'_i, K'_j)[m_i]$。有限剩余阿贝尔化 $\widehat{\pi_1}(E_L)^{\mathrm{Ab}}$ 同构于 ”$H_1(E_L)$，后者是以基 $\{[m_1], \cdots, [m_n]\}$ 为基的自由 $\widehat{\mathbb{Z}}$-模；类似地， $\widehat{\pi_1}(E_{L'})^{\mathrm{Ab}} \cong$”$H_1(E_{L'})$ 是以基 $\{[m'_1], \cdots, [m'_n]\}$ 为基的自由$\widehat{\ }\mathbb{Z}$-模。

根据定义， Φ 将每个 m_i 或 l_i 映射到 m'_i 或 l'_i的一个共轭元。因此，有限生成整数上的阿贝尔化 Φ^{Ab} ：” $H_1(E_L) \to$”$H_1(E_{L'})$ 将每个 $[m_i]$ 或 $[l_i]$ 映射到 $[m'_i]$ 或 $[l'_i]$。特别地， $\sum_{i \neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m'_i] = \Phi^{\mathrm{Ab}}(\sum_{i \neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m_i]) = \Phi^{\mathrm{Ab}}([l_j]) = [l'_j] =$ ”$\sum_{i \neq j} \mathrm{lk}(K'_i, K'_j)[m'_i]$ 属于自由 $\widehat{\ }\mathbb{Z}$-模 $H_1(E_{L'})$。因此，$\mathrm{lk}(K_i, K_j)$ 与 $\mathrm{lk}(K'_i, K'_j)$作为有限生成整数相等，由此对所有 $i \neq j$，$\mathrm{lk}(K_i, K_j)$ 与 $\mathrm{lk}(K'_i, K'_j)$作为整数相等。□

L 中的链环 S^3 称为双曲链环，如果 $S^3 \setminus N(L)$是有限体积双曲三维流形。

引理 4.3. 设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$和 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_n$是 S^3中的两个连通分支数有序的定向双曲链环，并设 $\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个同构。根据定理 *3.2*，该同构相对于 $h_\Phi: \partial(E_L) \to \partial(E_{L'})$ 是周边正则的。若 Φ 保向且对每个 $1 \le i \le n$都有 $h_\Phi(m_i) = m'_i$，则 Φ 是一个完美同构。

证明。根据定义，只需证明对每个 $1 \le j \le n$，$h_\Phi(l_j) = l'_j$。与命题 4.2 的证明类似，在阿贝尔化层面上，我们有 $\Phi^{\mathrm{Ab}}([l_j]) = [h_\Phi(l_j)]$ 且$\Phi^{\mathrm{Ab}}([m_i]) = [h_\Phi(m_i)] = [m'_i]$。因此，$[h_\Phi(l_j)] = \Phi^{\mathrm{Ab}}([l_j]) = \Phi^{\mathrm{Ab}}(\sum_{i\neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m_i]) =$" "$\sum_{i\neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m'_i]$ 属于 $H_1(E_{L'})$。由于 $H_1(E_{L'})$ 是通过 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ 对 $\mathbb{Z}$-$\widehat{\ }$模 $H_1(E_{L'})$ 作标量扩张所得，我们确有 $[h_\Phi(l_j)] = \sum_{i\neq j} \mathrm{lk}(K_i, K_j)[m'_i]$ 属于 $H_1(E_{L'})$。特别地，将 $h_\Phi(l_j)$视为 $E_{L'}$中的一个环，它与纽结K'_j的链接数为零。由于 $h_\Phi(l_j)$在 $\partial N(K_j)$上表示一条本原本质简单闭曲线，因此仅有的可能性是 $h_\Phi(l_j) = \pm l_j$。最后，由于 h_Φ 保向，$h_\Phi(l_j) = l'_j$。□

下一个定理详细阐述了 [Xu24，定理 4。1]。

定理 4.4。设 L 是 n分支的定向双曲链环，位于 S^3中。设 N 是一个紧致可定向三维流形，且 $\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(N)$ 是一个同构。则存在一个位于 S^3 中的 n 分支定向双曲链环，使得 $N \cong E_{L'}$；并且通过此同胚，$\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个完美同构。

证明。根据 [Xu24，引理 A.1] 和定理 2.4，N 是带尖双曲的。根据定理 3.2，我们假设 Φ 关于 h_Φ是周边正则的。令 E_L 继承 S^3的定向，并在 N 上固定一个定向，使得 Φ 保持定向。沿着 E_L 的子午线 $\mathrm{m} = (m_1, \cdots, m_n)$ 进行德恩填充，得到 S^3。根据定理 3.4，$\widehat{\pi_1}(N_{h_\Phi}(\mathrm{m})) \cong \widehat{\pi_1}(M_{\mathbf{m}}) \cong \widehat{\pi_1}(S^3)$ 是平凡群。因此，由于其残余有限性，$\pi_1(N_{h_\Phi}(\mathrm{m}))$ 是平凡的；并且由于庞加莱猜想成立，$N_{h_\Phi}(\mathrm{m}) \cong S^3$，我们为其赋予与 N上一致的定向。$N_{h_\Phi}(\mathrm{m})$中德恩填充所得实心环面的核心曲线构成 n分支链环 L'，位于 S^3 中，使得 $N \cong E_{L'}$，且每个 $h_\Phi(m_i)$ 都表示 i的第 L'个连通分支的子午线。L'是一个双曲链环，因为 N 是带尖双曲的；我们可以为L' 选择定向，使得每个 $h_\Phi(m_i)$ 都是优选子午线。于是，根据引理 4.3，$\Phi: \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个完美同构。□

4.2. 分支覆盖。设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3 中的一个链环。令 $\sigma: \pi_1(E_L) \to H_1(E_L) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为唯一一个将每个 m_i 映到 1（模 2）的同态。E_L 的平衡二重覆盖记作 $C_2(L)$，它是由 $\ker(\sigma)$ 给出的二重覆盖。注意，$\pi_1(E_L)$ 的每个边界子群都经由 σ 满射到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因此 $C_2(L)$ 也有 n 个边界分支。E_L 中的每个子午线环路 m_i 在 $C_2(L)$ 中提升为一个连通的二重覆盖，从而在 $C_2(L)$ 的第 i 个边界分支上定义一个边界斜率，记作 $2m_i$。沿边界斜率 $(2m_1, \cdots, 2m_n)$ 对 $C_2(L)$进行德恩填充，得到一个记作 $M_2(L)$ 的闭流形。事实上，$M_2(L)$ 是沿 L 对 S^3 作的二重分支覆盖。全文中，$C_2(L)$ 和 $M_2(L)$ 均赋予从 E_L 提升的定向，而该定向继承自定向的环境空间 S^3。

我们注意到，$C_2(L)$ 和 $M_2(L)$ 的定义不依赖于 L 的定向。不过，在下述命题中，我们加入定向，以便应用完美同构的定义。

命题 *4.5.* 设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 和 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_n$ 是 S^3 中两个分支排序的、定向的 n 连通分支链环，且 Φ：$\widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个完美同构。那么，存在同构 $\check{}\Phi$: $\widehat{\pi_1}(C_2(L)) \to \widehat{\pi_1}(C_2(L'))$ 和ϕ: $\widehat{\pi_1}(M_2(L)) \to \widehat{\pi_1}(M_2(L'))$，使它们构成如下交换图。

$$
\begin{array}{ccccc}
\widehat{\pi_1}(E_L) & \hookleftarrow & \widehat{\pi_1}(C_2(L)) & \xrightarrow{\widehat{incl_*}} & \widehat{\pi_1}(M_2(L)) \\
\Phi\downarrow\cong & & \check{\Phi}\downarrow\cong & & \phi\downarrow\cong \\
\widehat{\pi_1}(E_{L'}) & \hookleftarrow & \widehat{\pi_1}(C_2(L')) & \xrightarrow{\widehat{incl_*}} & \widehat{\pi_1}(M_2(L'))
\end{array}
\tag{4.6}
$$

证明。 首先，很容易验证以下交换图。

$$
\begin{array}{ccccc}
\widehat{\sigma}: \widehat{\pi_1}(E_L) & \twoheadrightarrow & \widehat{\pi_1}(E_L)^{\mathrm{Ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}[m_1] \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbb{Z}}[m_n] & \xrightarrow{[m_i]\mapsto 1} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\Phi\downarrow & & \Phi^{\mathrm{Ab}}\downarrow [m_i]\mapsto[m'_i] & & \downarrow\cong \\
\widehat{\sigma'}: \widehat{\pi_1}(E_{L'}) & \twoheadrightarrow & \widehat{\pi_1}(E_{L'})^{\mathrm{Ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}[m'_1] \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbb{Z}}[m'_n] & \xrightarrow{[m'_i]\mapsto 1} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{array}
$$

“ 因此， Φ 将 $\ker(\widehat{\sigma}) = \widehat{\pi_1}(C_2(L))$ 映至 $\ker(\sigma') = \widehat{\pi_1}(C_2(L'))$。这给出了 (4.6) 的左侧部分，其中 $\check{}\Phi$是 Φ的限制。

此外，由于 Φ 是周边正则的（相对于 h_Φ），$\check{}\Phi$（即 Φ 的限制）也相对于 $\check{}h$：$\partial C_2(L) \to \partial C_2(L')$ 是周边正则的，并且它适合以下交换图。

$$
\begin{array}{ccc}
\partial C_2(L) & \xrightarrow{\check{h}} & \partial C_2(L') \\
\mathrm{cover}\downarrow & & \downarrow\mathrm{cover} \\
\partial(E_L) & \xrightarrow{h_\Phi} & \partial(E_{L'})
\end{array}
$$

因此，$\check{}h(2m_i) = 2m'_{i^\circ}$ 回忆一下， $M_2(L)$是沿着（$2m_1, \cdots, 2m_n$）对 $C_2(L)$进行的德恩填充，而 $M_2(L')$是沿着（$2m'_1, \cdots, 2m'_n$）对 $C_2(L')$进行的德恩填充。因此，定理 3.4 给出一个同构 ϕ：$\widehat{\pi_1}(M_2(L)) \to \widehat{\pi_1}(M_2(L'))$，它适合 (4.6) 的右侧部分。□

5. 双桥链环

5.1. 舒伯特标准形。舒伯特 [Sch56] 引入了双桥链环（包括纽结），并根据其舒伯特标准形 $\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 对其进行分类，其中 $-\alpha < \beta < \alpha$ 是互素整数，且 β 为奇数。特别地，当 α 为奇数时，$\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 是纽结；当 α 为偶数时，$\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 是二分量链环。按照惯例， α 称为 $\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 的挠数，而 β 称为其交叉数。

双桥链环的舒伯特图由投影平面上方的两条弧和投影平面下方的两条弧组成，其中上方的两条弧以直线段表示。舒伯特图总是配有一种标准定向，使得投影平面上方的两条弧被赋予相反的定向，见图1。

提及双桥链环 $L = \mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 时， L 总是配有这一方向。

定理 5.1 ([Sch56])**.** 设 $L = \mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 和 $L = \mathbf{b}(\alpha', \beta')$ 是双桥链环。
(1) L 与 L' 作为定向链环同痕，当且仅当 $\alpha = \alpha'$ 与 $\beta' \equiv \beta^{\pm 1}$（模 2α）。*(2)* L 与 L' 作为无向链环同痕，当且仅当 $\alpha = \alpha'$ 与 $\beta' \equiv \beta^{\pm 1}$（模 α）。

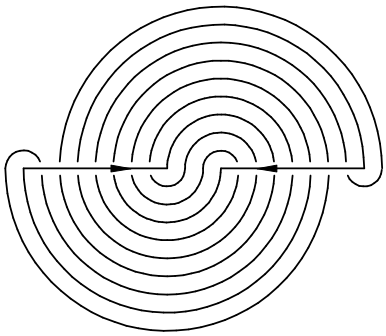


FIGURE 1. b(8,3)（怀特海德链环）的定向舒伯特图

注5.2。 所有双桥链环都是可逆的；对于双分支双桥链环，两个分支可以互换，并且改变其中一个分支的定向会将$\mathbf{b}(\alpha,\beta)$变为$\mathbf{b}(\alpha,\beta\pm\alpha)$。因此，给定一个无向链环，任意定向赋予实际上都是某个舒伯特标准形中的标准定向。

5.2. **双重分支覆盖**。 对于二桥链环（包括纽结） $L=\mathbf{b}(\alpha,\beta)$，已知 $M_2(L)$是（定向的）透镜空间 $\mathrm{L}(\alpha,\beta)$（例如，参见 [BZ02，命题12。3]）。反过来，Hodgson 和 Rubinstein [HR85] 通过对透镜空间上的对合进行分类，证明了双桥链环实际上由其二重分支覆盖刻画。

定理5.3 ([HR85])。 设 L 是 S^3 中的一个无定向链，使得其二重分支覆盖 $M_2(L)$ 是定向透镜空间$\mathrm{L}(\alpha,\beta)$。那么， L 同痕于双桥链环$\mathbf{b}(\alpha,\beta^*)$，其中 $\beta^*\equiv\beta$ (模 α)。

5.3. **Burde分类定理**。 尽管非同痕（无定向）双桥链环可由其二重分支覆盖的同胚类型区分$M_2(L)$，但未必能由 $\pi_1(M_2(L))$ 的同构类型区分，因为不同胚的透镜空间可能具有同构的基本群。Burde的分类定理 [Bur75]，基于进一步覆盖中的链接数不变量，恰好适用于区分这些情形。

对于二桥链环 $L=\mathbf{b}(\alpha,\beta)$， $M_2(L)=\mathrm{L}(\alpha,\beta)$～的万有覆盖空间与 S^3同胚，我们将其记为 S^3，以区别于原空间 S^3。记 $\check{}L=r^{-1}(L)\subseteq\mathrm{L}(\alpha,\beta)$ 和 $\widetilde{L}=q^{-1}(L)\subseteq\widetilde{S^3}$，其中 r 和 q 是如下定义的（分支）覆盖映射。

$$q:(\widetilde{S^3},\widetilde{L})\xrightarrow[\alpha\text{-fold cover}]{p}(\mathrm{L}(\alpha,\beta),\check{L})\xrightarrow[\text{two-fold branched cover}]{r}(S^3,L)$$

我们赋予 $\widetilde{S^3}$ 从 S^3提升而来的定向，并赋予 $\widetilde{L}$从 L提升而来的定向。

当 α 为奇数时， L 和 $\check{}L$ 都只有一个连通分支，$\check{}L$ 在 $\mathrm{L}(\alpha,\beta)$ 中是零伦的，～～～并且 $L=L_1\cup\cdots\cup L_\alpha$ 有 α 个分支。 $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 作为～～～$p:S^3\to\mathrm{L}(\alpha,\beta)$ 的甲板变换群，在 L的 α 个分支上作传递作用。令 τ 为～～～$\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$的一个生成元。若分支的排列顺序 $L_1,\cdots,L_\alpha$满足 $\tau(L_i)=L_{i+1}$ （指标模 α），则称其为 τ-标记的。

当 α 为偶数时， $L=J\cup K$ 是一个二分量链环。 $L=J\cup K$ 也有两个连通分支，且二者都代表 $\pi_1(\mathrm{L}(\alpha,\beta))\cong\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 中唯一的 2-挠元。～～～因此，$L=J_1\cup\cdots\cup J_{\frac{\alpha}{2}}\cup K_1\cup\cdots\cup K_{\frac{\alpha}{2}}$ 有 α 个连通分支，其中 J_i 投影

‹J，而 K_i 经由 q 投影到 K。p 的甲板变换群 $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 作用于 ~ ~ ~ – ‹‹ L，并有两个轨道 $\{J_1, \cdots, J_{\frac{\alpha}{2}}\}$ 和 ¬$\{K_1, \cdots, K_{\frac{\alpha}{2}}\}$，因此二阶子群~$\frac{\alpha}{2}\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 保持 L 的所有连通分支不变。令 τ 为 $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 的一个生成元。若~ ~‹‹~ – ~ 连通分支的排序 J_1，$\cdots$，$J_{\frac{\alpha}{2}}$，K_1，$\cdots$，$K_{\frac{\alpha}{2}}$ 是 τ-标记的，则 $\tau(J_i)$– $= J_{i+1}$，且‹‹$\tau(K_i) = K_{i+1}$，指标按模 $\frac{\alpha}{2}$ 计算。

定理 *5.4*（[Bur75]）。设 $L = b(\alpha, \beta)$ 和 $L' = b(\alpha, \beta')$ 是带有标准定向的两个双桥链环。假设 τ 和 τ' 是 $p\colon S^3 \to L(\alpha, \beta)$ 和 $p'\colon S^3 \to L(\alpha, \beta')$ 的覆盖变换群的生成元，且二者同构于 $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$。~ ~ ~ ~假设 L和 L'按分支排序，使得 L标记为 τ，而 L'标记为 τ'。若 $lk(\widetilde{L}) = lk(\widetilde{L'})$，则 L 和 L' 在 S^3 中作为定向链环同痕。

~‹ ~**注 5.5**。事实上，L 和 L' 是 S^3 中的大圆链环，因此所有链环数都属于 $\{\pm 1\}$。所以，为了得到正确的符号，必须遵循从$L \subseteq S^3$ 和 $L' \subseteq S^3$ 提升而来的精确定向。

5.4. **有限生成刚性的证明**。

定理 5.6. 设 $L \subseteq S^3$ 是一个二桥链环（包括纽结）。那么 $\pi_1(E_L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中是有限剩余刚性的。

证明。根据 [Men84，推论 2]，，二桥链环要么是环面链环，要么是双曲链环。前一种情况下，E_L 是塞弗特纤维空间，由[Xu25b，推论 8.3 和注5.24] 可知 $\pi_1(E_L)$ 在中是有限剩余刚性的。下文中，我们假设 $L = \mathbf{b}(\alpha, \beta)$ 是双曲二桥链环。

设 N 是一个具有 $\widehat{\pi_1}(N) \cong \widehat{\pi_1}(E_L)$ 的紧致可定向三维流形。我们证明 N 与 E_L 同胚。由定理 4.4，存在一个定向双曲链环L'，使得 $N \cong E_{L'}$，并且存在一个完美同构 $\Phi : \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$。注意，二重分支覆盖 $M_2(L)$ 是透镜空间 $\mathrm{L}(\alpha, \beta)$。根据命题 4.5，$\widehat{\pi_1}(M_2(L')) \cong \widehat{\pi_1}(M_2(L)) \cong \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$。因此，$\pi_1(M_2(L')) \cong \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$，因为它是剩余有限的，所以 $M_2(L')$ 也是具有相同参数 α 的透镜空间。定理5.3 接着推出，忽略定向时，L' 是具有相同挠数 α 的二桥链环。根据注5.2，L' 上的定向可实现为舒伯特标准形$\mathbf{b}(\alpha, \beta')$ 的标准定向。

为了证明 $\mathrm{b}(\alpha, \beta')$ $\cong \mathrm{b}(\alpha, \beta)$，我们应用 Burde分类定理。按照第5.3小节的做法，构造分支覆盖 $(\widetilde{S^3}, \widetilde{L})$ $\to (\mathrm{L}(\alpha, \beta), \check{}L)$ $\to (S^3, L)$ 和 $(\widetilde{S^3}, ‹L')$ $\to (\mathrm{L}(\alpha, \beta'), \check{}L')$ $\to (S^3, L')$，现在我们展示它们在 Φ 下的关系。回忆一下，$\mathrm{L}(\alpha, \beta) \setminus n(\check{}L)$ 是 (L) 的平衡二重覆盖 C_2，而 $\mathrm{L}(\alpha, \beta)$ 是 (L) 的二重分支覆盖 M_2。根据命题 4.5，我们得到一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\pi_1}(E_L) & \hookleftarrow & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta) \setminus n(\check{L})) & \xrightarrow{\rho = \widehat{\mathrm{incl}_*}} & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta)) \cong \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} \\
\Phi \downarrow \cong & & \check{\Phi} \downarrow \cong & & \phi \downarrow \cong \\
\widehat{\pi_1}(E_{L'}) & \hookleftarrow & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta') \setminus n(\check{L'})) & \xrightarrow{\rho' = \widehat{\mathrm{incl}_*}} & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta')) \cong \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}
\end{array}$$

注意到，$\widetilde{S^3} \setminus n(\widetilde{L})$ 是与 $\ker(\rho)$ 对应的 $\mathrm{L}(\alpha,$ $\beta) \setminus n(\check{}L)$ 的 α 重覆盖，因此也是与 $\ker(\rho')$ 对应的 $\widetilde{S^3} \setminus n(‹L')$。因此，它们是 $\check{}\Phi$-对应的有限覆盖，

并且有如下交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(\widetilde{S^3}\setminus n(\widetilde{L})) & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta)\setminus n(\check{L})) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \widetilde{\Phi}\downarrow\cong & & \check{\Phi}\downarrow\cong & & \phi\downarrow\cong & & \\
1 & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(\widetilde{S^3}\setminus n(\widetilde{L'})) & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta')\setminus n(\check{L}')) & \xrightarrow{\rho'} & \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1
\end{array}
\tag{5.7}
$$

~ ˇ，其中 Φ是对 Φ的限制。

~ ‹ 现在，我们给 L 和 L'的连通分支排序。固定一个生成元 $\tau \in \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} = \widehat{\pi_1}(\mathrm{L}(\alpha,\beta))$，并令 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\alpha$ 带有 τ标记。根据 [Xu25b, 引理 6.3] 以及 [WZ17a, 引理 4.5], ，同构 Φ 将 $\widehat{\pi_1}(S^3\setminus n(L))$ 的外围子群闭包的共轭类双射到 $\widehat{\pi_1}(S^3 \setminus n(L'))$ 的外围子群闭包的共轭类‿ ‹。将 L'的连通分支 ‹ ‹ ~ 排序为 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_\alpha$，使得对于每个 $1 \le i \le \alpha$， Φ都将 $\pi_1(\partial N(K_i))$ 的共轭类映射到 $\pi_1(\partial N(K'_i))$ 的共轭类。从群论角度看， $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ 通过外自同构作用于 $\widehat{\pi_1}(S^3 \setminus n(L))$ 和 $\widehat{\pi_1}(S^3 \setminus n(L'))$ 的外围‿ ~ ‿‹子群闭包的共轭类，这与甲板变换群对边界分支的作用一致。交换图‿(5.7)进而表明，外围子群闭包的共轭类之间的 Φ-双射通过 $\phi : \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$是 $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$-等变的。因此，令 ‹$\tau' = \phi(\tau) \in \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$为相应的生成元，则 $L' = K'_1 \cup \cdots \cup K'_\alpha$ 带有 τ'标记。

最后，我们证明 Φ 事实上， Φ相对于同胚 $h_\Phi : \partial(E_L) \to \partial(E_{L'})$是周边正则的，该同胚将优选~经线—纬线基对应起来。因此， Φ ——作为 Φ 的限制——相对于 $h : \partial(S^3 \setminus n(L)) \to \partial(S^3 \setminus n(L'))$也是周边‹ 正则的，并且该映射符合以下交换图。

$$
\begin{array}{ccc}
\partial(\widetilde{S^3}\setminus n(\widetilde{L})) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \partial(\widetilde{S^3}\setminus n(\widetilde{L'})) \\
\mathrm{cover}\downarrow & & \downarrow\mathrm{cover} \\
\partial(E_L) & \xrightarrow{h_\Phi} & \partial(E_{L'})
\end{array}
\tag{5.8}
$$

‾根据构造，对于每个 $1 \le i \le \alpha$，都有 $h(\partial N(K_i)) = \partial N(K'_i)$。(5.8)中的垂直覆盖映射在每个连通分支上都是 π_1-单射，并将‿ ~ ‿‹$S^3 \setminus n(L)$和 $S^3 \setminus n(L')$中的优选子午线映射为 E_L 和 $E_{L'}$中的优选子午线的两倍。因此，~h 将 K_i 的优选子午线映射为 K'_i的优选子午线。此外，‿ ~ ‿‹$S^3 \setminus n(L)$和 $S^3 \setminus n(L')$均配备了从 E_L 和 E_L提升得到的定向。‾由于 h_Φ 保持定向，交换图(5.8)表明 h也‾保持定向。因此，由引理 4.3可知， Φ是完美同构。

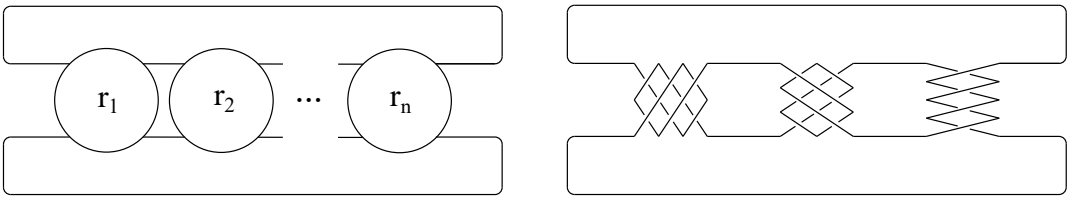
于是，由命题 4.2 可知，这两个分支排序的定向链环 ‹L' 在 S^3 中具有相同的~链接矩阵：$\mathrm{lk}(L) = \mathrm{lk}(L')$。根据定理 5.4， L和 L' （作为定向链环）是同痕的，因此， $N \cong E_{L'}$ 与E_L同胚。□

6. Montesinos links

6.1.定义与分类。蒙特西诺斯链环是双桥链环的推广。蒙特西诺斯链环由从左至右依次组合斜率为 n 、$r_1 = \frac{p_1}{q_1}$、 $\cdots$、 $r_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ 的有理缠结构成，然后取分子闭合

如图2所示。这样描述的蒙特西诺斯链环记作$\mathbf{M}(\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_n}{q_n})$，其中 p_i 和 q_i 是互素整数。本文要求：

(i) $r_i \neq \infty$，因为此时蒙特西诺斯链环可以分解为两个双桥链环的连通和；(ii) $r_i \neq 0$，因为斜率为 0 的有理缠结可以省略；(iii) $r_i \notin \mathbb{Z}$ 如果 $n \geq 2$，因为整数斜率的有理缠结可以并入相邻缠结，从而得到一个新的有理缠结，给出蒙特西诺斯链环更简洁的表示。



(a) $\mathbf{M}(\frac{p_1}{q_1} \cdots, \frac{p_n}{q_n})$ (b) $\mathbf{M}(3\,2, -\frac{2}{3}, 1\,4)$

FIGURE 2. 蒙特西诺斯链环

提醒读者，缠结数不超过 2 的蒙特西诺斯链环恰好就是双桥链环。

命题 6.1. *(1)* 蒙特西诺斯链环 $\mathbf{M}(\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_n}{q_n})$ 的$\mathbf{M}(-\frac{p_1}{q_1}, \cdots, -\frac{p_n}{q_n})$是其镜像。

(2) 设 $L = \mathbf{M}(\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_n}{q_n})$和 $L' = \mathbf{M}(\frac{p'_m}{q'_m}, \cdots, \frac{p'_m}{q'_m})$是两个无定向的蒙特西诺斯链环，且 $m, n \geq 2$。那么，L 和 L' 同痕，当且仅当 $m = n$，$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{p'_i}{q'_i}$，并且对每个 i，在模 *1* 意义下，$\frac{p_i}{q_i} \equiv \frac{p'_i}{q'_i} (\mathrm{mod} 1)$ 成立，允许循环置换和顺序反转。

证明。第一个陈述由定义显然可得；第二个陈述已由 [Bon79], 另见 [Zie84] 或 [BS16]证明。□

在下述命题中，塞弗特链环是指满足 L in S^3 、使得 E_L 为塞弗特纤维空间的链环。

命题 6.2 ([Oer84] 和 [BS16，定理 A。8])。任意蒙特西诺斯链环 L 恰好属于以下三种情形之一。

(1) L是双曲链环。*(2)* 当 L 与以下某个链环的镜像同痕时，它是塞弗特链环：*b(n, 1) (*$n > 0$*)*、*M(*$-\frac{1}{2}$*, 1 2 , *$\frac{1}{p}$*) (*$p \neq 0$*)*、*M(*$-\frac{1}{2}$*, 1 3 , 1 3)*、*M(*$-\frac{1}{2}$*, 1 3 , 1 4)*、*M(*$-\frac{1}{2}$*, 1 3 , 1 5)*。*(3)* L 与以下某个例外情形同痕或互为镜像：*M(2 3 ,* $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$*)*、*M(1 2 ,* $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$*)*、*M(1 2 ,* $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$*)*、*M(1 2 , 1 2 ,* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$*)*，其中 E_L是图流形。

6.2. **双重分支覆盖**。

命题 6.3 ([MA73])**.** 设 L 是蒙特西诺斯链环 $\mathbf{M}(\frac{q_1}{p_1}, \cdots, \frac{q_n}{p_n})$。那么，双重分支覆盖 $M_2(L)$ 是（定向的）塞弗特纤维空间 $(0, 0; \frac{q_1}{p_1}, \cdots, \frac{q_n}{p_n})$。

推论 6.4. 设 L 和 L' 是 S^3中的无向蒙特西诺斯链环，且双重分支覆盖 $M_2(L)$ 和 $M_2(L')$ 同胚。若 L 恰有 3个有理缠结，则 L' 与 L同痕或互为镜像。

证明. 设 $L = \mathrm{M}(\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})$ 和 $L' = \mathrm{M}(\frac{p'_m}{q'_m}, \cdots, \frac{p'_m}{q'_m})$。根据命题 6.3，$M_2(L) \cong (0, 0; \frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \frac{q_3}{p_3})$ 与 $M_2(L') \cong (0, 0; \frac{p'_m}{q'_m}, \cdots, \frac{p'_m}{q'_m})$ 同胚。根据塞弗特纤维空间的分类，[—Jac80, Theorem VI.17], 这两个空间表示同一个塞弗特纤维化。也就是说，$m = 3$, 并且存在 $\epsilon \in \{\pm 1\}$和一个双射 $\sigma\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$，使得 $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} = \epsilon(\frac{p'_1}{q'_1} + \frac{p'_2}{q'_2} + \frac{p'_3}{q'_3})$ 且 $\frac{p_i}{q_i} \equiv \epsilon \frac{p'_{\sigma(i)}}{q'_{\sigma(i)}} \pmod 1$。那么，无论如何选择 ϵ 和 σ，命题 6.1 都表明 $\overline{L'}$ 与 $\overline{L}$同痕或互为镜像。□

注记 6.5。当 L 至少含有 4 个缠结时，具有 $M_2(L) \cong M_2(L')$ 的蒙特西诺斯链环 L' 可能会因重新排列其有理缠结而不同于 L。因此，L' 与L 相差一系列突变。

命题 6.6。设 L 是 S^3 中的一个链环，使得其二重分支覆盖$M_2(L)$在具有 2 个球面和 3 条奇异纤维的空间上承认塞弗特纤维化。那么，L要么是塞弗特链环，要么是蒙特西诺斯链环。

证明。当 $|\pi_1(M_2(L))| < \infty$时，结论由具有底空间S^3 的球形轨形的 [完整分类 88]得到，该分类由 [MS25，定理 1。2]（另一种证明见通过对具有一维不动点集的球形流形上的对合进行分类）。而当 $|\pi_1(M_2(L))| = \infty$时，结论来自于在 $M_2(L)$ 上找到一个对合不变的塞弗特纤维化；显式证明见[Mot17，命题 3。3]□

6.3. **区分塞弗特纤维空间**。在本小节中，我们证明 Wilkes 关于塞弗特纤维空间有限生成刚性的一项推广 [Wil17]。

定义 6.7。设 Γ_1 和 Γ_2 为有限生成群。若同构 $\Phi : \widehat{\Gamma_1} \to \widehat{\Gamma_2}$ 的阿贝尔化 $\Phi, \Phi^{\mathrm{Ab}} : \widehat{\Gamma_1}^{\mathrm{Ab}} \to \widehat{\Gamma_2}^{\mathrm{Ab}}$ 是某个同构 $\Gamma_1^{\mathrm{ab}} \to \Gamma_2^{\mathrm{ab}}$的有限生成完备化，则称其为正则 同构。若对于任意一对 Φ–对应的有限指数子群 $\Gamma'_1 \le \Gamma_1$ 和$\widehat{\ } \Gamma'_2 \le \Gamma_2$，限制同构 $\Phi' : \Gamma'_1 \to \Gamma'_2$ 均为正则同构，则称同构 $\Phi\colon \widehat{\Gamma_1} \to \widehat{\Gamma_2}$ 为强正则 同构。

命题 6.8。设 M 和 N 是非透镜空间的闭可定向塞弗特纤维空间，并设 $\Phi : \widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$ 是一个强正则同构。那么，M 和 N 同胚。

证明命题 6.8 之前，我们需要几个引理。下一个引理是 [Xu25a，子引理 1] 的推广。

引理 6.9。设 G、H、K、L 是有限生成群，并设 $p : G \to K$ 和$q : H \to L$ 是群同态，使得 $p(G)$ 在 K 中的指数有限，且 $q(H)\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$在 L中的指数有限。假设 $\Phi\colon G \to H$ 和 $\Psi : K \to L$ 是同构，且下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} & \xrightarrow{\Phi} & \widehat{H} \\ {\scriptstyle \widehat{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{q}} \\ \widehat{K} & \xrightarrow{\Psi} & \widehat{L} \end{array}$$

若 Φ 是强正则的，则 Ψ 也是强正则的。

证明。设 $K' \le K$ 和 $L' \le L$ 是任意一对 Ψ–对应的有限指数子群，并且$\widehat{\ }$ “设 $\Psi' : K' \to L'$ 是 Ψ的限制。我们证明 Ψ' 是正则的。

设 $G' = p^{-1}(K')$ 和 $H' = q^{-1}(L')$ 分别是 G 和H中的有限指数子群，并设 $p' : G' \to K'$ 和 $q' : H' \to L'$ 分别是 p 和 q 的限制。那么，$p'(G') = p(G) \cap K'$ 在 K'中具有有限指数，而 $q'(H') = q(H) \cap L$ 在L'中具有有限指数。交换图表明，G' 和 H' 是 Φ-对应的有限指数子群，分别属于 G和 H。设 $\Phi' \colon G' \to H'$是 Φ的限制。于是， $q' \circ \Phi' = \Psi' \circ p'$。根据假设， Φ' 是正则的，因此 [Xu25a 的子引理 1]推出 Ψ' 也正则，从而完成证明。□

引理 6.10。设 $\mathcal{O}$ 是一个轨形欧拉示性数非正的闭定向二维轨形，并且 Σ 是 $\mathcal{O}$ 的有限层覆盖，使得 Σ 是一个曲面。那么，由覆盖映射诱导的映射 $H^2(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}); \mathbb{Z}) \to H^2(\pi_1(\Sigma); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的像非平凡。

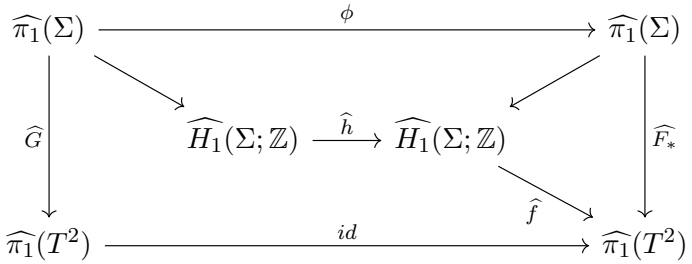
证明。设 M 是以 $\mathcal{O}$ 为底空间且欧拉数非零的塞弗特纤维空间。那么，我们得到一个中心扩张 $1 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(M) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}) \to 1$。沿轨形覆盖 $\Sigma \to \mathcal{O}$ 拉回该塞弗特纤维化，得到一个有限层水平覆盖 $M \to M$，使得 M 是以 Σ 为底空间且欧拉数为$e(M) = [\Sigma : \mathcal{O}]e(M) \neq 0$的塞弗特纤维空间。因此，我们得到一个中心扩张的拉回图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\widetilde{M}) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cover}_*} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

从而第一行不分裂。因此，覆盖映射将 $H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}); \mathbb{Z})$ 中与第二行对应的上同调类映射为 $H^2(\pi_1\Sigma; \mathbb{Z})$ 中与第一行对应的非平凡上同调类。□

引理 6.11。设 Σ 是一个亏格为 $g \geq 1$ 的闭定向曲面。假设 $\phi : \widehat{\pi_1}(\Sigma) \to \widehat{\pi_1}(\Sigma)$ 是一个正则同构。那么，对于任意正整数 n， $\phi^* : \mathbb{Z}/n \cong \mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma); \mathbb{Z}/n) \to \mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma); \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n$ 是关于 ± 1 的数乘。

”” 证明。假设阿贝尔化 $\phi_* : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \to H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ 是同构 $h : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \to H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ 的有限生成完备化。注意， Σ 存在一个度为 1 的映射 F到环面 T^2。由于 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 是阿贝尔群，基本群之间的同态可经由阿贝尔化分解为 $F_* : \pi_1(\Sigma) \to H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$。我们定义另一个同态 $G : \pi_1(\Sigma) \to H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{h} H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} \pi_1(T^2)$。根据构造，以下交换图交换。



因此，在同调层面上，我们有一个交换图（见 [Xu25a，命题 5。19]）。

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}) \cong \mathbf{H}_2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\widehat{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\phi_*} & \mathbf{H}_2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}) \\
\downarrow \widehat{G}_* & & \downarrow \widehat{F}_* \\
\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\pi_1(T^2);\mathbb{Z}) \cong \mathbf{H}_2(\widehat{\pi_1}(T^2);\widehat{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{id} & \mathbf{H}_2(\widehat{\pi_1}(T^2);\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\pi_1(T^2);\mathbb{Z})
\end{array}$$

由于 F 是度为 1 的映射，“ F_* 将基本类 $1\otimes[\Sigma]$ 映射到 $1\otimes[T^2]$；又由于“G是抽象群同态 $G:\ \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(T^2)$ 的有限生成完备化，良好性命题 2.6 表明，“ G_*将 $1\otimes[\Sigma]$映射到某个 $m\in\mathbb{Z}\, m\otimes[T^2]$。此外， ϕ 是同构，因此 ϕ_* 将 $1\otimes[\Sigma]$ 映射到某个 $\lambda\in\mathbb{Z}^\times$ $\lambda\otimes[\Sigma]$ 。交换图于是推出 $\lambda=m$，因此 $\lambda=m=\pm1$。最后，根据万有系数定理，对于任意 $n\in\mathbb{N}$， $\phi^*:\ \mathbb{Z}/n\cong\mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\mathbb{Z}/n) \to \mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\mathbb{Z}/n) \cong\mathbb{Z}/n$ 同样是由 ±1给出的数乘。□

引理 6.12. 设 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是两个轨形欧拉示性数非正的闭定向二维轨形。假设 $\psi:\ \pi_1^{orb}(\mathcal{O}_1)\to\pi_1^{orb}(\mathcal{O}_2)$ 是一个强正则同构。那么， $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 同构；并且存在一个同构$\mathcal{O}_1\cong\mathcal{O}_2$ ，使得在此识别下， $\psi^*:\mathbf{H}^2(\mathcal{O}_1;\mathbb{Z}/n)\to\mathbf{H}^2(\mathcal{O}_2;\mathbb{Z}/n)$ 对任意正整数 n都是以 ±1 为数乘。

‘‘证明。首先，给定任意同构 $\psi:\ \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}_1)\to\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}_2)$， [Wil17, 命题 5.7] 表明 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 同构，并且存在一个单位 $\kappa\in\mathbb{Z}^\times$ 和一个识别 $\mathcal{O}_1\cong\mathcal{O}_2\cong\mathcal{O}$ ，使得对于任意正整数 n， ψ^* 在 $\mathbf{H}^2(\mathcal{O};\mathbb{Z}/n)$ 上的作用是以 κ为数乘。因此，只需证明 $\kappa=\pm1$。

反设 $\kappa\neq\pm1$。那么，存在某个正整数 m，使得 $\kappa\not\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ m)$。令 $\Sigma\to\mathcal{O}$ 为一个有限层特征覆盖，使得 Σ 是一个曲面；例如，我们可以先找到一个有限曲面覆盖 $\Sigma_0\to\mathcal{O}$，然后令 $\pi_1(\Sigma)$ 为 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O})$ 中所有指数不超过 $[\Sigma_0:\ \mathcal{O}]$ 的子群的交。通过这一构造， $\psi(\pi_1(\Sigma))=\pi_1(\Sigma)$，并令 $\phi:\widehat{\pi_1}(\Sigma)\to\widehat{\pi_1}(\Sigma)$ 为 ψ 的限制。根据假设， ϕ 是正则的。

令 $[\alpha]\in H^2(\pi_1(\Sigma;\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ 为一个生成元，并令 $i:\ \pi_1(\Sigma)\to\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O})$ 为包含映射。根据引理 6.10，同态 $i^*:\ H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\ \mathbb{Z})\to H^2(\pi_1(\Sigma);\ \mathbb{Z})$ 的像非平凡，因此我们假设，对于某个 $[\omega]\in H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\ \mathbb{Z})$， $i^*[\omega]=l[\alpha]$ 对某个正整数 l 成立。令 $n=ml$，并令 $[\alpha]_n$ 为 $[\alpha]$ 在 $H^2(\pi_1(\Sigma);\ \mathbb{Z}/n)\cong\mathbb{Z}/n$ 中的像，它仍是一个生成元。同理，令 $[\omega]_n$ 为$[\omega]$ 在 $H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\ \mathbb{Z}/n)$ 中的像。那么， $i^*([\omega]_n)=l[\alpha]_n$。

在上同调层面，根据命题 2.6，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}/n)\cong\mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\mathbb{Z}/n) & \xleftarrow{\widehat{i^*}} & \mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)\cong H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n) \\
\uparrow \phi^* & & \uparrow \psi^* \\
H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}/n)\cong\mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\mathbb{Z}/n) & \xleftarrow{\widehat{i^*}} & \mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)\cong H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)
\end{array}$$

‘接着， $\widehat{i^*}\circ\psi^*$ 将 $[\omega]_n\in H^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)\cong\mathbf{H}^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)$ 映射到 $\widehat{i^*}(\kappa[\omega]_n)=\kappa l[\alpha]_n\in H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}/n)\cong\mathbf{H}^2(\widehat{\pi_1}(\Sigma);\mathbb{Z}/n)$。另一方面， ϕ 是正则的，因此根据引理 6.11，ϕ^* 是由 ±1 给出的数乘。因此， $\phi^*\circ i^*$ 将 $[\omega]_n$映射到 $\phi^*(l[\alpha]_n)=\pm l[\alpha]_n$。回想一下， $[\alpha]_n$ 是 $H^2(\pi_1(\Sigma);\mathbb{Z}/n)\cong\mathbb{Z}/n$的生成元，所以

我们有 $\kappa l \equiv \pm l$ (模 n)。由于 $n = ml$，我们推出 $\kappa \equiv \pm 1$ (模 m)，这与我们的假设矛盾。□

命题 6.8 的证明。根据 [Wil17], ，我们只需考虑M 和 N 具有 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ 几何结构的情形。在这种情况下， M 和 N 存在唯一的塞弗特纤维化，其底轨形分别记为 $\mathcal{O}_M$ 和 $\mathcal{O}_N$。由 [Wil17]可知， $\mathcal{O}_M$ 和$\mathcal{O}_N$ 具有相同的可定向性。当 $\mathcal{O}_M$ 和 $\mathcal{O}_N$ 均不可定向时，设 M‹和 N 分别为 M 和 N 的二重覆盖，它们拉回 $\mathcal{O}_M$和 $\mathcal{O}_N$的可定向二重 ‹覆盖。此时， $M \cong N$当且仅当$M \cong N$；并且 $\pi_1(M)$与 $\pi_1(N)$是 $\pi_1(M)$和 $\pi_1(N)$中Φ相对应的有限指数子群，因为它们的闭包是‹$\widehat{\pi_1}(M)$和 $\widehat{\pi_1}(N)$中唯一极大几乎中心的正规原循环子群的中心化子（见 [Wil17，定理 5.2]），所以 $\Phi|: \widehat{\pi_1}(M) \to \widehat{\pi_1}(N)$也强正则。因此，我们可以假定 $\mathcal{O}_M$ 和 $\mathcal{O}_N$ 均可定向。

在这种情况下，根据 [Wil17，定理 5。2], 中心扩张之间存在一个由同构构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(M) & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(\mathcal{O}_M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \phi\downarrow\cong & & \Phi\downarrow\cong & & \psi\downarrow\cong & & \\ 1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1}(N) & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(\mathcal{O}_N) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

一方面，由于 M 和 N 具有 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ 几何结构，且它们的底轨形可定向，因此它们的正则纤维在 $H_1(M;\mathbb{Z})\widehat{}$ $\widehat{}$和 $H_1(N;\mathbb{Z})$中代表非挠同调类。由于 Φ 是正则的，纤维子群闭包之间的同构 $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$必定是由 ± 1给出的数乘，即ϕ 将 M 的正则纤维映到 N正则纤维的 ± 1倍。另一方面，根据引理 6.9，假设 Φ是强正则的，则推出‘ ‘$\psi\colon \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}_M) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O}_N)$ 也强正则。接着，引理 6.12表明，在识别 $\mathcal{O}_M \cong \mathcal{O}_N \cong \mathcal{O}$后， ψ^* 作用于 $\mathrm{H}^2(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{O});\mathbb{Z}/n)$ 是由 ± 1 给出的数乘，其中 n为任意正整数。最后，根据命题 5.7和 [Wil17]的定理 5.1，由于 M 和 N 构成一个比例因子为 ± 1的亨佩尔对，因此二者必定同胚。□

6.4. **双曲情形**。

定理 6.13. 设 L是由 *3* 个有理缠结组成的双曲蒙特西诺斯链环。那么，$\pi_1(E_L)$ 在 $\mathscr{M}$中具有有限剩余刚性。

证明。 设 N 是一个紧致可定向三维流形，且满足 $\widehat{\pi_1}(N) \cong \widehat{\pi_1}(E_L)$。为 L任取一个定向。由定理 4.4，存在一个定向双曲链环 L'，使得 $N \cong E_{L'}$，并且存在一个完美同构 $\Phi\colon \widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$。因此，由命题 4.5，存在一个同构 $\phi\colon \widehat{\pi_1}(M_2(L)) \to \widehat{\pi_1}(M_2(L'))$，使其适合下列交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi_1}(C_2(L)) & \xrightarrow{\check{\Phi}} & \widehat{\pi_1}(C_2(L')) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathrm{incl}_*}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\mathrm{incl}_*}} \\ \widehat{\pi_1}(M_2(L)) & \xrightarrow{\phi} & \widehat{\pi_1}(M_2(L')) \end{array}$$

根据命题 6.3，二重分支覆盖 $M_2(L)$ 是一个塞弗特纤维空间，其轨道空间是带有 3 个锥点的二维球面；特别地， $M_2(L)$ 不是透镜空间。根据定理 2.4， $M_2(L')$ 也是一个塞弗特纤维空间。此外， $C_2(L)$

且 $C_2(L')$ 是带尖点双曲三维流形，因此 $\check{}\Phi$根据 [Xu25a，定理 14]，具有强正则性。由此， ϕ根据引理 6.9，也具有强正则性。因此，根据命题 6.8， $M_2(L) \cong M_2(L')$。

因此，命题 6.6 表明， L' 要么是塞弗特链环，要么是蒙特西诺斯链环。根据假设， L' 是双曲链环，因此它必定是蒙特西诺斯链环。最后，由于 L 有三个缠结，推论 6.4 表明， L' 与 L同痕或互为镜像（作为无向链环）。因此， $N \cong E_{L'} \cong E_L$。□

6.5. **例外情形。**

引理 *6.14.* 设 M_1 和 M_2 是紧致可定向塞弗特纤维化空间，且各自至少有两个边界分支。假设 M_1 和 M_2 都是非手征的。对于 $i = 1$，取 *2*，令 T_i 为 M_i的一个边界分支，并令 γ_i 表示 T_i上 M_i 的一个正则纤维。假设 $f\colon T_1 \to T_2$ 和 $f'\colon T_1 \to T_2$ 是两个同胚，使得 $\Delta(f(\gamma_1), \gamma_2) = \Delta(f'(\gamma_1), \gamma_2) = n$和 $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$，其中 $\Delta(\cdot, \cdot)$表示环面 T_2上的几何交数。那么， $M_1 \cup_f M_2$ 与$M_1 \cup_{f'} M_2$同胚。

证明。当 M_1 或 M_2 之一与 $T^2 \times I$同胚时，结论显然成立。因此，我们可以假设它们都不与 $T^2 \times I$同胚，故二者在同伦意义下都具有唯一的塞弗特纤维化。

对于 $i = 1$，2，固定 $H_1(T_i)$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$-基 $\{h_i, e_i\}$，使得 h_i 表示 γ_i 的同调类（定向的选择除外）。同胚 $f\colon T_1 \to T_2$ 和 $f'\colon T_1 \to T_2$ 在同调层面可由矩阵描述

$$f_*\begin{pmatrix} h_1 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f'_*\begin{pmatrix} h_1 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

其中 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$，$\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$。于是， $\Delta(f(\gamma_1), \gamma_2) = |c|$，且 $\Delta(f'(\gamma_1), \gamma_2) = |c'|$，因此 $|c| = |c'| = n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$。

我们还可以将 $\mathrm{Aut}(H_1(T_i))$ 识别为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，从而矩阵 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 通过 $\begin{pmatrix} h_i & e_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h_i & e_i \end{pmatrix} P$ 作用于 $H_1(T_i)$。存在一个同态 $\rho_i\colon \mathrm{Homeo}(M_i, T_i) \to \mathrm{Aut}(H_1(T_i)) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，其定义方式显而易见，并且我们断言

$$\mathrm{im}(\rho_i) = U := \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \{\pm 1\},\, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

一方面，由于 M_i 在同伦意义下具有唯一的塞弗特纤维化，$\mathrm{Homeo}(M_i)$ 在同伦意义下保持该塞弗特纤维化。因此，$\mathrm{im}(\rho_i)$ 中的任意自同构都将同调类 h_i 保持至多相差 $\pm$–符号。于是，$\mathrm{im}(\rho_i) \subseteq U$。另一方面， [Xu25b，引理 8.21] 表明 $\mathrm{im}(\rho)$ 包含子群 $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$，而 [Xu25b，引理 8.23] 表明 $\mathrm{im}(\rho)$ 包含元素 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$。因此，$\mathrm{im}(\rho) \supseteq U \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。此外， M_i 是非手征的，所以 $\mathrm{Homeo}(M_i, T_i)$ 包含一个反定向元素。因此，$\mathrm{im}(\rho)$ 还包含一个行列式为 -1 的元素，从而 $\mathrm{im}(\rho) \supseteq U$。

注意， $M_1 \cup_f M_2 \cong M_1 \cup_{f'} M_2$ 如果存在 $g_1 \in \mathrm{Homeo}(M_1, T_1)$ 和 $g_2 \in \mathrm{Homeo}(M_2, T_2)$，使得 $f' = g_2|_{T_2} \circ f \circ g_1|_{T_1}$。由于环面之间的同胚由其在第一同调上的作用唯一确定（相差一个同伦）， $M_1 \cup_f M_2 \cong M_1 \cup_{f'} M_2$ 如果存在 $P_1 \in U = \mathrm{im}(\rho_1)$ 和 $P_2 \in U = \mathrm{im}(\rho_2)$，使得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} P_1.$$

I为了证明这样的 P_1 和 P_2 存在，我们断言存在 Q_1，$Q_2 \in U$ 使得

$$Q_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

事实上，$|ad-bc| = 1$，因此 $\gcd(a,n) = \gcd(a,c) = 1$。对于 $n \in \{1,2,3,4,6\}$，我们必须有 $a \equiv \pm 1$ (模 n)。令 $x_2 \in \{\pm 1\}$，使得 $x_2 a \equiv 1$ (模 n)，并令 $y_2 = \frac{n}{c} \in \{\pm 1\}$。那么，$y_2 d \equiv y_2 (x_2 a) d \equiv y_2 x_2 (ad - bc)$ (模 n)。令 $y_1 = y_2 x_2 (ad-bc) \in \{\pm 1\}$，因此 $y_1 y_2 d \equiv 1$ (模 n)。最后，令 $z_1 = \frac{1 - y_1 y_2 d}{n} \in \mathbb{Z}$ 和 $z_2 = y_2 \frac{1 - x_2 a}{n} \in \mathbb{Z}$。那么，

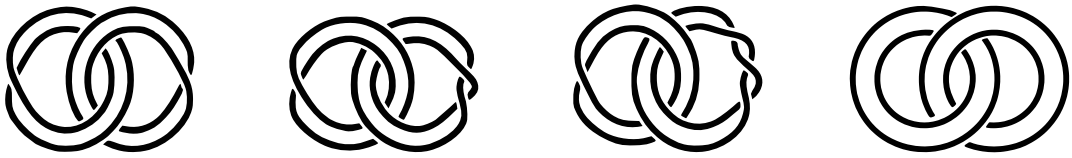
$$\begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 a + z_2 c & x_2 y_1 b + z_2 y_1 d + z_1 (x_2 a + z_2 c) \\ y_2 c & y_2 z_1 c + y_2 y_1 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $Q_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & y_1 \end{smallmatrix}\right) \in U$ 和 $Q_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 & z_2 \\ 0 & y_2 \end{smallmatrix}\right) \in U$。同样，存在 $Q_1', Q_2' \in U$ 使得 $Q_2' \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) Q_1' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right)$。令 $P_1 = Q_1' Q_1^{-1} \in U$ 和 $P_2 = Q_2^{-1} Q_2' \in U$。于是，$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = P_2 \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) P_1$，证明完毕。□

定理 6.15。设 L 是一个非双曲蒙特西诺斯链环。那么，$\pi_1(E_L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中具有有限剩余刚性。

证明。当 L 是塞弗特链环时，再由 [Xu25b、推论 8.3 和注记 8 可知，4] $\pi_1(E_L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中具有有限剩余刚性。因此，只需考虑命题 6.2 (3) 中列出的四个例外情形。

在这些情形下，E_L 是一个图流形，由两个 JSJ 块（记作 M_1 和 M_2）沿一个 JSJ 环面粘合而成，见图 6.5。在整个证明中，令 X 表示塞弗特纤维空间 (0, 2; 1 2)，令 Y表示塞弗特纤维空间 (0, 3;) = $\Sigma_{0,3} \times S^1$。当 $L = \mathrm{M}(2\ 3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 或 $L = \mathrm{M}(1\ 2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ 时，E_L的两个 JSJ 块都与 X 同胚；当 $L = \mathrm{M}(1\ 2, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ 时，E_L 的一个 JSJ 块与 X 同胚，另一个与 Y 同胚；当 $L = \mathrm{M}(1\ 2, 1\ 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 时，E_L的两个JSJ 块都与 Y 同胚。



(a) $\mathrm{M}(2\ 3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ (b) $\mathrm{M}(1\ 2, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ (c) $\mathrm{M}(1\ 2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ (d) $\mathrm{M}(1\ 2, 1\ 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

FIGURE 3. [Oer84，图1。4]

假设 N 是一个紧致可定向三维流形，满足 $\widehat{\pi_1}(N) \cong \widehat{\pi_1}(E_L)$。我们证明 N 与 E_L同胚。

[Xu24，引理 A.1] 和定理 2.4 表明，N 也是一个图流形，由两个 JSJ 块（记为 N_1 和 N_2）沿一个 JSJ 环面粘合而成，并满足 $\widehat{\pi_1}(M_1) \cong \widehat{\pi_1}(N_1)$ 且 $\widehat{\pi_1}(M_2) \cong \widehat{\pi_1}(N_2)$。根据 [Xu25b，推论 8.3]，这意味着 $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(N_1)$ 且 $\pi_1(M_2) \cong \pi_1(N_2)$。注意，任何基本群同构于 $\pi_1(X)$ 的可定向塞弗特纤维空间都与 X 同胚，因此 $N_i \cong M_i$ 当 $M_i \cong X$ 时。另一方面，存在两个基本群同构于 $\pi_1(Y) \cong F_2 \times \mathbb{Z}$ 的可定向塞弗特纤维空间，分别为 $Y = \Sigma_{0,3} \times S^1$ 和 $\Sigma_{1,1} \times S^1$。然而，每个 M_i 都包含 M 的一个边界分支，因此根据 [Xu25a，引理 9.7 (1)]，，每个 N_i 也包含 N 的一个边界分支。特别地，∂N_i 至少有两个连通分支。因此，当 $M_i \cong Y$ 时，唯一剩下的可能性是 $N_i \cong Y \cong M_i$。

此外，[Xu25b，引理 9.3 (1)] 表明，N_1 和 N_2 的正则纤维在 N 的 JSJ 环面上的几何交数，等于 M_1 和 M_2 的正则纤维在 $S^3 - L$ 的 JSJ 环面上的几何交数；当 L =M(2 3 , $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$) 时，该交数为 3；当 L =M(1 2 , $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$)、M(1 2 , $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$)、M(1 2 , 1 2 , $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$) 时，该交数为 1。注意，$X$ 和 Y 都是非手征的，因此由引理 6.14 可知，$N = N_1 \cup_{T^2} N_2$ 与 $M_1 \cup_{T^2} M_2 = E_L$ 同胚。□

7. Further criteria for profinite rigidity

7.1. 轨形德恩手术。 命题 4.5 的一个更精确版本可以通过在有限生成意义下对齐所谓的 π-轨形群来获得。

设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3 中的一个链环。对于整数 $r \geq 2$，由 L 确定的 $\frac{2\pi}{r}$-轨形 是一个轨形，其底空间为 S^3，奇异轨迹为 L，且每个连通分支 K_i 上的圆锥角为 $\frac{2\pi}{r}$。我们将 $\frac{2\pi}{r}$ -轨形记作 $O_r(L)$。事实上，$O_r(L)$ 可视为对 E_L 进行轨形德恩手术所得的轨形，该手术对应于非本原斜率 $r\mathbf{m} = (rm_1, \cdots, rm_n)$，其中各个 m_i 都是赋予任意定向的 L 的子午线。因此，轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_r(L))$ 同构于 $\pi_1(E_L)/\langle\langle m_1^r, \cdots, m_n^r \rangle\rangle$。

命题 7.1。 设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 和 $L' = K_1' \cup \cdots \cup K_n'$ 是 S^3 中两个分支排序的定向 n-连通分支链环，且 Φ： $\widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$ 是一个“完美同构。则对于每个 $r \geq 2$，存在一个同构 Φ_r： $\pi_1^{orb}(O_r(L)) \to$“$\pi_1^{orb}(O_r(L'))$，使其适合放入下列交换图中。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi_1}(E_L) & \twoheadrightarrow & \widehat{\pi_1^{orb}}(O_r(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_r} \\ \widehat{\pi_1}(E_{L'}) & \twoheadrightarrow & \widehat{\pi_1^{orb}}(O_r(L')) \end{array}$$

证明。德恩填充对齐定理（定理 3.4）对于产生轨形的非本原斜率同样成立，见 [Xu24，注 3。6]；结论可直接由这一推广版本得到。□

下面的判据着重考察双曲链环的 π-轨形群。设 $\mathscr{O} = \{\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_2(L)) \mid L \text{ 是 } S^3\}$ 中的一个双曲链环。

定理 7.2. 设 L 是 S^3 中的双曲链环，且不是二桥链环，并且 $\pi_1^{orb}(O_2(L))$ 在 $\mathscr{O}$ 中具有有限剩余刚性。那么，$\pi_1(E_L)$ 在 $\mathscr{M}$ 中具有有限剩余刚性。

证明。为 L 任意选取一个定向。设 M 是一个紧致可定向三维流形，且具有 $\widehat{\pi_1}(E_L) \cong \widehat{\pi_1}(M)$。根据定理 4.4，存在一个定向双曲链环 $L' \subseteq S^3$，使得 $M \cong E_{L'}$，并且存在一个完美同构‘ ‘Φ ： $\widehat{\pi_1}(E_L) \to \widehat{\pi_1}(E_{L'})$。由命题 7.1，$\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_2(L)) \cong \pi_1^{\mathrm{orb}}(O_2(L'))$，因此根据我们的假设，$\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_2(L)) \cong \pi_1^{\mathrm{orb}}(O_2(L'))$。由于双曲链环必为素且不可分裂，并且 L 不是二桥链环，根据 [BZ89, 定理 3.1]，E_L与 $E_{L'}$ 微分同胚，因此 $\pi_1(M) \cong \pi_1(E_{L'}) \cong \pi_1(E_L)$。□

7.2. 关于循环分支覆盖的更多讨论。 我们还可以将命题 4.5 推广到具有 $r \geq 3$的r重循环分支覆盖。为避免循环分支覆盖中的歧义，本小节将讨论范围限定为纽结。

K 是 S^3中的一个纽结。存在唯一的 r重循环覆盖，记作 E_K，即唯一满同态 $C_r(K)$ $\pi_1(E_K) \twoheadrightarrow H_1(E_K)$ 的核。

r沿 S^3 的 K重循环分支覆盖，记作 $M_r(K)$，可由沿 $C_r(K)$中 E_K的子午线的提升进行德恩填充得到。从另一角度看， $M_r(K)$是 r重轨形覆盖 $O_r(K)$，对应于 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_r(K))$ $\to\pi_1^{\mathrm{orb}}(O_r(K))^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$的核。

命题 7.3. 设 K 和 K' 是 S^3中的定向纽结，且 $\Phi:\ \widehat{\pi_1}(E_K) \to\widehat{\pi_1}(E_{K'})$ 是一个完美同构。那么，对于任意 $r \geq 2$， $\widehat{\pi_1}(M_r(K)) \cong \widehat{\pi_1}(M_r(K'))$ 。

‘‘证明。 命题 7.1 给出一个同构 $\Phi_r:\ \pi_1^{\mathrm{orb}}(O_r(K)) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(O_r(K'))$。取有限剩余阿贝尔化后，得到以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(O_r(K)) & \xrightarrow{\mathrm{Ab}} & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_r} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \widehat{\pi_1^{\mathrm{orb}}}(O_2(L')) & \xrightarrow{\mathrm{Ab}} & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \end{array}$$

阿贝尔化的核恰好是 $\pi_1(M_r(K))$ 和 $\pi_1(M_r(K'))$ 的闭包，它们分别同构于 $\widehat{\pi_1}(M_r(K))$ 和 $\widehat{\pi_1}$ $(M_r(K'))$。因此，将 Φ_r 限制在这些核上，得到一个同构 $\widehat{\pi_1}(M_r(K))\cong \widehat{\pi_1}(M_r(K'))$。□

定理 7.4. 设 K 是 S^3中的一个双曲结。假设对于无穷多个整数 $r \geq 2$, $\pi_1(M_r(K))$ 在 $\mathscr{M}$ 中是有限剩余刚性的。那么， $\pi_1(E_K)$ 在 $\mathscr{M}$ 中是有限剩余刚性的。

证明。 给 K 赋予任意定向。假设 M 是一个紧致可定向三维流形，且 $\widehat{\pi_1}(E_K) \cong \widehat{\pi_1}(M)$。根据定理 4.4，存在一个定向的双曲结 $K' \subseteq S^3$ ，使得 $M \cong E_{K'}$ ，并且存在一个完美同构$\Phi:\ \widehat{\pi_1}(E_K) \to \widehat{\pi_1}(E_{K'})$。根据命题 7.3，对于所有 $r \geq 2$，均有 $\widehat{\pi_1}(M_r(K)) \cong \widehat{\pi_1}(M_r(K'))$。因此，该假设意味着对于无穷多个 $r \geq 2$，有 $\pi_1(M_r(K)) \cong \pi_1(M_r(K'))$。

根据 [Koj86，引理 4]， $M_r(K)$在 r 充分大时是一个双曲流形。因此，Mostow 刚性定理意味着，对于无穷多个 r， $M_r(K)\cong M_r(K')$。最后， [Koj86] 的主定理意味着， K 和 K' 在同伦和镜像意义下等价。因此， $\pi_1(M) \cong \pi_1(E_{K'}) \cong \pi_1(E_K)$。□

References

[Ago13] Ian Agol, *The virtual Haken conjecture (with an appendix by Ian Agol, Daniel Groves and Jason Manning)*, 《Documenta Mathematica》 **18** (2013)。[BCR16] M. R. Bridson, M. D. E. Conder 和 A. W. Reid, *Determining Fuchsian groups by their finite quotients*, 《以色列数学杂志》 **214** (2016), 1, 1–41。[BF20] Michel Boileau 和 Stefan Friedl, *The profinite completion of 3-manifold groups, fiberedness and the Thurston norm*, 《接下来是什么？：威廉·P·瑟斯顿的数学遗产》（AMS-205），普林斯顿大学出版社，2020 年，第 21–44 页。[Bon79] Francis Bonahon, *Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimen-sion 3*, 第三周期论文，巴黎-南大学，奥赛（1979），可从 https://dornsife.usc.edu/francis-bonahon/wp-content/uploads/sites/205/2023/06/These3eCycle-compressed.pdf 获取。[BR20] Martin R. Bridson 和 Alan W. Reid, *Profinite rigidity, fibering, and the figure-eight knot*, 《接下来是什么？：威廉·P·瑟斯顿的数学遗产》（AMS-205），普林斯顿大学出版社，2020 年，第 45–64 页。[BS16] Francis Bonahon 和 Laurence Siebenmann, *New geometric splittings of classicalknots, and the classification and symmetries of arborescent knots*, 预印本，可从 https://dornsife.usc.edu/francis-bonahon/wp-content/uploads/sites/205/ 2023/06/BonSieb-compressed.pdf 获取，2016 年。

[Bur75] Gerhard Burde, *Verschlingungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken* **145** 1975 3, 235 242 , 《数学杂志》 (), 第 – 期。[BZ89] Michel Boileau 和 Bruno Zimmermann, *The π-orbifold group of a link*, 《数学杂志》200（1989）, 第 2 期, 187–208 页。[BZ02] Gerhard Burde 和 Heiner Zieschang, *Knots*, 德古意特出版社, 柏林、纽约, 2002 年。[CW23] TAMUNONYE CHEETHAM-WEST, *Distinguishing some genus one knots using finite quotients*, 《纽结理论及其应用杂志》32（2023）, 第 05 期, 2350035。[DFPR82] John D. Dixon、Edward W. Formanek、John C. Poland 和 Luis Ribes, *Profinite com-pletions and isomorphic finite quotients*, 《纯粹与应用代数杂志》23（1982）, 第 3 期, 227–231 页。[Dun88] William D. Dunbar, *Geometric orbifolds*, 《马德里康普顿斯大学数学杂志》1（1988）, 第 1、2、3 期, 67–99 页。[Fun13] Louis Funar, *Torus bundles not distinguished by TQFT invariants*, 《几何与拓扑》17（2013）, 第 4 期, 2289–2344 页。[GJZZ08] Fritz Grunewald、Andrei Jaikin-Zapirain 和 Pavel Zalesskii, *Cohomological goodness and the profinite completion of Bianchi groups* **144** 2008 , 《杜克数学杂志》 (), 第 1 期, 53 72–。[GL89] Cameron Gordon 和 John E. Luecke, *Knots are determined by their complements*, 《美国数学会杂志》2（1989）, 第 2 期, 371–415 页。[Hem93] Geoffrey Hemion, *The classification of knots and 3-dimensional spaces*, 牛津大学出版社, 1993 年 1 月。[Hem14] John Hempel, *Some 3-manifold groups with the same finite quotients*, arXiv 预印本（2014）, arXiv: 1409.3509v2。[Hem16] , *Residual finiteness for 3-manifolds*, 《组合群论与拓扑学》, 普林斯顿大学出版社, 2016 年, 第 379–396 页。[HR85] Craig Hodgson 和 J. H. Rubinstein, *Involutions and isotopies of lens spaces*, 《纽结理论与流形》, 施普林格·柏林·海德堡, 1985 年, 第 60–96 页。[Jac80] William Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS 数学区域会议丛书, 第 43 卷, 美国数学会, 1980 年。[Koj86] Sadayoshi Kojima, *Determining knots by branched covers*, 《低维拓扑学与克莱因群》（华威和达勒姆）, 伦敦数学会讲义丛书, 第 112 卷, 剑桥大学出版社, 1986 年, 第 193–207 页。[Kup14] Greg Kuperberg, *Knottedness is in NP, modulo GRH*, 《数学进展》256（2014）, 493–506 页。[MA73] Jos e Marıa Montesinos Amilibia, *Seifert manifolds that are ramified two-sheeted cyclic coverings* **2** 1973 18, 1 32 , 《墨西哥数学会公报·第二辑》 (), 第 – 期。[Men84] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, 《拓扑学》23（1984）, 第 1 期, 37–44 页。[Mot17] Kimihiko Motegi, *A note on L-spaces which are double branched covers of non-quasi-alternating links* **230** 2017 172 180 , 《拓扑学及其应用》 (), –。[MS25] Mattia Mecchia 和 Baptiste Schilling, *Involutions of spherical 3-manifolds*, 《的里雅斯特大学数学研究所汇刊: 国际数学期刊》57（2025）。[NS07] Nikolay Nikolov 和 Dan Segal, *On finitely generated profinite groups I: Strong completeness and uniform bounds* **165** 2007 1, 171 238 , 数学年刊 (), 第 – 期。[Oer84] Ulrich Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, 《太平洋数学杂志》111（1984）, 第 1 期, 209–230 页。[RZ10] Luis Ribes 和 Pavel Zalesskii, *Profinite groups*, 《数学及其边界领域成果》（现代数学调查丛书）, 施普林格·柏林·海德堡, 2010 年。[Sch56] Horst Schubert, *Knoten mit zwei Brücken* **65** 1956 1, 133 170 , 《数学杂志》 (), 第 – 期。[Ser01] Jean-Pierre Serre, *Galois cohomology*, 《施普林格数学专著》, 施普林格·柏林·海德堡, 2001 年。[Whi87] Wilbur Whitten, *Knot complements and groups*, 《拓扑学》26（1987）, 第 1 期, 41–44 页。[Wil17] Gareth Wilkes, *Profinite rigidity for Seifert fibre spaces*, 《献给几何学》188（2017）, 第 1 期, 141–163 页。[Wil18] , *Profinite completions, cohomology and JSJ decompositions of compact 3-manifolds*, 《新西兰数学杂志》48（2018）, 101–113。

[Wil19] , *Profinite rigidity of graph manifolds, II: knots and mapping classes*, 《以色列数学杂志》**233** (2019)，第 1 期，351–378。[WZ17a] Henry Wilton 和 Pavel Zalesskii, *Distinguishing geometries using finite quotients*, 《几何与拓扑》**21** (2017)，第 1 期，345 – 384。[WZ17b] , *Pro-p subgroups of profinite completions of 3-manifold groups*, 《伦敦数学会杂志》**96** (2017)，第 2 期，293–308。[WZ19] , *Profinite detection of 3-manifold decompositions*, 《数学汇编》**155** (2019)，第 2 期，246–259。[Xu24] Xiaoyu Xu, *Profinite rigidity witnessed by Dehn fillings of cusped hyperbolic 3-manifolds*, arXiv 预印本（2024），arXiv: 2412.05229v4。[Xu25a] , *On regularity of profinite isomorphisms between cusped hyperbolic 3-manifolds and the A-polynomial* 2025 2506.21105 2 ，arXiv 预印本（ ），arXiv: 。 v 。[Xu25b] , *Profinite almost rigidity in 3-manifolds*, 《数学进展》**480** (2025)，110505。[Zie84] Heiner Zieschang, *Classification of Montesinos knots*, 拓扑学（柏林，海德堡），施普林格·柏林·海德堡，1984，第 378–389 页。

Yale University, 219 Prospect Street, New Haven, CT, U.S.A, 06511
Email address: tamcheethamwest24@gmail.com

Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing, P.R.China 100871 ,
Email address: xuxiaoyu@stu.pku.edu.cn