arXiv:2603.21007v1 [cs.CC] 27 Dec 2025

最坏情形设定下线性加权张量积问题的指数可处理性札记

ZIRONG LIU、HEPING WANG 和 KAI WANG

Abstract. 本文旨在探讨最坏情形设定下的加权线性张量积问题。我们考虑使用有限次任意连续线性泛函求值的算法。我们研究在绝对误差准则或归一化误差准则下，具有 $\max(s,t) < 1$的指数型 (s,t)-弱可处理性（EXP-(s,t)-WT）以及指数型一致弱可处理性（EXP-UWT）。我们通过填补指数可处理性方面尚未解决的空白来解决这一问题。具体而言，我们得到了具有 $\max(s,t) < 1$ 的 EXP-(s,t)-WT 以及 EXP-UWT 的充要条件。

1. Introduction and main results

我们研究 d 变量线性问题 $S = \{S_d\}_{d\in\mathbb{N}}$，其中 S_d 是从巴拿赫函数空间 H_d 到另一个巴拿赫函数空间 G_d 的线性算子， d 可能很大，甚至极大。我们考虑使用有限个作用于 H_d 上的连续线性泛函的算法。信息复杂度 $n(\varepsilon, S_d)$ 定义为：求得一个与 S_d 的误差不超过误差阈值 ε 的近似所需的最少线性泛函数目。可处理性研究信息复杂度 $n(\varepsilon, S_d)$ 如何依赖于 ε 和 d。基于多项式收敛和指数收敛，可处理性分为两类。代数可处理性（ALG-可处理性）描述 $n(\varepsilon, d)$ 如何作为 d 和 ε^{-1} 的函数而变化，而 EXP- 可处理性则描述其如何作为 d 和 $(1 + \ln \varepsilon^{-1})$ 的函数而变化。近年来，ALG-可处理性和 EXP-可处理性的研究引起了广泛关注，并取得了许多有趣的成果（参见 [1, 3–5、7、8、10–18] 及其中的参考文献）。

本文致力于讨论最坏情形设定下线性加权张量积问题的EXP-可处理性。对于无权线性张量积问题， [6, 13, 14]中给出了关于EXP-可处理性的结果。然而，关于指数可处理性存在许多否定性结果。因此， [9]中的作者引入了线性加权张量积问题，并针对权重和单变量奇异值，获得了各种EXP-可处理性概念的充要条件。需要注意的是，在 [9] 中，EXP-(s,t)-弱可处理性（EXP-(s,t)-WT）且$\max(s,t) < 1$以及EXP-一致弱可处理性（EXP-UWT）的情形尚未解决。

本文研究上述加权线性张量积问题的 EXP-(s,t)-WT，其中 $\max(s,t) < 1$，以及 EXP-UWT。我们通过填补 EXP-可处理性方面尚未解决的空白来解决这一问题。也就是说，我们得到了

Key words and phrases. 加权线性张量积问题；指数型（s,t）-弱可处理性；指数型一致弱可处理性；最坏情形设定。

EXP-(s,t)-WT（其中 $\max(s,t) < 1$ ）以及 EXP-UWT 的充要条件。

1.1. **加权线性张量积问题**。

设 H_1 是一个可分无限维希尔伯特空间，内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$。我们考虑一个紧线性算子 $S_1 \colon H_1 \to G_1$，其中 G_1 也是一个希尔伯特空间。于是， $W_1 := S_1^* S_1 : H_1 \to H_1$ 是一个紧自伴非负算子，其中 T^*是线性算子 T的伴随算子。令 $\{(\lambda_j, e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$表示 W_1的特征对，即

$$W_1 e_j = \lambda_j e_j,\ e_j \in H_1,\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0,$$

且 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 H_1中的标准正交基。不失一般性，以下假设 $\lambda_1 = 1$ 且 $\lambda_2 > 0$ 。由于 S_1 的紧性，我们有 $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$。

记

$$H_{1,0} = \operatorname{span}\{e_1\},\quad H_{1,1} = H_{1,0}^{\perp}.$$

那么 $H_1 = H_{1,\,0} \oplus H_{1,\,1}$。因此，对于每个 $f \in H_1$，都有唯一的正交分解 $f = f_0 + f_1$，其中 $f_0 \in H_{1,\,0},\quad f_1 \in H_{1,\,1}$。

对于 $\gamma > 0$，我们将加权希尔伯特空间 $H_{1,\,\gamma}$ 定义为希尔伯特空间 H_1，其内积为

$$\langle f, g\rangle_{H_{1,\gamma}} := \langle f_0, g_0\rangle_{H_1} + \gamma^{-1}\langle f_1, g_1\rangle_{H_1}.$$

并将加权算子 $S_{1,\,\gamma}$ 定义为从加权希尔伯特空间 $H_{1,\,\gamma}$ 到 G_1的算子 S_1 。因此，算子 $W_{1,\,\gamma} = S_{1,\,\gamma}^* S_{1,\,\gamma} : H_{1,\,\gamma} \to H_{1,\,\gamma}$ 是一个紧线性算子，且算子$W_{1,\,\gamma}$ 的特征对为$\{(\lambda_{\gamma,\,j},\ e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$，其中

$$\lambda_{\gamma,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 1, \\ \gamma\lambda_j, & \text{if } j \geq 2. \end{cases} \tag{1.1}$$

设 $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非递增正实数序列，以下称其为权重。为简单起见，我们假设 $\gamma_j \in (0, 1]$。对于 $d \in \mathbb{N}$，张量积空间 $H_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$ 和 G_d 记作

$$H_{d,\boldsymbol{\gamma}} = H_{1,\gamma_1} \otimes H_{1,\gamma_2} \otimes \cdots \otimes H_{1,\gamma_d},\quad G_d = G_1 \otimes \cdots \otimes G_1,$$

相应地，张量积算子 $S_{d,\boldsymbol{\gamma}} : H_{d,\boldsymbol{\gamma}} \to G_d$ 表示为

$$S_{d,\boldsymbol{\gamma}} = S_{1,\gamma_1} \otimes \cdots \otimes S_{1,\gamma_d}.$$

显然，$W_{d,\boldsymbol{\gamma}} := S_{d,\boldsymbol{\gamma}}^* S_{d,\boldsymbol{\gamma}} : H_{d,\boldsymbol{\gamma}} \to H_{d,\boldsymbol{\gamma}}$ 是一个紧线性算子，且 $W_{d,\boldsymbol{\gamma}}$ 的特征对为 $\{(\lambda_{d,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{j}}, e_{\mathbf{j}})\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d}$，其中

$$\lambda_{d,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^{d} \lambda_{k,j_k},\qquad e_{\mathbf{j}} = e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}.$$

$\lambda_{k,j_k} := \lambda_{\gamma_k,j_k}$ 的定义同式 **(1.1)**。

下文中，我们记 $[d] := \{1, 2, \cdots, d\}$. 对 $\mathbf{j} = (j_1, \cdots, j_d) \in \mathbb{N}^d$，定义

$$\mathfrak{u}(\mathbf{j}) := \{k \in [d] : j_k \geq 2\} \quad \text{and} \quad \lambda_{d,\mathbf{j}} := \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_d}.$$

$W_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$ 的特征值也可以写作

$$\lambda_{d,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{j}} := \gamma_{\mathfrak{u}(\mathbf{j})}\lambda_{d,\mathbf{j}} = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ j_k\geq 2}}^{d} \gamma_k\right)\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_d} = \left(\prod_{k\in\mathfrak{u}(\mathbf{j})} \gamma_k\right)\lambda_{d,\mathbf{j}}.$$

参见 [10, 第 5 节3]或 [9]。

若 $\gamma_j \equiv 1$，加权张量积空间 $H_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$ 退化为张量积空间 $H_d = H_1 \otimes \cdots \otimes H_1$，而加权线性张量积算子 $S_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$则化为线性张量积算子 $S_d = S_1 \otimes \cdots \otimes S_1$。

现在考虑线性加权张量积问题 $S_{\boldsymbol{\gamma}} = \{S_{d,\boldsymbol{\gamma}}\}_{d\in\mathbb{N}}$。我们希望用以下形式的算法 $A_{d,\,n}(f)$ 来逼近 $S_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$：

$$A_{d,n}(f) = \phi_{d,n}(L_1(f), L_2(f), \cdots, L_n(f)), \tag{1.2}$$

其中 $L_1,\ \cdots,\ L_n$ 属于 $\Lambda_d^{\mathrm{all}} = H_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}^*$，该空间由 $H_{d,\,\boldsymbol{\gamma}}$ 上所有连续线性泛函组成；$\phi_{d,\,n} : \mathbb{R}^n \to G_d$ 是任意映射。L_j 的选取可以是自适应的，即可以依赖于先前计算得到的信息$L_1(f)$ $L_2(f)$ $\cdots$，$L_{j-1}(f)$。算法 $A_{d,\,n}$的最坏情形误差定义为

$$e(A_{d,n}) = \sup_{\substack{f\in H_{d,\boldsymbol{\gamma}} \\ \|f\|_{H_{d,\boldsymbol{\gamma}}}\le 1}} \|S_{d,\boldsymbol{\gamma}}(f) - A_{d,n}(f)\|_{G_d}.$$

第 n 个最小最坏情形误差定义为

$$e(n, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) = \inf_{A_{d,n}} e(A_{d,n}),$$

其中，下确界取遍所有形式如 (1.2) 的算法。当 $n = 0$ 时，初始误差 e_0 记为

$$e_0 = \sup_{\substack{f\in H_{d,\boldsymbol{\gamma}} \\ \|f\|_{H_{d,\boldsymbol{\gamma}}}\le 1}} \|S_{d,\boldsymbol{\gamma}}(f)\|_{G_d}.$$

显然，我们有

$$e_0 = \|S_{d,\boldsymbol{\gamma}}\| = \|W_{d,\boldsymbol{\gamma}}\|^{1/2} = \max_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d}(\lambda_{d,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{j}})^{1/2} = 1.$$

因此，对于所有 $d \in \mathbb{N}$ 和所有乘积权重 $\boldsymbol{\gamma}$，该问题都是良好归一化的。归一化误差准则或绝对误差准则下的信息复杂度定义为

$$n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) = \min\{n \,:\, e(n, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) \le \varepsilon\}.$$

已知，对于类 Λ_d^{all}，信息复杂度完全由 $S_{d,\boldsymbol{\gamma}}$ 的奇异值刻画，或者等价地，由 $W_{d,\,\boldsymbol{\gamma}} = S_{d,\boldsymbol{\gamma}}^* S_{d,\boldsymbol{\gamma}}$ 的特征值刻画（见 [10]）。

记

$$A_{\varepsilon,d} = \{(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d : \lambda_{1,n_1} \cdots \lambda_{d,n_d} > \varepsilon^2\}.$$

于是，信息复杂度可以改写为

$$n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) = \left|\left\{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d : \lambda_{d,\boldsymbol{\gamma},\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^{d} \lambda_{k,j_k} = \lambda_{1,j_1} \cdots \lambda_{d,j_d} > \varepsilon^2\right\}\right| = \big|A_{\varepsilon,d}\big|, \tag{1.3}$$

其中，$|A|$ 表示集合 A 中元素的个数。显然，

$$n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) \le n(\varepsilon_1, S_{d_1,\boldsymbol{\gamma}}) \quad \text{for all } \varepsilon_1 \le \varepsilon \text{ and } d_1 \ge d.$$

因此，对于递减的 ε 和递增的 d，信息复杂度是非递增的。

1.2. **EXP-可处理性的各种概念**。

本小节简要回顾 EXP-可处理性的基本概念。我们关注当 $d+\ln\varepsilon^{-1}$ 以任意方式趋于无穷大时， $n(\varepsilon,\ S_{d,}\ \gamma)$的行为。我们定义了各种 EXP 可处理性概念。

该问题 S $\gamma=\{S_{d,\gamma}\}$ 称为:

- 指数强多项式可处理（*EXP-SPT*）当存在 $C,p\geq 0$，使得

$$n(\varepsilon,S_{d,\gamma})\leq C(1+\ln\varepsilon^{-1})^{p},\quad \forall d\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon\in(0,1]. \tag{1.4}$$

使得 (1.4) 对某个 $C\geq 0$成立的所有指数 $p\geq 0$ 的下确界称为 EXP-SPT 指数，记为 p^{*}。

- 指数多项式可处理（*EXP-*多项式可 *tractability*）如果存在 $C,p,q\ \geq\ 0$使得

$$n(\varepsilon,S_{d,\gamma})\leq Cd^{q}(1+\ln\varepsilon^{-1})^{p},\quad \forall d\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon\in(0,1].$$

- 指数准多项式可处理（*EXP-*准多项式可 *tractability*）如果存在 $C,t\geq 0$ 使得

(1.5) $n(\varepsilon,S_{d,\gamma})\ \leq C\exp(t(1+\ln d)(1+\ln(1+\ln\varepsilon^{-1})))\quad \forall d\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon\in(0,1].$

所有使得 (1.5) 对某个 $C\geq 0$ 成立的指数 $t\geq 0$ 的下确界称为 EXP-QPT 指数，记为 t^{*}。

- 指数(s,t)-弱可处理（*EXP-*(s,t)*-WT*），对于固定的正数 s和 t 如果

$$\lim_{d+\varepsilon^{-1}\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\gamma})}{d^{t}+(\ln\varepsilon^{-1})^{s}}=0.$$

如果 $s=t=1$，我们称之为指数弱可处理性（*EXP-WT*）。

- 指数一致弱可处理（*EXP-UWT*）当 EXP-(s,t)-WT 对所有正数 s 和 t均成立时。

1.3. **主要结果**。

在最坏情形设置下，对于（无权重）线性张量积问题，文献 [6, 13, 14] 给出了关于单变量奇异值的充要条件，据此可以判断能否达到不同的指数可处理性概念。然而，关于 EXP-可处理性，我们有许多否定性结果。例如，对于线性张量积问题，我们无法达到 EXP-WT。

对于加权线性张量积问题，文献 [9] 中的作者给出了关于权重$\{\gamma_j\}$ 和单变量奇异值 $\{\ (\lambda_j)^{\ 1/2}\}$的各种 EXP-可处理性概念的充要条件；在下文中，我们始终假设 $\{\gamma_j\}$ 是一个非递增正数列，而 $\{\lambda_j\}$ 是一个满足 $1=\lambda_1\geq\lambda_2>0$ 且 $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=0$的非增序列。参见该问题的以下 EXP-可处理性结果 S_{γ}。

- 当且仅当 EXP-SPT 成立

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_j=\lim_{j\to\infty}\gamma_j=0\quad\text{and}\quad B_{\mathrm{EXP-SPT}}:=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\infty,$$

其中

$$j(\varepsilon)=\max\{j\in\mathbb{N}:\lambda_j>\varepsilon^{2}\}\ \text{ and }\ d(\varepsilon)=\max\{d\in\mathbb{N}:\gamma_d\ >\ \varepsilon^{2}\}. \tag{1.6}$$

如果这一点成立，那么 EXP-SPT 指数为 $p^{*}=B_{\mathrm{EXP-SPT}}$。

•EXP-SPT 和 EXP-PT 等价。

• 当且仅当 EXP-准多项式可 tractability 成立

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_j=\lim_{j\to\infty}\gamma_j=0\quad\text{and}\quad B_{\mathrm{EXP-QPT}}:=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{[\ln d(\varepsilon)]\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\infty.$$

若此条件成立，则 EXP-QPT 指数为 $t^*=B_{\mathrm{EXP-QPT}}$。

• 设 $s=t=1$。当且仅当 EXP-WT 成立

$$\lim_{j\to\infty}\gamma_j=0\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\lambda_j}}{\ln j}=\infty.$$

• 设 $s=1$ 和 $t<1$。当且仅当 EXP-$(1,t)$-WT 成立

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\gamma_j}}{\ln j}=\infty\ \text{ and }\ \lim_{j\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\lambda_j}}{\ln j}=\infty.\tag{1.7}$$

• 设 $s=1$ 和 $t>1$。当且仅当 EXP-(s,t)-WT 成立

$$\gamma_j\text{'s are arbitrary}\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\lambda_j}}{\ln j}=\infty.$$

• 设 $s>1$、$t\le 1$ 和 $\lambda_2<1$。当且仅当 EXP-(s,t)-WT 成立

$$\gamma_j\text{'s are arbitrary}\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{(\ln\frac{1}{\lambda_j})^s}{\ln j}=\infty.$$

• 设 $s>1$、$t\le 1$ 和 $\lambda_2=1$。当且仅当以下条件成立时，EXP-(s, t)-WT 成立

$$\exists p\in\mathbb{N}\ \text{ with }\ \gamma_p<1\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{(\ln\frac{1}{\lambda_j})^s}{\ln j}=\infty.$$

• 设 $s>1$ 和 $t>1$。当且仅当以下条件成立时，EXP-(s, t)-WT 成立

$$\gamma_j\text{'s are arbitrary}\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{(\ln\frac{1}{\lambda_j})^s}{\ln j}=\infty.$$

• 设 $s<1$ 和 $t>1$。当且仅当以下条件成立时，对于任意 γ_j，EXP-(s, t)-WT 成立

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\left(\ln\frac{1}{\lambda_j}\right)^\eta}{\ln j}=\infty\ \text{ with }\ \eta=\frac{s(t-1)}{t-s}.\tag{1.8}$$

• 设 $s<1$ 和 $t=1$。当且仅当对于任意整数d，k，j，若 $j\ge 2$ 且 $k\le d$，则以下命题成立：

$$\lim_{d+\gamma_k^{-d}\lambda_j^{-d}\to\infty}\frac{\left(\ln\frac{1}{\gamma_k}\right)^s+\left(\ln\frac{1}{\lambda_j}\right)^s}{d^{1-s}\ln j}=\infty.\tag{1.9}$$

然而，[9] 中的作者并未找出关于 $\{\gamma_j\}$ 和 $\{\lambda_j\}$ 的充分必要条件，以确保在 $\max(s,t)<1$ 的条件下满足 EXP-(s,t)-WT 以及 EXP-UWT。本文通过补齐 EXP-可处理性方面尚存的空缺，解决了这一问题。具体而言，

我们得到了在 $\max(s,t) < 1$ 的条件下满足 EXP-(s,t)-WT 的充分必要条件（见定理 1.1），以及满足 EXP-UWT 的充分必要条件（见定理 1.3）。

定理 1.1。 设 $0 < s < 1$ 和 $0 < t \leq 1$。当且仅当 *EXP-*(s,t)*-WT* 成立时，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \ln j(\varepsilon)}{\ln \ln \varepsilon^{-1}} = 0 \tag{1.10}$$

and

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d(\varepsilon)^{1-s} \ln j(\varepsilon)}{(\ln \varepsilon^{-1})^s} = 0. \tag{1.11}$$

由定理 1.1 可得以下推论。

推论 1.2。 设 $0 < s < 1$ 和 $0 < t \leq 1$。

(1) 若 *EXP-*(s,t)*-WT* 成立，则有

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\ln(\ln \frac{1}{\lambda_j})}{\ln(\ln j)} = \infty \tag{1.12}$$

and

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\ln \frac{1}{\gamma_j}}{j^{\frac{1-s}{s}}} = \infty; \tag{1.13}$$

(2) 若 (1.12) 成立且

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\ln \frac{1}{\gamma_j}}{j^{\frac{1-s}{s}+\delta}} = \infty \tag{1.14}$$

对某个 $\delta > 0$成立，则 *EXP-*(s,t)*-WT* 成立。

我们指出，若对某个 $j \in \mathbb{N}$有 $\lambda_j = 0$，则 (1.12) 成立。

定理 1.3。 *EXP-UWT* 成立，当且仅当(1.12) 成立且

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\ln(\ln \frac{1}{\gamma_j})}{\ln j} = \infty. \tag{1.15}$$

本文组织如下。第2节给出最坏情形设置下的一些必要预备知识。第3节给出定理 1.1 和 1.3 的证明。

2. Premilinaries

对于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = 0$，定义

$$j(\varepsilon) = \max\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j > \varepsilon^2\}. \tag{2.1}$$

那么 $j(\varepsilon)$ 定义良好且始终有限。对于 $\varepsilon \geq 1$，我们令 $j(\varepsilon) = 0$。由于$\lambda_1 = 1$，对于 $\varepsilon \in (0, 1)$，有 $j(\varepsilon) \geq 1$ 。此外，当且仅当所有 λ_j 都为正时， $j(\varepsilon)$ 趋于无穷大。

我们还假设权重满足

$$1 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \cdots > 0. \tag{2.2}$$

对于 $\varepsilon \in (0,1)$，定义

$$d(\varepsilon) = \sup\{d \in \mathbb{N} : \gamma_d > \varepsilon^2\}.$$

那么 $d(\varepsilon)$ 是良定义的。对于 $\gamma_1 \le \varepsilon^2$，我们令 $d(\varepsilon) = 0$，并注意到对于 $\gamma_1 > \varepsilon^2$，$d(\varepsilon) \ge 1$。$j(\varepsilon)$ 和 $d(\varepsilon)$ 均为非减函数，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} d(\varepsilon) = \infty$。若 $\lim_{j\to\infty} \gamma_j = 0$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，$d(\varepsilon) < \infty$。

下面的引理说明如何用 $j(\varepsilon)$ 和 $d(\varepsilon)$ 来界定信息复杂度。

引理 2.1。(参见 $[9, \text{引理 } 1]$) 若 $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \lim_{j\to\infty} \gamma_j = 0$，则对于 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) \le j(\varepsilon)^{\min(d,d(\varepsilon))} \le n(\varepsilon^{2d(\varepsilon)}, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}),$$

对于 $d \ge d(\varepsilon)$，

$$n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) = n(\varepsilon, S_{d(\varepsilon),\boldsymbol{\gamma}}).$$

引理 2.2。设 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非增序列，且 $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$。那么(1.10) 成立，当且仅当(1.12) 成立，当且仅当

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln j(\varepsilon)}{(\ln \varepsilon^{-1})^{\delta}} = 0 \tag{2.3}$$

对任意 $\delta > 0$ 均成立。

证明。如果对于某个 $j_0 \in \mathbb{N}$ 有 $\lambda_j = 0$，那么对于 $j \ge j_0$ 有 $\lambda_j = 0$，因此 $j(\varepsilon) \le j_0$。由此可知，在这种情况下，(1.10)、(1.12) 和 (2.3) 均成立。不失一般性，假设 $\{\lambda_j\}$ 是一个正序列。

我们首先证明 (1.10) 蕴含 (1.12)。假设 (1.10) 成立。对于每个$\eta \in (0,\ 1)$，存在一个 $\varepsilon_0 \in (0,\ 1)$，使得

$$\frac{\ln\ln j(\varepsilon)}{\ln\ln \varepsilon^{-1}} < \eta \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

这意味着

$$j(\varepsilon) < e^{(\ln \varepsilon^{-1})^{\eta}} \le \lceil e^{(\ln \varepsilon^{-1})^{\eta}} \rceil := v(\varepsilon),$$

其中，$\lceil x \rceil$ 是实数 x的向上取整。根据 $j(\varepsilon)$ 的定义，我们有$j(\varepsilon)+1 \le v(\varepsilon)$，并且

$$\lambda_{v(\varepsilon)} \le \lambda_{j(\varepsilon)+1} \le \varepsilon^2.$$

令 $v(\varepsilon) = k$。当我们改变 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$ 时，k 可以取值为

$$k = \lceil e^{(\ln \varepsilon_0^{-1})^{\eta}} \rceil, \lceil e^{(\ln \varepsilon_0^{-1})^{\eta}} \rceil + 1, \cdots.$$

由于 $k \le e^{(\ln \varepsilon^{-1})^{\eta}} + 1$，我们得到

$$\varepsilon^2 \le e^{-2\left(\ln(k-1)\right)^{1/\eta}}.$$

因此，

$$\lambda_k \le \varepsilon^2 \le e^{-2\left(\ln(k-1)\right)^{1/\eta}} \quad \text{for } k \ge \lceil e^{(\ln \varepsilon_0^{-1})^{\eta}} \rceil.$$

取对数可得

$$\frac{\ln\ln \frac{1}{\lambda_k}}{\ln\ln k} \ge \frac{\ln 2 + \frac{1}{\eta}\ln\ln(k-1)}{\ln\ln k} \to \infty \quad \text{as } k \to \infty,\ \eta \to 0.$$

因此，我们得到（1.12）。

接下来，若（1.12）成立，则对每个 $\delta \in (0, s)$，都存在一个 $J > 0$，使得

$$\ln\big(\ln\frac{1}{\lambda_j}\big) \geq \frac{2}{\delta}\ln(\ln j) \quad \text{for } j \geq J.$$

这意味着 $\lambda_j \leq e^{-(\ln j)^{\frac{2}{\delta}}}$。我们求解不等式 $\varepsilon^2 \geq e^{-(\ln j)^{\frac{2}{\delta}}}$，得到解

$$j \geq e^{(2\ln\varepsilon^{-1})^{\frac{\delta}{2}}}.$$

由此可知，若

$$j \geq \max\{J,\ e^{(2\ln\varepsilon^{-1})^{\frac{\delta}{2}}}\},$$

then

$$\lambda_j \leq e^{-(\ln j)^{\frac{2}{\delta}}} \leq \varepsilon^2.$$

根据 $j(\varepsilon)$ 的定义，我们得到

$$j(\varepsilon) \leq \max\{J,\ e^{(2\ln\varepsilon^{-1})^{\frac{\delta}{2}}}\}.$$

取对数可得，对于任意 $\delta \in (0, s)$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln j(\varepsilon)}{(\ln\varepsilon^{-1})^s} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\max\{\ln J,\ (2\ln\varepsilon^{-1})^{\frac{\delta}{2}}\}}{(\ln\varepsilon^{-1})^{\delta}} = 0.$$

因此，(2.3) 成立。

现在假设 (2.3) 成立，我们要证明 (1.10)。由 (2.3) 可知，存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\ln j(\varepsilon) < \big(\ln\varepsilon^{-1}\big)^{\delta} \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

取对数可得

$$\frac{\ln\ln j(\varepsilon)}{\ln\ln\varepsilon^{-1}} < \delta.$$

因此，令 $\delta \to 0$，即可得出 (1.10)。引理 2.2 得证。 □

引理 2.3. 设 $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非递增正数列，且 $\lim_{j\to\infty}\gamma_j = 0$。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)^{1-s}}{(\ln\varepsilon^{-1})^s} = 0 \tag{2.4}$$

成立当且仅当

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\big(\ln\frac{1}{\gamma_j}\big)^s}{j^{1-s}} = \infty. \tag{2.5}$$

证明。 假设 (2.5) 成立。对于每个 $\delta > 0$，存在一个 $j_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\big(\ln\frac{1}{\gamma_j}\big)^s > \frac{2}{\delta}\cdot j^{1-s} \quad \text{for all } j \geq j_0.$$

注意，$\lim_{\varepsilon\to 0} d(\varepsilon) = \infty$。对于上述 j_0，且当 $\varepsilon > 0$充分小时，我们有$d(\varepsilon) > j_0$。由此可得

$$\big(\ln\frac{1}{\gamma_{d(\varepsilon)}}\big)^s > \frac{2}{\delta}\cdot d(\varepsilon)^{1-s}.$$

由于 $\gamma_{d(\varepsilon)} > \varepsilon^2$，我们有

$$\ln \frac{1}{\gamma_{d(\varepsilon)}} < \ln \varepsilon^{-2} = 2 \ln \varepsilon^{-1}.$$

因此，

$$\frac{2}{\delta} \cdot d(\varepsilon)^{1-s} < \big(\ln \frac{1}{\gamma_{d(\varepsilon)}}\big)^s < \big(2 \ln \varepsilon^{-1}\big)^s.$$

这意味着

$$\frac{d(\varepsilon)^{1-s}}{\big(\ln \varepsilon^{-1}\big)^s} < 2^{s-1}\delta.$$

由于 δ 可以任意小，故式 (2.4) 成立。

接下来，假设式 (2.4) 成立。对于每个 $\delta > 0$，都存在一个 $\varepsilon_0 \in \in (0,1)$，使得对于 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$,

$$\frac{d(\varepsilon)^{1-s}}{(\ln \varepsilon^{-1})^s} < \delta.$$

这意味着

$$d(\varepsilon) < \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} \le \big\lceil \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} \big\rceil := v(\varepsilon).$$

那么 $d(\varepsilon) + 1 \le v(\varepsilon)$。根据 $d(\varepsilon)$ 的定义，我们有

$$\gamma_{v(\varepsilon)} \le \gamma_{d(\varepsilon)+1} \le \varepsilon^2.$$

设 $v(\varepsilon) = k$，当我们改变 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 时，k 可以取值为

$$k = \big\lceil \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon_0^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} \big\rceil, \big\lceil \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon_0^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} \big\rceil + 1, \cdots.$$

由于 $k \le \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} + 1$，我们得到

$$\varepsilon^2 \le e^{-2\big(k-1\big)^{\frac{1-s}{s}} \delta^{-1/s}}.$$

Then

$$\gamma_k \le \varepsilon^2 \le e^{-2\big(k-1\big)^{\frac{1-s}{s}} \delta^{-1/s}}$$

对于 $k \ge \big\lceil \delta^{\frac{1}{1-s}} \big(\ln \varepsilon_0^{-1}\big)^{\frac{s}{1-s}} \big\rceil$. 取对数可得

$$\frac{\big(\ln \frac{1}{\gamma_k}\big)^s}{k^{1-s}} \ge \frac{2^s}{\delta} \cdot \frac{(k-1)^{1-s}}{k^{1-s}} \to \frac{2^s}{\delta} \quad \text{as } k \to \infty.$$

由于 δ 可以充分小，我们得到（2.5）。引理 2.3 得证。 □

引理 2.4。设 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是非增序列，且 $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$。则（1.12）成立，当且仅当对任意 $\delta > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(\ln \frac{1}{\lambda_j})^\alpha}{\ln j} = \infty \quad \text{for all } \alpha \in (0, \delta). \tag{2.6}$$

证明。由于 λ_j 是非增序列且 $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$。若对某个 $j_0 \in \mathbb{N}$ 有 $\lambda_j = 0$，则对于 $j \ge j_0$，有 $\ln \frac{1}{\lambda_j} = \infty$，因此（2.6）和（1.12）均成立。不失一般性，我们假设 $\{\lambda_j\}$ 是一个正序列。

假设（2.6）成立，则存在一个 $J_1 > 0$ 使得

$$\big(\ln \frac{1}{\lambda_j}\big)^\alpha \ge \ln j \quad \text{for } j \ge J_1.$$

取对数可得

$$\frac{\ln(\ln \frac{1}{\lambda_j})}{\ln(\ln j)} \geq \frac{1}{\alpha}.$$

现在令 $\alpha \to 0$，即可得到 (1.12)。

另一方面，若 (1.12) 成立，则对于任意 $\alpha \in (0, \delta)$，存在一个 J_2，使得

$$\ln(\ln \frac{1}{\lambda_j}) \geq \frac{2}{\alpha} \ln(\ln j) \quad \text{for } j \geq J_2.$$

这意味着

$$\frac{(\ln \frac{1}{\lambda_j})^\alpha}{\ln j} \geq \ln j \quad \text{for } j \geq J_2.$$

不等式 (2.6) 由 $j \to \infty$ 得出。 □

使用相同的方法，我们可以得到以下引理。

引理 2.5. 设 $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个非递增正数列，且 $\lim_{j\to\infty} \gamma_j = 0$。那么，(1.15) 成立，当且仅当对任意 $\delta > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(\ln \frac{1}{\gamma_j})^\alpha}{j} = \infty \quad \text{for all } \alpha \in (0, \delta).$$

接下来，我们将集合 $[d]$ 划分。不失一般性，假设 $d \geq 8$。令

$$\rho(i) = \big\{k \in \mathbb{N} : 2^{i-1} \leq k \leq 2^i - 1\big\}, \quad \text{for } i = 1, \cdots, \lfloor \log_2 d \rfloor - 1,$$

and

$$\rho\big(\lfloor \log_2 d \rfloor\big) = \big\{k \in \mathbb{N} : 2^{\lfloor \log_2 d \rfloor - 1} \leq k \leq d\big\}.$$

Then

$$[d] = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \log_2 d \rfloor} \rho(i). \tag{2.7}$$

我们有

$$2^{i-1} \leq |\rho(i)| < 2^{i+1}, \ i = 1, \cdots, \lfloor \log_2 d \rfloor,$$

其中，$|A|$ 表示集合 A 中元素的个数。令 C_n^k 表示从 n 个元素中选取 k 个元素的组合数，即

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

对于 $\varepsilon \in$ (0,1)，令

$$A_{\rho(i)}(\varepsilon) := \big\{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^{|\rho(i)|} : \prod_{k\in\rho(i)} \lambda_{2^{i-1},j_k} > \varepsilon^2\big\}.$$

引理 2.6。我们有

$$\big|A_{\rho(i)}(\varepsilon)\big| \leq C_{|\rho(i)|}^{a_i(\varepsilon)}\, j\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{2^{i-1}}}}\Big)^{a_i(\varepsilon)}, \tag{2.8}$$

其中 $a_i(\varepsilon)$：$=$最小值$\{|\rho(i)|, \ \lceil \frac{\ln \varepsilon^{-2} \ln(\gamma_{2^{i-1}} \lambda_2)^{-1}}{} \rceil - 1\}$.

证明。 对于 $\mathbf{j}\in A_{\rho(i)}(\varepsilon)$，令 $m=|\{k\in\rho(i):\ j_k\geq 2\}|$。于是

$$(\gamma_{2^{i-1}}\cdot\lambda_2)^m\geq\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},j_k}>\varepsilon^2.$$

这意味着

$$m\leq\lceil\frac{\ln\varepsilon^{-2}}{\ln(\gamma_{2^{i-1}}\lambda_2)^{-1}}\rceil-1.$$

于是我们有

$$m\leq\min\big\{|\rho(i)|,\lceil\frac{\ln\varepsilon^{-2}}{\ln(\gamma_{2^{i-1}}\lambda_2)^{-1}}\rceil-1\big\}=a_i(\varepsilon),$$

也就是说，至多有 $a_i(\varepsilon)$ 个指标 j_k 满足 $j_k\geq 2$。当$\varepsilon>0$充分小时，如果对于某个 $k\in\rho(i)$ 存在一个 $j_k>j\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{2^{i-1}}}}\Big)$，那么我们得到

$$\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},j_k}\leq\gamma_{2^{i-1}}\cdot\lambda_{j_k}\leq\varepsilon^2,$$

这意味着 $\mathbf{j}\notin A_{\rho(i)}(\varepsilon)$。因此，对于 $\mathbf{j}\in A_{\rho(i)}(\varepsilon)$，至多有

$$C_{|\rho(i)|}^{|\rho(i)|-a_i(\varepsilon)}=C_{|\rho(i)|}^{a_i(\varepsilon)}=\frac{|\rho(i)|!}{a_i(\varepsilon)!\big(|\rho(i)|-a_i(\varepsilon)\big)!}$$

种方法选取必须等于 1 的 $|\rho(i)|-a_i(\varepsilon)$ 个指标 j_k，而在剩余的 $a_i(\varepsilon)$ 个指标 j_k 中，$\rho(i)$ 仅有

$$j_k\in\Big\{1,2,\cdots,j\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma_{2^{i-1}}}}\Big)\Big\}$$

可能属于 $A_{\rho(i)}(\varepsilon)$。于是（2.8）成立。引理 2.6 得证。 □

此外，我们还有一个更精细的估计。不过，本文中我们不会用到它。

引理 2.7. 我们有

$$\big|A_{\rho(i)}(\varepsilon)\big|\leq 1+\sum_{m=1}^{a_i(\varepsilon)}\frac{|\rho(\varepsilon)|!}{(|\rho(\varepsilon)|-m)!}\prod_{k=1}^{m}j\Big(\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\gamma_{2^{i-1}})^m\lambda_2^{m-k}}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big).\tag{2.9}$$

证明。 对于 $\mathbf{j}\in A_{\rho(i)}(\varepsilon)$，令 $m_{\mathbf{j}}=|\{k\in\rho(i):j_k\geq 2\}|$。由引理 2.6 的证明可知

$$m_{\mathbf{j}}\leq a_i(\varepsilon):=\min\{|\rho(i)|,\lceil\frac{\ln\varepsilon^{-2}}{\ln(\gamma_{2^{i-1}}\lambda_2)^{-1}}\rceil-1\}.$$

对于 $1\leq m\leq a_i(\varepsilon)$，我们置

$$A_{\rho(i)}^m(\varepsilon)=\{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{|\rho(i)|}:\mathbf{j}\in A_{\rho(i)}(\varepsilon)\text{ and }m_{\mathbf{j}}=m\}.$$

显然,

$$\big|A_{\rho(i)}(\varepsilon)\big|=1+\sum_{m=1}^{a_i(\varepsilon)}\big|A_{\rho(i)}^m(\varepsilon)\big|.$$

对于$\mathbf{j}\in A^m_{\rho(i)}(\varepsilon)$，令$j_{1,max}$为乘积$\prod$中特征值的最大指标$_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},\ j_k}$. 由于

$$(\gamma_{2^{i-1}})^m\cdot\lambda_{j_{1,max}}\lambda_2^{m-1}\geq\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},j_k}>\varepsilon^2,$$

我们得到

$$j_{1,max}\leq\max\Big\{j:\lambda_j>\frac{\varepsilon^2}{(\gamma_{2^{i-1}})^m\lambda_2^{m-1}}\Big\}=j\Big(\frac{\varepsilon}{(\gamma_{2^{i-1}})^{m/2}\lambda_2^{(m-1)/2}}\Big).$$

令$j_{k,\ max}$为 k乘积中按从大到小排列的特征值的第$\prod_{2^{i-1},\ j_k,\ k\in\rho(i)}$

$k=2,\ \cdots,\ m$。由于

$$(\gamma_{2^{i-1}})^m\cdot\lambda_{j_{k,max}}^k\lambda_2^{m-k}\geq\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},j_k}>\varepsilon^2,$$

我们得到

$$j_{k,max}\leq\max\Big\{j:\lambda_j>\Big(\frac{\varepsilon^2}{(\gamma_{2^{i-1}})^m\lambda_2^{m-k}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big\}=j\Big(\Big(\frac{\varepsilon}{(\gamma_{2^{i-1}})^{m/2}\lambda_2^{m/2-k/2}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big).$$

因此，对于 $\mathbf{j}\in A^m_{\rho(i)}(\varepsilon)$，有 $C^m_{|\rho(i)|}$种方法选择必须等于 1 的 $|\rho(i)|-m$ 个指标，以及必须大于 1 的其余指标。对于$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，只有第 k 大的指标

$$j_{k,max}\in\Big\{2,\cdots,j\Big(\Big(\frac{\varepsilon}{(\gamma_{2^{i-1}})^{m/2}\lambda_2^{m/2-k/2}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big)\Big\},$$

可能属于 $A^m_{\rho(i)}(\varepsilon)$。而其余的 m个指标有 $m!$ 种排列方式。因此，我们得到（2.9）。□

引理 2.8。设 C^s_m 为组合数。则有

$$\ln C^s_m\leq s\ln\frac{em}{s}. \tag{2.10}$$

证明。根据斯特林公式，有

$$s!\geq\big(\frac{s}{e}\big)^s.$$

由此可得

$$C^s_m=\frac{m!}{s!(m-s)!}\leq\frac{m^s}{s!}\leq\frac{m^s}{(\frac{s}{e})^s}=\big(\frac{em}{s}\big)^s.$$

取对数，得到 (2.10)。□

3. Proofs of Theorems 1.1 and 1.3

定理 *1.1* 的证明。

假设对于固定的 $s<1$ 和 $t\leq1$，EXP-(s, t)-WT 成立。我们要证明 (1.10) 和 (1.11) 成立。我们知道，对于这个 s 以及任意 $t_1>1$，EXP-(s, t)-WT 也成立。由 (1.8) 可得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{(\ln\frac{1}{\lambda_j})^{s\frac{t_1-1}{t_1-s}}}{\ln j}=\infty\quad\text{for any } t_1>1. \tag{3.1}$$

显然， $\alpha = s\frac{t_1-1}{t_1-s} \in (0,\ s)$。应用 (3.1) 和引理 2。4，并取 $\alpha \in (0,\ s)$，可得 (1.12)。由引理 2.2，得到 (1.10)。

现在我们证明 (1.11)。由于 EXP-$(s,\ t)$-WT 在 $s < 1$ 和 $t \le 1$ 下成立，因此 EXP-WT 也成立，从而 $\lim_{j\to\infty} \gamma_j = 0$。应用引理 2.1，令 $d = d(\varepsilon)$，可得

$$j(\varepsilon)^{d(\varepsilon)} \le n(\varepsilon^{2d(\varepsilon)}, S_{d(\varepsilon),\gamma}).$$

由此可得

$$\frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{d(\varepsilon) + (2d(\varepsilon)\ln\varepsilon^{-1})^s} \le \frac{\ln n(\varepsilon^{2d(\varepsilon)}, S_{d(\varepsilon),\gamma})}{d(\varepsilon)^t + (2d(\varepsilon)\ln\varepsilon^{-1})^s} \to 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

这就得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{d(\varepsilon) + (2d(\varepsilon)\ln\varepsilon^{-1})^s} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln j(\varepsilon)}{1 + 2^s d(\varepsilon)^{s-1}(\ln\varepsilon^{-1})^s} = 0.$$

由于当 $0 < \varepsilon < \lambda_2$ 时，$\ln\ j(\varepsilon)\ \ge \ln 2$，因此必须满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} d(\varepsilon)^{s-1}(\ln\varepsilon^{-1})^s = \infty.$$

由此我们得出

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d(\varepsilon)^{1-s}}{(\ln\varepsilon^{-1})^s} = 0 \ \text{ or, equivalently, } \ d(\varepsilon)^{1-s} = o(1)(\ln\varepsilon^{-1})^s.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{d(\varepsilon) + 2^s d(\varepsilon)^s(\ln\varepsilon^{-1})^s} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d(\varepsilon)^{1-s}\ln j(\varepsilon)}{(o(1) + 2^s)(\ln\varepsilon^{-1})^s} = 0.$$

因此，(1.11) 成立。

另一方面，假设 (1.10) 和 (1.11) 成立。我们要证明，对于这个 s 和 t，EXP-(s,t)-WT 成立。由引理 2.2，得到 (1.12)。由 (1.11) 以及当 $\varepsilon \in (0, \lambda_2)$ 时 $\ln\ j(\varepsilon)\ \ge \ln 2$ 这一事实，得到 (2.4)。根据引理 2.3，这等价于 (2.5)。因此

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{\gamma_j\lambda_2}}{j^{\frac{1-s}{s}}} = \infty. \tag{3.2}$$

Set

$$\ln\frac{1}{\gamma_k\lambda_2} = k^{\frac{1-s}{s}}\widehat{h}(k), \ \text{ and } \ \widetilde{h}(k) = \inf_{j\ge k}\widehat{h}(j).$$

~那么，序列 $\{h(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是非递减的，并且满足

$$\widehat{h}(k) \ge \widetilde{h}(k) \ \text{ and } \ \lim_{k\to\infty}\widetilde{h}(k) = \lim_{k\to\infty}\widehat{h}(k) = \infty.$$

令

$$h(1) = \widetilde{h}(1), \ \ h(k+1) = \min\Big\{\frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}h(k),\ \widetilde{h}(k+1)\Big\},\ k = 1, 2, \cdots.$$

显然，它满足

$$h(k) \le \frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}h(k) \quad \text{and} \quad h(k) \le \widetilde{h}(k) \le \widetilde{h}(k+1),$$

由此得到

$$h(k) \le \min\Big\{\frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}h(k), \widetilde{h}(k+1)\Big\} = h(k+1).$$

那么 $\{h(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个非递减序列，

$$\lim_{k\to\infty} h(k)=\infty, \quad \text{and} \ \ \widehat{h}(k)\geq\widetilde{h}(k)\geq h(k).$$

我们还注意到，对于 $m>n$,

$$h(m)\leq\frac{\ln(m+1)}{\ln m}h(m-1)\leq\cdots\leq\frac{\ln(m+1)}{\ln(n+1)}h(n), \tag{3.3}$$

and

$$h(2n)\leq 2h(n) \ \ \text{for } n\geq 1.$$

Put

$$\widetilde{\lambda}_{k,j_k}=\begin{cases}1, & \text{if } j_k=1,\\ \widetilde{\gamma}_k\lambda_{j_k}, & \text{if } j_k\geq 2,\end{cases} \quad \text{where} \ \ \ln\frac{1}{\widetilde{\gamma}_k\lambda_2}=k^{\frac{1-s}{s}}h(k),\ k=1,2,\cdots.$$

如果 $\ln\varepsilon^{-1}\leq d^t$，则当 $\varepsilon^{-1}+d\to\infty$ 时 $d\to\infty$。由 (1.12)、(3.2) 和引理 2.4，可得 (1.7)。因此，对于这个 t，EXP-(1，t)-WT 成立。我们有

$$0=\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{\ln\varepsilon^{-1}+d^t}\geq\lim_{d\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{2d^t}\geq 0.$$

由此可得

$$\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{(\ln\varepsilon^{-1})^s+d^t}\leq\lim_{d\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{d^t}=0.$$

在这种情况下，EXP-(s，t)-WT 成立。

如果 $\ln\varepsilon^{-1}\geq d^t$，则当 $\varepsilon^{-1}+d\to\infty$ 时 $\varepsilon^{-1}\to\infty$。利用 (1.3) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}
n(\varepsilon,S_{d,\gamma}) &= \big|\{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d:\prod_{k=1}^{d}\lambda_{k,j_k}>\varepsilon^2\}\big|\\
&\leq\prod_{i=1}^{\lfloor\log_2 d\rfloor}\big|\{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{|\rho(i)|}:\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{k,j_k}>\varepsilon^2\}\big|\\
&\leq\prod_{i=1}^{\lfloor\log_2 d\rfloor}\big|\{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{|\rho(i)|}:\prod_{k\in\rho(i)}\lambda_{2^{i-1},j_k}>\varepsilon^2\}\big|\\
&\leq\prod_{i=1}^{\lfloor\log_2 d\rfloor}\big|\{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{|\rho(i)|}:\prod_{k\in\rho(i)}\widetilde{\lambda}_{2^{i-1},j_k}>\varepsilon^2\}\big|.
\end{aligned}$$

取对数后，利用引理 2.6 得到

$$\ln n(\varepsilon,S_{d,\gamma})\leq\sum_{i=1}^{\lfloor\log_2 d\rfloor}\Big(\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)}+\widetilde{a}_i(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)\Big), \tag{3.4}$$

其中 $\widetilde{a}_i(\varepsilon)=\min\{|\rho(i)|,\ \lceil\frac{\ln\varepsilon^{-2}\ln(\widetilde{\gamma}_{2^{i-1}}\lambda_2)^{-1}}{}\rceil-1\}$。我们有

$$\widetilde{a}_i(\varepsilon)\leq\min\{2^{i+1},\frac{\ln\varepsilon^{-2}}{\ln(\widetilde{\gamma}_{2^{i-1}}\lambda_2)^{-1}}\}\leq\min\{2^{i+1},\frac{\ln\varepsilon^{-2}}{2^{(i-1)\frac{1-s}{s}}h(2^{i-1})}\}.$$

注意，$\{2^{l+2}\,2^{l\cdot\frac{1-s}{s}}h(2^l)\}$ 是递增的。选取 l_0 使得

$$2^{l_0+1}\cdot 2^{(l_0-1)\frac{1-s}{s}}h(2^{l_0-1})\leq\ln\varepsilon^{-2}<2^{l_0+2}\cdot 2^{l_0\cdot\frac{1-s}{s}}h(2^{l_0}).$$

这意味着

$$2^{l_0} \asymp \left(\frac{\ln \varepsilon^{-2}}{h(2^{l_0})}\right)^s \quad \text{or, equivalently,} \quad \ln \varepsilon^{-2} \asymp 2^{l_0/s} h(2^{l_0}), \tag{3.5}$$

其中，记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个非本质的正常数C，使得 $A \le CB$；而 $A \asymp B$ 表示 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$。由 (2.10) 可知，若 $1 \le i \le l_0$，则

$$\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} \le 2^i,$$

若 $i > l_0$，则由 (3.3) 和 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}\ln \frac{e\,|\rho(i)|}{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} &\lesssim 1 + \ln\Big(\frac{2^{i+1}\cdot 2^{(i-1)\frac{1-s}{s}} h(2^{i-1})}{\ln \varepsilon^{-2}}\Big) \lesssim 1 + \ln\Big(2^{\frac{i-l_0}{s}} \cdot \frac{h(2^{i-1})}{h(2^{l_0})}\Big) \\ &\lesssim 1 + \frac{i-l_0}{s} + \ln\Big(\frac{\ln(1+2^{i-1})}{\ln(1+2^{l_0})}\Big) \lesssim i - l_0 + \ln \frac{e\,i}{l_0},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} \le \widetilde{a}_i(\varepsilon) \ln \frac{e\,|\rho(i)|}{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} &\lesssim \frac{\ln \varepsilon^{-2}}{2^{(i-1)\frac{1-s}{s}} h(2^{i-1})} \ln \frac{e\,|\rho(i)|}{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} \\ &\lesssim \frac{\ln \varepsilon^{-2}}{2^{(i-1)\frac{1-s}{s}} h(2^{l_0})}\Big(i - l_0 + \ln \frac{e\,i}{l_0}\Big).\end{aligned}$$

回到 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}&\ln n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} + \widetilde{a}_i(\varepsilon) \ln j(\varepsilon)\Big) \\ \lesssim &\sum_{i=1}^{l_0} \Big(\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} + \widetilde{a}_i(\varepsilon) \ln j(\varepsilon)\Big) + \sum_{i=l_0+1}^{\infty} \Big(\ln C_{|\rho(i)|}^{\widetilde{a}_i(\varepsilon)} + \widetilde{a}_i(\varepsilon) \ln j(\varepsilon)\Big) \\ \lesssim &\sum_{i=1}^{l_0} 2^i \ln j(\varepsilon) + \sum_{i=l_0+1}^{\infty} \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{2^{(i-1)\frac{1-s}{s}} h(2^{l_0})}\Big(i - l_0 + \ln \frac{e\,i}{l_0} + \ln j(\varepsilon)\Big) \\ \lesssim &\, 2^{l_0} \ln j(\varepsilon) + \frac{\ln \varepsilon^{-2}}{2^{(l_0-1)\frac{1-s}{s}} h(2^{l_0})}\big(1 + \ln j(\varepsilon)\big) \lesssim 2^{l_0} \ln j(\varepsilon).\end{aligned}$$

现在我们要证明 $2^{\frac{l_0}{1-s}} \lesssim \widetilde{d}(\varepsilon) \le d(\varepsilon)$，其中

$$\widetilde{d}(\varepsilon) := \max\{j : \widetilde{\gamma}_j > \varepsilon^2\} \le \max\{j : \gamma_j > \varepsilon^2\} =: d(\varepsilon).$$

注意到

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\varepsilon) &= \max\{j : \ln \frac{1}{\widetilde{\gamma}_j \lambda_2} < \ln \varepsilon^{-2} - \ln \frac{1}{\lambda_2}\} \\ &= \max\{j : j^{\frac{1-s}{s}} h(j) < \ln \varepsilon^{-2} - \ln \frac{1}{\lambda_2}\}.\end{aligned}$$

选取一个充分大的正数 $c_0 > 1$，使得当$\varepsilon > 0$充分小时，

$$\ln\Big(\widetilde{\gamma}_{2^{\frac{l_0}{1-s}-c_0}} \lambda_2\Big)^{-1} = \big(2^{\frac{l_0}{1-s}-c_0}\big)^{\frac{1-s}{s}} h\big(2^{\frac{l_0}{1-s}-c_0}\big).$$

由 (3.3) 和 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}\ln\left(\widetilde{\gamma}_{2^{\frac{l_0}{1-s}}-c_0}\lambda_2\right)^{-1} &\leq 2^{\frac{l_0}{s}}\cdot 2^{-c_0\cdot\frac{1-s}{s}}\cdot h(2^{l_0})\cdot\frac{\ln\left(1+2^{\frac{l_0}{1-s}}-c_0\right)}{\ln(2^{l_0}+1)}\\ &\leq 2^{\frac{l_0}{s}}h(2^{l_0})\cdot 2^{-c_0\cdot\frac{1-s}{s}}\cdot\frac{1}{1-s}\\ &\leq \frac{1}{2}\ln\varepsilon^{-2} < \ln\varepsilon^{-2}-\ln\frac{1}{\lambda_2}.\end{aligned}$$

这意味着

$$2^{\frac{l_0}{1-s}-c_0}\leq\widetilde{d}(\varepsilon)\leq d(\varepsilon),\quad \text{or, equivalently}\quad 2^{l_0}\lesssim d(\varepsilon)^{1-s}.$$

于是，由 (1.11) 可得

$$\begin{aligned}0\leq\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n(\varepsilon,S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{(\ln\varepsilon^{-1})^s+d^t}&\lesssim\lim_{\varepsilon^{-1}\to\infty}\frac{2^{l_0}\ln j(\varepsilon)}{(\ln\varepsilon^{-1})^s}\\ &\lesssim\lim_{\varepsilon^{-1}\to\infty}\frac{d(\varepsilon)^{1-s}\ln j(\varepsilon)}{(\ln\varepsilon^{-1})^s}=0.\end{aligned}$$

这意味着在 $\ln\varepsilon^{-1}\geq d^t$ 的情形下，EXP-(s, t)-WT 成立。

定理 1.1 得证。 □

推论 *1.2* 的证明。

(1) 假设 EXP-(s,t)-WT 在 $0<s<1$ 和 $0<t\leq 1$下成立。根据定理 1.1，我们得到 (1.10) 和 (1.11)。根据引理 2.2，(1.10) 等价于 (1.12)。因此，(1.12) 成立。由 (1.11) 以及事实 $j(\varepsilon)\geq 2$ 对于 $\varepsilon^2<\lambda_2$，我们得到 (2.4)。根据引理 2.3，我们得到 (1.13)。

(2) 假设 (1.12) 和 (1.14) 成立。根据引理 2.2 和定理 1.1，只需证明 (1.11)。根据引理 2.3 和 (1.14)，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)^{1-s+s\delta}}{(\ln\varepsilon^{-1})^s}=0.$$

由引理 2 和 (1.12) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)^{1-s}\ln j(\varepsilon)}{(\ln\varepsilon^{-1})^s}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d(\varepsilon)^{1-s+s\delta}}{(\ln\varepsilon^{-1})^s}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln j(\varepsilon)}{(\ln\varepsilon^{-1})^{s\delta}}=0.$$

因此，(1.11) 成立。推论 1.2 得证。 □

定理 *1.3* 的证明。

假设 EXP-UWT 成立。那么对于任意 $0<s<1$ 和 $0<t\leq 1$，EXP- (s, t)-WT 也成立。根据推论 1。2,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln(\ln\frac{1}{\lambda_j})}{\ln(\ln j)}=\infty\quad\text{and}\quad\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\gamma_j}}{j^{\frac{1-s}{s}}}=\infty\ \text{ for all } s\in(0,1).$$

利用引理 2。5，我们得到 (1.12) 和 (1.15)。

另一方面，假设 (1.12) 和 (1.15) 成立。我们要证明 EXP-UWT 成立，即对任意 $s,t\in(0,1)$，EXP-(s,t)-WT 成立。由 (1.15) 和引理 2.5 可知，对任意 $s\in(0,1)$，(1.14) 成立。根据推论 1.2，我们知道对任意 $s,t\in(0,1)$，EXP-(s,t)-WT 成立。因此，EXP-UWT 成立。

我们也可以利用引理 2.1 证明 EXP-UWT 成立。事实上，只需证明对任意 s, $t \in (0,1)$，EXP-(s,t)-WT 成立。令 $V := \max\{d^t, (\ln \varepsilon^{-1})^s\}$，则 $V \to \infty$ as $d + \varepsilon^{-1} \to \infty$。采用与引理 2.2 相同的方法，我们得到

$$\ln j(\varepsilon) \le \max\{\ln J_1,\ (2\ln \varepsilon^{-1})^{\frac{s}{3}}\} \le \max\{\ln J_1, (2V)^{1/3}\},$$

and

$$d(\varepsilon) \le \max\{J_2, (2\ln \varepsilon^{-1})^{\frac{s}{3}}\} \le \max\{J_2, (2V)^{1/3}\},$$

其中 J_1, J_2 为正常数。由引理 2.1 可知

$$\lim_{d+\varepsilon^{-1}\to\infty} \frac{\ln n(\varepsilon, S_{d,\boldsymbol{\gamma}})}{d^t + (\ln \varepsilon^{-1})^s} \le \lim_{V\to\infty} \frac{d(\varepsilon)\ln j(\varepsilon)}{V}$$
$$\le \lim_{V\to\infty} \frac{\max\{\ln J_1, (2V)^{1/3}\} \cdot \max\{J_2, (2\ln \varepsilon^{-1})^{\frac{s}{3}}\}}{V} = 0.$$

定理 1.3 得证。 □

致谢 作者受到国家自然科学基金（项目编号：12371098）的资助。

References

[1] J. Chen, H. Wang. 高斯核多元逼近的平均情形可处理性。《逼近理论杂志》，2019年，239：51-71。[2] F. Cobos, T. K¨uhn, W. Sickel. 上确界范数下多元周期 Sobolev 函数的最佳逼近。函数分析杂志，2016 年，270(11)：4196-4212。[3] J. Dick, P. Kritzer, F. Pillichshammer, H. Wo´zniakowski. Korobov 空间中解析函数的逼近。《复杂性杂志》，2014年，30：2-28。[4] J. Dick, G. Larcher, F. Pillichshammer, H. Wo´zniakowski. Korobov 空间多元积分的指数收敛与可处理性。《计算数学》，2011年，80：905-930。[5]M. Gnewuch, H. Wo´zniakowski. 准多项式可处理性。《复杂性杂志》，2011年，27：312-330。[6] F. J. Hickernell, P. Kritzer, H. Wo´zniakowski. 线性张量积问题的指数可处理性。载于：D. R. Wood, J. DeGier, C. Praeger, T. Tao（编），MATRIX 年刊。查姆：施普林格，2020年。[7]C. Irrgeher, P. Kritzer, F. Pillichshammer, H. Wo´zniakowski. 指数权重希尔伯特空间上多元逼近的可处理性。《逼近理论杂志》，2016年，207：301-338。[8] P. Kritzer, H. Wo´zniakowski. 线性多元问题指数可处理性的简单刻画。《复杂性杂志》，2019年，51：110-128。[9] P. Kritzer, F. Pillichshammer, H. Wo´zniakowski. 任意线性泛函下最坏情形设定中线性加权张量积问题的指数可处理性。《复杂性杂志》，2020年，61：101501。[10] E. Novak, H. Wo´zniakowski。《多元问题的可处理性》第一卷：线性信息。苏黎世：欧洲数学会，2008年。[11] E. Novak, H. Wo´zniakowski。《多元问题的可处理性》第二卷：泛函的标准信息。苏黎世：欧洲数学会，2010年。

[12] E. Novak, H. Wo´zniakowski。《多元问题的可处理性》第三卷：算子的标准信息。苏黎世：欧洲数学会，2012年。[13] A. Papageorgiou, I. Petras. 多元问题可处理性的新判据。《复杂性杂志》，2014年，30：604-619。[14] A. Papageorgiou, I. Petras, H. Wo´zniakowski. (s,ln$^{\kappa}$)-线性问题的弱可处理性。《复杂性杂志》，2017年，40：1-16。[15] P. Siedlecki. 一致弱可处理性。《复杂性杂志》，2013年，29：438-453。[16] P. Siedlecki, M. Weimar. 关于 (s,t) 弱可处理性的札记：对具有（次）指数信息复杂度问题的精细分类。《逼近理论杂志》，2015年，200：227-258。[17] H. Wang. 关于解析 Korobov 核多元逼近的 EC-(s,t)-弱可处理性的一则札记。《复杂性杂志》，2019年，55：101412。[18] G. Xu. 平均情形下一般线性问题的指数收敛可处理性。《复杂性杂志》，2015年，31：617-636。

School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, China.
Email address: 2240501011@cnu.edu.cnSchool of Mathematical Sciences,
Capital Normal University, Beijing 100048, China.*Email address*: wanghp@cnu.edu.cn
School of Science, Langfang Normal University, Langfang 065000, China.
Email address: cnuwangk@163.com.