arXiv:2603.21035v1 [math.DG] 22 Mar 2026

嵌入曲面特征值比值界的一个证明

RICARDO GLORIA-PICAZZO、YINGYING WU 和丘成桐

摘要。我们说明闭嵌入曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 的谱与有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ （其 $\partial\Omega = \Sigma$）的狄利克雷谱之间的关系。我们证明，存在一个正常数 K_g，它仅依赖于 Σ 的亏格 g，使得 $\lambda_k^D(\Omega)^{3/2}/(\lambda_k(\Sigma)\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}) \geq K_g$；其中，$\Sigma(\Sigma)$ 表示曲面 Σ 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的第 k 个非零特征值，$\lambda_k^D(\Omega)$ 表示 Ω 上带狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子的第 k 个特征值。此外，我们明确给出了 K_g 对亏格的依赖关系，表明 $K_g \propto (g+1)^{-1}$，并确定了零亏格情形下 $k=1$ 的最优常数 K_0。我们还针对边界具有非负里奇曲率的区域，给出了这一结果在任意维数下的推广版本。

1. 引言

在*Review of Geometry and Analysis* [27, p. 237], 中，第三位作者指出，若 Σ是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个嵌入曲面，且围成区域 Ω，则 Ω 的体积有如下上界：$\frac{\sqrt{2}}{3}$面积$(\Sigma)\lambda_1(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}$，其中 $\lambda_k(\Sigma)$表示 Σ的第 k个非零特征值。随后还指出，结合这一界和 Korevaar 的工作 [16], 可得 $\frac{\lambda_k^D}{\lambda_k}\frac{\Sigma}{\Sigma}\sqrt{\lambda_1}^{3/2}(\Omega)()(\Sigma) \geq K_g > 0$，其中$\lambda_k^D(\Omega)$是 Ω 的第 k个狄利克雷特征值，而 K_g 是仅依赖于 Σ的亏格的常数。

此前文献将这一结论称为丘成桐猜想 [9, 24], ，该猜想最早见于 Jumonji 和 Urakawa 于2008年发表的一篇论文。他们以立方体的曲面、单位球面、嵌入环面以及亏格为二的嵌入曲面 [9, 10]为例，对这一不等式进行了数值研究。他们提出了一项数值猜想，认为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 在所有嵌入曲面中K_g 取得最佳常数。最近，Wu–Wu–Yau [24] 也在点云特征值数值计算的背景下研究了这个问题，并将他们的结果与 Jumonji 和 Urakawa 的结果进行了比较。这促使我们为 $\mathbb{R}^3$中的嵌入曲面特征值比值界给出一个完整的证明。

定理 1.1。若 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是亏格为 g、配备诱导欧几里得度量的嵌入闭连通曲面，且令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为由 Σ 围成的有界区域，则

$$\frac{\lambda_k^D(\Omega)^{3/2}}{\lambda_k(\Sigma)\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \geq \frac{3^{5/2}\, C_3^{3/2}}{5^{3/2}\,\sqrt{2}\, C} \cdot \frac{1}{(g+1)} \quad =: \; K_g > 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

其中 C 是一个绝对正常数，且 $C_3^{3/2} = 6\pi^2$。

这一结果推进了一项已悬而未决二十多年的问题。它阐明了 Σ 的谱与 Ω 的谱之间的关系，并在外在（体积／狄利克雷）数据和内在（曲面／拉普拉斯–贝尔特拉米）数据之间架起概念桥梁，同时纳入拓扑信息。

定理 1.1 的证明依赖于三个谱界：Reilly估计 [20] 以 $\lambda_1(\Sigma)$ 和面积(Σ) 为依据，从上方界定 Ω 的体积；Li–Yau [18] 给出了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中区域的狄利克雷特征值下界；Korevaar 上界 [16] 则给出了黎曼流形上特征值的上界。Korevaar 上界以亏格 g 和普适常数 C表示，

日期：2026年3月24日。

从而明确了对亏格的依赖，并得到 $K_g \propto (g+1)^{-1}$。对于第一特征值，在零亏格情形下，我们确定了最优常数 K_g，其中球面/球体对是唯一的极值对象。

在本文最后一节中，我们还将探讨将定理 1.1 推广至任意维数的可能性与局限性。我们证明了以下关于边界具有非负里奇曲率的区域的结果，并随后讨论非负里奇曲率这一假设。

定理 1.2. 设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 具有 C^2 连通边界 $\partial\Omega = M$，且 M 相对于 $\mathbb{R}^{n+1}$诱导的欧几里得度量具有非负里奇曲率。那么

$$\frac{\lambda_k^D(\Omega)^{\frac{n+1}{2}}}{\lambda_k(M)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\lambda_1(M)}} \geq \frac{(n+1)^{\frac{n+3}{2}}}{\sqrt{n}\,C(n)^{\frac{n}{2}}} \cdot \left(\frac{C_{n+1}}{n+3}\right)^{\frac{n+1}{2}} =: K(n) > 0.$$

[2]其中 $C(n)$ 是一个仅依赖于 n 和 $C_{n+1} = (2\pi)^2\,\omega_{n+1}^{-n+1}$的正常数，且 ω_{n+1} 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$中的$(n+1)$维球的体积。

1.1. 黎曼流形上的特征值。 在本文中，我们始终考虑一个封闭的C^2嵌入曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$，它围成区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$。相对于诱导欧几里得度量，$\Sigma$上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ 的特征值记为

$$0 = \lambda_0(\Sigma) < \lambda_1(\Sigma) \leq \lambda_2(\Sigma) \leq \cdots \tag{1}$$

按重数重复计数。我们只考虑连通曲面，因此$\lambda_0(\Sigma) = 0$ 的重数恰为一。对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的拉普拉斯算子，我们假设满足狄利克雷边界条件

$$\Delta f = -\lambda_k^D f \quad \text{in } \Omega,$$
$$f_{|\partial\Omega} \equiv 0.$$

由于狄利克雷特征值总是正的，我们记

$$0 < \lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_2^D(\Omega) \leq \lambda_3^D(\Omega) \leq \cdots$$

按重数重复计数。采用这一记号，λ_k 表示$k = 1$，2，.....在闭流形以及满足 Dirichlet 条件的带边界流形上的第 k个非零特征值。

致谢。Y. Wu 感谢 Clifford Taubes 就该问题的解决方法以及可作为起点的可能形状进行了深入讨论，并给予慷慨指导。Y. Wu 也感谢 Song Sun、Freid Tong 和 Jialong Deng 的有益讨论。Y. Wu 和 R. Gloria- Picazzo 感谢 Yinbang Lin、Mehrdad Kalantar、Simone Cecchini、Christos Mantoulidis、Etienne Vouga 和 Héctor Chang-Lara 提供的宝贵建议并参与讨论。

2. 拉普拉斯算子的谱界

为了证明 $\mathbb{R}^3$ 中嵌入曲面的特征值比，我们结合三项经典估计：(i) Reilly 关于 vol(Ω) 的上界，该上界以面积(Σ) 和 λ_1(Σ) [20], (ii) Korevaar 关于 λ_k(Σ) 的上界，该上界以 k、面积(Σ)、亏格及普适常数 C [16] 为依据；以及 (iii) Dirichlet 特征值 λ_k^D(Ω) [1, 18] 的 Berezin–Li–Yau 下界。本节将简要回顾这些结果。

2.1. 关于 Ω 的体积上界，以 λ_1(Σ) 和 面积(Σ)为依据。 第一个结论是，Ω 的体积不超过 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 面积(Σ)λ_1(Σ)$^{-1/2}$ [27, 页 237]。这确实是 Reilly[2θ] 于 1977 年证明的关于余维一的 n 维流形的一个已有结果。此外，Reilly 证明了等号成立当且仅当 Ω 是一个球。我们将此结果表述如下：

命题 2.1 （[20, 推论 1]）。设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个嵌入的 n 维闭流形，带有诱导欧几里得度量，并围成一个区域 Ω。则

$$\mathrm{vol}(\Omega) \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\mathrm{area}(\Sigma)\,\lambda_1(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}.$$

当且仅当 Ω 是$(n+1)$维球时，等号成立。

附录 A 给出了命题 2.1 一个更直接的证明。这是一项依赖散度定理和第一个非零特征值的变分刻画的计算。

2.2. **Berezin–Li–Yau 不等式**。一个多世纪以前，Weyl 证明了 [22, 23] 渐近公式 $\lambda_k^D(\Omega) \sim C_n\,(k/\mathrm{vol}(\Omega))^{2/n}$ 当 $k\to\infty$时成立。这里，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，而 C_n 是所谓的*Weyl* 常数，定义为 $C_n = 4\pi^2\omega_n^{-2/n}$，其中 $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ 是 $\mathbb{R}^n$中单位n维球的体积。

后来，在 1961 年，Pólya 在 [19] 证明，对于任意铺满平面的区域 Ω，不等式

$$\lambda_k^N(\Omega) \le C_n\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}} \le \lambda_k^D(\Omega) \tag{2}$$

对于 $k=1$、2、3，.....。这里，$\lambda_k^N(\Omega)$ 是第 k 个非零 Neumann 特征值，而平面铺砌指的是这样的区域 Ω：无缝隙、无重叠地用与 Ω 全等的无限多个区域覆盖平面。Pólya 对 (2) 的证明适用于任意维度 n。在同一篇论文中，Pólya 猜想 (2) 中的界对任意区域都成立。此猜想自此一直悬而未决，文献中将 (2) 中的界称为*Pólya* 猜想。关于 Pólya 猜想的最新进展，请参阅 [5] 和 [6], ，两者分别讨论了欧几里得球和环形区域上的这一猜想。

关于 (2) 中狄利克雷特征值的下界，Li 和第三位作者[18] 于 1983 年证明了一个相关结果。事实上，他们证明了前 k 个狄利克雷特征值之和的以下下界。后来有人指出，这一总和的界是 Berezin 在 [1] 的一项更早结果的推论。

定理 2.2 (Berezin–Li–Yau；Li–Yau [18]；Berezin [1])。设Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且λ_k^D(Ω) 是区域Ω 上满足 *Dirichlet* 条件的拉普拉斯算子的第 k 个特征值。那么对每个 $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^D(\Omega) \;\ge\; \frac{n}{n+2}\,C_n\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{2/n}, \qquad C_n = (2\pi)^2\,\omega_n^{-2/n}.$$

其中vol(Ω) 表示Ω的体积。

Berezin–Li–Yau 平均不等式的一个推论是得到一个与 Pólya 猜想类似的下界，两者相差因子 $n/(n+2)$:

推论 2.3 (李–丘界 [18])。设Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且 λ_k^D(Ω) 是区域Ω 上满足 *Dirichlet* 条件的拉普拉斯算子的第 k 个特征值。那么对每个 $k\in\mathbb{N}$,

$$\lambda_k^D(\Omega) \;\ge\; \frac{n}{n+2}\,C_n\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{2/n}.$$

证明。由于$\{\lambda_i^D\}$ 是非递减的，$\lambda_k^D \ge \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^D$。结合定理 2.2。 □

2.3. **关于 λ_k(Σ) 的亏格上界**。1980年，杨保罗和第三作者 [25] 证明了，对于亏格为 g 的任意可定向黎曼曲面 Σ，都有 λ_1(Σ) 面积(Σ) $\le 8\pi(g+1)$。这称为杨–丘不等式。更强的不等式 λ_1(Σ) 面积(Σ) $\le 8\pi\left\lfloor\frac{g+3}{2}\right\rfloor$ 于 [4] 年得到证明。等号在 $g=0$ （圆球面）以及 $g=2$ （度量源自

对 S^2 的二重分歧覆盖）时成立；而对于其他所有亏格，不等式均为严格不等式，这一点已在 [12] 中证明。关于这一方向的更多细节，请参阅 [12, 13]。

在 [26, 问题 71], 中，第三位作者于 1982年 猜想，存在一个普适常数 C，使得 $\lambda_k(\Sigma)k^{-1} \leq C(g+1)$ 面积$(\Sigma)^{-1}$，对任意亏格为 g 的闭定向曲面都成立。Korevaar 于 [16] 1993年 解决了这一猜想，为一般流形给出了界，并在边界非空时考虑了诺伊曼特征值 [16, 定理 0.3, 0.4]。随后，他应用这两个定理得到了第三个结果，讨论曲面情形，并给出了关于其亏格的界 g。这是通过利用一个次数至多为 $g+1$ 的共形映射 $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 的存在性实现的。2004年，Grigor'yan、Netrusov 和第三位作者为 Korevaar 的结果给出了另一种证明，该结果适用于更一般的椭圆算子 [8]。我们陈述如下：

定理 2.4 (定理 0.5 [16] - 另见 [8])。 设$(\Sigma, \mathfrak{g})$ 是亏格为 g 的闭可定向黎曼曲面。那么，相对于 $\mathfrak{g}$，拉普拉斯–贝尔特拉米算子的第 k 个非零特征值 $\lambda_k(\Sigma)$有如下上界

$$\lambda_k(\Sigma) \leq C\frac{(g+1)k}{\text{area}(\Sigma)}. \tag{3}$$

其中 C 是一个普适常数。

注 2.5。 按照我们的指标记号 $0 = \lambda_0(\Sigma) < \lambda_1(\Sigma) \leq \cdots$，Korevaar 在 [16] 中的界为$\lambda_k(\Sigma) \leq C^{\frac{(g+1)(k+1)}{\text{面积}(\Sigma)}}$。不过，我们可以将常数 C 替换为 $2C$，从而得到式 (3)。

对于闭不可定向曲面，关于亏格 $\gamma = 1 - \chi(\Sigma)$ 的 $\lambda_k(\Sigma)$ 上界也已有研究。更多详情请参见 [11, 15]。

3. 嵌入曲面特征值比的证明

现在，我们说明如何利用第 2 节中回顾的估计，推导出第三位作者 [27]所陈述的界。下面给出本文主要结果的证明：

定理 1.1 的证明。由命题 2.1，取 $n = 2$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \;\geq\; \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{area}(\Sigma)}. \tag{4}$$

将推论 2.3 应用于 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域 Ω，可得

$$\lambda_k^D(\Omega)^{3/2} \;\geq\; \left(\frac{3}{5}\,C_3\right)^{3/2}\,\frac{k}{\text{vol}(\Omega)} \tag{5}$$

其中 $C_3 = (6\pi^2)^{2/3}$。对于曲面上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征值，Korevaar 的上界（定理 2.4）意味着

$$\frac{1}{\lambda_k(\Sigma)} \;\geq\; \frac{\text{area}(\Sigma)}{C\,(g+1)\,k} \tag{6}$$

其中 C 是一个绝对正常数。

将 (4)、(5) 和 (6) 相乘可得，对每个 $k \geq 1$,

$$\frac{\lambda_k^D(\Omega)^{3/2}}{\lambda_k(\Sigma)\,\sqrt{\lambda_1(\Sigma)}} \;\geq\; \frac{3^{5/2}\,C_3^{3/2}}{5^{3/2}\,\sqrt{2}\,C}\cdot\frac{1}{(g+1)} \;=\; K_g.$$

这就证明了定理 1.1，并得到关系 $K_g \propto (g+1)^{-1}$。 □

注意到，这里唯一未知的常数是 C，它来自定理 2.4，因此估计 C 将得到 K_g 的值。或者，估计 K_0 将使我们能够估计 C 以及任意 K_g。不过，我们要指出的是，尽管命题 2.1 中的界是尖锐的，但 Korevaar 界的尖锐性尚不清楚，因为它涉及一个未知常数。此外，李–丘界

在用 $k\lambda_k^D(\Omega)$ 替代前 k 个特征值之和时会失去紧性，也就是说，在从定理 2.2 转到推论 2.3 时会失去紧性。

欧几里得等周不等式表明 $P(E) \geq n\,\omega_n^{1/n}\,|E|^{(n-1)/n}$ 其中 $P(E)$ 是（测度论意义下的）周长，$|E|$ 是体积；对于 $\mathcal{C}^1$ 区域，$P(\Omega) =$ 面积$(\partial\Omega)$，其中 $\partial\Omega = \Sigma$。代入 $n = 3$ 和 $\omega_3 = 4\pi/3$ 可得

$$\text{area}(\Sigma) \;\geq\; 3\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \text{vol}(\Omega)^{2/3}. \tag{7}$$

命题 3.1 (亏格 0，$k = 1$: 最优常数与极小化者)。设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为一亏格 0 的闭嵌入曲面，围成区域 Ω。则

$$\frac{\lambda_1^D(\Omega)^{3/2}}{\lambda_1(\Sigma)^{3/2}} \;\geq\; \frac{\pi^3}{2\sqrt{2}}.$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个圆球面，且 Ω 是相应的球 $ll.$

证明。由瑞利–法贝尔–克拉恩不等式可知，在体积固定为 $\text{vol}(B_r) = \frac{4\pi r^3}{3}$ 的所有区域中，球 $B_r \subset \mathbb{R}^3$ 使 λ_1^D达到最小。—也就是说，$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(B_r) = \pi^2/r^2$。因此

$$\lambda_1^D(\Omega)^{3/2} \geq \frac{\pi^3}{r^3} = \frac{4\pi^4}{3}\cdot\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \tag{8}$$

等号成立当且仅当 $\Omega = B_r$。

对于亏格 0，杨–姚 [25] 给出 $\lambda_1(\Sigma)$ 面积$(\Sigma) \leq 8\pi$，因此

$$\frac{1}{\lambda_1(\Sigma)^{3/2}} \geq \frac{\text{area}(\Sigma)^{3/2}}{(8\pi)^{3/2}}, \tag{9}$$

等号成立当且仅当 Σ 为圆的，见 [13,定理 1.2]。

另一方面，由方程（7）可得,

$$\frac{\text{area}(\Sigma)^{3/2}}{\text{vol}(\Omega)} \;\geq 6\sqrt{\pi}, \tag{10}$$

等号成立当且仅当 Σ 是包围球的球面。

将方程（8）和方程（9）相乘，再结合方程（10），可得

$$\frac{\lambda_1^D(\Omega)^{3/2}}{\lambda_1(\Sigma)^{3/2}} \;\geq\; \frac{4\pi^4}{3}\cdot\frac{1}{(8\pi)^{3/2}}\cdot\frac{\text{area}(\Sigma)^{3/2}}{\text{vol}(\Omega)} \;\geq\; \frac{4\pi^4}{3}\cdot\frac{6\sqrt{\pi}}{(8\pi)^{3/2}} \;=\; \frac{\pi^3}{2\sqrt{2}}.$$

这三个不等式恰好都在圆球面 $\Sigma = \partial B_r$ 及其球体 $\Omega = B_r$上取等号，因此，乘积取等号当且仅当 (Σ, Ω) 是这样的球面/球体对。□

4. On the generalization to any dimension

我们可以尝试将第3节中的证明推广到任意有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其边界 $M = \partial\Omega$ 是一个余维一的 n 维子流形。虽然命题 2.1 中的界和李–丘界在任意维数 n 下都成立，但在维数 $n \geq 3$ 下并没有与 Korevaar估计定理2.4 类似的结果。

1973年，M. Berger [2, page 138] 提出疑问：是否存在一个常数 $K(M)$，它只依赖于 n维流形，使得对 M上的任意黎曼度量 $\mathfrak{g}$，都有 $\lambda_1(M,\mathfrak{g})\,\text{vol}(M,\mathfrak{g}) \leq K(M)$。如上所述，对于曲面，这一结论成立：可定向情形下有杨–丘不等式 [25]，而不可定向情形下有 Karpukhin [11] 的结果。然而，对于 $n \geq 3$，Berger问题的答案是否定的，并且已有许多反例。例如，在 [21]，Urakawa 在任意一个不同于 n维环面的紧致连通李群 M上构造了一族黎曼度量 $\mathfrak{g}(t)$，其中 $t \in (0,\infty)$，使得 $\text{vol}(M,\mathfrak{g}(t))$ 为常数，但 $\lim_{t\to\infty}\lambda_1(M,\mathfrak{g}(t)) = \infty$。此外，Colbois 和 Dodziuk [3] 已证明，任意一个

紧致的 n维流形 M，只要满足 $n \geq 3$，就存在体积为 1 的度量 $\mathfrak{g}$，使 $\lambda_1(M, \mathfrak{g})$ 可以任意大。因此，对于满足 $n \geq 3$的 n维流形 M，不可能存在一个仅依赖于 n的常数 $C(n)$，使得 $\lambda_k(M) \leq C(n)\,(k/\mathrm{vol}(M))^{2/n}$；常数 $C(n)$ 必须依赖于流形的其他几何性质。另请参见 [8, 备注 5.5]和 [14]。

不过，只要对 M的几何作出更多假设，仍然可以建立 Ω 的谱与 $M = \partial\Omega$ 的谱之间的关系。例如，若假设 M 具有非负里奇曲率，则可以得到 $\lambda_k(M)$的如下界：

定理 4.1 (定理 *17*，见 [17]；另见 中的定理 0.3)。设 $(M, \mathfrak{g})$ 是一个具有非负里奇曲率的闭黎曼 n维流形。那么

$$\lambda_k(M) \leq C(n)\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(M)}\right)^{\frac{2}{n}} \tag{11}$$

其中 $C(n)$ 是一个仅依赖于 n的正常数。

注 2.5。与注 2.5 中一样，在我们的指标记号下，[17, 16]中的估计里的常数 $C(n)$可替换为$2^{2/n}C(n)$，从而得到 (11)。

因此，假设 $M = \partial\Omega$具有非负里奇曲率，我们便可建立 Ω 的狄利克雷谱与 $M = \partial\Omega$ 的谱之间的关系。在 M 具有非负里奇曲率的假设下，我们证明定理 1.2，即推广到任意维数的版本：

定理 *1.2* 的证明。我们用 vol(Ω) 表示紧致区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的体积，并用 area(M) 表示 n 维流形 $M = \partial\Omega$ 的体积。由定理 4.1 可得：

$$\frac{1}{\lambda_k(M)^{n/2}} \geq \frac{1}{C(n)^{n/2}}\left(\frac{\mathrm{area}(M)}{k}\right) \quad \text{for all} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

由推论 2.3 应用于 $n+1$，可得

$$\lambda_k^D(\Omega)^{\frac{n+1}{2}} \geq \left(\frac{(n+1)C_{n+1}}{n+3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{k}{\mathrm{vol}(\Omega)}\right) \tag{13}$$

由命题 2.1 可得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1(M)}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{area}(M)}. \tag{14}$$

将不等式 (12)-(13)-(14) 相乘，可得：

$$\frac{\lambda_k^D(\Omega)^{\frac{n+1}{2}}}{\lambda_k(M)^{n/2}\sqrt{\lambda_1(M)}} \geq \frac{(n+1)^{\frac{n+3}{2}}}{\sqrt{n}\,C(n)^{\frac{n}{2}}} \cdot \left(\frac{C_{n+1}}{n+3}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

□

附录 A. 命题 2.1 的证明

我们考虑嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中并围成区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维闭光滑流形 Σ。

证明。令 $p \in \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$，并考虑一个（局部）参数化 $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \Sigma$，其中 $p = \mathbf{x}(0) \in \Sigma$:

$$\mathbf{x}(u^1, \cdots, u^n) = (x^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, x^{n+1}(u^1, \cdots, u^n)).$$

我们考虑 Σ 上的诱导欧几里得度量：

$$\mathfrak{g}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \cdots, \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^i}\right) \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^j}, \cdots, \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^j}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j}.$$

For 对于任意光滑函数 $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$，梯度的第 i 个坐标由 $\mathfrak{b}$ 给出 y

$$(\nabla f)^i = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

因此，我们也有

$$|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^j}. \tag{15}$$

现在我们取投影函数

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}_k : \Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}, \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto x^k. \end{aligned}$$

对每个 $k = 1, \dots, n+1$。注意，对于每个 $i = 1, \dots, n$ 和 $k = 1, \dots, n+1$,

$$\frac{\partial \,\mathrm{Proj}_k}{\partial u^i} = \frac{\partial x^k}{\partial u^i}.$$

将其代入式 (15) 中的 $f = \mathrm{Proj}_k$，得到

$$|\nabla \,\mathrm{Proj}_k\,|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \frac{\partial \,\mathrm{Proj}_k}{\partial u^i}\frac{\partial \,\mathrm{Proj}_k}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j}.$$

对 k 求和，得到:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} |\nabla \,\mathrm{Proj}_k\,|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}^{ij}\mathfrak{g}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{id}_{n\times n})_{ii} = n. \end{aligned} \tag{16}$$

另一方面，将散度定理应用于恒等向量场 $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$，得到

$$\int_\Sigma \Phi \cdot \mathbf{n}\, dS = (n+1)\int_\Omega \mathrm{dvol} = (n+1)\,\mathrm{vol}(\Omega).$$

利用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\Big|\int_\Sigma \Phi \cdot \mathbf{n}\, dS\Big| \le \left(\int_\Sigma (\Phi\cdot\mathbf{n})^2\, dS\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma 1\, dS\right)^{1/2} = \left(\int_\Sigma (\Phi\cdot\mathbf{n})^2\, dS\right)^{1/2} \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2}.$$

于是我们得到

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{1}{n+1}\int_\Sigma \Phi\cdot\mathbf{n}\, dS \le \frac{1}{n+1}\left(\int_\Sigma |\Phi|^2\, dS\right)^{1/2} \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2} \tag{17}$$

我们总可以平移曲面，并将其中心置于

$$\frac{1}{\mathrm{area}(\Sigma)}\left(\int_\Sigma \mathrm{Proj}_1\, dS, \int_\Sigma \mathrm{Proj}_2\, dS, \dots, \int_\Sigma \mathrm{Proj}_{n+1}\, dS\right)$$

这样一来，函数 Proj_k over Σ 的这些积分就为零。因此，不失一般性，我们可以假设对于所有 $k = 1, \dots, n+1$, $\int_\Sigma \mathrm{Proj}_k\, dS = 0$。

第一个非零特征值的变分刻画

$$\lambda_1(\Sigma) = \inf_{\substack{f\in\mathcal{H}^1(\Sigma)\setminus\{0\} \\ \int_\Sigma f\, dS = 0}} \frac{\int_\Sigma |\nabla f|^2\, dS}{\int_\Sigma f^2\, dS} \tag{18}$$

其中，$\mathcal{H}^1(\Sigma)$ 表示 $L^2(\Sigma)$ 中函数所构成的索伯列夫空间，这意味着

$$\lambda_1 \int_\Sigma f^2\, dS \le \int_\Sigma |\nabla f|^2\, dS$$

对于 $f \in \mathcal{H}^1(\Sigma) \setminus \{0\}$ 以及 $\int_\Sigma f\, dS = 0$。注意，这涵盖了所有 $\mathbf{Proj}_k$，因此我们有

$$\lambda_1 \int_\Sigma \mathrm{Proj}_k^2\ dS \le \int_\Sigma |\nabla\, \mathrm{Proj}_k\,|^2\, dS, \quad \text{for all } k = 1, \dots, n+1. \tag{19}$$

然而

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) = (\mathrm{Proj}_1, \mathrm{Proj}_2, \dots, \mathrm{Proj}_{n+1}),$$

so

$$|\Phi|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Proj}_k^2\,.$$

然后，将式 (19) 中的 $n+1$ 个不等式相加，并利用式 (16) 得到

$$\lambda_1 \int_\Sigma |\Phi|^2\, dS \le \int_\Sigma \left(\sum_{k=1}^{n+1} |\nabla\, \mathrm{Proj}_k\,|^2 \right) dS = n\ \mathrm{area}(\Sigma).$$

开平方后得到,

$$\left(\int_\Sigma |\Phi|^2\, dS \right)^{1/2} \le \sqrt{n}\ \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2}\, \lambda_1^{-1/2}$$

最后代入式 (17)，得到

$$\mathrm{vol}(\Omega) \le \sqrt{n}\ \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2}\, \lambda_1^{-1/2}\, \frac{\mathrm{area}(\Sigma)^{1/2}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\ \mathrm{area}(\Sigma)\, \lambda_1^{-\frac{1}{2}}.$$

最优性。令 $\Sigma = \mathbb{S}^n_r$ 为半径为 r 的 n球面，令 $\Omega = B^{n+1}_r$ 为 $(n+1)$ 维球。于是

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}} r^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} \quad \text{and} \quad \mathrm{area}(\Sigma) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

$\mathbb{S}^n_1$ 上的第一个正拉普拉斯–贝尔特拉米特征值由 n 给出，见 [7]。因此 $\lambda_1(\mathbb{S}^n_r) = n/r^2$，并且

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{n+1}\ \mathrm{area}(\Sigma)\, \lambda_1(\Sigma)^{-1/2} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{r}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}} r^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}} r^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} = \mathrm{vol}(\Omega). \end{aligned}$$

因此常数 $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 无法进一步改进。

刚性。
我们使用了如下链式推导

$$\begin{aligned} (n+1)\ \mathrm{vol}(\Omega) = \int_\Sigma \Phi \cdot \mathbf{n}\, dS \ &\le\ \Big(\int_\Sigma (\Phi \cdot \mathbf{n})^2\, dS \Big)^{1/2}\ \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2} \\ &\le\ \Big(\int_\Sigma |\Phi|^2\, dS \Big)^{1/2}\ \mathrm{area}(\Sigma)^{1/2}\ \le\ \sqrt{n}\ \mathrm{area}(\Sigma)\, \lambda_1(\Sigma)^{-1/2}. \end{aligned}$$

第一个不等式是 $L^2(\Sigma)$ 中的柯西–施瓦茨不等式，等号成立要求 $\Phi \cdot \mathbf{n}$ 为常数。第二个不等式是逐点不等式 $(\Phi \cdot \mathbf{n})^2 \le |\Phi|^2$，等号成立要求 Φ 与 $\mathbf{n}$ 在每一点都共线。这两点意味着存在一个先验的（可能非常数的）标量函数 $c\colon \Sigma \to (0, \infty)$ 以及一个常数 $R > 0$，使得

$$\mathbf{n} = c\, \Phi \qquad \text{and} \qquad \Phi \cdot \mathbf{n} \equiv R.$$

由于 $|\mathbf{n}| \equiv 1$，必然有 $c(p) = 1/|\Phi(p)|$，因此

$$R \;=\; \Phi \cdot \mathbf{n} \;=\; \Phi \cdot (c\,\Phi) \;=\; c\,|\Phi|^2 \;=\; \frac{|\Phi|^2}{|\Phi|} \;=\; |\Phi|.$$

因此 $|\Phi(p)| \equiv r$ 在 Σ上，即 $|p| = r$ 对所有 $p \in \Sigma$都成立，所以 $\Sigma \subset \mathbb{S}^n_r$。此外，$\mathbf{n}(p) = \Phi(p)/r = p/r$ 是 $\mathbb{S}^n_r$的外法向量，因此

$$T_p\Sigma = \{v : \langle v, \mathbf{n}(p)\rangle = 0\} = \{v : \langle v, p\rangle = 0\} = T_p\mathbb{S}^n_r.$$

对所有 $p \in \Sigma$都成立，并且包含映射 $\iota : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{S}^n_r$ 由反函数定理可知是局部微分同胚。这意味着 $\iota(\Sigma)$在 $\mathbb{S}^n_r$中是开集。由于 Σ 是紧的，$\iota(\Sigma)$在豪斯多夫流形 $\mathbb{S}^n_r$中是紧的，因此是闭集。由于 $\mathbb{S}^n_r$ 是连通的，该像在 $\mathbb{S}^n_r$中既开又闭，所以 $\Sigma = \mathbb{S}^n_r$。$\square$

参考文献

1. Felix A Berezin，算子的协变符号与逆变符号，《苏联数学汇刊》6 (1972)，第 5 期，1117。 2. Marcel Berger，关于黎曼流形的前几个特征值，《Compositio Mathematica》26 (1973)，第 2 期，129–149。 3. Bruno Colbois 和 Jozef Dodziuk，具有较大 λ_1 的黎曼度量，《美国数学会会刊》122 (1994)，第 3 期，905–906。 4. Ahmad El Soufi 和 Saıd Ilias，共形体积及其基于 Li 和 Yau 工作的应用，《谱理论与几何研讨会》2 (1983)，1–15。 5. Nikolay Filonov、Michael Levitin、Iosif Polterovich 和 David A Sher，欧几里得球上的 Pólya 猜想，《数学新进展》234 (2023)，第 1 期，129–169。 6. Nikolay Filonov、Michael Levitin、Iosif Polterovich 和 David A. Sher，关于环域的狄利克雷特征值的 Pólya 猜想，2025年。 7. Gerald B Folland，球面上德拉姆复形的调和分析。（1989）。 8. Alexander Grigor'yan 、 Yuri Netrusov 和丘成桐，椭圆算子的特征值及其几何应用，《微分几何综述》 9 (2004)，第 1 期，147–217。 9. Masaki Jumonji 和 Hajime Urakawa，紧嵌入曲面及三维有界区域上的拉普拉斯算子特征值问题，《跨学科信息科学》14 (2008)，第 2 期，191–223。 10. ，嵌入曲面上拉普拉斯算子特征值问题的可视化及其应用，《研讨会与大会》，第 19 卷，2008年，第 47–91 页。 11. Mikhail Karpukhin，不可定向曲面上拉普拉斯算子第一特征值的上界，《国际数学研究通知》2016 (2016)，第 20 期，6200–6209。 12. ，关于第一拉普拉斯特征值的杨–姚不等式，《几何与泛函分析》29 (2019)，第 6 期，1864–1885。 13. Mikhail Karpukhin、Nikolai Nadirashvili、Alexei V Penskoi 和 Iosif Polterovich，球面上拉普拉斯特征值的等周不等式，《微分几何杂志》118 (2021)，第 2 期，313–333。— 14. Gerasim Kokarev，黎曼曲面上拉普拉斯特征值的变分方面，《数学进展》258 (2014)，191–239。 15. ，共形体积与特征值问题，《印第安纳大学数学杂志》69 (2020)，第 6 期，第 1975–2003 页。 16. Nicholas Korevaar，共形度量的特征值上界，《微分几何杂志》37 (1993)，第 1 期，73–93。 17. Peter Li 和丘成桐，紧黎曼流形特征值的估计，《纯数学研讨会论文集》，第 36 卷，1980年，第 205–239 页。 18. ，关于薛定谔方程与特征值问题，《数学物理通讯》88 (1983)，第 3 期，309–318。 19. George Pólya，关于振动膜的特征值，《伦敦数学会会刊》11 (1961)，第 3 期，419–433。 20. Robert C Reilly，关于欧几里得空间中紧子流形的拉普拉斯算子第一特征值，《瑞士数学评论》52 (1977)，第 1 期，525–533。 21. Hajime Urakawa，关于紧群流形上拉普拉斯算子的最小正特征值，《日本数学会杂志》31 (1979)，第 1 期，209–226。 22. Hermann Weyl，线性偏微分方程特征值的渐近分布定律（及其在空腔辐射理论中的应用），《数学年刊》71 (1912)，第 4 期，441–479。 23. ，关于膜的固有振动与其边界的依赖关系。（1912）。

24. YINGYING WU、吴天琪和丘成桐，基于格的近似与解析解对比下的曲面特征值，2022年。 25. 杨保罗和丘成桐，紧黎曼曲面与极小子流形的拉普拉斯算子特征值，《比萨高等师范学院科学部学报》**7** (1980年)，第 1 期，55–63。 26. 丘成桐，微分几何研讨班，第 102 号，普林斯顿大学出版社，1982年。 27. ，几何与分析评论，《亚洲数学杂志》**4** (2000年)，235–278。

数学系，休斯敦大学，得克萨斯州休斯敦 77004，美国电子邮箱： ragloriapicazzo@uh.edu

数学系，休斯敦大学，得克萨斯州休斯敦 77004，美国 .S.
电子邮箱： ywu68@uh.edu

丘成桐数学科学中心，清华大学，北京 100084，中国；北京数学科学与应用研究院（BIMSA），北京 101408，中国。电子邮箱： styau@tsinghua.edu.cn