arXiv:2603.21037v1 [math.GT] 22 Mar 2026

2026年3月24日

¨泰希米勒空间上的卡拉西奥多里度量

伊然·林 弗拉基米尔·马尔科维´奇

Abstract. 设 S 是任意一个黎曼曲面，其泰希米勒空间 $\mathcal{T}(S)$ 的维数至少为二。一个长期悬而未决的问题（参见 [9] 和 [18]）是确定卡拉西奥多里度量 d_C 是否与泰希米勒度量 $\mathsf{d}_{\mathcal{T}}$ 在 $\mathcal{T}(S)$ 上一致。文献 [16] 证明，当 S 是亏格至少为二的闭曲面时，$\mathsf{d}_C \neq \mathsf{d}_{\mathcal{T}}$。本文研究一般情形，并证明在 $\mathcal{T}(S)$ 上 $\mathsf{d}_C \neq \mathsf{d}_{\mathcal{T}}$，但以下七个泰希米勒空间除外：$\mathcal{T}_0^1$,0, $\mathcal{T}_0^1$,1, $\mathcal{T}_0^2$,0, $\mathcal{T}_0^1$,2, $\mathcal{T}_0^2$,1, $\mathcal{T}_0^3$,0，以及 $\mathcal{T}_0^3$,1。

1. Introduction

每个复巴拿赫流形 X 都自然带有两种伪度量：*Carath´eodory* 伪度量$\mathbf{d}_C$，以及 *Kobayashi* 伪度量 $\mathbf{d}_K$。一个重要且受到广泛研究的问题是，判断在给定的复流形 X 上，$\mathbf{d}_C \equiv$是否等于$\mathbf{d}_K$。一个特别有趣的情形是，$X = \mathcal{T}(S)$ 为任意黎曼曲面 S 的 Teichm¨uller 空间。本文的主要课题就是探讨这一问题。

注 1. 我们指出，Carath´eodory 度量 $\mathbf{d}_C$ 不应与 Carath´eodory-Reiffen 度量 $\mathbf{d}_{CR}$ 混淆；后者是通过对$\mathbf{d}_C$的无穷小形式积分得到的。在每个 X 上，不等式 $\mathbf{d}_C \leq \mathbf{d}_{CR} \leq \mathbf{d}_K$ 均成立，并且存在使每个不等式都严格成立的例子。

设 S 是一个黎曼曲面（本文中的所有曲面均假定为可定向且连通）。若 S 是一个具有 n 个穿孔的黎曼球面，其中 $n \in \{0, 1, 2, 3\}$，则 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 仅由一个点构成。以下讨论中不考虑这些情形。除此之外，Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是一个复巴拿赫流形（维数有限或无限）。我们用$\mathbf{d}_{\mathcal{T}}$ 表示 $\mathcal{T}(S)$ 上的 Teichm¨uller 度量。

Teichmüller 理论中的一个关键结果表明，Teichmüller 度量与 Kobayashi度量在任意 Teichmüller 空间上相同（见 [20], [6], [10]）。另一方面， [5] 证明了$\mathbf{d}_C$ 是 $\mathcal{T}(S)$上的完备度量。在这些初步结果之后，人们开始关注这样一个问题：对于任意黎曼曲面 S，$\mathbf{d}_{\mathcal{T}} \equiv$ 与$\mathbf{d}_C$ 在 $\mathcal{T}(S)$上是否相同。容易看出，当 $\dim(\mathcal{T}(S)) = 1$ 时，这两个度量在 $\mathcal{T}(S)$上相同（当 S 是四点穿孔球面、环面或一次穿孔环面时，条件成立）。因此，有趣的情形是 $\dim(\mathcal{T}(S)) \geq 2$ （包括 $\dim(\mathcal{T}(S)) = \infty$的情形）。

注记2。关于$\mathbf{d}_{\mathcal{T}}$与$\mathbf{d}_C$ 之间关系的问题，多年来一直受到研究。 [12], [13], [8], [18], [16], [11], [2], [14]中证明了一些重要结果。 [23]对 Teichm¨uller 空间上的 Carath´eodory-Reiffen 度量进行了广泛研究。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 20H10。

亏格为 g、有 n 个穿孔且去掉 b 个圆盘的闭黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间记作 $\mathcal{T}^b_{g,n}$。[16] 中证明了，对于每个 $g \geq 2$，在$\mathcal{T}^0_g$上有$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$ $\mathcal{T}^0_{g,0}$。本文研究一般情形，并证明除至多七个 Teichm¨uller 空间外，这一结论均成立（提醒读者，存在不可数多个彼此不同构的 Teichm¨uller 空间 [17], [7]）。

定理 *1.1.* 设 S 是一个黎曼曲面，满足 *dim(T(S))* ≥ 2。那么在 $\mathcal{T}(S)$上，$d_C \neq d_{\mathcal{T}}$，除非 $\mathcal{T}(S)$属于以下列表之一：$\mathcal{T}^1_0$*,0,* $\mathcal{T}^1_0$*,1,* $\mathcal{T}^2_0$*,0,* $\mathcal{T}^1_0$*,2,*$\mathcal{T}^2_0$*,1,* $\mathcal{T}^3_0$*,0*，以及$\mathcal{T}^3_0$*,1*。

目前尚未解决的问题是，这七个空间上是否也成立。

1.1. $\Sigma_{g,n}$**-容纳曲面**。我们用$\Sigma_{g,n}$ 表示一个亏格为 g 、有 n个孔的拓扑曲面。

定义1.2。若存在一个本质（拓扑）嵌入$\Sigma_{g,n} \hookrightarrow S$，则称黎曼曲面 S 为$\Sigma_{g,n}$-容纳曲面。（回顾一下，若嵌入所诱导的基本群之间的映射是单射，则称该嵌入为本质嵌入。）

本文的第一个关键思想是证明：如果黎曼曲面 S 是$\Sigma_{0,n}$-容纳的，并且在 $\mathcal{T}^0_{0,n}$ 上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$，那么在 $\mathcal{T}(S)$ 上也有$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。这一事实的证明基于以下定理。

定理1.3。 设 S 是$\Sigma_{0,n}$-容纳的黎曼曲面。设 $W \subset \mathcal{T}^0_{0,n}$ 是一个有界开子集，$\delta > 0$ 是任意正数。那么存在一个全纯映射 $H:\ W \to \mathcal{T}(S)$ 使得

$$\mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) \leq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(H(X_1), H(X_2)) + \delta \tag{1}$$

对所有 $X_1, X_2 \in W$ 均成立。

直接推论如下：

定理1.4。 设 S 是$\Sigma_{0,n}$-容纳的黎曼曲面。假设在 $\mathcal{T}^0_{0,n}$ 上有$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。那么在 $\mathcal{T}(S)$ 上有$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。

证明。 根据假设，我们有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}^0_{0,n}$上。因此，存在 $X_1, X_2 \in \mathcal{T}^0_{0,n}$ 使得 $\mathbf{d}_C(X_1, X_2) < \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2)$。令 $\delta > 0$ 满足

$$\mathbf{d}_C(X_1, X_2) < \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) - 2\delta.$$

由引理 2.2，我们可以选取一个有界开子集 $W \subset \mathcal{T}^0_{0,n}$，使其包含 X_1, X_2，满足

$$\mathbf{d}^W_C(X_1, X_2) < \mathbf{d}_C(X_1, X_2) + \delta.$$

这里，$\mathbf{d}^W_C$表示复流形 W上的 Carath´eodory 度量。因此，

$$\mathbf{d}^W_C(X_1, X_2) < \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) - \delta. \tag{2}$$

由定理1.3，存在 $H: W \to \mathcal{T}(S)$，使得

$$\mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) - \delta \leq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(H(X_1), H(X_2)).$$

结合 (2) 可得

$$\mathbf{d}^W_C(X_1, X_2) < \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(H(X_1), H(X_2)).$$

由于 H 是全纯的，由施瓦茨引理可得不等式

$$\mathbf{d}_C(H(X_1), H(X_2)) \leq \mathbf{d}^W_C(X_1, X_2),$$

由此得到不等式

$$\mathbf{d}_C(H(X_1), H(X_2)) < \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(H(X_1), H(X_2)).$$

因此，$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}(X)$上成立，证毕。 □

1.2. 特希米勒模型¨空间。 定理1.3表明，我们需要寻找满足$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$的特希米勒空间$\mathcal{T}^0_{0,\,n}$。我们将这类，$n$视为模型空间；如果 S 是，n-容纳的，这些空间就可以“几乎”全纯地嵌入到 $\mathcal{T}(S)$中。随后利用这一点证明$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}(S)$上成立。文献 [16]中找到了这样一个模型曲面：

定理1.5. $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在$\mathcal{T}^0_{0,\,5}$。

下面的引理表明，“大多数”曲面都是$\Sigma_{0,\,5}$-容纳的。

引理1.6. 设黎曼曲面 S 存在一个裤分解，其中至少有三条裤子。那么 S 是$\Sigma_{0,\,5}$-容纳的。

证明。 由于 S 是连通的，我们总能选取三条裤子，记作 P_1、 P_2、 P_3，使得 P_1 和 P_2 沿着共同的裤口 C_1相连，而 P_2 和P_3 沿着共同的裤口 C_2相连。于是，$P_1 \cup_{C_1} P_2 \cup_{C_2} P_3$ 就是所需的本质嵌入的$\Sigma_{0,\,5}$。 □

下面的引理可直接由引理 1.6、定理1.4和定理1.5得出。

引理 1.7。 设黎曼曲面 S 具有一个包含至少三条裤子的裤分解。那么，在 $\mathcal{T}(S)$上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。

1.3. 全分歧覆盖与三穿孔圆盘。 引理 1.7 表明，在除有限多个 Teichmüller 空间外的所有空间上，$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。然而，我们想证明，除七个 Teichmüller 空间外的所有空间上也都成立。为此，我们采用另一种方法。

定义1.8。 设 $\pi : X \to Y$ 是两个曲面 X 和 Y 之间的分支覆盖。若每个分支点都没有非分歧原像，则称 π 为全分歧覆盖。

在本小节中，令 X 和 Y 表示两个有限拓扑型的黎曼曲面，并令 $\pi\colon X \to Y$ 为一个有限次数的全纯覆盖，其分支于有限个（可能为空的）点集 $Q = \{q_1, \cdots, q_k\} \subset Y$ 上。我们得到诱导的全纯映射

$$\pi^* : \mathcal{T}(Y \setminus Q) \to \mathcal{T}(X).$$

以下定理由 Maclachlan–Harvey [15], 和 Winarski [22] 提出。

定理 1.9。 若 $\pi : X \to Y$ 是分支于 Q 上的全分歧覆盖，则 $\pi^* : \mathcal{T}(Y \setminus Q) \to \mathcal{T}(X)$ 是等距嵌入，其中度量分别为 $\mathcal{T}(Y \setminus Q)$ 和 $\mathcal{T}(X)$ 上对应的 *Teichmüller* 度量。

以下引理是前一个定理的直接推论。若黎曼曲面 X 是从亏格为 g 的闭黎曼曲面中去除 n 个穿孔和 b 个圆盘后得到的，则称其为类型 $(g,\ n,\ b)$。恒等式 $\mathcal{T}(X) \equiv \mathcal{T}^b_{g,\,n}$ 对任意类型为 $(g,\ n,\ b)$ 的黎曼曲面 X 均成立。

引理 1.10. 若 $\pi\colon X \to Y$ 是一个全分歧覆盖，分支于一个有限集 $Q \subset Y$，且若 $_C \neq$ 上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$，则在 $\mathcal{T}(Y \setminus Q)$ 上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$，其中 X 的类型为 (g, n, b)。

定理 1.1 的其余情形将通过结合引理 1.10 与以下定理来证明。

定理 1.11。$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}_{0,3}^1$。

1.4. 概要。 我们的主要结果的证明主要依赖于定理1.3和定理 1.11。定理1.3的证明所依据的论证建立在 Teichm¨uller 理论中的一种新颖构造之上，本文的第一部分致力于证明该构造（第 4 节至第 8 节）。所需的全纯映射 $H : W \to \mathcal{T}(S)$ 是全纯映射 $I : \mathcal{T}_{0,0}^n \to \mathcal{T}(S_0)$ 和$J_\epsilon : W \to \mathcal{T}_{0,0}^n$ 的复合（映射 J_ϵ 对 $\epsilon > 0$有定义）构造而成的。我们令 $H_\epsilon = I \circ J_\epsilon$，然后证明，当 ϵ 足够小时，可以取 $H = H_\epsilon$。

映射 $I : \mathcal{T}_{0,0}^n \to \mathcal{T}(S_0)$ 具有如下性质：对于每个 $Y \in \mathcal{T}_{0,0}^n$，都存在一个与标记$\Sigma_{0,n} \to Y$相容的共形嵌入 $\iota : Y \to S = I(Y)$。为了构造 I，我们首先找到 $Y_0 \in \mathcal{T}_{0,0}^n$，使得存在一个全纯嵌入 $\iota : Y_0 \to S_0$，实现拓扑嵌入 $\iota : \Sigma_{0,n} \to S_0$，该拓扑嵌入来自$\Sigma_{0,n}$-容纳曲面的定义。反过来，这使我们能够构造全纯映射 $\iota_* : \mathcal{BD}_1(Y_0) \to \mathcal{BD}_1(S_0)$，该映射将 Y_0 上的贝尔特拉米微分“嵌入”到 S_0上的贝尔特拉米微分中。映射 I 被定义为映射 ι_*的商，其中我们将 $\mathcal{T}_{0,0}^n$ 与 $\mathcal{BD}_1(Y_0)/\sim$等同，并将 $\mathcal{T}(S_0)$与 $\mathcal{BD}_1(S_0)/\sim$ 等同（这里 $\sim$ 是贝尔特拉米微分之间的 Teichm¨uller 等价关系）。

第二个映射是 $J_\epsilon : W \to \mathcal{T}_{0,0}^n$ 具有以下性质。设对于某个 $X \in W$，有 $J_\epsilon(X) = Y \in \mathcal{T}_{0,0}^n$。那么 Y与 X的一个子曲面双全纯等价，并且 Y 上的外围测地线比 ϵ 短（测地线均取相对于 Y上的完备双曲度量而言）。

第二部分旨在证明定理 1.11。在分析过程中，我们注意到，[16] 中建立的理论可以从解析有限推广到拓扑有限黎曼曲面。这里还需要一些额外的论证（见附录）。随后我们证明，在由某个 L形三穿孔圆盘产生的 Teichm¨uller 圆盘上，$d_C \neq d_{\mathcal{T}}$。具体而言，L形三穿孔圆盘$S(a, b, q)$是两个 L形多边形 $L(a, b, q)$ 的并集，其中除边 P_5P_1 外的所有边都进行了识别（见下方的图1）。$L(a, b, q)$ 上的 (2,0) 形式 dz^2 在 $S(a, b, q)$ 上诱导出二次微分 $\psi(a, b, q)$。我们证明，由二次微分 $\psi(a, b, q)$ 生成的 Teichm¨uller 圆盘 $\tau^{\psi(a,b,q)}$ 上的 $d_C \neq d_{\mathcal{T}}$。

固定基点 $S_0 = S(a_0, b_0, q_0)$。构造一个全纯映射 $\mathcal{E}_0 : \mathbb{H}^2 \to \mathcal{T}(S_0)$，它从多平面 $\mathbb{H}^2$ 映射到 $\mathcal{T}(S_0)$，且其在$\mathbb{H}^2$的对角线上的限制等于 Teichm¨uller 圆盘 $\tau^{\psi(a_0,b_0,q_0)}$。假设 $d_C = d_{\mathcal{T}}$位于 $\tau^{\psi(a_0, b_0, q_0)}$ 上，我们构造一个全纯映射 $\mathbf{\Psi} : \mathcal{T}(S_0) \to \mathbb{H}$，其在 Teichm¨uller 圆盘 $\tau^{\psi(a_0,b_0,q_0)}$ 上的限制为恒等映射。此外，

$$(\mathbf{\Psi} \circ \mathcal{E}_0)(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2, \tag{3}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$，且适用于某些常数 α_1, α_2。

通过证明全纯映射 $\mathbf{\Psi}$ 在 $\mathcal{T}(S_0)$ 中某个属于多平面 $\mathcal{E}_0(\mathbb{H}^2) \subset \mathcal{T}(S_0)$ 边界的点处不光滑，得出矛盾。具体来说，我们考虑由 $\sigma_1(t) = S(a, 0, q_0 - t)$ 给出的光滑路径 $\sigma_1 : [0, q_0) \to \mathcal{T}(S_0)$，并证明 $\mathbf{\Psi} \circ \sigma_1$ 在 0 处不光滑。这里的新意在于，路径 σ_1 不属于多平面 $\mathcal{E}_0(\mathbb{H}^2)$，因此我们无法使用 (3) 证明 $\mathbf{\Psi} \circ \sigma_1$ 在 0 处不光滑。

为解决这一问题，我们构造另一条路径 $\sigma_2 : [0, q_0) \to \mathcal{T}(S_0)$，它确实属于 $\mathcal{E}_0(\mathbb{H}^2)$，并证明

$$(\mathbf{\Psi} \circ \sigma_1)(t) - (\mathbf{\Psi} \circ \sigma_2)(t) = O\left(\frac{t^2}{\log^2 t^{-1}}\right),$$

这足以证明 $\mathbf{\Psi} \circ \sigma_1$ 在 0 处不是光滑的。

注 3：当 $S(a, b, q)$ 是 $\mathcal{T}_{0,5}^0$ 中的五穿孔球面时，路径σ_1 包含于多平面中，因此无需构造第二条路径σ_2。这是两种情形之间唯一实质性的差异。唯一的其他差异涉及 $\mathbf{\Psi}$ 的导数计算。由于在我们的情形中，$\mathcal{T}(S_0)$ 是无限维的，因此需要更加谨慎。这将在附录中完成。

1.5. **结构**。在第 2 节中，我们给出一些基本定义，并证明关于 Carath´eodory 度量和 Kobayashi 伪度量的一些基本结论。在第 3 节中，我们证明定理 1.1。在第 4 节至第 8 节中，我们证明定理1.3。此后，本文的其余部分致力于证明定理 1.11。

2. The Carathéodory and Kobayashi pseudometrics

Carath´eodory 伪度量 $\mathbf{d}_C$ 定义如下：

$$\mathbf{d}_C(p, q) = \sup\{d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q)) : f : X \to \mathbb{H}, f \text{ is holomorphic}\}. \tag{4}$$

这里 $\mathbb{H}$ 表示上半平面，$d_{\mathbb{H}}$ 表示其上的双曲度量。Kobayashi 伪度量 $\mathbf{d}_K$ 定义为 X上满足以下条件的最大伪度量：

$$\mathbf{d}_K(p, q) \le d_{\mathbb{H}}(\mathbf{i}, z) \tag{5}$$

对所有全纯映射 f：$\mathbb{H} \to X$，其中 $f(\mathbf{i} = p$，以及 $f(z) = q$（这里 $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$表示虚数单位）。

注 4. 施瓦茨引理表明，对于所有点对 $p, q \in X$，均有 $\mathbf{d}_C(p, q) \le \mathbf{d}_K(p, q)$。

接下来，我们证明一个简单而一般的引理，指出在$\mathbf{d}_C$的定义中，(4) 中的上确界可以取到。

引理 2.1. 对于任意 p、$q \in X$，存在一个全纯映射 $\Phi : X \to \mathbb{H}$，使得 $\mathbf{d}_C(p, q) = d_{\mathbb{H}}(\Phi(p) \Phi(q))$。

引理 2.1 证明中的主要要点是巴拿赫极限的概念，下面我们回顾一下。令 $l^\infty(\mathbb{N})$ 为所有复数有界序列构成的巴拿赫空间，其范数为上确界范数。回忆一下，作为 Hahn-Banach 定理的一个简单推论，存在一个有界线性泛函 $L: l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$，其算子范数为 1，并且具有以下性质：

(1) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a$ if $a_n \to a$,
(2) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = L((a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$.

这样的 L 称为巴拿赫极限。

证明。根据定义，存在一个序列 $\Phi_n : X \to \mathbb{H}$，使得

- $\Phi_n(p) = \mathbf{i}$,
- $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(q) = \lambda$，对于某个 $\lambda \in \mathbb{H}$ 使得 $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{i}\ \lambda) = \mathbf{d}_C(p, q)$。

令 A 为一个将 $\mathbb{H}$ 映射到 $\mathbb{D}$的 M¨obius 变换，并且满足 $A(\mathbf{i}) = 0$。则 $(A \circ \Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是从 X 到 $l^\infty(\mathbb{N})$ 中单位球的全纯映射。因此$\Psi := L \circ (A \circ \Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是从 X 到 $\mathbb{D}$的全纯映射。它满足 $\Psi(p) = 0$， $\Psi(q) = A(\lambda)$。于是 $\Phi := A^{-1} \circ \Psi$ 将满足所要求的性质。□

若 W 是 X 的开子集，则 W 是一个复流形，并且带有其自身的 Carathéodory 伪度量。在这种情况下，我们用 d_C^W 表示 W 上的 Carathéodory 伪度量，以便将其与 X 上的 Carathéodory 伪度量$\mathbf{d}_C$区分开来。注意，当 $p, q \in W$ 时，$\mathbf{d}_C(p, q) \leq \mathbf{d}_C^W(p, q)$。根据前一个引理证明中的完全相同的论证，我们得到：

引理 2.2. 设 $W_n \subset X$、 $n \in \mathbb{N}$ 是一个递增的开集序列，其并集等于 X。那么对任意 p、 $q \in X$，有

$$\mathbf{d}_C(p, q) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}_C^{W_n}(p, q).$$

2.1. **全纯投影**。 我们从全纯等距圆盘的定义开始。

定义 2.3. 映射 $f\colon \mathbb{H} \to X$ 是一个全纯等距圆盘，如果它分别关于 $\mathbb{H}$ 上的双曲度量和 X 上的 *Kobayashi*度量是全纯等距映射。

注记 5. Teichm¨uller 空间中有丰富的全纯等距圆盘（例如 Teichm¨uller 圆盘）。事实上，给定的 Teichm¨uller 空间中的任意两点，都位于某个全纯等距圆盘的像上。

定义 2.4. 设 $\Phi\colon X \to \mathbb{H}$ 表示一个全纯映射。若映射 $f\colon \mathbb{H} \to X$ 满足 Φ 是 $\Phi \circ f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个共形自同构，则称其为极值圆盘。

引理 2.5. 设 $p_1, p_2 \in X$ 位于全纯等距圆盘 $f\colon \mathbb{H} \to X$的像中。若 $\Phi\colon X \to \mathbb{H}$ 是一个全纯映射，且 $d_{\mathcal{T}}(p_1, p_2) = d_{\mathbb{H}}(\Phi(p_1), \Phi(p_2))$，则 $f : \mathbb{H} \to X$ 是 Φ的极值圆盘。

证明。 设 $p_i = f(z_i)$， $i = 1, 2$， 其中 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$， 且 $z_1 \neq z_2$。 由于 f是一个全纯等距圆盘，我们得出 $\Phi \circ f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是全纯的，并且

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}\big(\Phi(f(z_1)), \Phi(f(z_2))\big).$$

由施瓦茨引理可知， $\Phi \circ f$ 是$\mathbb{H}$的共形自同构。□

3. Proof of Theorem 1.1

为证明该定理，我们需要证明，对于满足以下两个条件的每个黎曼曲面 S ，在 $\mathcal{T}(S)$上有$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$：

(1) $\dim(\mathcal{T}(S)) \geq 2$,

(2) S 与以下七种黎曼曲面均不共形等价：圆盘、环带、三孔球面、一次穿孔圆盘、两次穿孔圆盘、一次穿孔环带、一次穿孔三孔球面。

定理 1.1 的证明由接下来的两个引理构成。

引理 3.1. 如果 S 是满足上述条件 *(1)* 和 *(2)* 的黎曼曲面，那么 S 要么具有至少包含两条裤子的裤分解，要么 S 与去掉一个圆盘后的环面双全纯。

证明。 其 Teichm¨uller 空间非平凡且不允许裤分解的黎曼曲面，只可能是圆盘、环带、一次穿孔圆盘或闭环面。由于闭环面的 Teichm¨uller 空间维数为一，我们得出：如果 S 满足条件 (1) 和 (2)，那么它允许进行裤分解。

如果 S 由单个裤子构成，那么 S 要么是三孔球面、两次穿孔圆盘、一次穿孔环带、一次穿孔环面，要么是去掉一个圆盘的环面。由于一次穿孔环面的 Teichm¨uller 空间维数为一，我们得出：如果 S 满足条件 (1) 和 (2)，那么它要么允许进行至少由两个裤子组成的裤分解，要么与去掉一个圆盘的环面双全纯。□

引理 3.2。 若 S 是满足上述条件 *(1)* 和 *(2)* 的黎曼曲面，且 S 有一个恰好由两对裤子组成的裤子分解，则下列情形之一成立：

- S 属于 $(0, n, b)$ 型，其中 $n + b = 4$，且 $b \geq 1$,
- S 属于 $(1, n, b)$ 型，其中 $n + b = 2$,
- S 是亏格为二的闭曲面。

证明。 我们根据 S 的亏格进行讨论。 S 的亏格最大为二。由于 S 恰由两对裤子组成，因此它必定是亏格为二的闭曲面。若 S 的亏格为一，则它是从一个闭环面中去掉 n 个穿孔和 b 个圆盘得到的，其中 $n + b = 2$。

最后，若 S 的亏格为零，则它是从黎曼球面中去掉 n 个穿孔和 b 个圆盘得到的，其中 $n + b = 4$。若 $b = 0$，则 S 是一个四点穿孔球面，并且不满足上述条件 (1)，因为此时 $\dim(S) = 1$ 。证明至此完成。□

若 S 有至少包含三条裤子的裤分解，则根据引理 1.7， $\mathcal{T}(S)$ 上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。如 [16]所示，当 S 是亏格为 2 的闭黎曼曲面或双点穿孔环面时，结论也成立。同样，当 S 是三穿孔圆盘时，我们可由定理 1.11 得出相同结论。

结合引理 3.1 和引理 3.2，定理 1.1 可归结为以下命题，该命题将在下一小节中证明。

引理 3.3. 假设三元组 (g, n, b) 满足以下条件之一：

- $g = 0,\ n + b = 4,\ and\ b \geq 2,$
- $g = 1,\ n + b = 2,\ and\ b \geq 1,$
- $g = 1,\ n = 0,\ and\ b = 1.$

那么在 $\mathcal{T}^b_{g,n}$ 上有 $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$。

3.1. 引理 3.3 的证明。

我们先给出以下断言。

断言 3.4。 设 Y 是一类为 (l, k, a) 的黎曼曲面，且 $Q \subset Y$ 是一个有限（可能为空）集合。假设穿孔集合分为两个子集 K_1

和 K_2，并且孔集合分为子集 A_1 和 A_2。令 $|K_i| = k_i|A_i| = a_i$ 和 $|Q| = q$。若 $q + a_1 + k_1$ 是正偶数，则存在一类为 (g, n, b) 的黎曼曲面 S，以及一个在 Q 上分歧的全分歧双重覆盖 $\pi\colon S \to Y$，使得

$$g = 2k - 1 + \frac{1}{2}\big(q + k_1 + a_1\big), \quad n = k_1 + 2k_2, \quad b = a_1 + 2a_2.$$

证明。设 $Y_1 = Y \setminus Q$。存在一个双重（无分支）覆盖 $\pi_1 : S_1 \to Y_1$，使得 Q 中的每个点在 S_1中都只有一个原像，并且 K_1中的每个穿孔以及 A_1中的每个洞分别提升为一个穿孔和一个洞。于是， K_2中的每个穿孔以及 A_2中的每个洞分别有两个原像。

设 $\pi\colon Y \to S$ 为诱导的全分歧双重覆盖。该覆盖在 Q上分歧。根据黎曼-赫尔维茨公式计算 S 的亏格 g。此外，$n = a_1 + 2a_2$，且 $n = k_1 + 2k_2$。□

为完成引理 3.3 的证明，我们利用前面的断言，在$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$于$\mathcal{T}(Y \setminus Q)$上的情形下，找到一个在 $Q \subset Y$处分歧的全分歧双重覆盖 $\pi\colon S \to Y$。接着，由引理 1.10 可得$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$于 $\mathcal{T}(S)$上。接下来的三个断言涵盖引理 3.3 中的所有情形。

断言 3.5. $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在$\mathcal{T}^2_{0,\,2}$，$\mathcal{T}^1_{1,\,0}$，以及 $\mathcal{T}^1_{1,\,1}$。

证明。我们使用断言 3.4 中的记号。设 $l = 0, k_1 = 0, k_2 = 1, a_1 =$0, $a_2 = 1$ 和 $q = 2$。那么 S是一个类型为 (0, 2, 2) 的黎曼曲面。当$l = 0, k_1 = 0, k_2 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, q = 3$ 时，则 (g, n, b) =(1, 0, 1)。如果 $l = 0, k_1 =$1, $k_2 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, q = 2$，那么 (g, n, b) =(1, 1, 1)。在这三种情况下， $Y \setminus Q$ 的类型均为 (0, 3, 1)。该断言由引理 1.10 和定理 1.11 得证。□

断言 3.6. $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在$\mathcal{T}^4_{0,\,0}$。

证明。令 $l = 0$，$k_1 = 0$，$k_2 = 0$，$a_1 = 0$，$a_2 = 2$，$q = 2$。则 S属于类型为（g，n，b）=(0，0，4) 的对象，而 $Y \setminus Q$ 属于类型为（0，2，2）的对象。由引理 1.10 以及以下事实可得断言：$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}^2_{0,\,2}$ 上成立，这一点已在断言 3.5 中证明。□

断言 3.7. $\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在$\mathcal{T}^2_{1,\,0}$。

证明。令 $l = 1$，$k_1 = 0$，$k_2 = 0$，$a_1 = 0$，$a_2 = 1$，以及 $q = 0$。则 S是一个类型为（1，0，2）的黎曼曲面，而 $Y \setminus Q$ 属于类型为（1，0，1）的对象。由引理 1.10 以及以下事实可得断言：$\mathbf{d}_C \neq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}^1_{1,\,0}$ 上成立，这一点已在断言 3.5 中证明。□

4. Hyperbolic geometry of quasiconformal maps

本节回顾一些标准事实，并推导出一些基本结论，探讨拟共形映射与双曲几何之间的关系。给定一个双曲曲面 d_S，记其上的完备双曲度量为 d_S。以下是莫里的定理（见 [1]）的一个著名推论。

引理 4.1. 设 $K \geq 1$。则存在常数 $D = D(K) > 0$，使得若 $f, g : S_1 \to S_2$ 是两个双曲黎曼曲面 S_1和 S_2之间的两个同伦的 K-拟共形同胚，则对每个 $z \in S_1$，都有 $d_{S_2}(f(z)\ g(z)) \leq D$。

我们还有：

引理 4.2。 设 $K \geq 1$。那么存在一个常数 $L = L(K) \geq 1$，使得每个 K-拟共形同胚 $f\colon S_1 \to S_2$ 都同伦于一个 L-拟共形同胚 $g : S_1 \to S_2$，且该同胚相对于度量 d_{S_1} 和 d_{S_2}是 L-双利普希茨的。

证明。 令 g 为 Douady-Earle 映射 [3]，它与 f同伦。众所周知，[3] 存在一个常数 $L \geq 1$，仅依赖于 K，使得 g 既是L-拟共形的，也是 L-双利普希茨的。□

4.1. 单射半径与拟共形同胚。 对于 $z \in S$，我们用 $\mathrm{inj}_S(z)$ 表示相对于度量 d_S的 z 的单射半径。回顾一下，$\mathrm{inj}_S(z)$ 等于包含 z的最短非平凡同伦闭曲线长度的一半。

我们从双曲几何中的以下初等断言开始。证明留给读者。

断言 4.3。 设 $D > 0$。那么存在一个常数 $C = C(D) \geq 1$，使得对于每个双曲或抛物等距变换 $A\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，不等式

$$d_{\mathbb{H}}(w, A(w)) \leq C d_{\mathbb{H}}(z, A(z)) \tag{6}$$

当 $d_{\mathbb{H}}(z, w) \leq D$ 时，对每个 $z, w \in \mathbb{H}$ 都成立。

引理 4.4. 设 $D > 0$。则存在一个常数 $C = C(D) \geq 1$，使得

$$\mathrm{inj}_S(w) \leq C \,\mathrm{inj}_S(z)$$

当 $d_S(z, w) \leq D$ 时，对每个 $z, w \in S$ 都成立。

证明。 设 Γ 是将曲面 S 一致化的福克斯群。令 $\widehat{z}, \widehat{w} \in \mathbb{H}$ 表示 z 和 w 在双曲平面 $\mathbb{H}$ 上的提升，使得 $d_S(z, w) = d_{\mathbb{H}}(\widehat{z}, \widehat{w})$。令 $A \in \Gamma$ 满足 $d_{\mathbb{H}}(\widehat{z}, A(\widehat{z})) = 2\,\mathrm{inj}_S(z)$。由于 $d_{\mathbb{H}}(\widehat{z}, \widehat{w}) \leq D$，由断言 4.3 可得

$$d_{\mathbb{H}}(\widehat{w}, A(\widehat{w})) \leq C d_{\mathbb{H}}(\widehat{z}, A(\widehat{z})) = 2C \,\mathrm{inj}_S(z),$$

其中 $C = C(D)$ 是前一个引理中的常数。由于 $2\,\mathrm{inj}_S(w) \leq d_{\mathbb{H}}(\widehat{w}, A(\widehat{w}))$，引理得证。□

给定两个双曲曲面之间的一个 K-拟共形同胚 $f\colon S_1 \to S_2$，我们关注当 $z \in S_1$时，$\mathrm{inj}_{S_1}(z)$ 与 $\mathrm{inj}_{S_2}(f(z))$ 之间的关系。

引理 4.5. 设 $K \geq 1$。那么存在一个常数 $C = C(K) \geq 1$，使得对每个 K-拟共形同胚 $f\colon S_1 \to S_2$，不等式

$$\mathrm{inj}_{S_2}(f(z)) \leq C \,\mathrm{inj}_{S_1}(z), \tag{7}$$

对每个 $z \in S_1$ 均成立。

证明。 设 $L = L(K)$ 为引理 4.2 中的常数，$D = D(\max\{K, L\})$ 为引理 4.1 中的常数，$C_1 = C_1(D)$ 为引理 4.4 中的常数。设 $g\colon S_1 \to S_2$ 是一个拟共形且 L-双利普希茨的映射，与 f 同伦。

由于 g 是 L-双利普希茨的，因此

$$\mathrm{inj}_{S_2}(g(z)) \leq L \,\mathrm{inj}_{S_1}(z). \tag{8}$$

由于 f 和 g 都是 $(\max\{K, L\})$-拟共形的，我们有

$$d_{S_2}(f(z), g(z)) \leq D.$$

因此，由引理 4.4 可得不等式

$$\mathrm{inj}_{S_2}(f(z)) \le C_1 \,\mathrm{inj}_{S_2}(g(z)).$$

现在将估计式 (8) 应用于前一个不等式的右侧，得到

$$\mathrm{inj}_{S_2}(f(z)) \le LC_1 \,\mathrm{inj}_{S_1}(z).$$

令 $C = LC_1$，即可证明该引理。 □

4.2. **Think-Thin 分解**。 我们用 $\mathrm{Thin}_r(S)$ 表示 r-薄部 S，即

$$\mathrm{Thin}_r(S) = \{z \in S : \mathrm{inj}_S(z) < r\}.$$

下述引理是引理 4.5 的直接推论。

引理 4.6。 设 $K \ge 1$。则存在常数 $C = C(K) \ge 1$，使得对于每个 K-拟共形同胚 $f : S_1 \to S_2$，包含关系

$$f\big(\mathrm{Thin}_r(S_1)\big) \subset \mathrm{Thin}_{Cr}(S_2). \tag{9}$$

我们记录如下断言，它由单射半径的定义直接推出。

断言 4.7。 设 $\gamma \subset S$ 是一条非平凡同伦闭曲线。当 $l_S(\gamma) < 2r$时，$\gamma \subset$薄$_r(S)$。包含 γ 的薄$_r(S)$连通分支记为薄$_r(S)[\gamma]$。

本节最后回顾 Margulis 常数的定义。也就是说，存在一个常数 r_M，使得当 $0 < r < r_M$ 时，$\mathrm{Thin}_r(S)$ 的每个连通分支要么是围绕长度至多为 $2r_M$ 的嵌入测地线的管状邻域，要么是尖点的乘积邻域。我们再记录一个初等断言。

断言 4.8。 设 $\gamma \subset S$ 是一条非平凡同伦闭曲线。若 $l_S(\gamma) < 2r < 2r_M$，则 $\mathrm{Thin}_r(S)[\gamma]$ 是一个环带。若 β 是该环带的一条核心曲线，则 γ 与 β 的某个幂同伦。

4.3. **本质共形嵌入**。 设 $Y \in \mathcal{T}^n_{0,0}$，并固定一个双曲曲面 S。在本小节中，我们考察一个本质共形嵌入 $\iota : Y \to S$，并联系其单射半径 $\mathrm{inj}_Y(z)$ 与 $\mathrm{inj}_S(\iota(z))$。

回顾一下，d_Y 表示 Y 上的（完备）双曲度量，而 d_S 表示 S 上的双曲度量。设 $\alpha_i \subset Y$，$1 \le i \le n$ 为与 Y 的端同伦的闭测地线（相对于 d_Y）。我们将 $\{\alpha_i\}_{1\le i\le n}$ 称为 Y 上的外围测地线。

记为 $\beta_i = \iota(\alpha_i)$。嵌入 ι 是全纯的，因此根据施瓦茨引理，我们有

$$d_S(\iota(z), \iota(w)) \le d_Y(z, w), \tag{10}$$

对于任意两个点 $z, w \in Y$。特别地，我们得到不等式

$$l_S\big(\beta_i\big) \le l_Y(\alpha_i). \tag{11}$$

定义并集

$$\mathrm{Thin}_r(S)[\beta] \stackrel{def}{=} \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Thin}_r(S)[\beta_i].$$

若 $r < r_M$，则两个环带 $\mathrm{Thin}_r(S)[\beta_i]$ 和 $\mathrm{Thin}_r(S)[\beta_j]$ 要么互不相交，要么彼此相等。因此，在这种情况下，集合 $S \setminus \mathrm{Thin}_r(S)[\beta_i]$ 是 S 的一组两两不相交的本质子曲面，其中恰有一个与 $\iota(Y)$ 同伦等价。

引理 4.9. 对于每个 $D > 0$，都存在 $C = C(D) \geq 1$，满足以下性质。设 $\gamma \subset Y$ 是一条非平凡同伦闭曲线，且不与 Y的一条外围测地线的任何幂次同伦。若 $l_Y(\gamma) \leq 2D$，且 $\iota(\gamma)$与$\mathrm{Thin}_r(S)[\beta]$相交，则

$$r \geq \frac{r_M}{C}. \tag{12}$$

证明。令 $C = C(D) \geq 1$ 为引理 4.4 中的常数。由 (10)，并且由于$l_Y(\gamma) \leq 2D$，可知 $\iota(\gamma)$上任意两点之间的距离至多为D。因此，若 $\iota(\gamma) \cap \mathrm{Thin}_r(\beta) \neq \emptyset$，则

$$\iota(\gamma) \subset \mathrm{Thin}_{Cr}(\beta).$$

若 $Cr < r_M$，则 $\iota(\gamma)$ 属于与曲线 β_i, $1 \leq i \leq n$ 同伦的一族互不相交的环带之一。但根据断言 4.8，$\iota(\gamma)$ 与 β_i, $1 \leq i \leq n$之一的某个幂同伦。由于 ι 是本质嵌入，因此 γ 与 Y上的某条外围测地线的某个幂同伦，这是不可能的。这表明 $Cr \geq r_M$，证毕。□

5. Teichmüller spaces and Beltrami differentials

本节回顾 [1] 中的一些标准定义和结果。

5.1. Teichmüller 空间。 固定一个黎曼曲面 Z。回顾 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(Z)$ 的定义。考虑由黎曼曲面 Z_1 和拟共形同胚 $f_1 : Z \to Z_1$ 构成的配对 (Z_1, f_1)。如果拟共形同胚 $f_2 \circ f_1^{-1}$:$Z_1 \to Z_2$ 与一个共形映射同伦（相对于边界），则称配对 (Z_1, f_1) 和 (Z_2, f_2) 等价。

注 6. 此处的同伦要求由万能覆盖的一个等变同伦$h_t : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 所覆盖，使得 h_t 连续延拓到 $\mathbb{H}$ 的边界，并且在 $\partial\mathbb{H}$上等于一个共形自同构（当 Z 为有限解析型时，此要求自动满足）。

等价类的空间 $[(Z_1, f_1)]$ 称为 Teichmüller 空间。该同胚的同伦类 f_1 称为标记。为简化记号，我们常写作 $Z_1 \in \mathcal{T}(Z)$。不过，我们总是假设这样的 Z_1由一个拟共形同胚的同伦类 $f_1 : Z \to Z_1$标记。

5.2. 贝尔特拉米微分。 Z 上的贝尔特拉米微分是一个$(-1, 1)$复形式。具有有限上确界范数的贝尔特拉米微分所构成的巴拿赫空间记作 $\mathcal{BD}(Z)$。$\mathcal{BD}(Z)$中的单位球记作 $\mathcal{BD}_1(Z)$。给定 $\mu \in \mathcal{BD}_1(Z)$，我们用 $f_\mu : Z \to Z_\mu$ 表示贝尔特拉米膨胀等于 μ的拟共形同胚，也就是说，

$$\mu = \frac{\overline{\partial} f_\mu}{\partial f_\mu}.$$

两个贝尔特拉米微分 μ，$\nu \in \mathcal{BD}_1(Z)$ 等价 $\mu \sim \nu$，当且仅当映射 $f_\nu \circ f_\mu^{-1}$: $Z_\mu \to Z_\nu$ 与某个共形映射同伦。换句话说，存在一个拟共形同胚 $g : Z \to Z$，它相对于边界与恒等映射同伦，且映射 $f_\mu \circ g$ 的贝尔特拉米膨胀等于 ν。

此外，我们有如下双全纯识别

$$\{[\mu] : \mu \in \mathcal{BD}_1(Z)\} \equiv \mathcal{T}(Z), \tag{13}$$

其中 $[\mu]$ 表示 μ的等价类。换言之， $\mathcal{T}(Z)$具有与 $\mathcal{BD}(Z)$上的结构相容的复巴拿赫流形结构。

5.3. ()的切空间。用 $\mathcal{QD}(Z)$表示关于 L^1 范数的 Z 上的全纯二次微分巴拿赫空间。每个 $\mu \in \mathcal{BD}(Z)$都会诱导线性泛函 λ_μ： $\mathcal{QD}(Z) \to \mathbb{C}$ ，其定义如下：

$$\lambda_\mu(\varphi) = \int_Z \mu\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{QD}(Z).$$

定义巴拿赫子空间 $\mathcal{BD}_0(Z) \subset \mathcal{BD}(Z)$如下：

$$\mathcal{BD}_0(Z) = \{\mu \in \mathcal{BD}(Z) : \lambda_\mu(\varphi) = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{QD}(Z)\}.$$

注意，商巴拿赫空间 $\mathcal{BD}(Z)/\mathcal{BD}_0(Z)$与巴拿赫空间 $\mathcal{QD}(Z)$的对偶等距。对于 $\mu \in \mathcal{BD}(Z)$，我们用 $[\mu]^*$ 表示它在商空间 $\mathcal{BD}(Z)/\mathcal{BD}_0(Z)$中的像。

令 $T_Z\mathcal{T}(Z)$表示 Z处的切空间。我们赋予 $T_Z\mathcal{T}(Z)$由 Teichm¨uller 度量诱导的芬斯勒范数。由此， $T_Z\mathcal{T}(Z)$成为一个巴拿赫空间。

类似于 (13)，我们有巴拿赫空间 $T_Z\mathcal{T}(Z)$ 等距于商巴拿赫空间 $\mathcal{BD}(Z)/\mathcal{BD}_0(Z)$。因此， $T_Z\mathcal{T}(Z)$ 等距于 $\mathcal{QD}(Z)$ 的对偶。

6. The map $I : \mathcal{T}^n_{0,0} \to \mathcal{T}(S_0)$

本节中，我们始终假设 S_0 是$\Sigma_{0,\,n}$-相容的黎曼曲面，并固定一个本质（拓扑）嵌入 $\iota_0 :\Sigma_{0,\,n} \hookrightarrow S_0$。本节的目标是证明以下定理。

定理 6.1。存在一个全纯映射 $I : \mathcal{T}^n_{0,\,0} \to \mathcal{T}(S_0)$，使得对每个 $Y \in \mathcal{T}^n_{0,\,0}$，都存在一个共形嵌入 $\iota : Y \to S$，它与 ι_0 同伦（相对于标记 $\Sigma_{0,\,n} \to Y$ 和 $S_0 \to S$）。这里 $S = I(Y)$。

6.1. 映射 $I : \mathcal{T}^n_{0,\,0} \to \mathcal{T}(S_0)$。通过对嵌入 $\iota_0 : \Sigma_{0,\,n} \hookrightarrow S_0$ 作同伦变形，我们可以假设像 $\iota_0(\Sigma_{0,\,n}) \subset S_0$ 是一个嵌入子曲面，其边界由 n 条互不相交的光滑曲线组成。这个嵌入赋予 $\Sigma_{0,\,n}$ 黎曼曲面结构，我们将其记为 Y_0，并且有共形嵌入 $\iota_0 : Y_0 \hookrightarrow S_0$。显然， Y_0 是一个类型为 $(0,\ 0,\ n)$ 的黎曼曲面，其边界由 n 条光滑曲线组成。

包含 $\iota_0 : Y_0 \to S_0$ 诱导出“包含”映射 $\iota^* : \mathcal{BD}_1(Y_0) \to \mathcal{BD}_1(S_0)$，如下所示。设 $\mu \in \mathcal{BD}_1(Y_0)$。于是令 $\iota^*(\mu)$ 在 $Y_0 \subset S_0$ 上等于 μ，在 $S_0 \setminus Y_0$ 上等于零。映射 ι^* 显然是全纯的。

引理 6.2。设 $\mu, \nu \in \mathcal{BD}_1(Y_0)$，并假设 $\mu \sim \nu$ 在 Y_0 上成立。则 $\iota^*(\mu) \sim \iota^*(\nu)$ 在 S_0 上成立。

证明。令 $\mu_1 = \iota^*(\mu)$，以及 $\nu_1 = \iota^*(\nu)$。由于 $\mu \sim \nu$，存在一个拟共形同胚 $g : Y_0 \to Y_0$，它在 Y_0 上与恒等映射同伦，并在 ∂Y_0 上等于恒等映射，使得 $f_\mu \circ g$ 的贝尔特拉米膨胀等于 ν。

令 $g_1 : S_0 \to S_0$ 为映射，它在 Y_0上等于 g，在 $S_0 \setminus Y_0$上等于恒等映射。根据构造， g_1 是 S_0 的自同胚，且

它与恒等映射同伦。因此， g_1 限制在 Y_0上时是拟共形的，限制在 $S_0 \setminus Y_0$上时也是拟共形的。由于 ∂Y_0 是光滑曲线，我们得出 g_1是拟共形的。此外，映射 $f_{\mu_1} \circ g_1$ 的贝尔特拉米膨胀等于 ν_1。因此， $\mu_1 \sim \nu_1$。□

6.2. **定理 6.1 的证明**。引理 6.2 蕴含全纯映射 ι^* :$\mathcal{BD}_1(Y_0) \to \mathcal{BD}_1(S_0)$ 保持等价关系 $\sim$。由此得到所需的全纯映射 $I\colon\ \mathcal{T}(Y_0) \to \mathcal{T}(S_0)$（注意 $\mathcal{T}(Y_0) \equiv \mathcal{T}_{0,\,0}^{n}$）。还需证明，对于每个$Y \in \mathcal{T}_{0,\,0}^{n}$，我们都能构造一个与 ι_0同伦的共形嵌入 $\iota\colon\ Y \to S$，其中 S 表示点 $I(Y) \in \mathcal{T}(S_0)$ 所对应的带标记黎曼曲面。

设 $\mu \in \mathcal{BD}_1(Y_0)$ 满足 $[\mu] = Y$，并令 $f_\mu\colon\ Y_0 \to Y$ 为由此得到的拟共形同胚。设 $\mu_1 = \iota^*(\mu)$，并令 $f_{\mu_1}\colon\ S_0 \to S$ 为由此得到的拟共形同胚。定义 $\iota = f_{\mu_1} \circ f_\mu^{-1}$。那么 $\iota\colon Y \to S$就是所需的共形嵌入。

7. The map $J_\epsilon : W \to \mathcal{T}_{0,0}^{n}$

本节的目标是构造映射 $J_\epsilon\ :\ W \to \mathcal{T}_{0,\,0}^{n}$，并证明定理 7.2。与第 4.3 节一样，对于给定的$Y \in \mathcal{T}_{0,\,0}^{n}$，我们令 d_Y 表示 Y 上的（完备）双曲度量。我们用 $\alpha_i \subset Y$、 $1 \le i \le n$ 表示相对于 d_Y、与 Y 的端点同伦的闭测地线，并将其称为 Y 上的外围测地线。

令$W \subset \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$ 表示一个有界域。本节证明，一个 n 穿孔球面 $X \in W$ 包含一个嵌入其中且与之同伦等价的 n 孔球面$Y \subset X$，并且该球面随 X 全纯地变化。此外，我们可以安排使 Y 的外围测地线任意短。

定义 7.1。设 $\epsilon > 0$，且 $X \in \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$。如果 $Y \subset X$ 满足以下条件，我们称其为一个 ϵ 子曲面：

(1) Y与 X同伦等价，且具有 n) 型的共形类型(0，0，(2) $0 < l_Y$ $(\alpha_i) \le \epsilon$，对每个 $1 \le i \le n$均成立。

定理 7.2。设$W \subset \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$ 为有界域，并设 $\epsilon > 0$。存在全纯映射 $J_\epsilon\ :\ W \to \mathcal{T}_{0,\,0}^{n}$ 使得 $J_\epsilon(X) = Y$是 ϵ 的子曲面，且包含于 X 中。

由于每个有界域$W \subset \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$ 都包含于某个球中（相对于 Teichm¨uller 度量），因此只需在假设 W 为球的情况下证明定理 7.2。在本节余下部分，我们假设 W 是一个以 $X_0 \in \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$为中心的球。我们还固定 $\epsilon > 0$。

7.1. **穿孔的全纯变动邻域**。存在全纯映射 $p_i\ :\ \mathcal{T}_{0,\,n}^{0} \to \widehat{\mathbb{C}}$，使得

$$X \equiv \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1(X), \cdots p_n(X)\}, \tag{14}$$

并且当对每个 $X \in \mathcal{T}_{0,\,n}^{0}$ 时， $p_i(X) \ne p_j(X)$。

引理 7.3. 存在全纯映射 $A_i : \mathcal{T}_{0,n}^{0} \to$ 自同构群$(\widehat{\mathbb{C}})$，$1 \le i \le n$, 使得莫比乌斯变换 $A_i(X)$ 将点 $p_i(X_0)$ 映射到点 $p_i(X)$。

证明。令 $A(X) \in$ 自同构群$(\mathbb{C})$ 为将点$p_1(X_0)$ $p_2(X_0)$ $p_3(X_0)$ 分别映射到点 $p_1(X)$ $p_2(X)$ $p_3(X)$ 的莫比乌斯变换，并设$A_1(X) = A_2(X) = A_3(X) = A(X)$。此外，对于每个 $i \geq 4$，都存在唯一的莫比乌斯变换 $A_i(X) \in$ 自同构群$(\mathbb{C})$，它将点$p_1(X_0)$ $p_2(X_0)$ $p_i(X_0)$ 分别映射到点 $p_1(X)$ $p_2(X)$ $p_i(X)$。由于点 $p_i(X)$ 关于 X 全纯地依赖，因此变换 $A_i(X)$ 也如此。□

记 $D_i(X_0, \delta) \subset \mathbb{C}$ 为以 $p_i(X_0)$为中心、半径为 δ 的球（相对于 $\mathbb{C}$上的球面度量）。定义

$$D_i(X, \delta) = A_i(X)\left(D_i(X_0, \delta)\right).$$

我们将 $D_i(X, \delta)$ 视为穿孔$p_i(X)$的一个全纯变化邻域。

断言 *7.4. </style>*存在足够小的 $\delta > 0$，使得

- 对于每个 $X \in W$，集合 $D_i(X, \delta)$、$1 \leq i \leq n$ 两两不相交，
- 由下式给出的曲面 $Y_X(\delta) \subset X$

$$Y_X(\delta) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i(X, \delta)$$

是 X 的一个 ϵ-子曲面。

证明。 证明直接由以下事实得出： W 紧包含于 $\mathcal{T}$（X_0），且 ϵ 固定。□

选择满足前一断言结论的 δ。令 D_i（X） $= D_i$（X， δ），以及 $Y_X = Y_X$（δ）。则 Y_X 是 $X \in W$ 的一个 ϵ-子曲面。

7.2. **定理 7.2 的证明**。 我们定义映射 $J_\epsilon : W \to \mathcal{T}_{0^n,\ 0}$ 如下。

定义 7.5。 设 $X \in \mathcal{T}_{0^n,\ 0}$。我们称 $f \in F_X$，如果

(1) f： $X_0 \to X$ 是一个拟共形同胚，使得 $X = [(X, f)] \in W$，(2) f 在圆盘 $D_i(X_0)$ 上的限制与 *Möbius* 变换 $A_i(X)$ 一致，对每个 $1 \leq i \leq n$ 均如此。

令 $f : Y_{X_0} \to Y_X$ 表示 $f \in F_X$的相应限制。于是，

$[(Y_X, f)]$是$\mathcal{T}_{0^n,\ 0}$中的一个良定义点。尽管对于某些 $f_1, f_2 \in F_X$，$[(Y_X, f_1)]$和 $[(Y_X, f_2)]$在$\mathcal{T}_{0^n,\ 0}$中可能不是同一个点，但它们至多相差一个绕外围测地线 $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$的 Dehn 多重扭转。因此，集合 $\{[(Y_X, f)] : f \in F_X\}$是$\mathcal{T}_{0^n,\ 0}$的离散子集。

现在，由于 W是单连通的，且 $\{[(Y_X, f)] : f \in F_X\} \subset \mathcal{T}_{0^n,\ 0}$是离散的，存在唯一的连续截面 $J_\epsilon : W \to \mathcal{T}_{0^n,\ 0}$ 使得

$$J_\epsilon(X) \in \{[(Y_X, \widehat{f})] : f \in F_X\},$$

and

$$J_\epsilon(X_0) = [(Y_{X_0}, \widehat{\mathrm{Id}})].$$

我们已经注意到， Y_X 是 X的一个 ϵ子曲面。它是全纯的，因为 $A_i(X)$全纯地依赖于 X （这是一个利用 Slodkowski 定理 [21]关于延拓全纯运动的标准论证）。

8. Proof of Theorem 1.3

设$W_1 \subset \mathcal{T}_{0,\ n}^0$ 是一个包含闭球W的开球，并设 $J_\epsilon\colon\ W_1 \overrightarrow{\mathcal{T}}_{0,\ 0}^n$ 是定理 7.2 中相应的映射。特别地，映射 J_ϵ 在 W的某个邻域上定义良好。令 $H_\epsilon = I \circ J_\epsilon$。那么 $H_\epsilon\colon\ W_1 \to \mathcal{T}(S)$是一个全纯映射。

在证明的剩余部分，我们将证明对于给定的 $\delta > 0$ ，存在 $\epsilon > 0$，使得

$$\mathbf{d}_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) \leq \mathbf{d}_{\mathcal{T}}(H_\epsilon(X_1), H_\epsilon(X_2)) + \delta \tag{15}$$

对于所有点对 $(X_1,\ X_2) \in \overline{W} \times \overline{W}$。由于 $\overline{W} \times \overline{W}$是紧的，只需证明对于固定的点对 $(X_1,\ X_2) \in W \times W$，当 ϵ足够小时，不等式 (15) 成立。

证明采用反证法。也就是说，我们假设存在点$X_1,\ X_2 \in W$，以及一个序列 $\epsilon_k \to 0$，当 $k \to \infty$时，使得

$$d_{\mathcal{T}}(S_k^1, S_k^2) + \delta < d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2), \qquad \text{for every } k, \tag{16}$$

其中 $S_k^j = H_{\epsilon_k}(X_j),\ \ j = 1,\ 2$。下面我们将从 (16) 推导出矛盾。

我们将证明以下引理。

引理 8.1。

$$d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) \leq \limsup_{k \to \infty} d_{\mathcal{T}}(S_k^1, S_k^2). \tag{17}$$

在此之前，我们先假设引理 8.1 成立，完成定理1.3的证明。对（16）左端取上极限，得到

$$\limsup_{k \to \infty} d_{\mathcal{T}}(S_k^1, S_k^2) + \delta \leq d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2).$$

将（17）代入前一个不等式，得到

$$d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) + \delta \leq d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2).$$

这一矛盾完成了证明。本节余下部分将用于证明引理 8.1。

8.1. 子曲面 $Z_k(r) \subset S_k$。 固定 $X \in W$，并令$H_{\epsilon_k}(X) = S_k$。用 $Y_k \subset X$表示满足 $J_{\epsilon_k}(X) = Y_k$的 ϵ_k-子曲面，并用 $\iota_k\colon\ Y_k \to S_k$ 表示定理 6.1 中的共形嵌入。与上文一样，用 $\alpha_i^k \subset Y_k$, $1 \leq i \leq n$表示 Y_k 的外围测地线，并设 $\beta_i^k = \iota_k(\alpha_i^k)$。

假设 $\epsilon_k < 2r$。那么 $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$，我们有

$$l_{S_k}(\beta_i^k) \leq l_{Y_k}(\alpha_i^k) \leq \epsilon_k,$$

因此可得

$$\beta_i^k \subset \mathrm{Thin}_r(S_k), \qquad \text{when } \epsilon_k < 2r. \tag{18}$$

此外，若 $r < r_M$，则 $\mathrm{Thin}_r(S_k)[\beta^k]$ 由互不相交的环带组成。这便说明了以下定义。

定义 8.2。 假设 $r < r_M$，记 $Z_k(r)$ 为 $S_k \setminus \mathrm{Thin}_r(S_k)[\beta^k]$ 中与 $\iota_k(Y_k)$ 同伦等价的连通分支。

引理 8.3。 包含关系 $Z_k(r) \subset \iota_k(Y_k)$ 在假设 $\epsilon_k < 2r < 2r_M$ 的条件下成立。

$\widehat{}$证明。令 $Y_k \subset Y_k$ 为边界由测地线α_i^k、 $1 \le i \le n$组成的子曲面。因此，$\widehat{Y}_k$ 是一个带测地边界的曲面，并与 Y_k 同伦$\widehat{}$等价。只需证明 $Z_k(r) \subset \iota_k(Y_k)$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$反证法。假设 $Z_k(r)$ 不包含于 $\iota_k(Y_k)$ 中。由于 $\iota_k(Y_k)$ 和 $Z_k(r)$ 是同伦等价的本质子曲面，因此 $\iota_k(Y_k)$ 的边-$\widehat{}$ $\widehat{}$界与 $Z_k r$ 相交。然而， $\iota_k(Y_k)$ 的边界由曲线 $\{\beta_i^k\}_{1\le i\le n}$ 组成，所以我们得出某些 β_i^k 与 $Z_k(r)$ 相交。由 (18) 可知，$\beta_i^k \subset \mathrm{Thin}_r(S_k)$，这与 β_i^k 和 $Z_k(r)$ 相交矛盾。

□

以下断言可直接由假设 $\epsilon_k \to 0$ when$k \to \infty$ 得出。

断言 8.4. 设 $E \subset X$ 是一个紧集。存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $E \subset Y_k$ 对每个 $k > k_0$ 都成立。此外，我们有

$$\lim_{k\to\infty} d_{Y_k}(z,w) = d_X(z,w), \tag{19}$$

对每个 z、$w \in X$。

引理 8.5. 设 $E \subset X_j$ 是一个紧子集。存在 $r_0 < r_M$和 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $r < r_0$ ，包含 $\iota_k(E) \subset Z_k(r)$ 对 $k > k_0$ 成立（常数 r_0 和 k_0 取决于 E）。

证明。由于 E 是紧的，只需证明对于固定的 $z \in E$ ，当 k 足够大时，关系$\iota_k(z) \subset Z_k(r)$ 成立。

设 $\gamma \subset X$ 是一条非平凡同伦闭曲线，它不同伦于一条围绕 X上某个穿孔的曲线的幂，并且满足 $z \in \gamma$。由断言 8.4 可得 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $k > k_0$都有 $\gamma \subset Y_k$。令 $D = 1 + l_{X_j}(\gamma_j)$。于是由 (19) 可知，当 k 足够大时， $l_{Y_k}(\gamma) < D$。

令 $C = C(D)$ 为引理 4.9 中的常数，并设 $r_0 = \frac{r_M}{C}$。若对于某个 $r < r_0$， $\iota_k(z) \notin Z_k(r)$，则 $\iota_k(z) \in \mathrm{Thin}_r(S)[\beta^k]$。因此，曲线 $\iota_k(\gamma)$ 与 $\mathrm{Thin}_r(S)[\beta^k]$ 相交，由引理 4.9 可得 $r \ge \frac{r_M}{C} = r_0$。这证明对于每个 $r < r_0$ 和每个 $k > k_0$，$\iota_k(z) \in Z_k(r)$。□

8.2. **引理 8.1 的证明**。设

$$K_k = \exp\big(d_{\mathcal{T}}(S_k^1, S_k^2)\big), \tag{20}$$

并设

$$K = \limsup_{k\to\infty} K_k. \tag{21}$$

那么存在一个 K_k-拟共形同胚 $f_k : S_k^1 \to S_k^2$。将满足 $J_{\epsilon_k}(X_j) = Y_k^j$ 的子曲面 $Y_k^j \subset X_j$ 记为 $Y_k^j \subset X_j$，并将相应的共形嵌入 $\iota_k^j : Y_k^j \to S_k^j$ 记为 ι_k^j，其中 $j = 1,2$。曲面 Y_k^1 和 Y_k^2 未必分别是映射 $(\iota_k^2)^{-1} \circ f_k \circ \iota_k^1$ 的定义域和值域。不过，我们可以稍微修整这些子曲面，使该映射定义良好。

假设 $\epsilon_k < 2r < 2r_M$。由 $Z_k^j(r) \subset S_k^j$ 表示定义 8.2 中对应的子曲面。定义

$$G_k^1(r) = (\iota_k^1)^{-1}(Z_k^1(r)).$$

断言 8.6. 对于每个 $0 < r < r_M$，都存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得映射 $g_k = (\iota_k^2)^{-1} \circ f_k \circ \iota_k^1$ 在 $G_k^1(r)$ 上对 $k > k_0$ 有定义。

证明。设 k_0 满足：当 $k > k_0$ 时，映射 f_k 是 $(K+1)$-拟共形的。设 $C = C(K+1)$ 为引理 4.6 中的常数。将 (9) 应用于逆映射 f_k^{-1}，我们得出

$$f_k\big(Z_k^1(r)\big) \subset Z_k^2(C^{-1}r), \tag{22}$$

当 $k > k_0$ 时。另一方面，由引理 8.3 可得

$$Z_k^2(C^{-1}r) \subset \iota_k^2(Y_k^2),$$

当 $\epsilon_k < 2C^{-1}r < 2r_M$ 时。因此，对于每个 $z \in G_k^1(r)$，点 $(f_k \circ \iota_k^1)(z)$ 都属于像 $\iota_k^2(Y_k^2)$，证毕。□

假设 $E \subset X_1$ 是一个紧包含域。令 r_0 为引理 8.5 中的常数。于是，根据同一引理可知，对于每个 $0 < r < r_0$，当 k 足够大时，包含关系 $E \subset G_k^1(r)$ 成立。由此可得，对每个足够大的 k，映射 $g_k\colon E \to g_k(E)$ 是一个定义良好的 K_k-拟共形同胚。

由于这对每个 $E \subset X_1$ 都成立，因此 g_k 收敛到一个尊重标记的 K-拟共形同胚 $g\colon X_1 \to X_2$。因此，

$$d_{\mathcal{T}}(X_1, X_2) \le \log K = \log\big(\limsup_{k\to\infty} K_k\big).$$

将此结果与 (20) 结合，即可证明引理 8.1。

9. Teichmüller discs

在 [16]中，我们建立了一个通用框架，用于分析由詹金斯-施特雷贝尔全纯二次微分生成的有限解析型黎曼曲面上的 Teichm´uller 圆盘何时满足 $d_C = d_{\mathcal{T}}$。接下来的三节旨在说明，同一框架也适用于有限拓扑型黎曼曲面。

令 S 表示一个拓扑有限黎曼曲面（每个这样的曲面都可通过从闭曲面中去除有限个点和圆盘得到）。用 $\mathrm{QMod}(S)$ 表示 S 的拟共形自同胚在同伦意义下（相对于无穷远边界）的群。于是，$\mathrm{QMod}(S)$ 自然地作为双全纯自同构群作用于 $\mathcal{T}(S)$。

9.1. Teichm¨uller 圆盘。 全纯二次微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 诱导一个从上半平面 $\mathbb{H}$ 到 $\mathcal{BD}_1(S)$ 的全纯映射，其定义为 $\lambda \to \left(\frac{\mathbf{i}-\lambda}{+\lambda}\right)\frac{|\varphi|}{\varphi}\mathbf{i}$。进而，这通过令下式成立定义了全纯嵌入 $\tau^\varphi\colon \mathbb{H} \to \mathcal{T}(S)$

$$\tau^\varphi(\lambda) = \left[\left(\frac{\mathbf{i}-\lambda}{\mathbf{i}+\lambda}\right)\frac{|\varphi|}{\varphi}\right] \in \mathcal{T}(S). \tag{23}$$

注意，$\tau^\varphi(\mathbf{i}) = S$。我们将映射 τ^φ 称为 Teichm¨uller 圆盘。

令 $S(\lambda) = \tau^\varphi(\lambda)$。所诱导的拟共形映射 $S \to S(\lambda)$，其膨胀率 $\left(\frac{\mathbf{i}-\lambda}{+\lambda}\right)\frac{|\varphi|}{\varphi}\mathbf{i}$ 在对应于 $\overline{\varphi}$ 的局部坐标中是仿射的，而相应的终端二次微分 $\varphi(\lambda) \in \mathcal{QD}\big(S(\lambda)\big)$。若 z 是 S 上的局部参数，且满足 $\varphi = dz^2$，那么拟共形映射的形式为 $z \to x + \lambda y$，其中 $z = x + y\mathbf{i}$。

9.2. **稳定子与詹金斯-施特雷贝尔微分**。我们如下定义稳定 Teichmüller 圆盘 τ^φ 的自同构群 Aut(ℍ) 中的子群 Stab(τ^φ) $<$。设 $A \in Aut(\mathbb{H})$。当 $\tau^\varphi \circ A$与 τ^φ所对应的黎曼曲面相同时， $A \in$Stab(τ^φ)。诱导的单态 τ^φ_*: Stab(τ) $\to$QMod(S) 可辨别 $\tau^\varphi \circ A$与 τ^φ的标记之间的差异。

定义 9.1。 若微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 使 φ 将 S 分解为有限个环带 Π_j, $j = 1,...,k$, 且这些环带由 φ的闭水平轨线所叶状化，则称其为 *Jenkins-Strebel* 微分。

注 7。 设 $\gamma \subset S$ 是一条外围测地线。如果 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 是 Jenkins-Strebel 微分，那么其中一个环带 Π_j 与 γ同伦。

设 $\gamma_1, ...\gamma_k$ 是一组位于 S 上的两两不交的简单闭曲线，并与Π_j的曲线同伦。用 m_j 表示 Π_j的共形模。如果 m_j的比值都是有理数，则称 φ 为有理 Jenkins-Strebel 微分。用 $T_{\gamma_j} \in$QMod(S)表示关于 γ_j的德恩扭转。以下引理众所周知（参见 [18]中的引理 9.7 或 [16]中的命题 2.1）。

引理 9.2。 设 φ 是一个有理 *Jenkins-Strebel* 微分，并设

$$t = \mathrm{lcm}\{m_1^{-1}, ..., m_k^{-1}\}, \tag{24}$$

其中 lcm 表示最小公倍数。令 $A_t(\lambda) = \lambda + t$, $\lambda \in \mathbb{H}$。那么$A_t \in \mathrm{Stab}(\tau^\varphi)$，且 $\tau^\varphi_*(A_t) = T \in \mathrm{QMod}(S)$是以下（彼此可交换的）德恩扭转的乘积： $T = T_{\gamma_1}^{n_1} \cdots T_{\gamma_k}^{n_k}$，其中 $n_j = m_j t$。

10. Carathéodory metric on Teichmüller discs

仍用 S 表示一个拓扑有限黎曼曲面。设 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$，并考虑 Teichmüller 圆盘 τ^φ。根据 Royden 定理， τ^φ是从 $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ 到 $(\mathcal{T}(S)\ d_{\mathcal{T}})$ 的等距嵌入。因此，由引理 2.1 可得，$d_C = d_{\mathcal{T}}$在 $\mathcal{T}(S)$ 上成立，当且仅当存在一个全纯映射 $\mathbf{\Phi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$，使得 $\big(\mathbf{\Phi} \circ \tau^\varphi\big) \in$ Aut(ℍ)。

引理 10.1。 固定一个 *Jenkins-Strebel* 微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$，并设 $\mathbf{\Phi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$是任意一个全纯映射，满足对每个 $\lambda \in \mathbb{H}$，都有 $\big(\mathbf{\Phi} \circ \tau^\varphi\big)(\lambda) = \lambda$。 $\mathbf{\Phi}$ 在 $S(\lambda) = \tau^\varphi(\lambda)$ 处的导数为

$$d\mathbf{\Phi}(\nu) = \frac{-2\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\lambda)}{||\varphi(\lambda)||_1} \int\limits_{S(\lambda)} \nu\varphi(\lambda), \tag{25}$$

其中， $\nu \in \mathcal{BD}\big(S(\lambda)\big)$ 表示点 $S(\lambda)$处的 $\mathcal{T}(S)$ 的切向量，而$||\varphi(\lambda)||_1$ 表示 $\varphi(\lambda) \in \mathcal{QD}\big(S(\lambda)\big)$的 L^1-范数。

注 8。 当 S 是解析有限的时，我们无需假设 φ 是 Jenkins-Strebel 微分（参见 [16]中的命题 3.1）。

证明。 固定 $\lambda \in \mathbb{H}$，并令 $A: \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ 为由 $A(z) = \frac{z-\lambda}{z-\lambda}$ 给出的 M¨obius 映射。注意 $A(\lambda) = 0$。设 $\mathbf{\Psi} = A \circ \mathbf{\Phi}$。于是 $\mathbf{\Psi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{D}$ 是全纯的。此外，由于 $\mathbf{\Psi}\big(\mathcal{T}(S)\big) \subset \mathbb{D}$，且 $\mathbf{\Psi}\big(S(\lambda)\big) = 0$，根据施瓦茨引理和 Royden 定理可得

$$|d\mathbf{\Psi}([\nu])| \leq ||\nu||_\infty \tag{26}$$

对于每个 $\nu \in \mathcal{BD}\big(S(\lambda)\big)$ 都成立。因此， $d\mathbf{\Psi}: T_S\mathcal{T}(S) \to \mathbb{C}$ 是范数不超过一的线性泛函。

另一方面，设 $f: \mathbb{D} \to \mathcal{T}_{g,\ n}$ 由 $f = \tau^{\varphi} \circ A^{-1}$ 给出。那么 f 是由下式给出的特穆勒圆盘

$$f(\eta) = \left[\eta \frac{|\varphi(\lambda)|}{\varphi(\lambda)}\right] \in \mathcal{T}(S),$$

并且对每个 $\eta \in \mathbb{D}$， $\big(\mathbf{\Psi} \circ f\big)(\eta) = \eta$。因此 $d\mathbf{\Psi}\big(\frac{df}{d\eta}\big) = 1$。由于 $\frac{df}{d\eta} = \frac{|\varphi(\lambda)|}{\varphi(\lambda)}$，我们得到

$$d\mathbf{\Psi}\left(\left[\frac{|\varphi(\lambda)|}{\varphi(\lambda)}\right]\right) = 1. \tag{27}$$

将（26）和（27）代入命题 15.2，得到

$$d\mathbf{\Psi}(\nu) = \frac{1}{||\varphi(\lambda)||_1} \int\limits_{S(\lambda)} \nu\varphi(\lambda), \tag{28}$$

对每个 $\nu \in \mathcal{BD}\big(S(\lambda)\big)$ 均成立（注意，命题 15.2 是本证明中唯一用到 φ 是詹金斯-施特雷贝尔这一性质的地方）。由 $\mathbf{\Psi} = A \circ \mathbf{\Phi}$ 得到

$$d\mathbf{\Phi}(\nu) = \frac{1}{A'(\lambda)}\, d\mathbf{\Psi}(\nu).$$

将 $A'(\lambda) = \frac{1}{-2\,\mathrm{iIm}(\lambda)}$ 代入前一个恒等式，即得证明。 □

10.1. 等变全纯函数。 假设 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 是有理 Jenkins-Strebel 微分。在引理 9.2 中，我们构造了德恩扭转 $T \in$QMod(S)，它属于同态 τ_*^{φ}: Stab(τ) $\to$ QMod(S) 的像。在下一个引理的证明中，我们对由 T 生成的循环群上的全纯函数 $\mathbf{\Psi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$（以适当的意义）取平均，从而得到等变全纯函数 $\mathbf{\Phi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$。

引理 10.2。 假设 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 是有理 *Jenkins-Strebel* 微分。若 $d_C = d_{\mathcal{T}}$ 在 *Teichm¨uller* 圆盘 $\tau^{\varphi}(\mathbb{H}) \subset \mathcal{T}(S)$，则存在全纯函数 $\mathbf{\Phi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$，具有以下性质

(1) $\big(\mathbf{\Phi} \circ \tau^{\varphi}\big)(\lambda) = \lambda$，对每个 $\lambda \in \mathbb{H}$ 都成立；(2) $\big(\mathbf{\Phi} \circ T\big)(S') = \mathbf{\Phi}(S') + t$，对每个 $S' \in \mathcal{T}(S)$ 都成立，其中 $T = \tau_*^{\varphi}(A_t)$ 是引理 *9.2* 中的德恩扭转。

备注 9. 当 S 为有限解析型时，这一点已在 [16]中的引理 3.1 证明。

证明。 回顾引理 9.2，给出的自同构 $A_t \in$ Stab(τ^{φ}) 为 $A_t(\lambda) = \lambda + t$, $\lambda \in \mathbb{H}$ （数值 t 由 (24) 给出）。Dehn 多重扭转 $T \in$ QMod(S) 为 $\tau_*^{\varphi}(A_t) = T$，且我们有 $T \circ \tau^{\varphi} = \tau^{\varphi} \circ A_t$。

由于 $d_C = d_{\mathcal{T}}$在 $\tau^{\varphi}(\mathbb{H}) \subset \mathcal{T}(S)$ 上，根据引理 2.1，我们得出存在全纯映射 $\Psi: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$，使得 $\big(\Psi \circ \tau^{\varphi}\big) = \mathrm{Id}$ 在 $\mathbb{H}$ 上。定义Ψ_n: $\mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$为 $\Psi_n = \Psi \circ T^n - nt$。由于 $T \circ \tau^{\varphi} = \tau^{\varphi} \circ A_t$，可知对每个 n，等式

$$\Psi_n \circ \tau^{\varphi} = \mathrm{Id}, \tag{29}$$

在 $\mathbb{H}$ 上成立。此外， Ψ_n 满足递推公式

$$\Psi_n \circ T = \Psi_{n+1} + t. \tag{30}$$

由施瓦茨引理和（29）可得，对于每个 $S' \in \mathcal{T}(S)$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$， $d_{\mathbb{H}}(\Psi_n(S'), i) \leq d_{\mathcal{T}}(S', S)$。这意味着存在常数 $C, q > 0$，它们依赖于 S'，但与 n 无关，使得

$$-C < \operatorname{Re}\left(\Psi_n(S')\right) < C, \qquad \operatorname{Im}(\Psi_n(S')) > q. \tag{31}$$

设 $L : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ 是一个巴拿赫极限。回想一下， L 满足以下性质:

(1) $L(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = a$, if $a_n \to a$,
(2) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = L(\{a_{n+1}\})_{n\in\mathbb{N}})$.

Set

$$\mathbf{\Phi}(S') = L\left(\{\Psi_n(S')\}_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

由 (31) 可知， $\mathbf{\Phi}$ 的值域是 $\mathbb{H}$。此外，映射 $\mathbf{\Phi} : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{C}$是两个全纯映射的复合，因此是全纯的。现在，由 (29) 以及 L的性质 (1)，可知 $\mathbf{\Phi} \circ \tau^\varphi =$是 $\mathbb{H}$上的恒等映射 Id。此外，结合 (30) 和 L 的性质 (2)，可得 $\mathbf{\Phi} \circ T = \mathbf{\Phi} + t$。证明至此完成。□

11. 将多平面 Hk 映射到 T (S)

11.1. Teichm¨uller 多平面。 取一个有理詹金斯-施特雷贝尔二次微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$，并令 $h_1, ..., h_k > 0$ 表示相应环带 Π_j的高度（相对于$|\varphi|$ 奇异度量）。令 $\mathbb{H}^k = \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H}$表示上半平面 $\mathbb{H}$的 k 重积，并令 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ 表示 $\mathbb{H}^k$上的坐标。定义 $\mathcal{F} : \mathbb{H}^k \to \mathcal{BD}_1(S)$，令

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left(\frac{\mathbf{i} - \lambda_j}{\mathbf{i} + \lambda_j}\right) \frac{|\varphi|}{\varphi},$$

在每个 Π_j 上。由此得到映射 $\mathcal{E} : \mathbb{H}^k \to \mathcal{T}(S)$，其定义为令 $\mathcal{E}(\lambda) = [\mathcal{F}(\lambda)]$。我们称 $\mathcal{E}$ 为与 φ 对应的多平面映射。映射 $\mathcal{F}$ 显然是全纯的，因此 $\mathcal{E}$ 也是全纯的。注意， $\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{H}^k$ 的对角线上的限制就是 Teichm¨üller 圆盘 τ^φ。

新的带标记黎曼曲面 $\mathcal{E}(\lambda) = S(\lambda)$ 配备了二次微分 $\varphi(\lambda)$，它是 $\mathcal{QD}\big(S(\lambda)\big)$ 中唯一的 Jenkins-Strebel 微分，可将 $S(\lambda)$ 分解为环带 $\Pi_j(\lambda)$（由与 γ_j 同伦的闭水平轨线扫过），使得 $\Pi_j(\lambda)$ 的高度 $h_j(\lambda)$ 由 $h_j(\lambda) = \operatorname{Im}(\lambda_j)h_j$ 给出。

令 m_j 表示环带 Π_j 的共形模。注意， $\mathcal{E}$ 将平移 $\lambda \to \big(\lambda + (0, .., m_j^{-1}, ..., 0)\big)$ 共轭为扭转 $T_{\gamma_j} \in \mathrm{QMod}(S)$，即

$$\mathcal{E}\big(\lambda + (0, .., m_j^{-1}, ..., 0)\big) = \left(T_{\gamma_j} \circ \mathcal{E}\right)(\lambda),$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{H}^k$ 都成立。因此得到等式

$$\mathcal{E}\big(\lambda + (t, ..., t)\big) = \left(T \circ \mathcal{E}\right)(\lambda), \tag{32}$$

其中 t 由 (24) 给出，而 $T \in$QMod(S) 是上述引理 9.2 中对应的德恩扭转。

11.2. **的判据** $d_C = d_{\mathcal{T}}$。 设 $\mathbf{\Phi}: \mathcal{T}(S) \to \mathbb{H}$ 是一个满足引理 10.2 中条件 (1) 和 (2) 的全纯函数。令 $f = \mathbf{\Phi} \circ \mathcal{E}$。那么$f: \mathbb{H}^k \to \mathbb{H}$。此外， f 在 $\mathbb{H}^k$ 对角线上的取值为

$$f(\eta, \eta, ..., \eta) = \eta, \tag{33}$$

对每个 $\eta \in \mathbb{H}$。

令 γ_j 表示 S 上与相应环带Π_j 同伦的简单闭曲线（这些环带由 φ的闭水平轨线扫掠而成）。结合（33）和（25），并在 [16], 中应用命题 5.1，可得对于 $\lambda = (\eta, ..., \eta)$，下式成立

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(\lambda) = \alpha_j,$$

其中

$$\alpha_j = \frac{1}{||\varphi(\lambda)||_1} \int\limits_{\Pi_j(\lambda)} |\varphi(\lambda)| = \frac{1}{||\varphi||_1} \int\limits_{\Pi_j} |\varphi|.$$

下面是 [16]中的定理 5.1。

定理 11.1。 设 φ 是一个有理 *Jenkins-Strebel* 微分，它使 S 恰好分解为两个（非退化）环带，这些环带由 φ的闭水平轨线扫掠而成。那么，任何满足引理 *10.2* 中条件 （1）和（2）的全纯函数 $\mathbf{\Phi}$： $\mathcal{T}$（S） $\to \mathbb{H}$ ，其在集合 $\mathcal{E}$（$\mathbb{H}^2$）上的限制由下式给出

$$\big(\mathbf{\Phi} \circ \mathcal{E}\big)(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2,$$

对每个 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{H}^2$。

12. L-shaped 3-punctured disc

在 [16] 的第 7 节中，我们通过将一个 L 形欧几里得多边形加倍，构造了一个 L 形五穿孔球面。本节重复相同的构造，不过这里我们沿多边形的五条边粘合两个副本（要构造一个 L 形五穿孔球面，则需要沿全部六条边粘合两个副本）。

12.1. L**形多边形**。我们作如下约定：

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad \text{and } 0 < q < 1.$$

令 $L = L(a, b, q)$ 表示图1中的 L 形多边形。用 P_k、 $k = 1$，.....，5 表示内角为 $\pi/2$ 的顶点，用 Q 表示内角为 $3\pi/2$ 的剩余顶点。

令 $S = S(a, b, q)$ 为两个 $L(a, b, q)$ 副本的并，除底边外，所有边均对应粘合。严格来说， S 被定义为一个半平移曲面。作为黎曼曲面， S 是一个三穿孔圆盘。点 P_1, P_2, P_3 是三个穿孔。圆盘边界是由连接点 P_5 和 P_1 的两个区间副本之并参数化的曲线（这是 $L(a, b, q)$ 的底边）。因此，点 P_5 和 P_1 位于圆盘边界上。我们称 S 为 L 形三穿孔圆盘。

（2，0）形式 dz^2 定义在多边形 L上。加倍后，这两个形式的副本 dz^2 沿 L 形三穿孔圆盘 S 的边缘粘合，形成

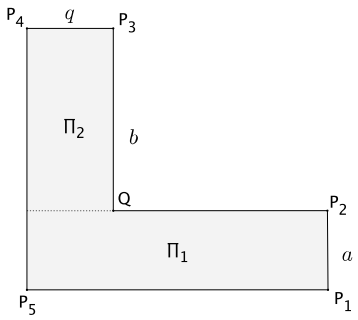

FIGURE 1. L形多边形 $L(a,\ b,\ q)$

定义在 S上的全纯二次微分 $\psi = \psi(a,\ b,\ q)$。该微分ψ 在点 P_k 处有一阶极点，并在 $Q \in S$处有一阶零点。此外，若 $b > 0$，则 ψ 是一个 Jenkins-Strebel 微分，且 S 分解为两个非退化环带 Π_1 和 Π_2，它们由ψ的闭水平轨线扫掠而成。（若 $b = 0$，则 ψ 在点 $P_1,\ P_2,\ P_4,\ P_5$ 处有一阶极点，且没有零点）。

12.2. **L形三穿孔圆盘**。固定有理数 $a_0,\ b_0,\ q_0 \in \mathbb{Q}$，其中 $a_0,\ b_0 > 0$ 和 $q_0 \in (0,\ 1)$。令 $S_0 = S(a_0,\ b_0,\ q_0)$ 和 $\psi_0 = \psi(a_0,\ b_0,\ q_0)$。注意，$\psi_0$ 是有理 Jenkins-Strebel 微分。

每个黎曼曲面 $S(a,\ b,\ q)$ 都带有标准标记 $S_0 \to S$，该标记在边界上限制为恒等映射；边界由两份区间P_5P_1 组成，其端点相互识别。相应的标准标记曲面族 $S(a,\ b,\ q)$ 在 $\mathcal{T}(S_0)$ 中随 $a,\ b,\ q$ 连续变化而连续变化，并且是 $\mathcal{T}(S_0)$ 中的一个实三维轨迹。

注记10。为简化记号，我们也用 $S(a,\ b,\ q)$ 表示具有标准标记的相应三穿孔圆盘。

注记11。如 [16] 中所示，若将两份 $L(a,\ b,\ q)$ 沿全部六条边粘合，则$\big(S(a,\ b,\ q)\ \psi(a,\ b,\ q)\big)$ 是 $\mathcal{T}(S_0)$ 上余切丛的一个实三维轨迹，而标准标记黎曼曲面族 $S(a,\ b,\ q)$ 是 $\mathcal{T}(S_0)$ 中的一个实二维轨迹。

12.3. **Carath´eodory 度量定义在** τ^{ψ_0}。以下引理表明，若 $d_C = d_{\mathcal{T}}$ 在 $\tau^{\psi(a_0,b_0,q_0)}$ 上，则存在一个全纯函数 $\mathbf{\Psi}\colon \mathcal{T}(S_0) \to \mathbb{H}$，它关于 a 是线性的，并且当限制在轨迹 $S(a,\ b,\ q_0)$ 上时关于 b。

引理 12.1. 固定 $q_0 \in (0、1)$，并假设 $d_C = d_{\mathcal{T}}$在 $\tau^{\psi(a_0,b_0,q_0)}$上成立。则存在一个全纯函数 $\mathbf{\Psi}\colon \mathcal{T}(S_0) \to \mathbb{H}$，使得

$$\mathbf{\Psi}\big(S(a,b,q_0)\big) = (a + bq_0)\,\mathbf{i},$$

对每个 $a > 0$ 和 $b \geq 0$都成立。

证明。令 $\mathcal{E}_0\colon \mathbb{H}^2 \to \mathcal{T}(S_0)$ 为与 ψ_0 对应的多平面映射。设

$$\alpha_1 = \frac{1}{||\psi_0||_1} \int\limits_{\Pi_1} |\psi_0| = \frac{b_0 q_0}{a_0 + b_0 q_0},$$

and

$$\alpha_2 = \frac{1}{||\psi_0||_1} \int\limits_{\Pi_2} |\psi_0| = \frac{a_0}{a_0 + b_0 q_0}.$$

由于 a_0，b_0，$q_0 \in \mathbb{Q}$ 因此 ψ_0 是一个詹金斯-施特雷贝尔微分。所以，如果 $d_C = d_{\mathcal{T}}$ 在 τ^{ψ_0} 上，那么根据定理 11.1，存在一个全纯函数 $\mathbf{\Phi}\colon \mathcal{T}(S_0) \to \mathbb{H}$，使得

$$\mathbf{\Phi}\big(\mathcal{E}_0(\lambda_1, \lambda_2)\big) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2,$$

其中 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{H}^2$。我们发现，对于任意 a 和 b，等式

$$\mathcal{E}_0\left(\frac{b}{b_0}\mathbf{i}, \frac{a}{a_0}\mathbf{i}\right) = S(a, b, q_0),$$

成立。最后两个公式给出以下等式

$$\mathbf{\Phi}\big(S(a, b, q_0)\big) = \left(\frac{a + bq_0}{a_0 + b_0 q_0}\right)\mathbf{i}. \tag{34}$$

Set

$$\mathbf{\Psi} = (a_0 + q_0 b_0)\mathbf{\Phi}.$$

于是 $\mathbf{\Psi}\colon \mathcal{T}(S_0)$ 是全纯的，并且由 (34) 可知 $\mathbf{\Psi}$ 满足所述等式。推导该公式时，我们假设了 $b > 0$。由于当 $b \to 0$ 时，$S(a, b, q) \to S(a, 0, q)$ 在 $\mathcal{T}(S_0)$ 中，因此该公式对 $b = 0$ 也成立。□

12.4. 在 $S(a, b, q_0)$ 上的导数。现在我们可以计算映射 $\mathbf{\Psi}$ 在轨迹 $S(a, b, q_0)$ 上每一点的导数。

引理 12.2。对于所有 $a > 0$、$b \geq 0$，我们有

$$d\mathbf{\Psi}(\nu) = -\mathbf{i} \int\limits_{S(a,b,q_0)} \nu\psi(a, b, q_0) \tag{35}$$

在点 $S(a, b, q_0)$ 处，对所有 $\nu \in \mathcal{BD}(S(a, b, q_0))$。

证明。注意，当我们将 $\mathcal{E}_0$ 限制在切片 $\left(\frac{b}{b_0}\lambda, \frac{a}{a_0}\lambda\right) \subset \mathbb{H}^2$ 上时，得到 Teichmüller 圆盘 $\tau^{\psi(a,b,q_0)}$。也就是说，我们有等式

$$\tau^{\psi(a,b,q_0)}(\lambda) = \mathcal{E}_0\left(\frac{b}{b_0}\lambda, \frac{a}{a_0}\lambda\right),$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{H}$ 都成立。结合引理 12.1，我们得到

$$(\mathbf{\Psi} \circ \tau^{\psi(a,b,q_0)})(\lambda) = (\mathbf{\Psi} \circ \mathcal{E}_0)\left(\frac{b}{b_0}\lambda, \frac{a}{a_0}\lambda\right) = (a + bq_0)\lambda.$$

应用引理 10.1 得到等式

$$d\mathbf{\Psi}(\nu) = \frac{-2\mathbf{i}(a + bq_0)}{||\psi(a, b, q_0)||_1} \int\limits_{S(a,b,q_0)} \nu\psi(a, b, q_0).$$

由于 $||\psi(a, b, q_0)||_1 = 2(a + bq_0)$，前一个等式证明了该引理。 □



FIGURE 2. $L(a_0,\ 0,\ q_0 - t)$

13. TWO PATHS IN $\mathcal{T}(S_0)$

我们的最终目标是证明，$\mathbf{\Psi}$ 在$\mathcal{E}_0(\mathbb{H}^2) \subset \mathcal{T}(S_0)$的闭包中的某一点处并不光滑，这与 $\mathbf{\Psi}$ 是全纯函数这一事实相矛盾。正如引言中所指出的，我们将考察 $\mathcal{T}(S_0)$中的两条路径 $\sigma_1(t)$ $\sigma_2(t)$。路径 $\sigma_1(t)$是光滑的，而 $\sigma_2(t)$位于多平面 $\mathcal{E}_0(\mathbb{H}^2)$中。我们将依据 [16]的第 9 节中的结果。

13.1. **第一条路径**。我们有：

定义 13.1. 我们通过令 $\sigma_1 :\ [0, q_0) \to \mathcal{T}(S_0)\ \sigma_1(t) = S(a_0, 0, q_0 - t)$来定义。

回忆一下，标准标记 $S_0 \to S(a_0,\ 0,\ q_0 - t)$ 在圆盘边界上的限制是恒等映射。这里，我们将两个曲面的边界参数化为两个区间 P_5P_1 的副本之并，并将端点粘合起来。

引理 13.2. 路径 $\sigma_1(t)$ 是无穷次可微的。

证明。 带标记曲面 $S(a_0, 0, q_0-t)$ 是通过平滑移动其中一个穿孔，同时保持另外两个穿孔和圆盘边界固定，从带标记曲面 $S(a_0, 0, q_0)$ 得到的。这意味着 σ_1 是光滑的。□

13.2. **施瓦茨-克里斯托费尔映射**。 设 ζ, λ 和 $r \geq 0$ 满足 $-1 < \zeta - r \leq \zeta < \lambda < 1$。令

$$F(z) = J^{-1} \int_1^z \frac{\sqrt{w - \zeta + r}}{\sqrt{w+1}\sqrt{w-\zeta}\sqrt{w-\lambda}\sqrt{w-1}}\, dw.$$

则 $F(\lambda,\zeta,\zeta-r) = F$ 将 $\mathbb{H}$ 保角映射到多边形 $L(a,b,q)$，其中$a = \frac{A}{J}$, $b = \frac{B}{J}$, $q = \frac{-Q}{J}$，并且 $-$

$$A = A(\lambda,\zeta,r) = -\mathbf{i}\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{x-\zeta+r}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-\zeta}\sqrt{x-\lambda}\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$B = B(\lambda,\zeta,r) = -\mathbf{i}\int_{\zeta-r}^{\zeta} \frac{\sqrt{x-\zeta+r}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-\zeta}\sqrt{x-\lambda}\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$J = J(\lambda,\zeta,r) = \int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x-\zeta+r}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-\zeta}\sqrt{x-\lambda}\sqrt{x-1}}\,dx,$$

$$Q = Q(\lambda,\zeta,r) = -\int_{\zeta}^{\lambda} \frac{\sqrt{x-\zeta+r}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-\zeta}\sqrt{x-\lambda}\sqrt{x-1}}\,dx.$$

此外，$F(\infty) = P_1$，$F(-1) = P_2$，$F(\zeta) = P_3$，$F(\lambda) = P_4$，以及 $F(\zeta - r) = Q$。（注意，$b = 0$ 当且仅当 $r = 0$。）

以下引理汇集了 [16] 中第 9 节前三个小节证明的一些结果。特别地，下面的公式 (36) 就是 [16] 中的公式 (32)。

引理 13.3。存在连续函数 $\lambda, \zeta, r, a, b\colon [0,q_0) \to \mathbb{R}$，它们对每个 $t \in [0,q_0)$ 都具有以下性质

(1) $-1 < \zeta(t) < \lambda(t) < 1$，(2) $F = F(\lambda(t)\ \zeta(t)\ \zeta(t))$ 将 $\mathbb{H}$ 映射到 $L(a_0, 0, q_0 - t)$ 上，(3) $F(\lambda(t)\ \zeta(t)\ \zeta(t) - r(t))$ 将 $\mathbb{H}$ 映射到 $L(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 上。

此外，对于较小的 t，我们有如下估计

$$r(t) = \frac{(1+o(1))t}{C_1 \log t^{-1}}. \tag{36}$$

其中某个常数为 $C_1 > 0$，且当 $t \to 0$ 时，$o(1) \to 0$。

13.3. **第二条路径**。我们有

定义 13.4。我们定义 $\sigma_2\colon [0,q_0) \to \mathcal{T}(S_0)$ 为令 $\sigma_2(t) = S(a(t)\ b(t)\ q_0)$，其中 $a(t)$、$b(t)$ 和 $r(t)$ 是引理 *13.3* 中的函数。

Let

$$G_t = F(\lambda(t),\zeta(t),\zeta(t)-r(t)) \circ F^{-1}(\lambda(t),\zeta(t),\zeta(t)). \tag{37}$$

那么 $G_t\colon L(a_0,0,q_0-t) \to L(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 是一个共形映射，它将 $L(a_0,0,q_0-t)$ 上的顶点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 映射到 $L(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 上的相应点。

这意味着，无标记三 punctured 圆盘 $S(a_0,\ 0,\ q_0-t)$ 与 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 彼此双全纯。它们之间的双全纯映射是通过对映射 G_t（G_t 的加倍也记作 G_t）进行加倍得到的。然而，G_t 不保留这两个三穿孔圆盘边界上的标记，因此 $S(a_0,\ 0,\ q_0-t)$ 与 $\neq S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 在 $\mathcal{T}(S_0)$ 中并不相同。

注记 12。如果我们将边 P_5P_1 的两份副本粘合起来，并将 $\overline{S(a(t)\ b(t)\ q_0)}$ 和 $S(a_0,\ 0,\ q_0-t)$ 变成五穿孔球面（如 [16] 中所做的那样），那么 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 和 $S(a_0,\ 0,\ q_0-t)$ 在 $\mathcal{T}_{0,\ 5}^0$ 中表示同一点。

13.4. **两条路径的关键性质**。虽然在目前的情形下，路径σ_1 和 σ_2 并不相同，但我们可以估计它们之间的 Teichm¨uller 距离。下面的引理将在下一节中证明。

引理 13.5。存在一个常数 $C>0$，使得

$$|\mathbf{\Psi}(\sigma_1(t))-\mathbf{\Psi}(\sigma_2(t))|\le C\frac{t^2}{\log^2 t^{-1}}, \tag{38}$$

其中 $\mathbf{\Psi}:\ \mathcal{T}(S_0)\ \to\mathbb{H}$ 是引理 *12.1* 中的全纯映射。

由于 $\sigma_2(t)$ 位于轨迹 $S(a,\ b,\ q_0)$ 中，根据引理 12.1，可以计算 $\mathbf{\Psi}$ 在 $\sigma_2(t)$ 处的值。下面的引理是 [16] 中引理 8.2 的重述。

引理 13.6。假设存在常数 β_1 和 $\beta_2\neq 0$，使得

$$\mathbf{\Psi}(\sigma_2(t))=\mathbf{\Psi}(\sigma_2(0))+\beta_1(1+o(1))\frac{t}{\log t^{-1}}+\beta_2(1+o(1))\frac{t^2}{\log t^{-1}}+o\left(\frac{t^2}{\log t^{-1}}\right).$$

13.5. **定理 1.11 的证明**。我们在假设引理 13.5 和引理 13.6 成立的前提下证明该定理。采用反证法。假设 $d_C=d_{\mathcal{T}}$ 在 $\tau^{\psi(a_0,b_0,q_0)}$ 上。于是存在一个全纯函数 $\mathbf{\Psi}:\ \mathcal{T}(S_0)\ \to\mathbb{H}$，满足引理 13.6 中的等式。

另一方面，由引理 13.5 可知，

$$|\mathbf{\Psi}(\sigma_1(t))-\mathbf{\Psi}(\sigma_2(t))|=O\left(\frac{t^2}{\log^2 t^{-1}}\right)=o\left(\frac{t^2}{\log t^{-1}}\right).$$

将此代入引理 13.6 中的等式，得到

$$\mathbf{\Psi}(\sigma_1(t))=\mathbf{\Psi}(\sigma_1(0))+\beta_1(1+o(1))\frac{t}{\log t^{-1}}+\beta_2(1+o(1))\frac{t^2}{\log t^{-1}}+o\left(\frac{t^2}{\log t^{-1}}\right),$$

其中 $\beta_2\neq 0$。由引理 13.2，路径 σ_1 是无穷次可微的。但这意味着 $\beta_1=\beta_2=0$，这与 $\beta_2\neq 0$ 的事实矛盾。这个矛盾证明了该定理。

14. Proof of Lemma 13.5

回顾式 (37) 中的共形映射 G_t: $S(a_0,0,q_0-t)\ \to S(a(t)\ b(t)\ q_0)$。令 g_t 为 G_t 在 $S(a_0,\underline{0,q_0}-t)$ 的边界上的限制；该边界由两份 P_5P_1 粘合而成，并将它们的端点识别。我们赋予曲面 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 非标准标记 $S(a_0,b_0,q_0)\ \to S(a(t)\ b(t)\ q_0)$；它与标准标记的区别在于，它在 $S(a_0,0,q_0-t)$ 的边界上等于 g_t。

定义 14.1。我们用 $\widehat{S(a(t)\ b(t)\ q_0)}\ \in\mathcal{T}(S_0)$ 表示带有非标准标记的黎曼曲面$S(a(t)\ b(t)\ q_0)$。

根据构造，我们有

$$\sigma_1(t)=\widehat{S}(a(t),b(t),q_0),\quad\forall t\in[0,q_0), \tag{39}$$

在 $\mathcal{T}(S_0)$中。因此，比较 $\mathbf{\Psi}$ 在 $\sigma_1(t)$处的值与在 $\sigma_2(t)$处的值，等同于比较 $\mathbf{\Psi}$ 在 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 处的值与在 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$处的值；它们分别表示带有标准标记和非标准标记的同一个三穿孔圆盘。

14.1. 边界映射的导数。将区间 P_5P_1与区间 $[0,1]$ 等同后，我们得到映射 g_t：$[0,1] \to [0,1]$。采用这一记号，我们有以下引理。

引理 14.2. 这些估计

$$g_t(x) = x + O(r(t)), \quad and \quad \frac{dg_t}{dx}(x) = 1 + O(r(t)),$$

对每个 $x \in [0,1]$ 都成立，其中 $r(t)$ 是引理 *13.3* 中满足估计式 *(36)* 的函数。

证明。令 f_1, f_2：$[1,+\infty) \to [0,1)$ 分别表示将 $F(\lambda(t)\ \zeta(t)\ \zeta(t)-r(t))$ 和 $F(\lambda(t)\ \zeta(t)\ \zeta(t))$ 限制到区间 $[1,\infty)$ 上所得的函数。令 $0 < t_0 < q_0$。由于 $-1 < \zeta(t) < \lambda(t) < 1$，且 $\zeta(t)\ \lambda(t)$ 连续，因此存在一个常数 $\delta_0 > 0$ 使得

$$-1 + \delta_0 \le \zeta(t) < \lambda(t) \le 1 - \delta_0, \qquad \forall t \in [0, t_0]. \tag{40}$$

为简化记号，令 $\lambda = \lambda(t)$、$\zeta = \zeta(t)$ 和 $r = r(t)$。于是

$$f_1(x) = J(\lambda,\zeta,0)^{-1} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{y+1}\sqrt{y-\lambda}\sqrt{y-1}} dy,$$
$$f_2(x) = J(\lambda,\zeta,r)^{-1} \int_1^x \frac{\sqrt{y-\zeta+r}}{\sqrt{y+1}\sqrt{y-\zeta}\sqrt{y-\lambda}\sqrt{y-1}} dy.$$

我们有 $g_t = f_2 \circ f_1^{-1}$。根据链式法则，我们有

$$\frac{dg_t}{dx}(x) = \frac{f_2'(y)}{f_1'(y)} = \frac{J(\lambda,\zeta,0)}{J(\lambda,\zeta,r)} \frac{\sqrt{y-\lambda+r}}{\sqrt{y-\lambda}},$$

其中 $y = f_1^{-1}(x)$。

根据 J 的定义（见上文第13.2节），并利用（40），容易得到估计

$$\frac{J(\lambda,\zeta,0)}{J(\lambda,\zeta,r)} = 1 + O(r),$$

当 $t \in [0,t_0]$ 时。再次利用（40），并且由于 $y \ge 1$，我们得到

$$\frac{\sqrt{y-\lambda+r}}{\sqrt{y-\lambda}} = 1 + O(r).$$

结合前面的两个估计可得

$$\frac{d}{dx} g_t(x) = 1 + O(r).$$

对这个等式积分，得到 $g_t(x) = x + O(r)$。证明完毕。 □

14.2.一个辅助拟共形映射。 在本小节中，我们构造一个拟共形同胚

$$f = f_t : S(a(t), b(t), q_0) \to S(a(t), b(t), q_0)$$

实现曲面 $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$ 的非标准标记，我们将其记为$\widehat{\ }\ S(a(t)\ b(t)\ q_0)$。因此， f 将顶点映射到顶点，其在边界上的限制由 g_t 给出。

回忆一下， $S(a(t)\ b(t)\ q_0)$被分割成环带 $\Pi_1 = \Pi_1(t)$和 $\Pi_2 = \Pi_2(t)$（见上方图1）。环带 Π_2 是通过沿竖边粘合两个矩形 $[0,1] \times [0, a(t)]$ 得到的。回忆一下， $a(t)$是一个正

连续函数，定义在 $t \in [0, q_0)$上。如果我们将范围限制到 $[0, t_0]$，其中 $t_0 < q_0$，就会发现存在一个常数 $a > 0$，使得对每个 $t \in [0, t_0]$都有 $0 < a < a(t)$。

因此，每个 $\Pi_2(t)$（其中 $t \in [0, t_0]$）都包含环带 P，它是矩形 $[0,1] \times [0,a]$的双重覆盖。我们将 f 定义为在 P 之外等于恒等映射。在 P 上，映射 f 定义为

$$f(x+yi) = \frac{y}{a}x + \left(1 - \frac{y}{a}\right) g_t(x) + yi, \tag{41}$$

其中 $(x,\ y) \in [0,1] \times [0,a]$。

引理 14.3。令 μ_t 表示 f_t 的贝尔特拉米膨胀。那么

$$||\mu_t||_\infty = O\big(r(t)\big), \tag{42}$$

and

$$\int\limits_{S(a(t),b(t),q_0)} \mu_t \psi(a(t), b(t), q_0) = o\big(r(t)\big). \tag{43}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned} f_z &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right)\left(\frac{dg_t}{dx}(x) - 1\right) + \frac{i}{2a}(g_t(x) - x), \\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right)\left(\frac{dg_t}{dx}(x) - 1\right) - \frac{i}{2a}(g_t(x) - x) \end{aligned} \tag{44}$$

在 $[0,1] \times [0,a]$的第一份副本上，并且

$$\begin{aligned} f_z &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right)\left(\frac{dg_t}{dx}(x) - 1\right) - \frac{i}{2a}(g_t(x) - x), \\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right)\left(\frac{dg_t}{dx}(x) - 1\right) + \frac{i}{2a}(g_t(x) - x) \end{aligned} \tag{45}$$

在 $[0,1] \times [0,a]$的另一份副本上。由引理 14.2 可得

$$f_z = 1 + O(r(t)), \quad f_{\bar{z}} = O(r(t)),$$

这就证明了 (42)。

令 μ_t^1 为 $[0,1] \times [0,a]$第一份副本上 μ_t 的值，μ_t^2 为 $[0,1] \times [0,a]$第二份副本上 μ_t 的值。于是

$$\begin{aligned} \int\limits_{S(a(t),b(t),q_0)} \mu_t \psi(a(t), b(t), q_0) &= \int\limits_{[0,1]\times[0,a]} (\mu_t^1 + \mu_t^2)\, dz^2 \\ &= \int\limits_{[0,1]\times[0,a]} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{a}\right)\left(\frac{dg_t}{dx}(x) - 1\right) dxdy + o(r(t)). \end{aligned}$$

利用富比尼定理，很容易看出最后一个积分等于零。这就证明了引理。□

14.3. **引理 13.5 的证明**。为简化记号，令 $S_t = S(a(t)\ b(t)\ q_0)$。注意，$\mathcal{T}(S_0) \equiv \mathcal{T}(S_t)$。回顾全纯映射 $\mathcal{BD}_1(S_t) \to \mathcal{T}(S_t)$。定义$\Phi$： $\mathcal{BD}_1(S_t) \to \mathbb{H}$ 为 $\mathbf{\Psi}$： $\mathcal{T}(S_t) \to \mathbb{H}$ 与映射 $\mathcal{BD}_1(S_t) \to \mathcal{T}(S_t)$ 的复合。于是 Φ 是全纯的。此外，根据构造，我们有

$$\Phi(0) = \mathbf{\Psi}(\sigma_2(t)), \quad \text{and} \quad \Phi(\mu_t) = \mathbf{\Psi}(\sigma_1(t)).$$

由引理 12.2（特别是由式 (35)）可得

$$\Phi(0) - \Phi(\mu_t) = -\mathbf{i} \int\limits_{S_t} \mu_t \psi(a(t), b(t), q_0) + O(||\mu_t||_\infty^2).$$

因此，由式 (43)，再由式 (43)，可得

$$\Phi(0) - \Phi(\mu_t) = O(||\mu_t||_\infty^2) = O(r^2(t)).$$

将式 (36)代入最后一个估计式，得到

$$\Phi(0) - \Phi(\mu_t) = O(r^2(t)) = \frac{(1+o(1))^2 t^2}{C_1 \log^2 t^{-1}} = O\left(\frac{t^2}{\log^2 t^{-1}}\right).$$

引理得证。

15. The appendix: Linear functionals on the tangent space of $\mathcal{T}(S)$

本附录旨在证明命题 15.2。设 S 是一个拓扑有限的黎曼曲面。回忆一下，每个非零全纯二次微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 都会产生贝尔特拉米微分 $\underset{\sim}{\mu_\varphi} = \frac{|\varphi|}{\varphi} \in \mathcal{BD}(S)$。

引理 15.1. 假设 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$ 是一个詹金斯-施特雷贝尔微分。那么

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \mu_\varphi \psi_n = 0,$$

对于每个在 S 的任意紧子集上一致收敛到零的序列 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{QD}(S)$ 。

注记 13. 请注意，我们不必假设序列 ψ_n 的 L^1-范数在 n 上一致有界。

证明. 令 $\Pi_1, ..., \Pi_k$ 表示将 S 分解为由 φ 的闭水平轨线所叶状化的环带后得到的外围环带。由于 $\psi_n \to 0$ 在 S 的任意紧子集上一致地，为了证明该引理，只需证明对每个 $\Pi \in \{\Pi_1, ..., \Pi_k\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Pi \mu_\varphi \psi_n = 0. \tag{46}$$

设 $r_0 > 1$ 使得 Π 与环带 $A = \{r_0^{-1} \lhd |z| < r_0\}$ 共形等价。那么

$$\mu_\varphi(z) = \frac{z^2}{|z|^2} \frac{d\overline{z}}{dz}, \quad z \in A.$$

此外，令 f_n 为定义在 A 上的全纯函数，使得 $\psi_n = f_n dz^2$。我们有

$$\int\limits_\Pi \mu_\varphi \psi_n = \int\limits_{r_0^{-1}<|z|<r_0} \frac{z^2}{|z|^2} f_n(z)\, dxdy. \tag{47}$$

令 $g_n(z) = z^2 f_n(z)$，并设

$$I_n = \int_0^{2\pi} g_n(re^{i\theta})\, d\theta.$$

由于 g_n 是全纯的，积分 I_n 不依赖于 r。此外，由于$\psi_n \to 0$ 在 S 的紧子集上一致成立，因此 $g_n \to 0$ 在 A的紧子集上一致成立。于是，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0. \tag{48}$$

另一方面，转换为极坐标后，我们得到

$$\int_{r_0^{-1}<|z|<r_0} \frac{z^2}{|z|^2} f_n(z)\, dxdy = \int_{r_0^{-1}}^{r_0}\int_0^{2\pi} g_n(re^{i\theta})\frac{1}{r}\, d\theta dr = I_n \int_{r_0^{-1}}^{r_0} \frac{1}{r}\, dr = 2I_n \log r_0.$$

应用（48）和（47）即可证明该引理。 □

命题 15.2。 设 $L : T_S\mathcal{T}(S) \to \mathbb{C}$ 是一个范数为 *1* 的线性泛函。假设对于某个范数为 *1* 的 ***Jenkins-Strebel*** 微分 $\varphi \in \mathcal{QD}(S)$，有 $L([\mu_\varphi]^*) = 1$。那么

$$L([\nu]^*) = \int_S \varphi\nu, \tag{49}$$

对所有 $\nu \in \mathcal{BD}(S)$均成立。

证明。 如第 5.3 节所述，我们知道 $T_S\mathcal{T}(S)$ 与 $\mathcal{QD}(S)$ 的对偶等距。巴拿赫-阿劳格鲁定理蕴含：对于任意有限维子空间 $V < \mathcal{BD}(S)$，存在一个由范数为一的元素构成的序列 $\psi_n \in \mathcal{QD}(S)$，使得对于每个 $\mu \in V$，都有 $L([\mu]^*) = \lim_{n\to\infty}\int \mu\varphi_n$。

固定 $\nu \in \mathcal{BD}(S)$。因此，存在一个序列 $\psi_n \in \mathcal{QD}(S)$，满足 $||\psi_n||_1 = 1$，使得

$$L([\mu_\varphi]^*) = \lim_{n\to\infty}\int_S \mu_\varphi\psi_n, \tag{50}$$

and

$$L([\nu]^*) = \lim_{n\to\infty}\int_S \nu\psi_n, \tag{51}$$

如有必要，取一个子序列后， ψ_n 在 S 的紧子集上一致收敛到某个 $\psi \in \mathcal{QD}(S)$，且满足 $||\psi||_1 \le 1$。

断言 15.3。 等式 $||\psi||_1 = 1$ 和 $\int \mu_\varphi\psi = 1$ 成立。s

证明。 序列 $\psi-\psi_n$ 在 S的紧子集上一致收敛到零。由引理 15.1 可知， $\int \mu_\varphi($ $\psi - \psi_n) \to 0, n \to \infty$。将其与（50）以及 $L([\mu_\varphi]^*) = 1$这一事实s结合，可得 $\int \mu_\varphi\psi = 1$。再将此等式与s事实 $||\psi||_1 \le 1$ 结合，可知必有 $||\psi||_1 = 1$。

□

将断言 15.3 中的两个等式结合起来，我们得到

$$1 = \mathrm{Re} \int_S \mu_\varphi \psi \leq \int_S |\psi| = 1.$$

结论是， ψ 几乎处处等于 φ 在 S上的一个正标量倍数。由于 ψ 和 φ 均为全纯函数，且 $||\psi||_1 = ||\varphi||_1 = 1$，因此等式 $\psi = \varphi$成立。

现在，由于 $\psi_n \to \varphi$，当 $n \to \infty$时，在 S的紧子集上一致成立；又由于 $||\psi_n||_1 = ||\psi||_1$，对每个 n，可得当 $n \to \infty$时， $||\psi_n - \varphi||_1 \to 0$。结合（51）即可证明（49）。□

References

[1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings.* 讲座丛书, 38. 美国数学会, 普罗维登斯, (2006) [2] X. Dong, S. Mitra, *Carathódory metric on some generalized Teichmüller spaces.* 芬兰数学年刊, 48, 797–807, (2023) [3] A. Douady and C. J. Earle, *Conformal natural extension of homeomorphisms of the circle.* 《数学学报》157, 23-48, (1986) [4] C. Earle, I. Kra, *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces.* 《分析学论文集》（纪念 Lipman Bers 的论文集）, pp. 107-124. 学术出版社, 纽约, (1974) [5] C. Earle, *On the Carathèodory metric in Teichmüller spaces.* 不连续群与黎曼曲面, 99-103. 《数学年刊研究》, No. 79, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿 (1974) [6] C. Earle, I. Kra, *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces.* 《分析学论文集》（纪念 Lipman Bers 的论文集）, pp. 107-124. 学术出版社, 纽约, (1974) [7] C. Earle, V. Markovic, *Isometries between the spaces of L1 holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces of finite type.* 120 2 433=440 2003 《杜克数学杂志》 ( ) , ( ) [8] C. Earle, L. Harris, J. Hubbard, S. Mitra, Sudeb, *Schwarz's lemma and the Kobayashi and Carathéodory pseudometrics on complex Banach manifolds.* 克莱因群与双曲三维流形（华威, 2001）, 363-384, 伦敦数学会讲座丛书, 299, 剑桥大学出版社, 剑桥, (2003) [9] A. Fletcher, V. Markovi´c, *Infinite dimensional Teichmüller spaces.* Teichmüller 理论手册, 第 II 卷, 65-92. 欧洲数学会, (2009) ¨F. Gardiner, [10] 《美国数学会汇刊》282 第 1 期, *Approximation of infinite-dimensional Teichmüller spaces.* D383.(1984) 367–D. Gekhtman, V. Markovi[11] c, ´ *Classifying complex geodesics for the Caratheodory metric on* 《分析学杂志》 140, 669-694 (2020) *low-dimensional Teichmüller spaces.* I. Kra, [12] 《数学分析杂志》, 40(1), 129-143, (1981) *The Carathéodory metric on abelian Teichmüller disks.* S. Krushkal, [13] , 《瑞士数学评论》第 - 期 ( ) *Grunsky coefficient inequalities Carathódory metric and extremal quasiconfor-* K. *mal mappings.* 64 , 4, 650 660, 1989 Lin, W. Su, [14] arXiv:2602.09751 *The Carathéodory metric on Teichmüller space of genus two surface.* C. Maclachlan, W. Harvey, [15] 《伦敦数学会会刊》, (3), 30, 496-512, (1975) *On mapping-class groups and Teichmüller spaces.* V. Markovi[16] c, ´《杜克数学杂志》167, 497-535 (2018) *Caratheodory's metric on Teichmüller spaces and L-shaped 3-punctured discs.*V. Markovic, [17] 《杜克数学杂志》120, 405-431 (2003) *Biholomorphic maps between TeichmÏler spaces.* C. McMullen, [18] 《瑞士数学评论》, 88(4), (2013) *Entropy on Riemann surfaces and the Jacobians of finite covers.* C. McMullen, [19] 《美国数学会杂志》16, 第 4 期, 857-885 (2003)

[20] H. Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller space.* 黎曼曲面理论进展（会议论文集，石溪，纽约州，1969年）pp. 369-383《数学年刊研究》, No. 66. 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿 (1971年) [21] Z. Slodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls.*《美国数学会会刊》111, 347-355, (1991年) [22] R. Winarski, *Symmetry, Isotopy, and Irregular Covers.*《几何奉献》, 177 (1), (2013年) [23] S-K. Yeung, *Quasi-isometry of metrics on Teichmüller spaces.*《国际数学研究通知》. 239-255, (2005年)

YMSC
Tsinghua University
Beijing, China