arXiv:2603.21240v1 [math.SP] 22 Mar 2026

常负曲率流形的近似逆谱定理

MAYUKH MUKHERJEE

摘要。Colin de Verdière 的经典定理表明，在固定拓扑的闭流形上，通过选取足够不均匀的光滑度量，可以指定拉普拉斯–贝尔特拉米谱中任意有限部分（包括重数，但须满足通常的拓扑约束）。本文研究同一逆问题，但要求几何满足常负截面曲率这一严格约束。在允许拓扑复杂度变化的情况下，我们证明，在任意维数 $d \geq 2$ 中，任意有限严格递增的目标列表都可以由某个常负曲率闭流形以任意精度逼近。在 $d = 2$，构造利用双曲领圈退化以及 Burger 的离散谱极限定理，并以 Buser 的领圈估计为基础；在 $d \geq 3$，我们构造由“重型”顶点簇和“长”走廊链组成、宏观上高度不均匀的双曲覆盖流形，其低能极限是给定的离散图拉普拉斯算子。我们还记录了曲率归一化为 $\kappa \equiv -1$ 时的普适障碍：$d = 2$ 中的 Yang-Yau 障碍，以及 $d \geq 3$ 中结合 Bishop–Gromov 体积比较的 Kazhdan-Margulis 障碍。特别地，λ_1 在 $\kappa = -1$ 处有普适上界，因此，首个正特征值超过该上界的目标列表无法在 $\kappa \equiv -1$ 这一类中得到逼近；而要容纳任意大的指定 λ_1^*，则必须满足 $|\kappa| \to \infty$。文中还给出了一个推论，说明在 $\kappa \equiv -1$ 处可以任意精确地指定尺度不变特征值比，并附有一个明确的算例。

1. 引言

拉普拉斯–贝尔特拉米算子的逆谱问题探讨：能在多大程度上预先指定黎曼流形的几何与拓扑，从而得到特定的目标谱。在一篇开创性论文 [7], 中，Colin de Verdière 证明，对于一个拓扑固定的紧致连通流形，可以选择一种光滑度量，使其前有限个非零拉普拉斯特征值实现任意给定的有限列表，并具有指定的重数，但须满足通常的拓扑约束。本文将范围限定在简单谱情形；特别地，对于亏格为 $\gamma \geq 2$的闭曲面，可以实现任意严格递增的列表 $0 < \lambda_1^* < \cdots < \lambda_n^*$作为前 n 个非零特征值。

通过这一一般构造得到的度量具有高度异质性。一个自然的几何问题是，在常负截面曲率这一严格约束下，类似的谱指定是否仍然可能。这是一个真正严格的条件：对于每一种固定的拓扑类型，常曲率度量构成一个有限维变形空间（由曲率尺度以及 $d = 2$中的 Teichmüller 模空间参数化），与一般黎曼度量所具有的无限维自由度形成对比。

在 $d = 2$ 维中，常曲率为 -1 的曲面仍然允许连续变形（对于 $\gamma \geq 2$，Teichmüller 空间的维数为 $6\gamma - 6$），而经典领圈退化提供了一种实现谱控制的机制：当一条分离测地线被压缩时，曲面会形成一个电导趋于零的瓶颈，从而产生一个由离散图拉普拉斯算子决定的小特征值。Burger [4, 5], 在 Buser [6] 的领圈估计基础上分析了这一机制。

在维数为 $d \geq 3$ 时，情况因**Mostow 刚性定理** [23]而有根本不同：维数为 $d \geq 3$ 的闭双曲流形存在一个唯一的常曲率 -1度量，且在等距意义下唯一。唯一剩下的几何自由度是全局曲率尺度 κ，它将所有特征值乘以 $|\kappa|$。因此，在归一化为 $\kappa \equiv -1$ 后，固定拓扑下的谱不存在连续变形；换言之，尺度不变特征值比 λ_k/λ_1 完全由拓扑决定。因此，改变拓扑是逻辑上的必然选择，而不仅仅是

一种便利做法。这使得高维逆问题在性质上更为困难，也促使我们采用覆盖空间构造——这是本文的主要贡献之一。

我们的主要结果表明，尽管存在上述刚性约束，只要允许拓扑发生变化，所有维数下都存在近似谱普适性 $d \geq 2$。

定理 1.1（近似逆谱定理）。设 $d \geq 2$ 为一个整数，$0 = \lambda_0^* < \lambda_1^* < \cdots < \lambda_n^*$ 为一个有限的严格递增实数序列。对于任意误差容限 $\varepsilon > 0$，都存在一个闭、连通的 d维黎曼流形 (M, g)，使得：

（1）几何刚性：g 具有常负截面曲率 $\kappa < 0$。（2）谱近似：Δ_g 按标准非递减顺序排列的前 $n+1$ 个特征值（重数重复计入）满足

$$|\lambda_i(M, g) - \lambda_i^*| < \varepsilon \quad \textit{for all } i = 0, 1, \ldots, n.$$

此外，存在一个常数 $\Lambda_d > 0$（见第 6节），使得每个闭 d维常截面曲率流形 $\kappa < 0$（若 $d = 2$，则为可定向流形）都满足

$$\lambda_1(M, g) \leq \Lambda_d |\kappa|.$$

特别地，在曲率归一化 $\kappa \equiv -1$ 下，无法以任意精度逼近具有 $\lambda_1^* > \Lambda_d$ 的目标；而任何满足 $\varepsilon \to 0$ 的逼近序列都必须满足 极限下确界 $|\kappa| \geq \lambda_1^*/\Lambda_d$。

注 1.2（逼近流形的拓扑）。证明所构造的流形可以选择为：在曲面情形（$d = 2$）下，亏格仅取决于 n（且仅在 $n \to \infty$ 时趋于无穷），而在维数 $d \geq 3$ 下，覆盖度（因而曲率为 -1 时未经缩放的体积）按 $\varepsilon \to 0$ 增长。

当 ε 充分小时，前 $n+1$ 个特征值均为单特征值：目标列表严格递增，且构造保证 $\lambda_{n+1}(M, g)$ 与 λ_n^* 保持正距离（参见第 1.1 节第 5 节中的证明）。

由于 n 固定，所有收敛性陈述在有限谱窗口 $0 \leq i \leq n$ 上均一致成立。

记号。在全文中，$\lambda_k(M, g)$ 表示拉普拉斯–贝尔特拉米算子在 (M, g) 上的第 k 个特征值。在第 4 节中，我们用 $\nu_k(M_m)$ 表示曲率为 -1 时中间覆盖流形 (M_m, g_{M_m}) 的特征值，这些特征值是在最终重新缩放 $g_m = m^{-4} g_{M_m}$ 后得到的；该重新缩放产生 $\lambda_k(M_m, g_m) = m^4 \nu_k(M_m)$。

注 1.3（几何塌缩）。在高维构造 $(d \geq 3)$ 中，近似流形 (M_m, g_m) 的曲率为 $\kappa_m = -m^4 \to -\infty$，其体积满足 $\mathrm{Vol}(M_m, g_m) = O(m^{3-2d}) \to 0$。事实上，$M_m$ 中的块总数为 $Nm^3 + O(m)$（簇加走廊），每块在 $\kappa = -1$ 度量下的体积为 V_F。重新缩放 $g_m = m^{-4} g_{M_m}$ 后，体积按 m^{-2d} 缩放，因此 $\mathrm{Vol}(M_m, g_m) \sim N V_F m^{3-2d}$。由于当 $d \geq 3$ 时 $3 - 2d < 0$，体积趋于零。（仅凭体积衰减并不能迫使戈罗夫-豪斯多夫塌缩至一点；下面的直径估计才是关键。）

M_m 在曲率 -1 下的直径为 $O(m)$（重簇的组合直径为$O(\log m)$，这是由扩张子性质所致；走廊的长度为 $O(m)$）。按 m^{-4}重新缩放后，距离按 m^{-2}缩放，因此 $\mathrm{diam}(M_m, g_m) = O(m^{-1}) \to 0$。由于 $\mathrm{diam} \to 0$，该逼近序列在 Gromov–Hausdorff 意义下收缩为一个单点。（对于具有 $|\kappa| \to \infty$ 且低阶特征值有界的每个逼近族而言，这种收缩是否不可避免，是一个自然的开放问题；我们尚未对此进行研究。）

定理 1.1 中的障碍陈述涉及谱的绝对尺度。相比之下，像 λ_k/λ_1 这样的尺度不变比值不受曲率缩放的影响。鉴于 Mostow 刚性定理，对于在 $d \geq 3$ 上具有双曲度量的固定拓扑，这些比值完全由其决定；然而，我们证明，通过改变拓扑，可以任意指定这些比值：

推论 1.4 (推论 7.1，非正式表述)。 对于任意 $d \geq 2$、任意目标比值 $1 = \mu_1^* < \cdots < \mu_n^*$以及任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个闭的 d-流形，其 $\kappa \equiv -1$ 特征值比 λ_i/λ_1 与μ_i^* 的误差在 ε以内。

在 $d \geq 3$ 中，这可以说是本文的主要几何内容：Mostow 刚性定理禁止在固定拓扑下对这些比值进行任何连续变化，但通过改变拓扑，我们能够实现任意指定。

策略及其与先前工作的关系。 所有维数下的证明策略，都是将连续逆谱问题归结为一个离散的 问题：首先指定完全图 K_N 上加权图拉普拉斯算子的谱（根据 Colin de Verdière 的离散逆定理 [8]，这是可能的），然后将该图拉普拉斯算子实现为一列双曲流形的低能极限。

在 $d = 2$ 中，实现步骤采用双曲领圈退化：在亏格为 $\gamma = 1 + {}^{N}\!\left(N-3\right)$ 2 的曲面上，挤压由 $\binom{N}{2}$ 条两两不相交的测地线组成的多重曲线，其补集有 N 个连通分支，对偶图为 K_N（每个顶点部分的亏格为 0，具有~~$N-1$~~ 条边界曲线，故欧拉示性数为 $3-N$； $\binom{N}{2}$ 个环带领圈贡献 $\chi = 0$，总计 $\chi = N\,(3-N) + 0 = 2 - 2\gamma$，由此得到该公式），从而产生离散图极限；这一做法沿袭了 Burger [4, 5] 和 Buser [6, §8]。再结合全局度量缩放 $g_\delta := \delta g_{\Sigma_\delta}$（它将曲率缩放至 $|\kappa| \to \infty$，并将特征值缩放至目标值），即可得到曲面情形下的定理 1.1。因此，曲面情形是对经典结果的综合，我们在第 3 节中将其作为高维论证的预热和范例加以呈现。

高维情形的指导性启发如下：由于 Mostow 刚性定理禁止对几何进行任何变形，因此必须转而将谱自由度编码在拓扑的组装方式中，具体而言，就是编码在覆盖空间的组合模式中。设想一个双曲流形在大尺度上构造成类似有限图的形态：由厚重的团块（顶点）通过狭长的通道（边）连接起来。如果团块远比通道厚重，那么低频特征函数就无法分辨任何团块的内部结构；它们只会感知连接模式，而这恰好就是底层图的图拉普拉斯算子。因此，计划是构造一个双曲覆盖流形，使其大尺度拓扑映照目标加权图，从而使该流形的低谱近似于该图的谱。

本文的主要创新在于情形 $d \geq 3$。这里无法利用领圈退化：Mostow 刚性定理阻止任何局部几何变形。相反，我们将自由度编码在 覆盖组合结构中。从一个具有正的第一贝蒂数的闭算术双曲流形出发（Millson [21]），再通过取有限覆盖获得一个基本群可满射到自由群的基流形 B（Lubotzky [17]），我们构造由精心设计的 Schreier 图支配的有限覆盖 $M_m \to B$。将 K_N 的每个宏观顶点替换为由 m^3 个固定基本块 F 组成的“ 重型 ”簇，并在簇内部按扩张图布线；每条宏观边则变为由 $O(m)$个块组成的“长”走廊链。体积差异$m^3 \gg m$，再加上簇内扩张子布线所提供的一致庞加莱谱隙，迫使低能特征函数在簇上近似为常数，其间的过渡则由走廊电导支配，而这些电导收敛到预设的离散边权重。从概念上说，这是在由周期胞元拼接而成的流形上进行的离散到连续均匀化，其宏观有效算子为图拉普拉斯算子 L_m。完整的谱约化（定理 4.16）通过利用簇庞加莱不等式、端口处的定量迹估计以及走廊能量界进行极小极大比较得以证明。

这种覆盖构造与此前的几项研究方向相关，但又有所不同 k:

- Brooks [3]研究了覆盖塔的谱收敛，并证明 λ_1 有限覆盖的谱会收敛到万有覆盖的 L^2 谱底端。我们的构造

以不同的目的使用覆盖：不是为了逼近一个极限，而是通过控制 Schreier 图的组合结构来设计 一个指定的离散拉普拉斯算子。

- Colbois–Courtois [9] 针对一列紧黎曼流形在尖点 Lipschitz 意义下退化为非紧有限体积极限的情形，给出了谱收敛的充要条件（并将其应用于双曲曲面和 3维流形）。他们的“逃逸部分”判据（逃逸区域上的狄利克雷特征值下界）在概念上与我们的廊道能量界相关，但两者的研究背景不同：Colbois–Courtois 研究的是退化极限，而我们则是在固定的紧覆盖流形上构造指定谱，不涉及非紧极限。

- “类图流形”的谱收敛文献（例如参见 Exner–Post [10] 和 Grieser [12]）研究度量图的细管状邻域。我们的走廊与之相关，但有所不同：环境流形具有常曲率，而且其“加厚”来自固定的双曲块 F，而非横截轮廓的收缩。

- Šahovic [24] 研究了在 Gromov–Hausdorff 意义下，借助 $|\kappa| \to \infty$以双曲流形逼近紧度量空间的问题。本文探讨的是谱指定问题，而非度量逼近问题；其构造需要控制特征函数行为（通过扩张子布线和极小极大论证），而不只是度量几何。

注 1.5 (仅考虑简单谱)。 我们始终仅考虑 严格递增的 （简单）目标列表。这对于一个 ε-近似定理并非实质限制：若期望的目标具有重数（例如 $\{0, 1, 1, 3\}$），可以将定理 1.1 应用于一个邻近的简单列表（例如 $\{0, 1-\delta, 1+\delta, 3\}$ 满足$\delta < \varepsilon/2$），并取容差 $\varepsilon/2$；由三角不等式可得，对于原来的退化目标，$|\lambda_k - \lambda_k^{\mathrm{orig}}| < \varepsilon/2 + \delta < \varepsilon$。采用简单谱假设是为了方便记号，也因为它能简化连续体构造。在常曲率条件下，$d \geq 3$中的覆盖构造能否实现 恰当的指定重数，是一个独立且有趣的开放问题。

注 1.6 （$d \geq 3$中精确指定的可数性障碍）。定理 1.1 的“近似”性质并非方法的局限，而是问题本身的必然特征。通过曲率缩放，精确指定单个特征值很容易。然而，在 $d \geq 3$中，精确同时指定一组一般的 n元特征值（$n \geq 2$）不可能成为普遍成立的定理。原因如下。根据 Mostow 刚性定理，闭双曲 d流形由其基本群唯一确定（相差一个等距变换）。由于闭流形的基本群都是有限呈示的，因此在曲率为$\kappa = -1$时，闭双曲 d流形（相差等距）只有可数多个。令 κ 变化，对于每种拓扑，只会在谱空间中描出一条1参数射线，因此所有可实现谱的集合是 $\mathbb{R}^n$中的可数条射线的并。对于 $n \geq 2$，这样的集合勒贝格测度为零，因此从集合论角度而言，对于一般目标，甚至精确指定两个独立特征值也不可能。因此，ε-近似作为结构性结论已是最佳结果。（尽管如此，对于具体的代数目标，例如，$\{0, 1, 3\}$ 能否在某个$\kappa = -1$处精确实现，仍是一个悬而未决的问题。）

结构安排。 第 2 节回顾离散逆谱定理。第 3 节将曲面情形作为热身。第 4 节介绍高维覆盖构造与谱约化。第 5 节汇总定理 1.1的证明。第 6 节记录了 $\kappa = -1$处普适的特征值障碍。第 7 节证明特征值比推论。第 8 节给出一个具体算例。

2. 离散完全图的谱普适性

我们采用完全图上离散加权图拉普拉斯算子的逆谱理论。

设 $G=(\mathcal{V},\ E)$ 是一个具有 $N=|\mathcal{V}|$ 个顶点的有限连通图。为 $i\in\mathcal{V}$ 固定严格为正的顶点测度 $\nu_i>0$，并为 $\{i,j\}\in E$ 固定对称的边权重 $w_{ij}=w_{ji}>0$。加权组合拉普拉斯算子 L_G 作用于 $f\in\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$，其形式为

$$(L_Gf)(i)=\frac{1}{\nu_i}\sum_{j\sim i}w_{ij}(f(i)-f(j)). \tag{2.1}$$

它在 $\ell^2(\mathcal{V},\ \nu_i)$ 上是自伴的，且其谱为 $0=\mu_0<\mu_1\le\cdots\le\mu_{N-1}$。

引理 2.1 (Colin deVerdière [8, §4，定理 1])。设 $G=K_N$ 为具有 $N\ge2$个顶点且顶点测度为常数的完全图 $\nu_i\equiv1$。对于任意严格递增的目标列表 $0<\mu_1^*<\cdots<\mu_{N-1}^*$，存在严格为正的对称边权重 $w_{ij}=w_{ji}>0$(对所有 $\{i,j\}\in E(K_N)$)，使得由 L_{K_N}定义的加权组合拉普拉斯算子 (2.1) 具有非零谱 $(\mu_1^*,\ \ldots\ldots,\ \mu_{N-1}^*)$。特别地，指定的特征值都是单特征值。

证明。Colin de Verdière [8, §4，定理 1] 证明，对于完全图 K_N $(N\ge2)$，给定任意正的顶点测度，都可以实现任意严格递增的列表 $0<\mu_1^*<\cdots<\mu_{N-1}^*$，使其成为加权组合拉普拉斯算子的非零谱，并且 K_N的每条边的边权重都严格为正。（注：该结果针对纯拉普拉斯类（2.1），其行和为零且边权重为正；不需要额外的顶点势或薛定谔型对角扰动。1987 年的论文 [7, §2a] 明确援引了这一离散构造，并指出证明见 [8, §4] 。）在顶点测度为常数的情形 $\nu_i\equiv1$ 下，这直接给出式（ L_{K_N} 2.1）中的拉普拉斯算子，其中 $w_{ij}>0$ 对所有 $\{i,j\}$均成立。□

注 2.2 （顶点测度为常数时的缩放）。若 $\nu_i\equiv\nu$ 是正常数，则 L_G相对于 $\nu\equiv1$的情形，仅相差一个 ν^{-1} 倍的缩放。因此，引理2.1 立即推出了任意常数顶点测度下的相应结论。

3. 曲面情形（$d=2$）：退化领圈

我们回顾一下标准的双曲领圈退化过程，它会产生离散图极限。尽管完整的逆谱构造使用完全图 K_N （通过引理2.1），谱收敛结果本身适用于曲面上由一组互不相交的简单闭测地线实现的任意加权图。

固定 $N\ge4$。（这涵盖了所有目标列表长度 $n\ge1$，因为定理1.1 的证明取 $N=\max(n+1,4)\ge4$，并在 $N>n+1$时用严格递增且高于目标窗口的额外特征值补齐离散谱。）设 Σ 为亏格 $\gamma=1+{}^{N}{}_{(N-3)}{}_{2}$ 的闭可定向曲面。取一组$\mathcal{A}=\{\gamma_e\}_{e\in E(K_N)}$ 条两两不相交的简单闭曲线— $\binom{N}{2}$，使其位于 Σ 上，且其对偶图为 K_N：沿 $\mathcal{A}$切开 Σ 会得到 N个连通分支 $X_1,\ \ldots\ldots,\ X_N$，每个分支的亏格均为0，且有 $N-1$ 条边界曲线。（这样的曲线系确实存在：先取 N 个带 $N-1$ 个边界孔的互不相交的球面，再用 $\binom{N}{2}$ 条管道将它们连接起来。）在 Σ 上固定一个完备双曲度量 g_0，使所有曲线 γ_e 都是测地线，并为 Σ 配备与包含 $\mathcal{A}$的裤子分解相对应的 Fenchel-Nielsen 坐标。

对于每个 $\delta>0$，令 Σ_δ 为通过设置下式得到的双曲曲面

$$\ell(\gamma_e)=\pi\delta w_e \tag{3.1}$$

对于给定的边权重 $w_e>0$，同时保持所有其余 *Fenchel-Nielsen* 坐标不变（即不属于 $\mathcal{A}$ 的裤子分解中各曲线的长度以及所有扭转参数）。根据高斯-博内定理，顶点部分$X_{v,\ \delta}$（其边界长度随 δ 变化）满足 $\mathrm{Area}(X_{v,\ \delta})=2\pi(N-3)$，且与 δ 无关。对于每个$\delta>0$，$\mathcal{A}$ 中的曲线都是 Σ_δ 上互不相交的简单闭测地线，而领圈定理 [6, 定理 4.1.1 和 4.1.6] 保证每条曲线周围都有嵌入且互不相交的领圈邻域。

关键的分析性输入是，领圈导通率渐近地为 ℓ_e/π ，当 $\ell_e \to 0$；参见 [6,§8。1]。

定理 3.1 (Burger [4, 5]; Buser [6, §8])。设 Σ 为一闭可定向双曲曲面， $\mathcal{A} = \{\gamma_e\}_{e\in E(G)}$ 为其上的一族两两不交的简单闭测地线，其对偶图是一个在 G 个顶点上的连通图，并且 $V_v :=$ 面积(X_v) 表示第 v个顶点部分的面积。设 Σ_δ 为如下得到的族：对指定的边权 $w_e > 0$，令 $\ell(\gamma_e) = \pi\delta w_e$ ，同时保持其余所有 *Fenchel-Nielsen* 坐标不变；再设 μ_k 为带有边权 w_e 和顶点测度 V_v的离散拉普拉斯算子的特征值。那么，当 $\delta \to 0$时，

$$\lambda_0(\Sigma_\delta) = 0, \qquad \lambda_k(\Sigma_\delta) = \delta\mu_k(1 + o(1)) \qquad \textit{for } k = 1, \dots, N-1,$$

并且存在一个与 δ无关的常数 $C_0 > 0$，使得

$$\lambda_k(\Sigma_\delta) \geq C_0 \qquad \textit{for all } k \geq N.$$

注 3.2。特征值渐近和一致谱隙 C_0 所依赖的关键假设，是补部分不会退化：由于 $\mathcal{A}$ 之外的 Fenchel-Nielsen 长度保持不变， Σ_δ 上的其他测地线不会变短，并且每个顶点部分 $X_{v,\delta}$ 的诺伊曼谱隙（在去除箍缩曲线处受控的领圈邻域后）仍保持一致为正；定量界见 [5, §§4–5] 。特征值渐近$\lambda_k \sim \delta\mu_k$ 在 [5, 定理 1.1–1.2]中得到证明； $k \geq N$ 的一致下界 C_0 由顶点部分的一致诺伊曼谱隙 [5, §§4–5] 以及第 [6, 节中的领圈能量估计共同推出1]。上文所述具有相等顶点面积 $V_v = 2\pi(N-3)$的 K_N 构造，是第 5 节中使用的主要实例；第 8 节中的算例使用了具有不等顶点面积的 $G = P_3$ 。

注 3.3. 定理 3.1的证明仅用到了挤压族的两个性质：每个领圈的导通率都渐近于 ℓ_e/π 当 $\ell_e \to 0$ [6, §8], ，且每个顶点部分的诺伊曼谱隙都保持一致为正 [5, §§4–5]；后者由非退化条件保证（所有未被挤压的 Fenchel-Nielsen 坐标都保持有界）。情形 $G = K_N$ 用于第5 节的完整逆谱定理（其中引理 2.1 要求图为完全图）；第8节的算例则利用了 $G = P_3$ 在代数上的可处理性。

4. 高维（$d \geq 3$）：重顶点覆盖与离散极限

在维数为 $d \geq 3$ 时，我们构造双曲覆盖流形，使其宏观低能动力学在“重顶点／长走廊”机制下收敛至预先指定的离散图拉普拉斯算子。

4.1. **一个满射到自由群的基流形**。根据 Millson 的定理 [21], ，对每个 $d \geq 4$，都存在闭的算术双曲 d 维流形 M_0 ，使得 $b_1(M_0) > 0$。Millson 的构造在全实数域上由可容许二次型定义，产生 $\mathrm{SO}_0(d,\ 1)$ 中第一上同调非零的最简单型算术格。根据 Lubotzky [17], ，对所有 $d \geq 3$, $\mathrm{SO}(d,\ 1)$ 中的最简单型算术格都是大群：某个有限指数子群满射到自由群 F_2。（Lubotzky 的证明使用了算术结构所提供的全测地余维一子流形；结论 $b_1 > 0$ 是大群性质的推论，而非假设。特别是，对于 $d = 3$ ，大群定理直接适用于最简单型的余紧算术克莱因群；根据其算术构造，这些群总是包含全测地曲面，尽管 Millson 最初的构造是针对 $d \geq 4$陈述的。）

固定目标长度 n ，并选取一个奇整数 $N \geq$ ，使其大于 $\max(n+1,5)$；令 $D = (N-1)/2$。根据 Schreier理论（例如参见 [18, 第 I 章，命题 3.9]） ， F_2 包含 F_D 作为有限指数子群，因此经过有限覆盖后可得：

命题 4.1. 对于每个 $d \geq 3$ 和每个 $D \geq 2$，都存在一个闭双曲 d-流形 B 以及一个满射 $\pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$。

注记 4.2（非构造性）。基流形 B 是通过 Millson-Lubotzky 存在性地得到的。构造从根本上说是非构造性的：不仅 B 是存在性地得到的，基本块 F（通过沿光滑超曲面切割 B 而获得）、解析常数C_P、 C_i、 C_χ以及扩张子布线（通过概率方法）也都不是显式的。特别是，第 4 节中 $O(\cdot)$ 误差估计所用的有效常数取决于 F的几何，而这又由 B 和切割系统决定。对于 $d = 3$, 余紧算术克莱因群中最简单类型的群（例如，定义在恰有一个复位、且所有实位均分歧的数域上的四元数代数中整环的单位群）可以给出显式的闭算术双曲 3 维流形；参见 [20,§§8.1–8.2、9.5] 了解一般框架。此类群通过其算术构造包含全测地曲面，因此 Lubotzky 大性定理适用；然而，若要使第 4 节的完整构造具备有效性，还需要显式的切割系统和显式的 Schreier 图，而本文不作此探讨。（需要指出的是，常被引作算术双曲 3 维流形群典型例子的比安基群 $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_d)$并非余紧群：它们给出的是带尖点流形，而非此处所需的闭基流形 B。）对于 $d \geq 4$, 据作者所知，目前尚无满足我们要求（闭、双曲，且具有$\pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$）的显式基流形 B。

令 X_D 表示以 v_0 为基点的 D 个圆组成的花束，它是一个 $K(F_D, 1)$ 空间（$\pi_1(X_D) \cong F_D$ 且 $\pi_k(X_D) = 0$ 对于 $k \geq 2$）。记 $e_1, \ldots\ldots, e_D$ 为开花瓣。

命题 4.3（连通切割系统）。对于 $d \geq 3$，存在两两不交的连通光滑闭双侧超曲面

$$H_1, \ldots, H_D \subset B$$

使得补集 $B \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_D)$ 是连通的。

约定。我们将开补集记作 $F^\circ := B \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_D)$，并将沿 H_i 对 B 开切后得到的带边界紧流形记作 F。因此，$\mathrm{int}(F) = F^\circ$ 且 $\partial F = H_1^+ \cup H_1^- \cup \cdots \cup H_D^+ \cup H_D^-$，其中 $H_i^\pm$ 是切割两侧产生的 H_i 的两个副本。除非另有说明，以下 F 均表示紧块。重要的是，由于超曲面 $H_1, \ldots\ldots, H_D$ 两两不交，∂F 是光滑闭超曲面的不交并，且 F 没有角点或余维 2 的边界奇点。因此，标准 Sobolev迹定理和椭圆正则性估计可在 F 上一致适用；下文中出现的解析常数C_{tr}、 C_{bl} 和 C_P 仅取决于 F 的固定黎曼几何。

证明。步骤 1：辅助映射及其纤维。由于 X_D 是一个 $K(F_D, 1)$，命题 4.1 中的满射 $\pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$ 由连续映射 $g\colon B \to X_D$ 实现，该映射在π_1上诱导给定的同态。对于每个花瓣 e_j，选取一个开子弧 $U_j \subset e_j$。通过光滑逼近，我们可以对g 作同伦，使得对每个 j， g 在 $g^{-1}(U_j)$ 上光滑；随后萨德定理给出正则值 $q_j \in U_j$，使得 g 与之横截。由于 g_* 是满射， g 将 B 中的某个环路映为 j号圆周上度数为 1 的环路；这样的映射满射到e_j上，因此特别有 $q_j \in g(B)$，且每个纤维 $g^{-1}(q_j)$ 都非空。每个纤维 $g^{-1}(q_j)$ 都是 B中的光滑闭双侧余维 1 子流形，且可能不连通。我们通过拉回e_j的正向，对 $g^{-1}(q_j)$ 的每个分支 Σ 赋予余定向；双侧邻域 $N_\Sigma \cong \Sigma \times [-1, 1]$ 的选取与此余定向相容。令

$$\mathcal{S} := \big\{\text{connected components of } g^{-1}(q_j) : j = 1, \ldots, D\big\}.$$

$\mathcal{S}$ 的元素是有限多个两两不相交的连通光滑闭双侧超曲面。每个 $\Sigma \in \mathcal{S}$ 都从其母纤维继承一个颜色 $\mathrm{col}(\Sigma) := j$。

步骤 2：完整对偶图。沿每条 $\Sigma \in \mathcal{S}$ 切割 B，并构造对偶图 Γ：Γ 的顶点是 $B \setminus \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{S}} \Sigma$ 的连通分支，每条 $\Sigma \in \mathcal{S}$ 贡献一条边 e_Σ，连接两个

相邻的补区域（如果两侧位于同一个区域，则形成环路）。图 Γ 是有限且连通的（因为 B 是）。

步骤 *3*：的满射性 η_* 在同调上。定义图映射 $\eta\colon \Gamma \to X_D$，将 Γ 的每个顶点映到 v_0，并将每条边 e_Σ（其中 $\mathrm{col}(\Sigma) = j$）沿着 X_D的第 j个环路映射。令 $Q\colon B \to \Gamma$ 为与切割分解对应的商映射：它将每个补区域压缩为相应的顶点，并将分量 $\Sigma \in \mathcal{S}$ 的每个双侧邻域映射到相应的对偶边 e_{Σ°。

我们断言 $\eta_*\colon H_1(\Gamma;\mathbb{Z}) \to H_1(X_D;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^D$ 是满射的。

对每个 $j \in \{1,\dots,D\}$，$g_*\colon \pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$ 的满射性保证存在一条光滑闭曲线 γ_j，位于 B 中，且$[g\circ\gamma_j] = a_j$（第 j个自由生成元）属于 F_D。我们可以假设 γ_j 与每个 $\Sigma \in \mathcal{S}$都横截。由于$[g\circ\gamma_j] = a_j$，γ_j 与 $g^{-1}(q_k)$的代数交数等于 a_k在a_j中的指数和，即 δ_{jk}。

由于γ_j 是一个闭环路，商空间 $Q(\gamma_j)$是Γ中的一个圈c_j。对于每种颜色 k，c_j 经过的颜色为k 的边的代数计数，等于γ_j 与 $\bigcup\{\Sigma \in \mathcal{S}$ 的代数交数：$\mathrm{col}(\Sigma) = k\} = g^{-1}(q_k)$，其值为 δ_{jk}。在 η下，每条颜色为k 的边都映射为绕第 k个花瓣的一条环路；因此，$[\eta_*(c_j)]$ 在 $H_1(X_D;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^D$ 中的第 k个坐标为 δ_{jk}。由于 $\{\eta_*(c_j)\colon j = 1$、.....、$D\}$是 $\mathbb{Z}^D$的标准基向量，映射 $\eta_*\colon H_1(\Gamma;\mathbb{Z}) \to H_1(X_D;\mathbb{Z})$是满射。

步骤 4：通过圈空间选取带色横截集。对于每条颜色为 j的边 e，对 e 进行定向，使得η 在 e上正向经过 X_D 的第 j个花瓣。对于一条定向边 e，令 $e^* \in C^1(\Gamma;\mathbb{R})$表示其对偶边余链。以 $E_j \subset E(\Gamma)$ 表示颜色为 j的边的集合，并令 $Z_1 := H_1(\Gamma;\mathbb{R})$表示圈空间。由于 $\eta_*\colon H_1(\Gamma;\mathbb{Z}) \to H_1(X_D;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^D$ 是满射（步骤 3），诱导的实系数同调映射 $\eta_*\colon Z_1 \to H_1(X_D;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^D$ 也是满射。对于每种颜色 j，颜色为j的求值 $v_j \in Z_1^* = H^1(\Gamma;\mathbb{R})$是一个线性泛函，它对圈经过的颜色为$j$ 的边进行计数（带符号），得到代数数量。由于 η_* 在 Z_1上是满射，泛函 v_1、.....、v_D 在 Z_1上线性无关。

每个 v_j 都可分解为 $v_j = \sum_{e\in E_j} e^*\big|_{Z_1}$。考虑 $\Lambda^D(Z_1^*)$ 中的外积：

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_D = \sum_{(a_1,\dots,a_D)\in E_1\times\cdots\times E_D} a_1^*\big|_{Z_1} \wedge \cdots \wedge a_D^*\big|_{Z_1}.$$

由于 $v_1,\dots,v_D$线性无关，这个楔积非零，因此至少有一个项非零。选取一个 D-元组 $(a_1,\dots,a_D)$，满足 $a_i \in E_i$，使得 $a_1^*|_{Z_1},\dots,a_D^*|_{Z_1}$线性无关。令 $H_i \in \mathcal{S}$ 为对应于 a_i的超曲面分支。

步骤 *5*：连通补集。我们声称 $\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$是连通的。反设不然：那么存在一个非平凡的顶点划分 (S,S^c)，使得 $\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$ 中没有边跨越 S与 S^c。余边界 $\delta(\mathbf{1}_S) \in C^1(\Gamma;\mathbb{R})$（将 ±1 赋给跨越该划分的边，其余位置赋 0）于是支撑于 $\{a_1,\dots,a_D\}$上，从而得到一个非平凡线性组合 $\sum_i \alpha_i a_i^* = \delta(\mathbf{1}_S)$，满足$\alpha_i \in \{-1,0,1\}$。由于 $\delta(\mathbf{1}_S)$ 属于割空间 $B^1(\Gamma;\mathbb{R}) = Z_1^\perp$，我们得到 $\sum_i \alpha_i a_i^*\big|_{Z_1} = 0$，这与 $a_1^*|_{Z_1},\dots,a_D^*|_{Z_1}$线性无关矛盾。

因此，$\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$是连通的。记 Γ_{cut}为仅由 H_1、.....、H_D对 B进行分解所得的对偶图；它由 Γ 通过收缩 $\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$的每条非环边并删除 $\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$的每个环路得到。由于 $\Gamma\setminus\{a_1,\dots,a_D\}$是连通的，所有顶点都合并为一个单点，而所选的 D 条边 a_1、.....、a_D 则保留下来，成为该点处的环路。因此，Γ_{cut}是由 D 个圆构成的花束；特别地，它恰有一个顶点，所以 $F^\circ = B\setminus(H_1\cup\cdots\cup H_D)$是连通的。□

引理 4.4 (切割系统的花束映射)。对于命题 H_1、.....、H_D 中的超曲面 *4.3*，存在一个连续映射 $f\colon B \to X_D$，在 $f^{-1}(e_j)$ 上光滑，j分别对应每个 $p_i \in e_i$以及内点，使得：

(i) $f^{-1}(p_i) = H_i$对每个 $i = 1,\dots,D$ 都成立（因此，按构造，每个选定的纤维都是连通的）；*(ii)* $f_*\colon \pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$ 是满射；

(iii) $f(F^\circ)\subset X_D\setminus\{p_1,\dots,p_D\}$.

证明。 由于 H_i 光滑、闭且双侧，选取两两不相交的领嵌入$c_i\colon H_i\times[-1,1]\hookrightarrow B$，其中 $c_i(y,0)=y$。令 $C_i:=c_i(H_i\times(-1,1))$ 表示开领，并设$F_0:=B\setminus\bigcup_{i=1}^{D}C_i$。当领圈足够薄时， F_0 与紧块 F 微分同胚，因此是连通的。

对于每个 i，选择一个连续映射 $\theta_i\colon[-1,1]\to e_i$，在 $(-1,1)$ 上光滑，使得 $\theta_i(-1)=\theta_i(1)=v_0$ 且 $\theta_i|_{(-1,1)}:(-1,1)\to e_i$ 是一个微分同胚（因此，诱导环路恰好绕第 i 个花瓣一周）。令 $p_i:=\theta_i(0)\in e_i$。定义

$$f(x):=\begin{cases} v_0, & x\in F_0,\\ \theta_i(t), & x=c_i(y,t)\in C_i. \end{cases}$$

This 是连续的：在每个领圈的边界上， $\theta_i(\pm1)=v_0$，与 F_0 上的值相匹配 .

纤维结构。 由于 $\theta_i|_{(-1,1)}$ 是一个微分同胚，$\theta_i^{-1}(p_i)=\{0\}$，且 p_i 是一个正则值，因此$f^{-1}(p_i)=c_i(H_i\times\{0\})=H_i$。此外， $f(F_0)=\{v_0\}$且 $f(C_i)\subset e_i$，所以 $f^{-1}(p_j)\cap C_i\equiv\varnothing$，对$j\neq i$而言。

满射性。固定一个基点 $b_0\in F_0$。由于 F_0 连通，对于每个 i，都存在一条路径 α_i，位于 F_0 中，从 b_0 通往第 $y_i\in H_i$ 个领圈一侧的点 $c_i(y_i,-1)$。令 β_i 为路径$t\mapsto c_i(y_i,t)$，其中 $t\in[-1,1]$，它从领圈的一侧穿越到另一侧。令 α_i' 为 F_0 中的一条返回路径，从 $c_i(y_i,1)$ 回到 b_0（这样的路径存在，因为 $c_i(y_i,\pm1)\in F_0$，且 F_0 连通）。拼接路径 $\gamma_i:=\alpha_i\cdot\beta_i\cdot\alpha_i'$ 是 B 中以 b_0 为基点的一条环路。在 f 下，线段 α_i 和 α_i' 映射到基点 v_0，而 β_i 则经由 θ_i 绕第 i 个花瓣一周。因此，$f_*([\gamma_i])$ 是 $\pi_1(X_D,v_0)\cong F_D$ 的第 i 个自由生成元。由于 i 是任意的， f_* 是满射的。

性质 （*iii*）显然： $F^\circ=B\setminus\bigcup_i H_i$，因此 $f(F^\circ)\subset\{v_0\}\cup\bigcup_i(e_i\setminus\{p_i\})\subset X_D\setminus\{p_1,\dots,p_D\}$. □

注 4.5（拉回覆盖分解——概念上的关键环节）。连通切割系统及其所产生的纤维结构，是高维构造的核心要求。由引理 4.4(iii)， $f(F^\circ)\subset X_D\setminus\{p_1,\dots,p_D\}$，它是可缩的。因此， $f_*(\pi_1(F^\circ))=\{1\}$属于 F_D。令 $S:=F_D/\Lambda_m$ 表示陪集集合（因此 $|S|=|F_D:\Lambda_m|$）。与 Λ_m 对应的覆盖 $X_m'\to X_D$在可缩集 $X_D\setminus\{p_1,\dots,p_D\}$上限制为平凡覆盖。由于$f(F^\circ)$包含于此集合，拉回覆盖 $M_m\to B$ 在 F°上限制为平凡覆盖： F° 在 M_m 中的原像是不交并，由 $|S|$ 个 F°的副本构成，每个副本都等距映射到 F°。沿着 H_i的提升切开 M_m 后，这些分支的闭包是紧块 F的 $|S|$ 个副本，而 M_m 则通过按照 Schreier 图 Γ_m将这些副本沿其边界面 $H_i^{\pm}$粘合而得。

每个 H_i 的连通性至关重要：它保证每种颜色恰好为块 F贡献两个边界面 $H_i^{\pm}$，从而形成所需的简洁 $2D$面结构，用于第 4.2–4.4 节中的走廊与簇构造。

对于 本文余下部分，按照上述约定 $\partial F=H_1^+\cup H_1^-\cup\cdots\cup H_D^+\cup H_D^-$ e.

注 4.6. 对于固定的 n， N的选择以及由此确定的 D、基流形 B和块 F，都将一经选定便始终固定。近似过程中只有缩放参数 $m\to\infty$会变化。

4.2. **单胞问题与有效电导**。 固定一种颜色 $i\in\{1,\dots,D\}$。考虑通过沿 i面将块 F 的一个由 $\mathbb{Z}$ 索引的副本序列首尾粘合，并在每个副本内对每个 $j\neq i$ 将 H_j^+ 与 H_j^- 粘合（从而这些面成为内部界面）而得到的双无限$\sim i$周期链 S_i。所得的 $\widetilde{S}_i$ 是一个光滑非紧流形，具有一个沿 i 方向平移一个块的等距甲板变换 T_i。

存在一个（除加法常数外唯一的）调和坐标 χ_i，定义在 $\widetilde{S}_i$ 上并满足平移规则

$$\chi_i \circ T_i = \chi_i + 1.$$

通过霍奇理论证明存在性与正则性。回忆一下，商空间 $S_i/\langle T_i\rangle$ 与基流形 B 典范等距（将 F 的两个 i面以位移 T_i 粘合，并对 $j \neq i$的 j面进行粘合，即可重构 B）。由于 B 是闭定向黎曼流形（它可定向，是因为 Millson–Lubotzky 构造中的最简单型算术格 liein 恒等分支 $\mathrm{SO}_0(d,\ 1)$ 中，而该分支在 $\mathbb{H}^d$上保持定向），霍奇理论保证存在唯一的调和 1-形式 ω_i，其德拉姆类是 $[H_i] \in H_{d-1}$的庞加莱对偶（$B;\mathbb{R}$）。

我们验证 $[\omega_i] \neq 0$：因为 H_i是不分离的（补集 $F^\circ = B \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_D)$）根据命题4.3是连通的，并且 $\bigcup_{j\neq i} H_j$ 是有限个光滑闭超曲面的并，因此在 $B \setminus H_i$中是闭集且内部为空；因此 F° 在 $B \setminus H_i$中稠密，并且 $B \setminus H_i$ 作为一个连通集的闭包也是连通的），同调类 $[H_i]$非平凡，其庞加莱对偶也非平凡。

覆盖 $\pi\colon\ S_i \to B$ 是由同态分类的正则 $\mathbb{Z}$覆盖

$$\alpha_i : \pi_1(B) \to \mathbb{Z}, \qquad \alpha_i([\gamma]) = [\gamma]\cdot[H_i],$$

由与 H_i的代数交数给出：在切割堆叠模型中，穿过 H_i 会使块的指标改变 ±1，而穿过任意满足 $j \neq i$ 的 H_j 则不会改变指标。因此 $\pi_1(S_i) = \ker \alpha_i$。由于 $[\omega_i] = \mathrm{PD}[H_i]$ 在德拉姆同构下代表与 α_i 相同的上同调类$H^1(B;\ \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(B)\ \mathbb{R})$，我们有 $\pi^*[\omega_i] = 0$ 属于 $H^1(\widetilde{S}_i;\ \mathbb{R})$，所以 $\tilde{\omega}_i := \pi^*\omega_i$ 是恰当的。取满足 $d\chi_i = \tilde{\omega}_i$的 χ_i。

对于覆盖变换生成元 T_i，我们有 $d(T_i^*\chi_i - \chi_i) = T_i^* d\chi_i - d\chi_i = 0$，因此 $T_i^*\chi_i - \chi_i$在连通流形 S_i上是常数。若 $\tilde{\gamma}$ 是从 x 到 $T_i x$的任意路径，其投影 $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ 满足$\alpha_i([\gamma]) = 1$，于是

$$\chi_i(T_i x) - \chi_i(x) = \int_{\tilde{\gamma}} d\chi_i = \int_{\gamma} \omega_i = \langle [\omega_i], [\gamma]\rangle = \alpha_i([\gamma]) = 1.$$

因此 $\chi_i \circ T_i = \chi_i + 1$。由于 $d\chi_i = \tilde{\omega}_i$ 是调和的（$\delta\tilde{\omega}_i = 0$），我们在 $\widetilde{S}_i$上有 $\Delta\chi_i = 0$。特别地，χ_i 是光滑的，并且在链的每个块 F 上，余法向传输条件

$$\partial_{n^+}\chi_i = -\partial_{n^-}\chi_i \tag{4.1}$$

在每个内部界面上均成立（这仅仅是因为 χ_i 在这些界面上光滑，而这些界面是光滑超曲面 $H_j \subset B$的提升）。我们通过要求$\frac{1}{|H_i^-|}\int_{H_i^-} \chi_i dA = 0$来确定剩余的加法常数，从而使 $\chi_i|_{H_i^-}$ 均值为零，且 $\chi_i|_{H_i^+}$ 均值为 1。

定义有效电导常数为每周期能量：

$$C_i := \int_F |\nabla\chi_i|^2 dV > 0,$$

其中 F 被视为 T_i的基本域。正性显然：若 $C_i = 0$，则 χ_i将在每个周期上为常数，这与跳跃条件矛盾。

注4.7（均匀化观点）。调和坐标 χ_i 是拉普拉斯算子在 $\mathbb{Z}$-周期流形 S_i上的周期均匀化单胞问题的解：它在所有满足 $\chi \circ T_i = \chi + 1$ 的函数中，使每周期的狄利克雷能量达到最小（欧几里得类比可参见 [2, 第 1] 章）。这一变分刻画等价于上文的霍奇理论构造，但更容易推广到非均匀的廊道缩放。

通量归一化通过在一个周期上分部积分得到：由于 $\Delta\chi_i = 0$ 在 F的内部，

$$C_i = \int_F |\nabla\chi_i|^2 dV = \int_{\partial F} \chi_i \partial_n \chi_i dA.$$

来自 j-面的贡献（$j \neq i$）两两抵消：在每个识别对 $H_j^+ \cong H_j^-$上， χ_i 的迹相匹配（周期边界条件），且余法向导数满足 $\partial_{n^+}\chi_i = -\partial_{n^-}\chi_i$ （传输条件（4.1）），因此两个边界积分相互抵消。在两个 i-面$H_i^{\pm}$上，迹恰好相差1 （根据跳跃条件），且经传输后外法向通量满足 $\partial_{n^+}\chi_i = -\partial_{n^-}\chi_i$ （同样依据（4.1））。因此

$$\int_{H_i^+} \partial_n \chi_i dA = C_i, \qquad \int_{H_i^-} (-\partial_n \chi_i) dA = C_i. \tag{4.2}$$

引理4.8（走廊界与级数缩放）。 设 $W_{i,\ K}$ 是由 $\widetilde{K}$ 个连续的 i-块组成的有限走廊链，所有面 $j \neq i$ 都按照 S_i 中相同的粘合方式封闭，因此 $\partial W_{i,\ K}$ 恰由两个端面 Σ_i^-和 Σ_i^+组成（每个端面都与 $H_i^{\pm}$ 等距；我们用不同的记号 Σ 来区分走廊端面与单个单元的边界面）。

对 $u \in H^1(W_{i,\ K})$，定义两端的归一化通量平均值为

$$\langle u \rangle_- := \frac{1}{C_i} \int_{\Sigma_i^-} u(-\partial_n \chi_i) dA, \qquad \langle u \rangle_+ := \frac{1}{C_i} \int_{\Sigma_i^+} u(\partial_n \chi_i) dA.$$

（这些是总质量为 1 的归一化权重，依据 （4.2）；它们不必处处非负。）于是：

（i）（下界）对于每个 $u \in H^1(W_{i,\ K})$,

$$\int_{W_{i,K}} |\nabla u|^2 \geq \frac{C_i}{K} \big(\langle u \rangle_+ - \langle u \rangle_- \big)^2. \tag{4.3}$$

（ii）（常数端点数据的上界）对于任意常数 a、$b \in \mathbb{R}$，存在 $u_{a,\ b} \in H^1(W_{i,\ K})$，其迹在端面上为常数，在 Σ_i^- 上为 $u_{a,\ b} \equiv a$，在 Σ_i^+ 上为 $u_{a,\ b} \equiv b$，并且满足

$$\int_{W_{i,K}} |\nabla u_{a,b}|^2 \leq \frac{C_i}{K}(a-b)^2 + \frac{C_{\mathrm{bl}}}{K^2}(a-b)^2, \tag{4.4}$$

其中 $C_{\mathrm{bl}} > 0$ 仅取决于固定的块几何（特别是与 K无关）。

因此，端点值为常数时，最小狄利克雷能量满足

$$\inf\Big\{ \int_{W_{i,K}} |\nabla u|^2 : u|_{\Sigma_i^-} \equiv a,\ u|_{\Sigma_i^+} \equiv b \Big\} = \frac{C_i}{K}(a-b)^2 + O\left(\frac{(a-b)^2}{K^2} \right).$$

证明。 **(i)** 令 χ 表示 χ_i 在有限走廊 $W_{i,K}$上的限制。根据单元问题的构造， χ 在每个块内部（$\Delta\chi = 0$）都是调和函数，并且在每个内部粘合界面上满足余法向传输条件（4.1）；对 $W_{i,K}$ 进行分部积分时，这两点确保内部界面上的贡献两两抵消，因此只有两个端面有贡献。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\int_{W_{i,K}} |\nabla u|^2 \geq \frac{\left(\int_{W_{i,K}} \nabla u \cdot \nabla \chi \right)^2}{\int_{W_{i,K}} |\nabla \chi|^2}.$$

根据 C_i 作为每周期能量的定义，分母等于 KC_i。对于分子，在每个块上分部积分得到 $\int_{W_{i,\ K}} \nabla u \cdot \nabla \chi = -\int_{W_{i,K}} u \Delta \chi + \int_{\partial W_{i,K}} u \partial_n \chi \, dA$，再加上内部界面项；由于 $\Delta\chi = 0$ 在每个块内部成立，且传输条件（4.1）使内部界面上的贡献抵消（测试函数 $u \in H^1(W_{i,K})$具有匹配迹，并且 $\partial_{n^+}\chi = -\partial_{n^-}\chi$），最终只剩下两个端面的贡献：

$$\int_{W_{i,K}} \nabla u \cdot \nabla \chi = \int_{\Sigma_i^+} u \partial_n \chi dA + \int_{\Sigma_i^-} u \partial_n \chi dA = C_i \big(\langle u \rangle_+ - \langle u \rangle_- \big),$$

使用 $\langle \cdot \rangle_{\pm}$ 的定义。代入即可证明（4.3）。

（ii）考虑仿射校正函数 $u_0 := a + \frac{b-a}{K}\chi$。其能量恰好为

$$\int_{W_{i,K}} |\nabla u_0|^2 = \frac{(b-a)^2}{K^2} \int_{W_{i,K}} |\nabla \chi|^2 = \frac{C_i}{K}(b-a)^2.$$

然而， u_0 在端面上的迹不一定逐点为常数：左侧等于 $a + \frac{b-a}{K}\chi|_{\Sigma_i^-}$，右侧等于 $a + \frac{b-a}{K}\chi|_{\Sigma_i^+}$。由于 $\chi \circ T_i = \chi + 1$，我们可以写成 $\chi|_{\Sigma_i^\pm} = c_\pm + \psi$，其中$c_\pm$ 为常数（且 $c_+ - c_- = K$），而 ψ 是在两个面上相同的均值为零振荡部分（通过链周期性加以对应）。特别地，边界失配函数

$$\delta_- := a - u_0|_{\Sigma_i^-}, \qquad \delta_+ := b - u_0|_{\Sigma_i^+}$$

满足 $\|\delta_\pm\|_{L^2(\Sigma_i^\pm)} \le C|a-b|/K$，其中常数 C 仅依赖于固定的单胞几何。按照我们的规范约定（ χ_i 在Σ_i^-上的均值为零），失配可明确写为

$$\delta_- = -\frac{b-a}{K}\chi_i\big|_{\Sigma_i^-}, \qquad \delta_+ = -\frac{b-a}{K}(\chi_i - K)\big|_{\Sigma_i^+},$$

其中 $\chi_i|_{\Sigma_i^-}$ 的均值为零，且 $(\chi_i - K)|_{\Sigma_i^+}$ 的均值也为零（因为根据跳跃条件， $\chi_i|_{\Sigma_i^+}$ 的均值为 K ）。特别地， $\delta_\pm$ 均为相应面上固定的零均值光滑函数的 $O(|a-b|/K)$ 倍数。

选取光滑截断函数 $\eta_\pm$，使其支撑包含于相应端面 $\Sigma_i^\pm$在首块/末块内的一个领圈邻域中，并满足 $\eta_\pm \equiv 1$ 在 $\Sigma_i^\pm$上成立，且 $\eta_\pm \equiv 0$ 在领圈外成立。由于该领圈与 F的所有其他边界面 $H_j^\pm (j \neq i)$ 不相交，因此修正自动满足走廊流形中的侧面识别。由于 χ_i 是定义在整个链上的光滑函数，它为其自身的边界迹提供了一个显式的光滑延拓：在首块上，我们设 δ_-^{ext}: $= -\frac{b-a}{K}\chi_i$；在末块上，我们设 $\delta_+^{\mathrm{ext}} := -\frac{b-a}{K}(\chi_i - K)$（这里的 χ_i表示走廊中实际末块上的限制，在该块上 $\chi_i|_{\Sigma_i^+}$ 的均值为 K）。 η_- 和 η_+ 的支撑不相交：当为 $K > 1$ 时，它们位于不同的块中；当为 $K = 1$ 时，它们分别支撑在单个块中两个不同边界分支 Σ_i^-和 Σ_i^+的互不相交的领圈邻域内。无论哪种情形，两个边界层修正之间都没有交叉项。根据乘积法则，

$$\int_{(\text{end block})} |\nabla(\eta_\pm \delta_\pm^{\mathrm{ext}})|^2 \le C_{\mathrm{bl}} \frac{(a-b)^2}{K^2},$$

其中， C_{bl} 仅依赖于$\|\nabla\chi_i\|_{L^2(F)}$、$\|\chi_i\|_{L^\infty(F)}$和 $\|\nabla\eta_\pm\|_{L^\infty}$，它们都是固定的几何数据，与 K 无关。无需使用抽象的迹延拓算子。定义

$$u_{a,b} := u_0 + \eta_- \delta_-^{\mathrm{ext}} + \eta_+ \delta_+^{\mathrm{ext}}.$$

由构造可知，$u_{a、b} \equiv a$ 在 Σ_i^- 上成立，且 $u_{a、b} \equiv b$ 在 Σ_i^+ 上成立；其能量与 u_0 的能量之差至多为两个边界层能量加一个交叉项。对于交叉项： $\nabla u_0 = \frac{b-a}{K}\nabla\chi$，而在单个边界块上，$\int$块 $|\nabla\chi|^2 = C_i$，因此$\|\nabla u_0\|_{L^2(\text{块})} = |b-a|\sqrt{C_i}/K = O(|b-a|/K)$。边界层延拓也满足 $\|\nabla(\eta_\pm\delta_\pm^{\mathrm{ext}})\|_{L^2} = O(|b-a|/K)$（由$\delta_\pm$上的相同界可得）。因此，它们的柯西–施瓦茨不等式乘积为 $O(|b-a|/K) \times O(|b-a|/K) = O((b-a)^2/K^2)$，与 C_{bl}/K^2 界一致。这就证明了 (4.4)。□

注4.9。由于超曲面 H_1、……、H_D 两两不相交（命题 4.3），块F是一个紧流形，其边界由 $2D$ 光滑面 $H_i^\pm$构成。因此，标准 Sobolev迹定理适用于每个面，而常数 C_{tr}、C_{bl} 仅取决于 F 的固定几何结构。

4.3. 带重顶点的宏观网络。固定一个严格递增的目标谱 $0 = \lambda_0^* < \lambda_1^* < \cdots < \lambda_n^*$。取奇数 $N \geq \max(n+1, 5)$，并令 $D = (N-1)/2$。（我们要求 $N \geq 5$，因为对于 $N = 3$，有 $D = 1$，而 $2D$-正则表示 2-正则，即由若干互不相交的环组成，而非扩张图；谱隙界要求 $D \geq 2$，即度数为 $2D \geq 4$。）根据 Walecki 定理（例如参见 [1]），K_N 的边可分解为 D 个边互不相交的无向哈密顿圈；我们为每个圈选择两种循环定向之一，从而得到 D 个有向哈密顿回路。这种定向确保每个顶点对每种颜色恰有一条入边和一条出边，并据此将颜色 $c(e) \in \{1, \ldots, D\}$ 分配给每条边。

应用引理2.1于 K_N 及其顶点测度 $V_v \equiv 1$，得到严格正的边权重$w_e^* > 0$，使得 L_{K_N} 的非零特征值为

$$\mu_k = \lambda_k^* V_F \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

其中 $V_F :=$ 体积(F) 是基本块的黎曼体积（并且，如果 $N > n+1$，其余特征值 $\mu_{n+1}, \ldots, \mu_{N-1}$ 取为满足 $\mu_k > (\lambda_n^* + 1)V_F$对所有 $k \geq n+1$均成立；这是可行的，因为引理2.1 允许在 K_N上自由指定严格递增序列）。

令 $m \in \mathbb{N}$ 为一个较大的缩放参数。定义：

- **重顶点：** 每个宏观顶点 v 都将被替换为一个包含 m^3 个块的簇 块 F。
- **长廊道：** 每条宏观边 e将被替换为一串

$$K_e(m) := \left\lfloor \frac{mC_{c(e)}}{w_e^*} \right\rfloor$$

沿颜色 $c(e)$ 的块（由于 $C_{c(e)} > 0$ 和 $w_e^* > 0$，我们有 $K_e(m) \geq 1$ 对所有 m 充分大）。

簇内的扩张子布线（带有外露端口）。在每个簇内，我们沿其 $2D$ 面粘合 m^3 块，使得：(i) 内部粘合图是一个具有一致谱隙的连通扩张图；(ii) 对于每种颜色 i，我们恰好外露一个入射面和一个出射面，以连接对应于与 v相接、颜色为 i 的唯一入射/出射宏观边的走廊。

具体而言，对于每个簇，我们需要一个在 m^3 个顶点上的简单 $2D$-正则图，该图 (a) 具有一致谱隙；(b) 具有边连通度 $2D$；并且 (c) 可分解为 D 个有向置换颜色类。

对于 (a) 和 (b)：根据 Friedman 定理，具有 n 个顶点（$2D \geq 4$ 固定）的均匀随机简单 $2D$-正则图 [11], 几乎必然满足 $\lambda_2 \leq 2\sqrt{2D-1} + o(1)$，从而得到归一化拉普拉斯算子谱隙 $\geq c_{\exp}(D) > 0$。此类图 $2D$ 也几乎必然具有等于[25, §2.6]的点连通度，因此边连通度为 $2D$。特别地，对于所有充分大的 m，存在一个在m^3 个顶点上的简单 $2D$-正则图 Γ_v，同时具备这两种性质。

对于 (c)：连通的 $2D$-正则简单图是无桥的（连通的 $2k$-正则图若含有一条桥，就会产生一个度数和为奇数的连通分量，这与假设矛盾）。根据 Petersen 的经典 2-因子分解定理，每个偶数度的无桥正则图都可分解为边不相交的 2-因子。将此定理应用于 Γ_v，可得 D 个边不相交的 2-因子 F_1、.....、F_D；每个 F_i 都是覆盖所有 m^3 个顶点的若干圈的并。将 F_i 中的每个圈定向，从而得到 σ_v、$_i$ 上的一个置换 $\{1, \ldots, m^3\}$。将块 t 的第 i 个出射面与块 σ_v 的第 i 个入射面粘合（t）。根据构造，所得有色有向图在每个顶点处，每种颜色恰有一条入边和一条出边。

令 $h_0 = h_0(D) > 0$ 为所选图 Γ_v 的边扩张 Cheeger 常数的一致下界（采用约定 $h(\Gamma) = \min_{|S| \leq n/2} |\partial_E S|/|S|$，其中 $\partial_E S$ 表示连接 S 与其补集的边集）；根据应用于谱隙 $c_{\exp}(D)$ 的离散切格不等式，这样的下界 $h_0 > 0$ 存在，且与 m 无关。

为显露端口，我们为每种颜色选取一条边作为外部走廊连接点。对于每种颜色 i，选择一条颜色为 i 的边 e_i（即一条边 $s_i \to \sigma_{v,\ i}(s_i)$），并将其从内部

图中删除。 s_i 的空出的出射面和 $\sigma_{v,\ i}(s_i)$ 的空出的入射面成为颜色 i 的端口面，该颜色的外部走廊将连接到这些端口面。通过贪心论证，我们选取的 D 条删除边两两顶点不相交：每个颜色类都是由顶点集为 m^3、边数为 m^3 的互不相交的环组成，因此，选取 $i-1$ 条端口边（涉及 $2(i-1)$ 个顶点）后，每个这样的顶点至多关联 2 条颜色为 i 的边，从而至多有 $4(i-1)$ 条颜色为 i 的边被阻断；对于 $m^3 > 4D$，仍有一条与先前边不相交的颜色为 i 的边。这样恰好删除了 D 条内部边。

修改后的内部图 Γ_v° 有 $2D$ 个度为 $2D-1$ 的顶点（每条被删除边的两个端点），以及其余 m^3-2D 个度为 $2D$的顶点。

我们声称，Γ_v° 在 m中始终保持正的 Cheeger 常数：

- **删除端口后的连通性。** 所选取的实现具有边连通度 $2D$（上述性质 (ii)）。由于 $2D > D$，删除 D 条端口边后仍保持连通。
- ***Cheeger* 界。** 删除 D 条边至多使任意子集的边界边集改变 D，因此对于任意满足 $|S| \le m^3/2$的 S，

$$|\partial S|_{\Gamma_v^\circ} \ge |\partial S|_{\text{old}} - D \ge h_0|S| - D.$$

如果 $|S| \ge 2D/h_0$ 这就得到 $|\partial S|_{\Gamma_v^\circ}/|S| \ge h_0/2$。如果 $|S| < 2D/h_0$，则连通性意味着$|\partial S|_{\Gamma_v^\circ} \ge 1$，从而得到 $|\partial S|/|S| \ge h_0/$（$2D$）。

因此 Γ_v° 的 Cheeger 常数为 $\ge \min(h_0/2, h_0/(2D)) = h_0/(2D) > 0$，且这一结论对 m一致成立。（此 Cheeger 界与一致的度数上界 $\le 2D$是后文唯一用到的 Γ_v° 的性质；参见引理4.12。）

注 4.10（概率方法）。 扩张子布线通过概率方法构造。Friedman 定理 [11] 以及 [25, 第 2.6] 节的连通性结果保证：对于每个充分大的 m，都存在一个具有近最优谱隙且边连通度达到最大值的简单 $2D$-正则图，该图有 m^3个顶点。随后，Petersen 经典 2-因子分解定理将此图分解为 D 个有向置换颜色类，从而得到所需的 Schreier 着色。删除端口后的 Cheeger 分析是确定性的，只取决于所选图的 Cheeger 常数和边连通度。因此，该构造是存在性的（非构造性的），但对每个 m都能得到一个确定的覆盖流形 M_m。

全局 Schreier 覆盖。将所有簇和走廊组装起来（走廊~内部块上未使用的面，按照 S_i的定义，恰好用其他颜色的自环封闭；具体而言，对于每个这样的块，颜色为 $j \ne c$（e）的两个面 H_j^+ 和 H_j^-彼此识别，这只是在该界面处重建 B 的光滑局部几何结构，不会引入奇点），从而得到一个有限的连通有向 D正则带色图 Γ_m，其中每个顶点在每种颜色下恰好有一条入边和一条出边。（连通性来自该构造：走廊按照 K_N连接各个簇，而内部的扩张子布线使每个簇连通。）这样的连通 D正则图恰好是某个有限集合上的传递作用所对应的 Schreier 图，因此也对应一个有限指数子群 $\Lambda_m < F_D$：F_D 的每个生成元都作用为顶点集上的一个置换，而 Λ_m 是所选基点的稳定子群（例如参见 [14, §11.1]）。子群 Λ_m 确定了花束D 个圆周的一个有限覆盖 $X'_m \to X_D$；沿满射 $f\colon B \to X_D$（引理 4.4）将其拉回，可得到一个有限覆盖

$$M_m := f^*(X'_m) \longrightarrow B.$$

拉回 M_m 是连通的：因为 $f_*\colon \pi_1(B) \twoheadrightarrow F_D$ 是满射，且 $\Lambda_m < F_D$ 是有限指数子群，所以像 $f_*(\pi_1(B))$在 F_D/Λ_m上作用传递，因此拉回覆盖只有一个连通分支（依据覆盖分支的标准轨道描述；参见例如 [13, 第 1 章，第 1.3] 节）。由于 M_m 是光滑双曲流形 B的真正黎曼覆盖，它通过拉回继承常曲率度量 $\kappa = -1$，自身也是光滑黎曼流形（特别是，所有粘合界面都是光滑的）。 M_m的分解

分解为与 F等距的块，粘合模式由 Γ_m给出，这可由备注 4.5推出：覆盖在 F° 上的平凡性（由引理 4.4(iii) 保证，该引理将 $f(F^\circ)$ 置于可缩集$X_D \setminus \{p_1,\dots,p_D\}$中）给出 $|S|$ 个 F° 在 M_m中的等距副本；沿着 H_i的提升切开，得到$|S|$ 个紧块 F的副本，并按照 Γ_m沿其边界面粘合。

4.4. 离散缩放（图模型）。定义一个离散拉普拉斯算子 L_m，其作用于 K_N，满足：

$$\text{vertex measures } \mathsf{V}_v(m) := m^3 V_F, \qquad \text{edge weights } \mathsf{w}_e(m) := \frac{C_{c(e)}}{K_e(m)}.$$

这是宏观“重顶点”图模型。

引理 4.11（宏观图的缩放）。对于每个固定的 $k \in \{1,\dots,N-1\}$,

$$\lambda_k(L_m) = \frac{\mu_k}{m^4 V_F}(1 + O(m^{-1})),$$

其中 $\mu_k = \lambda_k(L^*)$ 是参考拉普拉斯算子 L^* 在 K_N 上、顶点测度为单位值且边权重为 w_e^* 时的特征值。特别地，对于 $k \le n$ （按构造有 $\mu_k = \lambda_k^* V_F$），这给出 $\lambda_k(L_m) = m^{-4}\lambda_k^*(1 + O(m^{-1}))$；而对于 $n+1 \le k \le N-1$ （根据 *§4.3* 中的填充选择，$\mu_k > (\lambda_n^* + 1)V_F$），则给出 $m^4\lambda_k(L_m) \to \mu_k/V_F > \lambda_n^* + 1$。

证明。 根据 $K_e(m)$的定义，

$$\mathsf{w}_e(m) = \frac{C_{c(e)}}{\lfloor m C_{c(e)}/w_e^* \rfloor} = \frac{w_e^*}{m}\big(1 + O(m^{-1})\big),$$

在 K_N 的有限条边上均一致成立。

令 L^* 表示定义在 K_N 上、顶点测度均为 1 且边权重为 w_e^* 的拉普拉斯算子。那么，L_m 是缩放算子

$$\frac{1}{m^4 V_F} L^*,$$

因为将所有边权重乘以 $1/m$ 会使拉普拉斯算子乘以 $1/m$，而将所有顶点测度乘以 $m^3 V_F$ 会使其除以 $m^3 V_F$（因为顶点测度出现在（2.1）的分母中）。

由于系数误差在算子层面为 $O(m^{-5})$，且 K_N 是有限维的，特征值的绝对误差为 $O(m^{-5})$，因此乘以 m^4 后，相对误差为 $O(m^{-1})$。所以，对每个 $k \in \{1,\dots,N-1\}$,

$$\lambda_k(L_m) = \frac{1}{m^4 V_F}\mu_k(1 + O(m^{-1})).$$

对于 $k \le n$，根据构造，$\mu_k = \lambda_k^* V_F$，得到 $\lambda_k(L_m) = m^{-4}\lambda_k^*(1 + O(m^{-1}))$. □

4.5. 谱约化：从 M_m 到 L_m. 令 $\nu_k(M_m)$表示(M_m, g_{M_m})上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子（曲率为 -1）的第 k个特征值（按重数计）。

我们始终使用 L^2-归一化函数：$\|u\|_{L^2(M_m)} = 1$。我们将 $\langle \bar u, L_m \bar u\rangle_{\mathsf{V}} := \sum_v \mathsf{V}_v \bar u_v (L_m \bar u)_v = \sum_e \mathsf{w}_e(\bar u_{v'} - \bar u_v)^2$ 记作与加权图拉普拉斯算子 L_m 相关的狄利克雷能量（注意：这里使用的是 $\ell^2(\mathsf{V})$内积，而非欧几里得内积 $\bar u^{\mathsf T} L_m \bar u$；后者会引入多余的$\mathsf{V}_v^{-1}$因子）。将 M_m 分解为 N 顶点簇$U_{v,m}$（$\mathrm{Vol}(U_{v,m}) = m^3 V_F$）和 $\binom{N}{2}$ 走廊$W_{e,m}$（$\mathrm{Vol}(W_{e,m}) = K_e(m) V_F = O(m)$），它们仅共享各自共有的端口面。

谱约化的证明由六个模块化要素构成，下面将它们作为独立结果陈述，然后组合起来进行主要比较：

(A) 一致簇庞加莱不等式 (引理 4.12)：扩张图粘合块上的一致诺伊曼谱隙。**(B)** 端口处的定量迹估计 (估计式 (4.9))：端口面上的通量平均值近似于簇均值。

(C) 走廊有效电导（引理 4.8）：走廊狄利克雷能量关于端点边界数据的上、下界。(C′) 走廊 L^2- 质量界：低能函数在走廊上的 L^2 质量可忽略。(D) 通过延拓进行上界比较：$\nu_k(M_m) \le \lambda_k(L_m)(1+O(m^{-1}))$。(E) 通过簇平均进行下界比较：$\nu_k(M_m) \ge \lambda_k(L_m)(1-o(1))$。

这些结果与一个寄生特征值界（命题 4.15）结合使用，以确保不希望出现的特征值不会进入目标谱窗。

（A）簇上的一致庞加莱不等式。

引理 4.12（扩张图粘合块的一致诺伊曼谱隙）。设 F 是一个带边界的紧黎曼流形，其有 $2D$ 个边界面；设 Γ 是一个具有 m^3 个顶点、组合切格常数为 $h(\Gamma) \ge h_0 > 0$ 的连通图。设 U 是按照 Γ 将 m^3 个 F 沿其面粘合而成的黎曼流形（在 $O(D)$ 个外露端口面上取诺伊曼边界条件）。那么存在与 m 无关的 $C_P = C_P(F, h_0) > 0$，使得对每个 $u \in H^1(U)$，

$$\int_U |u-\bar{u}|^2 \le C_P \int_U |\nabla u|^2, \qquad \bar{u} := \frac{1}{\mathrm{Vol}(U)} \int_U u. \tag{4.5}$$

证明。我们给出一个自足的区域分解论证（比较 Kanai [15] 和 Man- tuano [19] 关于闭流形上相关的粗等距离散化方法）。令$F_1, \ldots\ldots, F_{m^3}$表示 U 内的 F 个副本，并令 $\bar{u}_j := V_F^{-1} \int_{F_j} u$ 表示块均值。对于任意具有全局平均值 $\bar{u} = 0$（等价地，$\sum_j \bar{u}_j = 0$）的 $u \in H^1(U)$，我们通过结合局部和全局庞加莱不等式，从上方估计 $\int_U |u|^2$。

步骤 *1*（块上的局部庞加莱不等式）。每个块 F_j 都与具有光滑边界的固定紧流形 F 等距，因此 $\lambda_1^{\mathrm{Neu}}(F) =: \lambda_F > 0$ 给出

$$\int_{F_j} |u-\bar{u}_j|^2 \le \frac{1}{\lambda_F} \int_{F_j} |\nabla u|^2. \tag{4.6}$$

对 j求和：$\sum_j \int_{F_j} |u-\bar{u}_j|^2 \le (1/\lambda_F) \int_U |\nabla u|^2$。

步骤 *2*（将相邻块均值与梯度联系起来）。对于沿公共面 Σ_{jk}拼接的块 F_j，F_k，设 $\bar{u}_\Sigma := |\Sigma_{jk}|^{-1} \int_{\Sigma_{jk}} u dA$ 为面平均值。固定块 F 上的迹不等式给出$|\bar{u}_j - \bar{u}_\Sigma| \le C_{\mathrm{adj}} \|\nabla u\|_{L^2(F_j)}$，其中常数 C_{adj} 仅取决于 F（通过迹不等式 + 、柯西–施瓦茨不等式+和庞加莱不等式），在 F_k上也同样成立。根据三角不等式：

$$(\bar{u}_j - \bar{u}_k)^2 \le 4C_{\mathrm{adj}}^2 \Big(\int_{F_j} |\nabla u|^2 + \int_{F_k} |\nabla u|^2 \Big). \tag{4.7}$$

步骤 3（由 Cheeger 常数推出离散庞加莱不等式）。根据假设，粘合图 Γ 具有 $h(\Gamma) \ge h_0 > 0$，且度数一致有界为 $d_{\max} \le 2D$。由 Mohar 关于组合拉普拉斯算子的离散切格不等式 [22]，等周数 $i(\Gamma)$ 与第一个非零特征值 $\lambda_1(\Gamma)$ 满足 $i(\Gamma) \le \sqrt{\lambda_1(2d_{\max} - \lambda_1)}$，从而得到 $\lambda_1(\Gamma) \ge i(\Gamma)^2/(2d_{\max})$（关于正则图上的归一化拉普拉斯算子版本，另见 [14, §4.4–4.5]）。由于 $i(\Gamma) \ge h(\Gamma) \ge h_0$，我们得到$\lambda_1(\Gamma) \ge h_0^2/(4D) =: c_{\mathrm{gap}}(h_0, D) > 0$。由于 $\sum_j \bar{u}_j = 0$，离散庞加莱不等式给出$\sum_j \bar{u}_j^2 \le (1/c_{\mathrm{gap}}) \sum_{(j,k)\in E} (\bar{u}_j - \bar{u}_k)^2$。代入 (4.7)，并注意每个块至多出现在$2D$ 个邻接项中：

$$V_F \sum_j \bar{u}_j^2 \le \frac{8DV_F C_{\mathrm{adj}}^2}{c_{\mathrm{gap}}} \int_U |\nabla u|^2. \tag{4.8}$$

步骤 *4*（合并）。由于 $\int_{F_j}(u-\bar{u}_j)=0$，交叉项在 $\int_{F_j}|u|^2=\int_{F_j}|u-\bar{u}_j|^2+V_F\bar{u}_j^2$ 中消失。因此：

$$\int_U|u|^2=\sum_j\int_{F_j}|u-\bar{u}_j|^2+V_F\sum_j\bar{u}_j^2\le\underbrace{\Big(\frac{1}{\lambda_F}+\frac{8DV_FC_{\mathrm{adj}}^2}{c_{\mathrm{gap}}}\Big)}_{=:C_P}\int_U|\nabla u|^2.$$

所有常数（λ_F，D，V_F，C_{adj}，c_{gap}）仅依赖于 F和 D，而不依赖于 m。 □

我们用 $\bar{u}_v$ 表示 u在簇$U_{v,\,m}$上的平均值。

（B）端口处的定量迹估计。固定一个围成簇$U_{v,\,m}$的端口面 Σ，并令 F_Σ为与该面相邻的簇块。由于 F 具有固定几何结构，F 上的标准迹不等式给出一个常数 $C_{\mathrm{tr}}>0$，使得

$$\|u-\bar{u}_v\|_{L^2(\Sigma)}^2\le C_{\mathrm{tr}}\Big(\|u-\bar{u}_v\|_{L^2(F_\Sigma)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(F_\Sigma)}^2\Big).$$

由于 $F_\Sigma\subset U_{v,\,m}$，我们有 $\|u-\bar{u}_v\|_{L^2\,(F_\Sigma)}^2\le\|u-\bar{u}_v\|_{L^2\,(U_{v,\,m})}^2\le C_P\int_{U_{v,\,m}}|\nabla u|^2$ 由（4.5），类似地 $\|\nabla u\|_{L^2\,(F_\Sigma)}^2\le\int_{U_{v,\,m}}|\nabla u|^2$。因此

$$\|u-\bar{u}_v\|_{L^2(\Sigma)}^2\le C'\int_{U_{v,m}}|\nabla u|^2,\tag{4.9}$$

其中 $C'=C_{\mathrm{tr}}(C_P+1)$，且与 m 无关。

(C) 用簇均值替代通量平均值。对于一条走廊$W_{e,\,m}$ 颜色为 $i=c(e)$ 连接簇 v 和 v'，引理 4.8(i) 给出

$$\int_{W_{e,m}}|\nabla u|^2\ge\frac{C_i}{K_e}\big(\langle u\rangle_+-\langle u\rangle_-\big)^2,$$

其中 $\langle u\rangle_\pm$ 是两端的归一化通量平均值。现在我们将其替换为簇均值 u_v，$u_{v'}$。

根据定义，$\langle u\rangle_+=\frac{1}{C_i}\int_{\Sigma^+}u\partial_n\chi_i dA$，因此

$$|\langle u\rangle_+-\bar{u}_{v'}|=\frac{1}{C_i}\left|\int_{\Sigma^+}(u-\bar{u}_{v'})\partial_n\chi_i dA\right|\le\frac{\|\partial_n\chi_i\|_{L^2(\Sigma^+)}}{C_i}\|u-\bar{u}_{v'}\|_{L^2(\Sigma^+)}.$$

由于 $\partial_n\chi_i$ 在固定的面几何上光滑，$\|\partial_n\chi_i\|_{L^2(\Sigma^+)}/C_i$ 是一个 C_χ 仅取决于块 F的固定常数。（由于 χ_i是在紧块 F上的固定光滑函数，量$\|\partial_n\chi_i\|_{L^2(\Sigma^\pm)}$ 是由 F的黎曼几何确定的一个确定正常数；我们定义 $C_\chi:=\|\partial_n\chi_i\|_{L^2(\Sigma^\pm)}/C_i$。）结合（4.9）：

$$|\langle u\rangle_\pm-\bar{u}_w|\le C_\chi\sqrt{C'}\left(\int_{U_{w,m}}|\nabla u|^2\right)^{1/2}=:A\left(\int_{U_{w,m}}|\nabla u|^2\right)^{1/2},\tag{4.10}$$

其中，w 是与该端相邻的簇，且$A=C_\chi\sqrt{C'}$ 与 m无关。

现在写作 $\langle u\rangle_+-\langle u\rangle_-=(\bar{u}_{v'}-\bar{u}_v)+\eta_e$，其中

$$|\eta_e|\le A\left(\int_{U_{v,m}}|\nabla u|^2\right)^{1/2}+A\left(\int_{U_{v',m}}|\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{C_i}{K_e}\big(\langle u\rangle_+-\langle u\rangle_-\big)^2&=\frac{C_i}{K_e}\big[(\bar{u}_{v'}-\bar{u}_v)^2+2(\bar{u}_{v'}-\bar{u}_v)\eta_e+\eta_e^2\big]\\&\ge\frac{C_i}{K_e}(\bar{u}_{v'}-\bar{u}_v)^2-\frac{C_i}{K_e}\big[2|\bar{u}_{v'}-\bar{u}_v||\eta_e|+\eta_e^2\big].\end{aligned}\tag{4.11}$$

我们在假设 u 具有 $\|u\|_{L^2}=1$且处于低能窗口，即 $\int_{M_m}|\nabla u|^2=\nu=O(m^{-4})$ 的条件下估计修正项。

由于 $\mathrm{Vol}(U_{v,m}) = m^3 V_F$ 且 $\|u\|_{L^2} = 1$，簇均值满足 $\bar{u}_v = O(m^{-3/2})$，因此 $|\bar{u}_{v'} - \bar{u}_v| = O(m^{-3/2})$。误差项满足 $|\eta_e| \le 2A\nu^{1/2} = O(m^{-2})$。因此

$$\frac{C_i}{K_e}\big[2|\bar{u}_{v'} - \bar{u}_v||\eta_e| + \eta_e^2\big] = O(m^{-1})\big[O(m^{-3/2}\cdot m^{-2}) + O(m^{-4})\big] = O(m^{-9/2}).$$

对 K_N 的有限条边求和：

$$\sum_e \int_{W_{e,m}} |\nabla u|^2 \ge \sum_e \mathsf{w}_e(\bar{u}_{v'} - \bar{u}_v)^2 - O(m^{-9/2}) = \langle \bar{u}, L_m \bar{u}\rangle_{\mathsf{V}} - O(m^{-9/2}). \tag{4.12}$$

(C′) 走廊 L^2 质量界。

引理 4.13 (走廊 L^2-质量估计)。对于任意 L^2-归一化的 $u \in H^1(M_m)$ 且满足 $\int_{M_m} |\nabla u|^2 = \nu$，

$$\sum_e \int_{W_{e,m}} |u|^2 \le O(m^{-2}) + O(m^2)\nu. \tag{4.13}$$

特别地，对于满足 $\nu = O(m^{-4})$ 的低能函数，走廊 L^2 质量为 $O(m^{-2})$。若进一步所有簇均值为零（对所有 v 均如此），则

$$\sum_e \int_{W_{e,m}} |u|^2 \le O(m^2)\nu. \tag{4.14}$$

证明。我们利用能量来界定 u 在走廊上的 L^2 质量。考虑一条走廊 $W_{e,m}$，它包含 $K_e = K_e(m)$ 个块 $F_1, \dots, F_{K_e}$，连接簇 v 和 v'。

在每个块 F_j 上，令 $\bar{u}_j := \frac{1}{V_F}\int_{F_j} u$ 为块均值。相邻块的块均值满足 $|\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j| \le C_{\mathrm{adj}} \|\nabla u\|_{L^2(F_j \cup F_{j+1})}$，其中常数 C_{adj} 仅取决于 F：事实上，若 $\Sigma_{j,\,j+1} = F_j \cap F_{j+1}$ 是平均值为 $\bar{u}_{\Sigma_{j,\,j+1}} := |\Sigma|^{-1}\int_{\Sigma_{j,\,j+1}} u dA$ 的公共面，则由 F 上的庞加莱不等式和迹不等式可得 $|\bar{u}_j - \bar{u}_{\Sigma_{j,\,j+1}}| \le C'_{\mathrm{tr}} \|\nabla u\|_{L^2(F_j)}$，在 F_{j+1} 上同理；由三角不等式可得 $C_{\mathrm{adj}} = 2C'_{\mathrm{tr}}$。边界块均值 $\bar{u}_1$ 可通过相邻簇及其公共端口面 Σ 控制。注意，$F_1 \subset W_{e,\,m}$ 与簇块 $F_\Sigma \subset U_{v,\,m}$ 共享界面 Σ，但除此之外互不相交。我们使用三角不等式：

$$|\bar{u}_1 - \bar{u}_v| \le \underbrace{|\bar{u}_1 - \bar{u}_\Sigma|}_{\text{corridor side}} + \underbrace{|\bar{u}_\Sigma - \bar{u}_v|}_{\text{cluster side}},$$

其中 $\bar{u}_\Sigma := \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma u dA$ 是面平均值。对于走廊一侧，固定块 F_1 上标准的迹/庞加莱不等式给出 $|\bar{u}_1 - \bar{u}_\Sigma| \le C'_{\mathrm{tr}} \|\nabla u\|_{L^2(F_1)}$。对于簇一侧，$\bar{u}_\Sigma - \bar{u}_v = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma (u - \bar{u}_v) dA$，因此由柯西–施瓦茨不等式和（4.9）可得：$|\bar{u}_\Sigma - \bar{u}_v| \le |\Sigma|^{-1/2}\sqrt{C'}\|\nabla u\|_{L^2(U_v, m)}$。综合可得：$|\bar{u}_1 - \bar{u}_v| \le C_1\big(\|\nabla u\|_{L^2(F_1)} + \|\nabla u\|_{L^2(U_v,m)}\big)$，其中常数 C_1 仅依赖于 F。因此，$|\bar{u}_1| \le |\bar{u}_v| + C_1\big(\|\nabla u\|_{L^2(W_e,m)} + \|\nabla u\|_{L^2(U_v,m)}\big)$。对望远镜求和应用柯西–施瓦茨不等式（注意重叠区域 $F_k \cup F_{k+1}$ 中，每个内部块至多被计数两次，因此产生的因子 $\sqrt{2}$ 可吸收到 C_{adj} 中），

$$|\bar{u}_j| \le |\bar{u}_1| + C_{\mathrm{adj}}\sqrt{j}\|\nabla u\|_{L^2(W_{e,m})},$$

所以 $\bar{u}_j^2 \le 2\bar{u}_1^2 + 2C_{\mathrm{adj}}^2 j \|\nabla u\|^2_{L^2(W_{e,m})}$。对块求和并使用单块庞加莱不等式 $\int_{F_j}|u - \bar{u}_j|^2 \le C_P^{(1)}\int_{F_j}|\nabla u|^2$：

$$\begin{aligned}\int_{W_{e,m}} |u|^2 &= \sum_{j=1}^{K_e}\Big[V_F \bar{u}_j^2 + \int_{F_j}|u - \bar{u}_j|^2\Big] \\ &\le 2K_e V_F \bar{u}_1^2 + 2C_{\mathrm{adj}}^2 K_e^2 V_F \|\nabla u\|^2_{L^2(W_e)} + C_P^{(1)}\int_{W_e}|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

对于一般的 u，簇均值满足 $\bar{u}_v^2 \le (\text{体积} U_{v,m})^{-1}\int_{U_v}|u|^2 = O(m^{-3})$（仅使用 $\|u\|_{L^2}=1$和体积$(U_{v,m}) = m^3V_F$）。因此

$$\bar{u}_1^2 \le 2\bar{u}_v^2 + 2C_1^2\big(\|\nabla u\|^2_{L^2(F_1)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(U_v)}\big) = O(m^{-3}) + O\big(\|\nabla u\|^2_{L^2(F_1)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(U_v)}\big).$$

由于 $K_e = O(m)$，第一个显示的不等式给出

$$\int_{W_{e,m}}|u|^2 \le O(m^{-2}) + O(m)\|\nabla u\|^2_{L^2(U_v)} + O(m^2)\int_{W_e}|\nabla u|^2.$$

（这里，v 是走廊左端的簇；将 $U_{v'}$ 替换为 U_v，也有一个对称的不等式。）对所有走廊求和：对每条走廊，我们使用一个选定端点处的界；每个簇 U_v 至多是 $N-1$ 条走廊的端点（在 v 处，K_N的每条宏观边对应一条），因此 $O(m)$项之和为 $O(m)\nu$，可由 $O(m^2)\nu$吸收。这就证明了（4.13）。对于满足 $\int|\nabla u|^2 = \nu = O(m^{-4})$的低能函数，两项均为 $O(m^{-2})$，这证实了走廊 L^2 质量可以忽略。

更一般地，（4.13）表明，对于任意 L^2-归一化且所有簇均值都为零的 u，式（4.14）成立，因为当 $\bar{u}_v = 0$迫使 $\bar{u}_1^2 \le C_1^2(\|\nabla u\|_{L^2(U_v)} + \|\nabla u\|_{L^2(W_e)})^2$ 时，常数项 $O(m^{-2})$可以被吸收（不含 $|\bar{u}_v|$ 项）。□

（D）通过延拓得到的上界。给定一个离散向量 $x = (x_v)_{v\in V(K_N)}$，定义 $u_x \in H^1(M_m)$ 如下：

- $u_x \equiv x_v$ 在每个簇上$U_{v,\ m}$；
- 在每条连接颜色为 $i = c(e)$ 的 v 与 v' 的走廊 $W_{e,\ m}$ 上，令 u_x 为边界数据在入口面上恒为 $u_x \equiv x_v$、在出口面上恒为 $u_x \equiv x_{v'}$ 的能量极小化函数。

由引理 4.8(ii)，该极小化函数的能量满足 $\int_{W_e}|\nabla u_x|^2 \le [C_i/K_e + C_{\mathrm{bl}}/K_e^2](x_v - x_{v'})^2$。由此得到一个全局 H^1 函数：每个端口面上的迹匹配保证了连续性，因此 $u_x \in H^1(M_m)$，且瑞利商有定义。由于 u_x 在各个簇上为常数，$\nabla u_x = 0$在这些簇上，因此

$$\int_{M_m}|\nabla u_x|^2 = \sum_e\int_{W_{e,m}}|\nabla u_x|^2 \le \sum_e\left[\frac{C_i}{K_e} + \frac{C_{\mathrm{bl}}}{K_e^2}\right](x_v - x_{v'})^2 = \sum_e \mathsf{w}_e(x_v - x_{v'})^2(1 + O(m^{-1})).$$

对于 L^2 范数，簇的贡献为 $\sum_v m^3V_Fx_v^2$。在每条走廊上，极小化函数 u_x 根据最大值原理满足 $\min(x_v, x_{v'}) \le u_x \le \max(x_v, x_{v'})$（它在每个块内部均为调和函数，且边界数据受端点值约束），因此 $\int_{W_e}|u_x|^2 \le K_eV_F\cdot\max(x_v^2, x_{v'}^2)$。采用离散归一化 $\sum_v \mathsf{V}_v x_v^2 = 1$（因此 $x_v = O(m^{-3/2})$），走廊体积 $O(m)$ 给出

$$\sum_e\int_{W_e}|u_x|^2 = O(m\cdot m^{-3}) = O(m^{-2}).$$

因此

$$\frac{\int|\nabla u_x|^2}{\int|u_x|^2} = \frac{\sum_e \mathsf{w}_e(x_v - x_{v'})^2(1 + O(m^{-1}))}{\sum_v \mathsf{V}_v x_v^2(1 + O(m^{-2}))} = R_{\mathrm{disc}}(x)(1 + O(m^{-1})),$$

其中，R_{disc} 表示 L_m的瑞利商。由于每个走廊上的狄利克雷问题关于其边界数据是线性的，因此延拓映射 $x \mapsto u_x$ 是线性的；它是单射，因为 $u_x \equiv x_v$ 在每个簇上成立。因此，$\mathbb{R}^N$的任意一个$(k+1)$维子空间在 $H^1(M_m)$中的像都是一个$(k+1)$维子空间。根据极小极大刻画，令 x 遍历前$(k+1)$个离散特征子空间，可得

$$\nu_k(M_m) \le \lambda_k(L_m)(1 + O(m^{-1})). \tag{4.15}$$

（E）通过簇平均得到下界。我们证明 $\nu_k(M_m) \ge \lambda_k(L_m)(1 + o(1))$ 对每个固定的$k \le N-1$ 都成立，所用方法是极小极大/维数论证。（该论证与指标无关；情形$k \le n$ 是目标特征值所需的情形，但定理 $n+1 \le k \le N-1$ 4.16中填充特征值也用到了对 $n+1 \le k \le N-1$ 的同一下界。）

设 $V \subset H^1(M_m)$ 是任意一个 $(k+1)$ 维子空间。定义簇平均映射 $\mathcal{A}: H^1(M_m) \to \mathbb{R}^N$ 为 $\mathcal{A}(u) = (\bar{u}_v)_{v \in V(K_N)}$。

情形 1：$\dim \mathcal{A}(V) \geq k+1$。那么，$\mathcal{A}(V)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个 $(k+1)$ 维子空间。根据 $\lambda_k(L_m)$ 的离散极小极大刻画，存在 $\bar{u} \in \mathcal{A}(V) \setminus \{0\}$，使得 $R_{\mathrm{disc}}(\bar{u}) \geq \lambda_k(L_m)$。任取非零的 $u_0 \in V$，满足 $\mathcal{A}(u_0) = \bar{u}$，并令 $u := u_0/\|u_0\|_{L^2}$。于是 $u \in V$（因为 V 是一个子空间），$\|u\|_{L^2} = 1$，且根据瑞利商的零次齐次性，$R(u) = R(u_0)$。此后，我们将 $\bar{u}_v := \mathcal{A}(u)_v$ 记作归一化后的 u 的簇均值；由于 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(u_0)/\|u_0\|_{L^2}$，零次齐次性给出 $R_{\mathrm{disc}}(\bar{u}) = R_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}(u_0)) \geq \lambda_k(L_m)$。

若 $R(u) \geq 2\lambda_k(L_m)$，则 $\max_{w \in V,\ \|w\|=1} R(w) \geq 2\lambda_k(L_m) \geq \lambda_k(L_m)(1-o(1))$，所需的下界显然成立。否则 $R(u) \leq 2\lambda_k(L_m) = O(m^{-4})$，这就证明了 (C) 和 (C′) 中的低能量估计。

现在我们比较 $R(u)$ 与 $R_{\mathrm{disc}}(\bar{u})$。由 (4.12)，

$$R(u) = \int_{M_m} |\nabla u|^2 \geq \sum_e \int_{W_e} |\nabla u|^2 \geq \langle \bar{u}, L_m \bar{u} \rangle_{\mathsf{V}} - O(m^{-9/2}).$$

由于 $\langle \bar{u},\ L_m \bar{u} \rangle_{\mathsf{V}} = R_{\mathrm{disc}}(\bar{u}) \cdot \sum_v \mathsf{V}_v \bar{u}_v^2$，$L^2$ 分解给出：

$$\begin{aligned} 1 = \int_{M_m} |u|^2 &= \sum_v \left[\mathrm{Vol}(U_v) \bar{u}_v^2 + \int_{U_v} |u - \bar{u}_v|^2 \right] + \sum_e \int_{W_e} |u|^2 \\ &= \sum_v \mathsf{V}_v \bar{u}_v^2 + \underbrace{\sum_v \int_{U_v} |u - \bar{u}_v|^2}_{\leq C_P \nu \text{ by (4.5)}} + \underbrace{\sum_e \int_{W_e} |u|^2}_{O(m^{-2}) \text{ by (4.13)}}, \end{aligned}$$

因此

$$\sum_v \mathsf{V}_v \bar{u}_v^2 = 1 - O(m^{-2}). \tag{4.16}$$

因此

$$R(u) \geq R_{\mathrm{disc}}(\bar{u}) \Big(\sum_v \mathsf{V}_v \bar{u}_v^2 \Big) - O(m^{-9/2}) = R_{\mathrm{disc}}(\bar{u})(1 - O(m^{-2})) - O(m^{-9/2}) \geq \lambda_k(L_m)(1 - o(1)),$$

其中，最后一步我们使用了 $R_{\mathrm{disc}}(\bar{u}) \geq \lambda_k(L_m)$ 以及 $\lambda_k(L_m) \asymp m^{-4}$ (由引理 4.11，因为 $\mu_k > 0$对于 $k \geq 1$)，因此 $O(m^{-9/2}) = o(m^{-4}) = o(\lambda_k(L_m))$。

情形 2：$\dim \mathcal{A}(V) \leq k$。根据秩-零化度定理（由于 $\dim V = k+1 > k \geq \dim \mathcal{A}(V)$），$\ker \mathcal{A} \cap V$的维数为 ≥ 1。取 $u \in \ker \mathcal{A} \cap V$，使得 $\|u\| = 1$。由于对所有 v都有 $\bar{u}_v = 0$，下述命题 4.15 给出 $R(u) \geq c_0/m^2$。由于 $\lambda_k(L_m) = O(m^{-4})$，因此当 m足够大时，我们有 $R(u) \gg \lambda_k(L_m)$。

在两种情形下，$\max_{u \in V, \|u\|=1} R(u) \geq \lambda_k(L_m)(1 - o(1))$。由于 V 是任意的（$k+1$）维子空间，极小极大刻画给出

$$\nu_k(M_m) \geq \lambda_k(L_m)(1 - o(1)). \tag{4.17}$$

备注 4.14。上界 (4.15) 中的误差率 $O(m^{-1})$ 比下界 (4.17) 中隐含的 $O(m^{-1/2})$ 更精确。下界的瓶颈在于，用于估计 $|\eta_e| = O(m^{-2})$ 的粗略全局界$\int_{U_v, m} |\nabla u|^2 \leq \nu = O(m^{-4})$，以及 $|\bar{u}_{v'} - \bar{u}_v| = O(m^{-3/2})$（来自 L^2-归一化和簇体积 $m^3 V_F$）；所得交叉项为 $O(m^{-9/2})$，除以 $\lambda_k(L_m) \asymp m^{-4}$（引理 4.11）后，得到相对误差 $O(m^{-1/2})$。我们注意到，簇均值尺度 $\bar{u}_v = \Theta(m^{-3/2})$ 是精确的，无法改进：特征向量分量具有$\Theta(1)$的相对变化，因此 $|\bar{u}_{v'} - \bar{u}_v| = \Theta(m^{-3/2})$。

实际的松弛之处在于对簇内能量的估计：对于特征值为 $\nu_k = O(m^{-4})$ 的特征函数，几乎所有梯度能量都消耗在长度为 $O(m)$ 的走廊中，而非电阻为 $O(1)$ 的扩张簇中，这表明应采用 $\int_{U_v, m} |\nabla u|^2 = O(m^{-5})$，而非 $O(m^{-4})$。将此代入 η_e 上界，可将相对误差改进至 $O(m^{-1})$，从而与

上界相匹配。要严格证明这一点，需要一个定量能量划分引理，而本文不再探讨这一问题。

我们注意到， $O(m^{-1})$ 的上界速率很可能是尖锐的： $K_e(m) = \lfloor mC_{c(e)}/w_e^* \rfloor$ 中的下取整函数引入了一个 $O(m^{-1})$ 离散化误差，并会传递到特征值近似中。

现在我们陈述寄生特征值界；它在情形 2 的部分（E）中以及主要谱约化定理的证明中都会用到。

命题 4.15 (寄生特征值界)。 存在 $c_0 = c_0(F, D, w^*) > 0$，使得对于所有充分大的 m，每个在 M_m 上的 L^2-归一化函数 u，若对所有 $v \in V(K_N)$ 均满足 $\bar{u}_v = 0$，则有

$$\int_{M_m} |\nabla u|^2 \geq \frac{c_0}{m^2}.$$

特别地， $\nu_N(M_m) \geq c_0/m^2$。

证明。 令 $u \in H^1(M_m)$，其中 $\|u\|_{L^2} = 1$ 且对所有 v均有 $\bar{u}_v = 0$。设 $\nu := \int_{M_m} |\nabla u|^2$。

由簇庞加莱不等式（4.5），结合 $\bar{u}_v = 0$:

$$\sum_v \int_{U_{v,m}} |u|^2 = \sum_v \int_{U_{v,m}} |u - \bar{u}_v|^2 \leq C_P \nu. \tag{4.18}$$

由走廊质量界（4.14）（当所有簇均值都为零时成立）：

$$\sum_e \int_{W_{e,m}} |u|^2 \leq C_{\mathrm{corr}} m^2 \nu, \tag{4.19}$$

对于一个仅依赖于 F 和 D 的常数 C_{corr} （并且通过 $K_e(m) = O(m)$ 依赖于指定边权 w^*; 由于 w^* 在极限 $m \to \infty$ 之前已固定，这种依赖无关紧要）。由于$\|u\|_{L^2}^2 = 1$，合并可得

$$1 \leq C_P \nu + C_{\mathrm{corr}} m^2 \nu = (C_P + C_{\mathrm{corr}} m^2)\nu.$$

因此，对于 $c_0 = 1/(2C_{\mathrm{corr}})$，以及所有足够大且满足 $C_{\mathrm{corr}} m^2 \geq C_P$ 的 m，有 $\nu \geq 1/(C_P + C_{\mathrm{corr}} m^2) \geq c_0/m^2$。

对于特征值的结论：任意一个 $(N+1)$ 维子空间 $V \subset H^1(M_m)$ 都满足 $\dim(\ker \mathcal{A} \cap V) \geq 1$（因为 $\mathcal{A}: H^1 \to \mathbb{R}^N$），因此 V 中存在一个 L^2 归一化函数，其所有簇均值均为零，且其瑞利商为 $\geq c_0/m^2$。根据极小极大刻画， $\nu_N(M_m) \geq c_0/m^2$。□

现在可以陈述主要谱约化结果。

定理 4.16 (重顶点情形下约化谱至 K_N)。 固定目标列表 $0 = \lambda_0^* < \cdots < \lambda_n^*$ 以及上述相关构造。则 $\nu_0(M_m) = \lambda_0(L_m) = 0$，且对每个$k \in \{1, \ldots, N-1\}$,

$$\nu_k(M_m) = \lambda_k(L_m)(1 + o(1)) \qquad (m \to \infty).$$

特别地，对于 $k \leq n$， $m^4 \nu_k(M_m) \to \lambda_k^*$；对于 $n+1 \leq k \leq N-1$， $m^4 \nu_k(M_m) \to \mu_k/V_F > \lambda_n^* + 1$（其中 μ_{n+1}、……、μ_{N-1} 是在 *§4.3* 中严格选取为高于 $(\lambda_n^* + 1)V_F$ 的填充特征值）。此外，对于某个与 m 无关的常数 $c_0 > 0$（命题 *4.15*），$\nu_N(M_m) \geq c_0/m^2$，因此 $m^4 \nu_N(M_m) \to \infty$。

证明。 上界（4.15）给出 $\nu_k(M_m) \leq \lambda_k(L_m)(1 + O(m^{-1}))$ 对所有 $k \leq N-1$均成立。下界（4.17）对所有 $k \leq N-1$同样适用：部分（E）中的极小极大/维数论证与指标无关，而情形 2 中的寄生界给出 $R(u) \geq c_0/m^2 \gg \lambda_k(L_m)$ 对任意固定的 k 成立。结合引理 4.11 即可得到所有 $1 \leq k \leq N-1$ 的所述渐近关系。

界 $\nu_N(M_m) \geq c_0/m^2$ 是命题 4.15。 □

注记 4.17. 寄生界 $\nu_N \geq c_0/m^2$ 蕴含 $m^4\nu_N \geq c_0 m^2 \to \infty$，而目标特征值满足 $m^4\nu_k \to \lambda_k^*$ 对于 $k \leq n$。由于 $N \geq n+1$，特征值 ν_0、……、ν_n 最终会与 ν_N、ν_{N+1}、…… 拉开间距，且重新缩放后间距趋于无穷大。这保证定理 1.1 中的近似恰当地控制前 $n+1$ 个特征值，不会有不需要的特征值混入。

额外的离散特征值 μ_{n+1}、……、μ_{N-1}（选取为严格大于 $(\lambda_n^*+1)V_F$，见 §4.3）对应于 M_m 在目标窗口上方、寄生间隙下方的中间范围内的连续特征值。它们的确切位置不会影响前 $n+1$ 个特征值。

5. 主定理的证明

定理*1.1*的证明。令 $0=\lambda_0^*<\lambda_1^*<\cdots<\lambda_n^*$ 且 $\varepsilon>0$。不失一般性，假设$\varepsilon<1$（只需证明定理对 $\varepsilon' := \min(\varepsilon,1)$成立，因为 ε'-近似自动也是 ε-近似）。

情形 $d=2$。取 $N=\max(n+1,4)$。若 $N>n+1$，则通过附加严格递增的数值 $\lambda_{n+1}^*<\cdots<\lambda_{N-1}^*$（满足 $\lambda_{n+1}^*>\lambda_n^*+1$），将目标列表扩展至长度 N；这确保填充后的特征值远高于目标窗口 $[0,\lambda_n^*+\varepsilon]$，对任意 $\varepsilon<1$ 均成立。将引理 2.1（连同注 2.2）应用于 K_N，其顶点面积为 $V_v=2\pi(N-3)$，从而得到权重 $w_e>0$，实现目标离散谱 $(\lambda_1^*,\dots,\lambda_{N-1}^*)$。（具体而言：将引理应用于列表 $(V_v\lambda_1^*,\dots,V_v\lambda_{N-1}^*)$；所得具有常数测度 V_v 的拉普拉斯算子，经过注 2.2 中的缩放后，其特征值为 λ_k^*。）按照第 3 节构造 Fenchel–Nielsen 挤压族 Σ_δ，其中领圈长度为 $\ell_e(\delta)=\pi\delta w_e$，其余所有 Fenchel-Nielsen 坐标保持不变。由定理 3.1，$\lambda_k(\Sigma_\delta)=\delta\lambda_k^*(1+o(1))$，对 $1\leq k\leq N-1$ 成立，且所有更高的特征值均为 $\geq C_0$。将度量重新缩放为 $g_\delta := \delta g_{\Sigma_\delta}$。于是 $\kappa_\delta=-1/\delta\to-\infty$，且 $\lambda_k(\Sigma_\delta,g_\delta)=\lambda_k^*+o(1)$，对 $k\leq n$ 成立。对于填充后的特征值 $n+1\leq k\leq N-1$，相同的重新缩放给出 $\lambda_k(\Sigma_\delta,g_\delta)\to\lambda_k^*>\lambda_n^*+1$，因此它们也位于目标窗口上方。对于 $k\geq N$，重新缩放后的特征值满足 $\lambda_k(\Sigma_\delta,g_\delta)=\delta^{-1}\lambda_k(\Sigma_\delta)\geq C_0/\delta\to\infty$，因此不会有寄生特征值闯入。取足够小的 δ，即可得到 ε-近似。

情形 $d\geq 3$。固定 $N\geq\max(n+1,5)$ 为奇数，并令 $D=(N-1)/2$，然后按照第 4.1 节构造基流形 B 和块 F。若 $N>n+1$，则 K_N的离散谱具有 $N-1$个非零特征值；我们规定前 n个特征值与 $\lambda_k^*V_F$匹配，并选择其余 $N-1-n$构成一个严格递增且严格高于 $(\lambda_n^*+1)V_F$的序列，从而确保这些“填充”特征值对于任意 $\varepsilon<1$都远高于目标窗口 $[0,\lambda_n^*+\varepsilon]$。（特别地，离散权重 w_e^*与 ε无关，并在极限过程中保持不变 $m\to\infty$。）使用引理 2.1，在 K_N 上选择权重 w_e^*，使其实现完整的离散谱 $(\mu_1,\dots,\mu_{N-1})$，其中 $\mu_k=\lambda_k^*V_F$对应 $k\leq n$，其余 μ_k为填充值。对于足够大的 m，构造双曲覆盖 $M_m\to B$（曲率 -1），其簇大小为 m^3，廊道长度为 $K_e(m)$。由定理 4.16 和引理 4.11，对于每个固定的 $k\leq n$，$m^4\nu_k(M_m)\to\lambda_k^*$，而 $m^4\nu_N(M_m)\to\infty$（由定理 4.16），同时 $m^4\nu_k(M_m)\to\mu_k/V_F>\lambda_n^*+1$对于 $n+1\leq k\leq N-1$成立。现在按 $g_m := m^{-4}g_{M_m}$对度量进行缩放，于是 $\kappa_m=-m^4\to-\infty$，且 $\lambda_k(M_m,g_m)=m^4\nu_k\,M_m\to\lambda_k^*$。选择足够大的 m，使得 $|\lambda_k(M_m,g_m)-\lambda_k^*|<\varepsilon$对于 $k\leq n$成立。

单重性。 对于 $k<n$：由于对于每个 k，$\lambda_k^*<\lambda_{k+1}^*$ 和 $\lambda_k(M_m,\ g_m)\to\lambda_k^*$，严格分离$\lambda_{k+1}(M_m,\ g_m)-\lambda_k(M_m,\ g_m)>0$对所有充分大的 m都成立。我们选取足够大的 m，使得对所有 $k<n$（除满足近似关系 $|\lambda_k-\lambda_k^*|<\varepsilon$ 的$k\leq n$外）这一结论同时成立。对于 $k=n$，我们必须证明 λ_{n+1} 最终与 λ_n分离。根据近似步骤，$\lambda_n<\lambda_n^*+\varepsilon$。剩下要证明的是 $\lambda_{n+1}>\lambda_n^*+\varepsilon$。

若 $N>n+1$：在 $d=2$中，第一个填充特征值满足 $\lambda_{n+1}(\Sigma_\delta,\ g_\delta)\to\lambda_{n+1}^*>\lambda_n^*+1$；在$d\geq 3$中，$\lambda_{n+1}(M_m,\ g_m)=m^4\nu_{n+1}(M_m)\to\mu_{n+1}/V_F>\lambda_n^*+1$（根据定理 4.16）。无论哪种情形，$\lambda_{n+1}>\lambda_n^*+\varepsilon$ 最终（因为 $\varepsilon<1$）。

如果 $N=n+1$：在 $d=2$，$\lambda_{n+1}(\Sigma_\delta,\ g_\delta)\geq C_0/\delta\to\infty$；在 $d\geq 3$，$\lambda_{n+1}(M_m,\ g_m)=m^4\nu_N(M_m)\geq c_0m^2\to\infty$ (由寄生界，定理4.16)。

超出填充范围（当 $N > n+1$ 时）：在 $d=2$, $\lambda_k(\Sigma_\delta,\ g_\delta) \geq C_0/\delta \to \infty$ 对于 $k \geq N$；在$d \geq 3$, $m^4\nu_N(M_m) \to \infty$。因此，窗口 $[0, \lambda_n^* + \varepsilon]$ 中的所有 $n+1$ 特征值都是简单的。

拓扑。在 $d=2$ 亏格为 $\gamma = 1 + {}^{N}\!/_{(N-3)\ 2}$，仅取决于 n。在 $d \geq 3$ 覆盖度为 $|S| = Nm^3 + O(m)$，其增长速率为 $\varepsilon \to 0$ (见下文备注 5.1)。

障碍。定理1.1 (普适界 $\lambda_1 \leq \Lambda_d|\kappa|$) 的“此外”条款在第 6 节中证明：命题 6.1 针对 $d=2$，命题 6.2 针对 $d \geq 3$。

□

备注 5.1（覆盖度与 ε 依赖性）。在 $d \geq 3$构造中，使用粗略的簇能量界时，下界误差率（备注 4.14）为 $O(m^{-1/2})$，因此只要 m 的量级为 ε^{-2}，就能保证达到 ε 近似，对应的覆盖度为 $O(\varepsilon^{-6})$。（我们预计，通过备注 4.14 中概述的更精细簇能量分析，可以达到 $O(\varepsilon^{-3})$，但这需要一个我们在此未证明的定量能量划分引理。）特别地，逼近序列的覆盖度（因而在曲率为 -1 时未重标度的体积）随 ε^{-1} 呈多项式增长；该多项式取决于离散权重 w_e^*（由目标列表通过引理 2.1 确定）。

6. 有界曲率的几何障碍

我们证明，当目标包含超出 $\kappa = -1$双曲流形普适界的取值时，曲率必然发散。

6.1. **曲面**（$d=2$）。

命题 6.1. 设(M, g) 是亏格为 $\gamma \geq 2$ 且具有常截面曲率$\kappa < 0$的闭可定向曲面。则

$$\lambda_1(M, g) \leq 6|\kappa|.$$

证明。根据杨–姚不等式 [26]（§2 中的命题），若 M 存在一个到 S^2 的次数为 d的共形分支覆盖，则

$$\lambda_1(M, g) \leq \frac{8\pi d}{A},$$

其中 $A = \mathrm{Area}(M, g)$。根据黎曼–罗赫定理，每个亏格为γ 的紧黎曼曲面都存在次数不超过 $\gamma + 1$的非恒定亚纯函数：对任意点 $p \in M$，$h^0((\gamma+1)p) \geq (\gamma+1) - \gamma + 1 = 2$，从而得到 $\mathcal{L}((\gamma+1)p)$中的一个非恒定元素。根据高斯-博内定理，$A = 4\pi(\gamma - 1)/|\kappa|$，因此

$$\lambda_1(M, g) \leq \frac{8\pi(\gamma + 1)}{4\pi(\gamma - 1)/|\kappa|} = 2|\kappa|\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

由于对所有 $\gamma \geq 2$ 都有 $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) \leq 3$（在 $\gamma = 2$处取等号），我们得到 $\lambda_1 \leq 6|\kappa|$. □

6.2. **高维**（$d \geq 3$）。

命题 6.2. 对于每个 $d \geq 3$，都存在 $\Lambda_d > 0$，使得任意常截面曲率为 $\kappa < 0$ 的闭 d 维流形(M, g) 都满足

$$\lambda_1(M, g) \leq \Lambda_d|\kappa|.$$

证明。对 $g = |\kappa|^{-1}\tilde{g}$ 进行缩放，使得 $(M, \tilde{g})$ 的曲率为 -1。根据 Kazhdan-Margulis 定理 [16]，的一个推论，$M, \tilde{g}$ 的体积 $\geq v_d > 0$。由于 M 包含在半径为 $\mathrm{diam}(M, \tilde{g})$ 的测地球内，Bishop-Gromov 比较定理给出 $v_d \leq \mathrm{Vol}(M, \tilde{g}) \leq \mathrm{Vol}(B_{-1}(\mathrm{diam}(M, \tilde{g})))$，其中 $B_{-1}(r)$ 表示 $\mathbb{H}^d$ 中半径为 r 的球。由于 $r \mapsto \mathrm{Vol}(B_{-1}(r))$ 是严格递增函数，且当 $r \to 0$ 时 $\mathrm{Vol}(B_{-1}(r)) \to 0$，因此存在唯一的 $R_d > 0$ 满足 $\mathrm{Vol}(B_{-1}(R_d)) = v_d$，单调性迫使 $\mathrm{diam}(M, \tilde{g}) \geq R_d$。因此 $\mathrm{diam}(M, g) \geq R_d|\kappa|^{-1/2}$。

取两点 $p,\ q \in M$，使得 $d_{\tilde{g}}(p,\ q) = \mathrm{diam}(M,\ \tilde{g})$。由于 $\mathrm{diam}(M,\ \tilde{g}) \geq R_d$，这些开球

$$U_1 := B_{\tilde{g}}(p, R_d/2), \qquad U_2 := B_{\tilde{g}}(q, R_d/2)$$

互不相交。对于 $x_1 := p$和 $x_2 := q$，定义 Lipschitz 截断函数

$$\eta_j(x) := \begin{cases} 1, & d_{\tilde{g}}(x, x_j) \leq R_d/4, \\ 2 - \dfrac{4}{R_d} d_{\tilde{g}}(x, x_j), & R_d/4 < d_{\tilde{g}}(x, x_j) < R_d/2, \\ 0, & d_{\tilde{g}}(x, x_j) \geq R_d/2. \end{cases}$$

那么 $\eta_j \in H^1(M)$，$\mathrm{supp}\ \eta_j \subset U_j$，且几乎处处有 $|\nabla \eta_j| \leq 4/R_d$。因此

$$\int_M |\nabla \eta_j|^2 \leq \frac{16}{R_d^2} \mathrm{Vol}(B_{\tilde{g}}(x_j, R_d/2)), \qquad \int_M \eta_j^2 \geq \mathrm{Vol}(B_{\tilde{g}}(x_j, R_d/4)).$$

由 Bishop–Gromov 定理，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_{\tilde{g}}(x_j, R_d/2))}{\mathrm{Vol}(B_{\tilde{g}}(x_j, R_d/4))} \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_{-1}(R_d/2))}{\mathrm{Vol}(B_{-1}(R_d/4))}.$$

因此，每个 η_j 的瑞利商都有如下界：

$$C_d := \frac{16}{R_d^2} \frac{\mathrm{Vol}(B_{-1}(R_d/2))}{\mathrm{Vol}(B_{-1}(R_d/4))}.$$

令$a_j := \int_M \eta_j$，并设

$$\psi := a_2 \eta_1 - a_1 \eta_2.$$

由于支集互不相交，$\int_M \psi = 0$ 和

$$\frac{\int_M |\nabla \psi|^2}{\int_M \psi^2} = \frac{a_2^2 \int_M |\nabla \eta_1|^2 + a_1^2 \int_M |\nabla \eta_2|^2}{a_2^2 \int_M \eta_1^2 + a_1^2 \int_M \eta_2^2} \leq C_d.$$

由极小极大刻画，$\lambda_1(M,\ \tilde{g}) \leq C_d$。缩放回去后，

$$\lambda_1(M, g) = |\kappa|\, \lambda_1(M, \tilde{g}) \leq C_d\, |\kappa|.$$

因此，命题对 $\Lambda_d := C_d$成立。 □

综上，命题 6.1 和命题6.2 表明，若坚持要求 $\kappa \equiv -1$，那么 λ_1 必然有一个统一上界。因此，任何超过此上界的目标列表 λ_1^* 都不可能在归一化曲率类 $\kappa \equiv -1$中被任意精确地逼近。更一般地，对于固定目标的任何逼近序列，都必须满足 $\liminf |\kappa| \geq \lambda_1^*/\Lambda_d$；特别是，要容纳任意大的指定 λ_1^*，就必须有 $|\kappa| \to \infty$。

7. 特征值比的任意精确指定

虽然对于 $\kappa \equiv -1$，绝对值很大的特征值会受到限制，但尺度不变比值可以任意指定。

推论 7.1（特征值比的任意精确指定）。对于任意 $d \geq 2$、任意严格递增序列 $1 = \mu_1^* < \cdots < \mu_n^*$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在一个闭的 d- 流形 （ M, g ），其满足 $\kappa \equiv -1$，使得

$$\left| \frac{\lambda_i(M, g)}{\lambda_1(M, g)} - \mu_i^* \right| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

证明。令 $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2+2\mu_n^*}\right)$。将定理 1.1 应用于列表 $\lambda_0^* = 0$和 $\lambda_i^* = \mu_i^*$，得到 $(M, \tilde{g})$，其曲率为 $\kappa < 0$，满足 $\overline{\lambda_i(\tilde{g})} = \mu_i^* + E_i$，且有 $|E_i| \le \delta$。重新缩放至 $g = |\kappa|\tilde{g}$，得到曲率−1和 $\lambda_i(g) = \lambda_i(\tilde{g})/|\kappa|$，因此比值保持不变：

$$\frac{\lambda_i(g)}{\lambda_1(g)} = \frac{\mu_i^* + E_i}{1 + E_1}.$$

Then

$$\left|\frac{\lambda_i(g)}{\lambda_1(g)} - \mu_i^*\right| = \left|\frac{E_i - \mu_i^* E_1}{1 + E_1}\right| \le \frac{|E_i| + \mu_i^*|E_1|}{1 - |E_1|} \le \frac{\delta(1 + \mu_n^*)}{1 - \delta} \le 2\delta(1 + \mu_n^*) \le \varepsilon.$$

□

8. 一个具体示例：在 $d = 2$ 中逼近 $\{0, 1, 3\}$

为说明这一构造，我们使用路径图 P_3： $v_1 - v_2 - v_3$。对于这个特定的双特征值目标，P_3 已足够，并可得到亏格 $\gamma = 3$。（采用 $N = \max(n+1, 4) = 4$ 和 K_4 的通用完全图构造也能得到亏格 $\gamma = 3$； P_3 的优势不在于降低亏格，而在于路径图上的离散逆问题具有明确的代数可处理性，因此无需用到引理 2.1 中完整的 Colin de Verdière 机制。我们注意到，具有下列顶点体积的 P_3 只能实现满足 $\lambda_2^* \ge 2\lambda_1^*$ 的目标：迹方程和子式乘积方程确定 w_{12}、w_{23} 为某个二次方程的根，其判别式可因式分解为 $\frac{8\pi^2}{9}(2\lambda_1^* - \lambda_2^*)(\lambda_1^* - 2\lambda_2^*)$；由于 $\lambda_2^* > \lambda_1^* > 0$，当且仅当 $\lambda_2^* \ge 2\lambda_1^*$ 时，该判别式非负。对于一般目标，则必须使用完全图 K_N，它具有足够的代数自由度，能够实现任意严格递增的列表。）

指定顶点面积：

$$V_1 = V_3 = 2\pi, \qquad V_2 = 4\pi,$$

分别对应在 v_1、v_3 处有一个边界孔的环面，以及在 v_2 处有两个边界孔的环面。

边权重为 w_{12}、$w_{23} > 0$ 时，加权拉普拉斯矩阵为

$$L_G = \begin{pmatrix} \frac{w_{12}}{2\pi} & -\frac{w_{12}}{2\pi} & 0 \\ -\frac{w_{12}}{4\pi} & \frac{w_{12}+w_{23}}{4\pi} & -\frac{w_{23}}{4\pi} \\ 0 & -\frac{w_{23}}{2\pi} & \frac{w_{23}}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

要求非零特征值为 1 和 3，得到：

$$\operatorname{tr}(L_G) = \frac{3}{4\pi}(w_{12} + w_{23}) = 4, \qquad \sum \text{principal } 2\times 2 \text{ minors of } L_G = \frac{1}{2\pi^2} w_{12} w_{23} = 3.$$

解得

$$w_{12} = \frac{\pi(8 + \sqrt{10})}{3}, \qquad w_{23} = \frac{\pi(8 - \sqrt{10})}{3},$$

这些值均严格为正（数值上， $w_{12} \approx 11.7$、 $w_{23} \approx 5.1$）。

据此粘合三个顶点曲面。每个领圈都是一个环带（$\chi = 0$），因此总欧拉示性数为 $\chi = \chi(X_1) + \chi(X_2) + \chi(X_3) = -1 - 2 - 1 = -4$，故亏格为 $\gamma = 3$。在这个亏格为 3 的曲面上固定一个双曲度量，并将两条分离测地线的长度缩短至$\ell_1(\delta) = \pi\delta w_{12}$ 以及 $\ell_2(\delta) = \pi\delta w_{23}$ 同时保持其余所有 Fenchel-Nielsen 坐标不变。由定理 3.1 （应用于路径图 P_3），

$$\lambda_0(\Sigma_\delta) = 0, \qquad \lambda_1(\Sigma_\delta) = \delta + o(\delta), \qquad \lambda_2(\Sigma_\delta) = 3\delta + o(\delta).$$

将度量按 δ 重新缩放，可得到满足 $\kappa \to -\infty$ 且特征值收敛至 $\{0, 1, 3\}$的常曲率度量。

致谢。作者谨向 Anton Petrunin 致以诚挚谢意，感谢他给予的总体指导，尤其感谢他建议作者查阅 Vedrin Šahovic 的研究工作 [24]。作者感谢印度理工学院孟买分校提供理想的工作条件。

参考文献

[1] B. Alspach. 精妙的 Walecki 构造。Bull. Inst. Combin. Appl. 52 (2008), 7-20.[2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. 周期结构的渐近分析。数学及其应用研究 5. North-Holland, Amsterdam (1978)。再版：AMS Chelsea 出版社, Providence, RI (2011).[3] R. Brooks, 覆盖塔的谱几何，J. Differential Geom. 23 (1986), no. 1, 97-107.[4] M. Burger, 拉普拉斯算子谱、图与 Fell 拓扑，Comment. Math. Helv. 63 (1988), no. 2, 226-252.[5] M. Burger, 黎曼曲面与图的小特征值，Math. Z. 205 (1990), no. 3, 395-420.[6] P. Buser. 紧黎曼曲面的几何与谱。数学进展 106. Birkhäuser Boston (1992).[7] Y. Colin de Verdière. 构造具有给定有限部分谱的拉普拉斯算子。Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 20(4), 599-615 (1987).[8] Y. Colin de Verdière. 关于 Arnold 横截性假设。Comment. Math. Helv. 63, 184-193 (1988).[9] B. Colbois and G. Courtois, 流形收敛与拉普拉斯算子的谱收敛，Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 4, 507-518.[10] P. Exner and O. Post. 类图薄流形的谱收敛。J. Geom. Phys. 54 (2005), no. 1, 77-115.[11] J. Friedman. Alon 第二特征值猜想及相关问题的证明。美国数学会回忆录 195, no. 910 (2008).[12] D. Grieser. 图邻域的谱与散射。Proc. Lond. Math. Soc. (3) 97 (2008), no. 3, 718-752.[13] A. Hatcher. 代数拓扑。Cambridge University Press, Cambridge (2002).[14] S. Hoory, N. Linial, and A. Wigderson. 扩展图及其应用。Bull. Amer. Math. Soc. 43(4), 439-561 (2006).[15] M.Kanai, 粗等距与非紧黎曼流形几何的组合近似，J. Math. Soc. Japan 37 (1985), no. 3, 391-413.[16] D. A. Kazhdan and G. A. Margulis. 塞尔伯格猜想的证明。Math. USSR Sbornik 4(1), 147-152 (1968).[17] A. Lubotzky. 某些双曲流形的自由商群与第一贝蒂数。Transformation Groups 1(1–2), 71–82 (1996).[18] R. C. Lyndon and P. E. Sc hupp. 组合群论。数学经典，Springer, Berlin (2001).[19] T. Mantuano. 紧黎曼流形的离散化及其在拉普拉斯算子谱研究中的应用。Ann. Global Anal. Geom. 27(1), 33-46 (2005).[20] C. Maclachlan and A. W. Reid. 双曲三维流形的算术。数学研究生教材 219, Springer, New York (2003).[21] J. J. Millson. 关于常负曲率流形的第一贝蒂数。Ann. of Math. (2) 104(2), 235-247 (1976).[22] B. Mohar. 图的等周数。J. Combin. Theory Ser. B 47(3), 274-291 (1989).[23] G. D. Mostow. 局部对称空间的强刚性。数学年刊研究 78. Princeton University Press (1973).[24] V. Šahovic. 具有线性曲率约束的黎曼流形的近似。博士论文，明斯特大学，2009.[25] N. C. Wormald. 随机正则图模型。载于：《组合学综述》，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 267, Cambridge Univ. Press (1999), 239-298.[26] P. C. Yang and S.-T. Yau. 紧黎曼曲面与极小子流形的拉普拉斯算子特征值。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 7(1), 55-63 (1980).