arXiv:2603.21253v1 [math.AC] 22 Mar 2026

局部上同调模双分次分量的渐近行为

Rajsekhar Bhattacharyya[a]、Tony J. Puthenpurakal[b]、Sudeshna Roy[c]、Jyoti Singh[d]

[a]*Dinabandhu Andrews College，Garia*，加尔各答 *700 084*，印度[b]孟买印度理工学院数学系，*Powai*，孟买，马哈拉施特拉邦 *400076*，印度[c]甘地讷格尔印度理工学院数学系，*Palaj*，甘地讷格尔，古吉拉特邦 *382055*，印度[d]维斯韦斯瓦拉亚国家理工学院数学系，*South Ambazari Road*，那格浦尔，马哈拉施特拉邦 *440010*，印度

摘要

设 C 是一个包含特征零域 K 的交换诺特环。设 $R = C[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ 是 C 上的多项式环，其中对所有 $c \in C$，$\operatorname{bideg} c = (0, 0)$，$\operatorname{bideg} X_i = (1, 0)$，且 $\operatorname{bideg} Y_j = (0, 1)$，其中 $i = 1, \dots, n$，$j = 1, \dots, m$。设 I 是 R 中的双齐次理想。本文研究局部上同调模 $H^i_I(R)$ 的双分次分量的渐近行为。此外，在 C 正则这一额外假设下，我们考察与其双分次分量相关的不变量的渐近稳定性。因此，我们得到双分次局部上同调模 $H^i_I(R)$ 的分量的某些性质，其中 $C = K$ 是一个域，且 I 是一个二项式边理想。

关键词：局部上同调、分次局部上同调、Weyl代数、广义欧拉模。*2010*年数学学科分类：主要分类 13D45、14B15，次要分类 13N10、32C36。

1. 引言

局部上同调由 A. Grothendieck 于 20 世纪 60 年代初在哈佛大学的研讨班上提出，这些研讨班于 1961 年举行。这些模在研究环的代数性质和几何性质方面发挥着重要作用。尽管已有多位作者研究这些模，但其结构在很大程度上仍未为人所知。局部上同调的一个缺点是，一般而言，局部上同调模不一定是有限生成的，因此处理起来可能较为复杂。对支撑在无关理想上的（多）分次局部上同调模的分量已有大量研究，并已广泛应用于交换代数和代数几何领域。近年来，单项式理想上的局部上同调模受到广泛关注，这是因为它们与托里克簇上凝聚层的上同调有关，而这一联系归功于 Cox [8]。此外，它们还有助于构造例子和反例。本文的主要目的是研究支撑在二项式理想上的局部上同调模的双分次分量，并利用*D*-模理论考察其渐近行为。值得注意的是，代数几何中的许多经典例子都与二项式理想相关。

一些作者将局部上同调作为研究二项式边理想 [24] 和 [25]的重要工具。二项式边理想为图 G 在域上的多项式环中关联一个齐次理想 $\mathcal{J}_G$。Herzog、Hibi、Hreinsdóttir、Kahle 和 Rauh 在 [9], 中引入了二项式边理想，Ohtani 也在 [14], 中独立引入了它。它们很快便应用于统计学中的条件独立性陈述研究，此后也作为交换代数中独立的研究对象而受到广泛关注。这些理想的代数性质与相应图的组合性质之间存在丰富的相互作用。在 [2], 中，Àlvarez Montaner 利用局部上同调谱序列理论，为二项式边理想的局部上同调模给出了 Hochster 型公式，并对这些局部上同调模的分次分量作了非常明确的描述。他给出了二项式边理想的一般初始理想的局部上同调模的一种分解；与原本针对单项式理想的 Hochster 公式相比，这种分解更为粗略。由此，他将问题归结为

电子邮箱地址：rbhattacharyya@gmail.com (Rajsekhar Bhattacharyya), tputhen@math.iitb.ac.in (Tony J. Puthenpurakal), sudeshna.roy@iitgn.ac.in (Sudeshna Roy), jyotijagrati@gmail.com (Jyoti Singh)

对这些分解的构件的分次分量进行简单比较。在 [24] 和 [25], 中，Williams 分别研究了局部上同调模 $H^i_{\mathcal{J}_G}(R)$ 和 $H^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathcal{J}_G)$，其中 K 的素特征为$p > 0$。

本文主要证明，支撑于以下几类理想上的局部上同调模是广义欧拉双分次模（见定义 3.5）。这些理想近来受到多位研究者的关注，包括二项式边理想（见例 3.2(i)）以及某些行列式理想（见例 3.2(ii)）。

我们希望，本文对局部上同调模的双分次分量所作的全面研究，将有助于进一步研究二项式边理想和行列式理想。本文没有利用它们背后的组合结构，而这些结构可能是进一步研究的有力工具。

1.1. 设$S = \bigoplus_{u\in\mathbb{N}} S_u$ 是一个标准分次诺特环，设$L = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} L_u$ 是一个有限生成分次S-模。众所周知，对所有$i \geq 0$,

(1) $H^i_{S_+}(L)_u$ 对于所有$u \in \mathbb{Z}$，都是有限生成的S_0-模,

(2) $H^i_{S_+}(L)_u = 0$对于所有$u \gg 0$,

其中$S_+ = \bigoplus_{u>0} S_u$ 是S的无关理想，见 [4, 定理 15.1.5]。鉴于这些事实，第二作者研究了关于R的任意齐次理想，局部上同调模$R = C[X_1, \ldots, X_n]$ 的分量是否具有某种可预测的行为。人们常常发现，正则环的局部上同调模满足强结构条件。在 [16], 中，他自然从C 为含有特征零域的正则环这一情形着手，对R中任意齐次理想I 对应的局部上同调$H^i_I(R)$的分次分量进行了全面研究，并发现它们也表现出显著的良好性质。随后，在 [17] 中，他与第三作者一起转向$C = B^G$ 为正则环B 在有限群G作用下的不变量环这一情形。在 [18], 中，他们在更一般的设定下证明了一些结果：C 是任意含有特征零域的交换诺特环；他们还给出了一些例子，以展示 [16]中的其他结果。

D-模理论是连接微分方程与代数几何的有力工具，也架起了代数、几何和数学物理等原本相互独立的领域之间的桥梁。In [12], Lyubeznik，随后包括第二作者在内的多位学者，巧妙地运用 D-模的代数理论研究（分次）局部上同调模的有限性性质。本文也运用这一理论研究双分次局部上同调模各分量的性质，即消失、温和性和刚性。我们证明，若 $\mathcal{T}$ 是 $^*\mathrm{Mod}(R)$上的双分次 Lyubeznik 函子，则 $\mathcal{T}(R)$是双分次广义欧拉模。因此，我们关于双分次广义欧拉模的结果揭示了 $\mathcal{T}(R)$的性质，尤其是由任意双齐次理想（而不仅限于单项式理想）支撑的局部上同调模的性质。

本文结构如下。第 2 节介绍并讨论双分次广义欧拉模和双分次卢布兹尼克函子的一些性质。第 3 节确立它们的渐近消失行为、温和性和刚性性质。第 4 节给出双分次分量的 K 向量空间维数的多项式表达式。第 5 节致力于介绍其在由双齐次理想支撑的局部上同调中的应用。

2. 记号

现在我们定义本文后续部分将用到的一些记号。

对于 (u_1, v_1)、$(u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$，若$u_1 \leq u_2$ 且$v_1 \leq v_2$，则定义 $(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2)$。

定义 2.1。 uv平面中的一个阴影区域称为位于 $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$处的块，记作 $\mathrm{B}_{(u_0,v_0)}$，如果它是由以下点组成的集合

$$\{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u \geq u_0 \text{ if } u_0 \geq 0, u \leq u_0 \text{ if } u_0 \leq -n, v \geq v_0 \text{ if } v_0 \geq 0, \text{ and } v \leq v_0 \text{ if } v_0 \leq -m\},$$

图示说明可参见注释 2.3。有时，当序对 $(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$ 任意且信息不多时，我们用 $\mathcal{B}$ 代替 $\mathrm{B}_{(u_0,v_0)}$。我们进一步将 $(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$ 称为块 $\mathrm{B}_{(u_0,v_0)}$的角。

2.2. 双分次区域。

我们将双分次局部上同调模的各部分表示为uv平面上的坐标。我们的目标是捕捉下文定义的各区域中的渐近行为:

(i) $\mathcal{NE}$-块或东北块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $(u,\ v) \geq (0,\ 0)\}$。

(ii) $\mathcal{NW}^*$-块或西北块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $u \leq -n$ 且 $v \geq 0\}$。

(iii) $\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$-块或西南块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $(u,\ v) \leq (-n,\ -m)\}$

(iv) $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$-块或东南块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $u \geq 0$ 且 $v \leq -m\}$

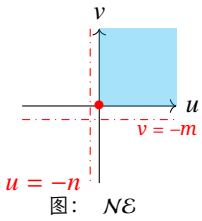
(v) $\mathcal{C}$-块或完整块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2\}$

(vi) $\mathcal{N}$-块或北块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $v \geq 0\}$。

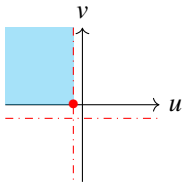
(vii) $\mathcal{W}^*$-块或受限西块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $u \leq -n\}$。

(viii) $\mathcal{S}^*$-块或受限南块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $v \leq -m\}$。

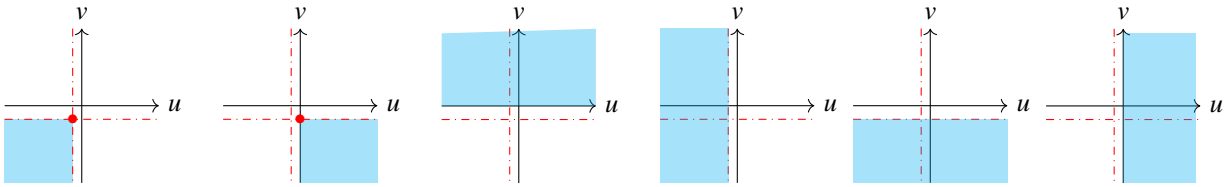
(ix) $\mathcal{E}$-块或东块： $\{(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ 其中 $u \geq 0\}$。



图： $\mathcal{NE}$



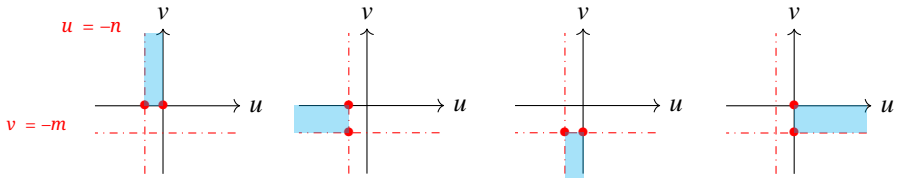
图： $\mathcal{NW}^*$



图： $\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 图： $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$ 图： $\mathcal{N}$ 图： $\mathcal{W}^*$ 图： $\mathcal{S}^*$ 图： $\mathcal{E}$

注释 2.3. 请注意，(i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 分别与 $\mathrm{B}_{(0,0)}$、$\mathrm{B}_{(-n,0)}$、$\mathrm{B}_{(-n,-m)}$ 和 $\mathrm{B}_{(0,-n)}$ 相关联。

在研究中，我们还考虑以下截断区域：(i) $\mathrm{Trun}(\mathcal{N}) := \mathcal{N}\backslash(\mathcal{NE} \cup \mathcal{NW}^*)$，$(ii)$ $\mathrm{Trun}(\mathcal{W}^*) := \mathcal{W}^*\backslash(\mathcal{NW}^* \cup \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*)$，$(iii)$ $\mathrm{Trun}(\mathcal{S}^*) := \mathcal{S}^*\backslash(\mathcal{S}^*\mathcal{W}^* \cup \mathcal{S}^*\mathcal{E})$，以及 (iv) $\mathrm{Trun}(\mathcal{E}) := \mathcal{E}\backslash(\mathcal{S}^*\mathcal{E} \cup \mathcal{NE})\}$，它们各自对应的一对角点依次为 $\{(0, 0)$、$(-n, 0)\}$、$\{(-n, 0)$、$(-n,\ -m)\}$、$\{(-n, -m)$、$(-m, 0)\}$ 以及 $\{(-m, 0)$、$(0, 0)\}$。下文将用图示呈现这些区域，并以红点标出它们的角点。



图：$\mathrm{Trun}(\mathcal{N})$ 图：$\mathrm{Trun}(\mathcal{W}^*)$ 图：$\mathrm{Trun}(\mathcal{S}^*)$ 图：$\mathrm{Trun}(\mathcal{E})$

3. 双分次广义欧拉模

3.1. 设定。假设 C 是一个交换诺特环，包含一个特征为零的域 K。令 $\mathrm{R} = \mathrm{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m]$ 为 C 上的多项式环。令 $\mathrm{A}_{m,n}(\mathrm{C}) = \mathrm{R}\langle\partial_1, \ldots, \partial_n, \delta_1, \ldots, \delta_n\rangle$ 为 C 上的双分次 $(\mathrm{n}, \mathrm{m})^{th}$-Weyl代数，其中 $\partial_i = \partial/\partial \mathrm{X}_i$ 且 $\delta_j = \partial/\partial \mathrm{Y}$ j, $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{m}$ 且 $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$。将 R 和 $\mathrm{A}_{m,n}(\mathrm{C})$ 均视为标准 $\mathbb{Z}^2$-分次环，对所有 $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$，令 $\mathrm{bideg}(\mathrm{c}) = (0, 0)$，$\mathrm{bideg}\ \mathrm{X}_i = (1, 0)$，$\mathrm{bideg}\ \mathrm{Y}_j = (0, 1)$，且对 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{m}$ 和 $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，$\mathrm{bideg}\ \partial_i = -(1, 0)$，$\mathrm{bideg}\ \delta_i = -(0, 1)$。为区别具有标准 $\mathbb{Z}$-分次结构的 C 上的 $(\mathrm{n} + \mathrm{m})^{th}$-Weyl代数 $\mathrm{A}_{n+m}(\mathrm{C})$，这里将其记为 $\mathrm{A}_{m,n}(\mathrm{C})$。设 I 是 R 中的双齐次理想。那么局部上同调模 $\mathrm{M} := \mathrm{H}^i_J(\mathrm{R}) = \bigoplus_{(\mathrm{u},\mathrm{v})} \mathrm{M}^{(u,v)}$ 具有诱导的双分次结构。

例 3.2。

(i) 令 $R = K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m]$ 为域 K 上的多项式环。设 G 是一个有 m 个顶点的图。用 $E(G)$ 表示 G 的边集合 $\{i, j\}$。我们将 G 的二项式边理想 定义为

$$\mathcal{J}_G := (X_i Y_j - X_j Y_i \mid \{i, j\} \in E(G))$$

在 R 中。令 $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m)$ 表示 R 中唯一的齐次极大理想。回忆一下，二项式边理想是根理想。注意，在 3.1 的假设下，$\mathcal{J}_G$ 是一个双齐次理想。当 R 是标准 $\mathbb{N}^m$-分次且 $\deg X_j = \deg Y_j = e_j \in \mathbb{N}^m$ 时，[2], 中分析了 $R/\mathcal{J}_G$ 的 $H^i_{\mathfrak{m}}$ 的分次分量；其中<style id='j th 是第 $j = 1$ 个典范单位向量，$\mathrm{j} = 1, \ldots, m$。

(ii) 有不同种类的行列式理想（大多由 2×2-子式生成），在 3.1 的条件下它们是双齐次的。其中一种理想是双行列式理想，由 L. Li 在 [11] 中引入。固定 r、m、n ≥ 1。令 $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}^{(k)}\}_{k=1}^{r}$，其中 $\mathrm{X}^{(k)} = (\mathrm{X}^{(k)}\,\mathrm{ij})\mathrm{m}\times$ n 是一个由独立变量组成的 m $\times$ n 矩阵。令 R = K[X] 为完美域 K 上的多项式环。令 H 为这些矩阵的水平拼接，即 m $\times$rn 矩阵 $\mathrm{H} = (\mathrm{X}^{(1)} \cdots \mathrm{X}^{(r)})$；令 V 为它们的垂直拼接，即 rm $\times$n 矩阵

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

由 H 的 s 阶子式和 V 的 t 阶子式生成的理想 J 称为双行列式理想。取一个非空真子集 $\mathrm{U} \subset \{1, \ldots, \mathrm{m}\}$. 对于 $\mathrm{i} \in \mathrm{U}$，令所有 $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$ 以及所有 $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{r}$ 的 $\mathrm{bideg}\,\mathrm{X}^{(k)}\mathrm{ij} = (1, 0)$。类似地，对于 $\mathrm{i} \notin \mathrm{U}$，令所有 $\mathrm{j} = 1, \ldots,$ n 以及所有 $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{r}$ 的 $\mathrm{bideg}\,\mathrm{X}^{(k)}\mathrm{ij} = (0, 1)$。这将在 R 上诱导出标准双分次结构。注意，当 $\mathrm{s} = \mathrm{t} = 2$ 时，J 是 R 中的双齐次理想。

3.3. 我们将双分次欧拉算子定义在 $A_{n,m}(C)$ 上，记作 $(\mathcal{E}_n^X, \mathcal{E}_m^Y)$，定义如下：

$$\mathcal{E}_n^X = \sum_{i=1}^{n} X_i \partial_i \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_m^Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \delta_j.$$

注 3.4. 设

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{m}$$

设 A 是一个秩为 2 的 $2 \times (\mathrm{n} + \mathrm{m})$ 整数矩阵。记 A 的列为 $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n+m}$。根据[10, 第 248] 页中的记号，我们得到 $\mathrm{bideg}\,\mathrm{X}_i = \mathrm{a}_i$、$\mathrm{bideg}\,\partial_i = -\mathrm{a}_i$、$\mathrm{bideg}\,\mathrm{Y\,j} = \mathrm{a}_{n+j}$ 和 $\mathrm{bideg}\,\delta\mathrm{j} = -\mathrm{a}_{n+j}$，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{m}$，这与我们在 3.1 中的假设相符。此外，当 $\mathrm{C} = \mathrm{K}$ 是一个域时，$\mathcal{E}_n^X$ 和 $\mathcal{E}_m^Y$ 分别实质上是 [10], 中的第一个和第二个欧拉算子 E_1 和 E_2。

我们称一个双分次 分次 $A_{n,m}(C)$-模 E 是欧拉型 的，如果对 E 中的每个双齐次元素 e，其双次数为 $e = (u, v$)

$$(\mathcal{E}_n^X - u) \cdot e = 0 \quad \text{and} \quad (\mathcal{E}_m^Y - u) \cdot e = 0.$$

我们进一步定义以下扩展的双分次 $A_{n,m}(C)$-模类。

定义 3.5. 若双分次 $A_{n,m}(C)$-模 E 满足：对于每个双齐次元素 $e \in E$，若其双次数 $e = (u, v)$，则存在一个整数 $a > 0$（依赖于 e），使得

$$(\mathcal{E}_n^X - u)^a \cdot e = 0 \quad \text{and} \quad (\mathcal{E}_m^Y - v)^a \cdot e = 0.$$

请注意，文献 [19] 中已引入双分次广义欧拉 $A_{1,1}(C)$-模，用于研究由 C 中带系数（系数不一定是单位）的单项式生成的理想。

注 3.6. 将 R 和 $A_{n,m}(C)$ 都视为标准分次，并令 $\deg X_i = \deg Y_j = 1$，且对所有 $i = 1, \dots, m$ 和 $j = 1, \dots, n$，$\deg \partial_i = \deg \delta_j = -1$。为作区分，在此情形下我们将 $A_{n,m}(C)$ 记为 $A_{m+n}(C)$。给定一个双分次 $A_{n,m}(C)$-模 E，我们进一步考虑由 $\mathrm{Tor}(E)_r = \bigoplus_{u+v=r} M_{(u,v)}$（对每个 $r \in \mathbb{Z}$）定义的 $A_{m+n}(C)$-分次模 Tor(E)。取 $e \in E_{(u,v)}$，使得对某个整数 $a > 0$，有 $(\mathcal{E}_n^X - u)^a \cdot e = 0$ 且 $(\mathcal{E}_m^Y - v)^a \cdot e = 0$。注意，在 $A_{n,m}(C)$ 中，$\mathcal{E}_n^X - u$ 与 $\mathcal{E}_m^Y - v$ 彼此可交换。因此

$$\left(\mathcal{E}_n^X + \mathcal{E}_m^Y - (u+v)\right)^{2a} \cdot e = \left((\mathcal{E}_n^X - u) + (\mathcal{E}_m^Y - v)\right)^{2a} \cdot e = \sum_{i=0}^{2a} \binom{2a}{i} (\mathcal{E}_n^X - u)^{2a-i} (\mathcal{E}_m^Y - v)^i = 0.$$

这表明，如果 E 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模，那么 Tot(E) 是一个分次广义欧拉 $A_{m+n}(C)$-模。

注 3.7. 假设 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 是一个双分次 $A_{n,m}(C)$-模。令 $R^X := C[X_1, \dots, X_n]$，并令 $R^Y := C[Y_1, \dots, Y_m]$。设 R^X，R^Y 为标准分次，且 $\deg X_i = 1 = \deg Y_j$，对所有 $c \in C$ 均有 $\deg c = 0$。固定 $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$。记 $M_{u_0,*} := \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{(u_0, v)}$ 和 $M_{*,v_0} := \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v_0)}$。显然，$M_{u_0,*}$ 和 M_{*,v_0} 分别是分次 R^Y 和 R^X-模。假设 M 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模。那么，根据定义，对于每个 $e_1 \in M_{u_0,v}$（分别地，$e_2 \in M_{u,v_0}$），存在某个 $a \geq 1$，使得 $(\mathcal{E}_m^Y - v)^a \cdot e_1 = 0$（分别地，$(\mathcal{E}_n^X - u)^a \cdot e_2 = 0$）。因此，$M_{*,v_0}$（分别地，$M_{u_0,*}$）是分次广义欧拉 $A_n^X(C) = R^X\langle \partial_1, \dots, \partial_n\rangle$-模（分别地，$A_m^Y(C) = R^Y\langle \delta_1, \dots, \delta_m\rangle$- 模）。

以下结果断言，二重分次广义欧拉模类在扩张下封闭，这对本研究至关重要。由于可以按照与 [15, Proposition 2.1], 相同的方法证明，因此我们省略证明。

命题 3.8。 设 $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} M_3 \to 0$ 是双分次 $A_{n,m}(C)$-模的短正合列（所有映射均为双齐次）。则以下命题等价:

(1) M_2 是二重分次广义欧拉。

(2) M_1 和 M_3 是二重分次广义欧拉。

沿用 [15, Propositions 3.2 and 3.5] 和 [20, Propositions 5.3 and 5.5] 中的相同方法（另见 [18, Propositions 3.4, 3.5, 3.6, and 3.7]），可以得到以下结果。

命题 3.9。 设 M 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模。那么对于 $i = 0,1$，$A_{n-1,m}(C)$-模 $H_i(X_n; M)$ 和 $A_{n,m-1}(C)$-模 $H_i(Y_m; M)$ 都是双分次广义欧拉型。

命题 3.10。 设 M 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模。那么对于 $i = 0,1$，$A_{n-1,m}(C)$-模 $H_i(\partial_n; M)(-1, 0)$ 和 $A_{n,m-1}(C)$-模 $H_i(\delta_m; M)(0, -1)$ 都是双分次广义欧拉型。

命题 3.11。 设 M 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模。对于 $n = 1$，$H_i(\partial_1; M)_{(u,v)} \neq 0$ 仅当 $u = -1$ 且对于 $m = 1$，$H_i(\delta_1; M)_{(u,v)} \neq 0$ 仅当 $v = -1$，其中 $i = 0,1$。

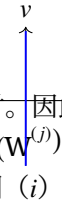
命题 3.12。 设 M 是双分次广义欧拉 $A_{n,m}(C)$-模。对于 $n = 1$，$H_i(X_1; M)_{(u,v)} \neq 0$ 当且仅当 $u = 0$，而对于 $m = 1$，$H_i(Y_1; M)_{(u,v)} \neq 0$ 当且仅当 $v = 0$，其中 $i = 0,1$。

注 3.13。假设 $n > 1$。利用与 [20, 定理 5.4], 类似的论证，我们可以证明，对于每个 $j \geq 0$，德拉姆同调模 $H_j(X_i, X_{i+1}, \dots, X_n; M)$ 是一个双分次广义欧拉 $A_{i-1,m}(C)$-模。特别地，$N^{(j)} := H_j(X_2, X_3, \dots, X_n; M)$ 是一个双分次广义欧拉 $A_{1,m} = C\langle X_1, Y_1, \dots, Y_m, \partial_1, \delta_1, \dots, \delta_m\rangle$-模。固定 $j \geq 1$。对于 $i = 0, 1$，根据命题 3.12,

$$H_i(X_1; N^{(j)})_{(0,v)} \neq 0 \quad \text{and} \quad H_i(X_1; N^{(j)})_{(u,v)} = 0 \quad \text{for all } u \neq 0.$$

设 $\underline{X} := X_1, X_2, \dots, X_n$. 那么由正合列

$$0 \to H_0(X_1; N^{(j)}) \to H_j(\underline{X}; M) \to H_1(X_1, N^{(j-1)}) \to 0$$



分次 $R = C[X_1, Y_1, \dots, Y_m]$-模（见 [20, 引理 2.3]），可得 $H_j(X; M)_{(u,v)} \neq 0$ 仅当 u 满足 $u = 0$ 时。因此，可将 $W^{(j)} := H_j(X; M) = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} (W^{(j)})_{*,v}$ 视为分次 $A_m(C) = C\langle Y_1, \dots, Y_m, \delta_1, \dots, \delta_m\rangle$-模，其中 $(W^{(j)})_{*,v} = H_j(X; M)_{(0,v)}$。非零的分次分量见图 (i)。根据命题 3.11，前述论证可推广到 $H_j(\underline{\partial}; M)$，其中 $\underline{\partial} = \partial_1, \dots, \partial_n$. 因此 $W^{(j)} := H_j(\underline{\partial}; M) = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} (W^{(j)})_{*,v}$ 是一个分次 $A_m(C)$-模，且 $(W^{(j)})_{*,v} = H_j(\underline{\partial}; M)_{(-1,v)}$。

4. 双分次 Lyubeznik 函子

设 $\mathcal{T}$ 是 ${}^*\mathrm{Mod}(R)$ 上的分次 Lyubeznik 函子。为了证明 $\mathcal{T}(R)$ 是分次广义欧拉型， [16], 中的第二作者考虑了一个一般设定，使我们能够证明：当 $\mathcal{T}$ 是作用于 ${}^*\mathrm{Mod}(R)$ 上的双分次 Lyubeznik 函子时， $\mathcal{T}(R)$ 是双分次广义欧拉型。我们首先回顾这一设定。

设定：令 C 为一个包含特征零域 K 的交换诺特环。假设存在一个环 Λ （不一定交换）包含 C ，使得 $K \subseteq Z(\Lambda)$，即 Λ 的中心。此外，假设

(i) Λ 既是左 C-模，也是右 C-模，并且均为自由模。

(ii) $N = C$ 是一个左 Λ-模，使得将 Λ 在 N 上的作用限制到 C 后，得到 C 在 N 上的通常作用 .

令 $R = C[X_1, \ldots, X_n]$ 和 $\Gamma = \Lambda[X_1, \ldots, X_n]$。将 R 视为分次环，其中 $\deg C = 0$，$\deg X_i = 1$，并将 Γ 视为分次环，其中 $\deg \Lambda = 0$，且对所有 i 均有 $\deg X_i = 1$。此外，假设对于 R 的每个齐次理想 I 以及一个分次 Γ-模 L，集合 $H_I^0(L)$ 是 L 的分次 Γ-子模。令 $\mathcal{D}_n := A_n(\Lambda)$ 为域 Λ 上的 n^{th}-Weyl 代数。我们通过指定 $\deg \Lambda = 0$、$\deg X_i = 1$ 以及 $\deg \partial_i = -1$，将 $\mathcal{D}_n$ 视为分次对象。

在上述设定下，第二作者证明了以下结果。

定理 4.1. *[16, 定理 3.6，引理 3.7]* 设 $\mathcal{T}$ 是 ${}^*Mod(R)$ 上的分次 *Lyubeznik* 函子。那么 $\mathcal{T}(R)$ 是一个分次广义欧拉型 $\mathcal{D}_n$-模。

为了后续研究，我们将上述结果推广到 $\Lambda = C$ 的情形，并概述其证明。

定理 *4.2.* 设 C 是一个包含特征零域的诺特环，且 $R = C[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ 是 C 上的多项式环。令 $A_{m,n}(C) = R\langle \partial_1, \ldots, \partial_n, \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle$ 表示 C 上的双分次 $(n, m)^{th}$-*Weyl* 代数，其中 $\partial_i = \partial/\partial X_i$ 且 $\delta_j = \partial/\partial Y_j$。将 R 和 $A_{m,n}(C)$ 都视为标准 $\mathbb{Z}^2$ 分次环，并令对所有 $c \in C$，$bideg(c) = (0, 0)$，$bideg\, X_i = (1, 0)$，$bideg\, Y_j = (0, 1)$，$bideg\ \partial_i = -(1, 0)$，$bideg\ \delta_i = -(0, 1)$，其中 $i = 1, \ldots, n$，$j = 1, \ldots, m$。设 $\mathcal{T}$ 是 ${}^*Mod(R)$ 上的多重分次 *Lyubeznik* 函子。那么 $\mathcal{T}(R)$ 是一个多重分次广义欧拉型 $A_{n,m}(C)$-模。

证明。 设 I 是 R 中的一个双齐次理想，且 M 是一个双分次 $A_{n,m}(C)$-模。

断言。$H_I^0(M)$ 是 $A_{n,m}(C)$-模 M 的一个双分次子模。

设 $y \in H_I^0(M)$。则 $I^s y = 0$ 对某个 $s \geq 1$ 成立。取 $f \in I^{s+1}$。对任意 $g \in R$,

$$(\partial_i f)(g) = \partial_i(fg) = f\partial_i(g) + g\partial_i(f) = (f\partial_i + \partial_i(f))(g)$$

因此 $f\partial_i = \partial_i f - \partial_i(f)$。由于 $\partial_i(f) \in I^s$，所以 $f\partial_i y = 0$。于是 $\partial_i y \in H_I^0(M)$ 对 $i = 1, \ldots, n$ 成立。类似地，可以证明 $\delta_j y \in H_I^0(M)$ 对 $j = 1, \ldots, m$ 成立。注意，$A_{n,m}(C)$ 是一个自由 R-模，其生成元集合为

$$\{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \delta_1^{\beta_1} \cdots \delta_m^{\beta_m} \mid \alpha_i, \beta_j \geq 0 \text{ for } i = 1, \ldots, n \text{ and } j = 1, \ldots, m\}.$$

该断言得证。

采用与 [16, 3.10], 相同的方法，可以容易地证明 $\mathcal{T}(R)$ 是一个 $\mathbb{Z}^2$-分次 $A_{n,m}(C)$-模。我们定义 $\mathcal{T}(R) := M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$。

设 $S X = R^X[Y_1, \ldots, Y_m]$，且 $S Y = R^Y[X_1, \ldots, X_n]$。显然，$R = S X = S Y$。考虑将 S X 视为分次的，其中对所有 $z \in R^X$，$\deg z = 0$，且对 $j = 1, \ldots, m$，$\deg Y_j = 1$。那么， $\mathcal{T}$ 是 ${}^*\mathrm{Mod}(S X)$ 上的一个分次 Lyubeznik 函子。根据 [16, 设定 3.1] 及 [16, 定理 3.6]，可得 $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}(S X) = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{*,v}$ 是一个分次广义欧拉模 $\mathcal{D}_m^X := A_m(A_m(C)) = A_m(R^X\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle)$- 模。类似地，如果将 S Y 视为分次的，其中对所有 $z \in R^Y$，$\deg z = 0$，且对 $i = 1, \ldots, n$，$\deg X_i = 1$，那么 $\mathcal{T}(R) = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{u,*}$ 是一个分次广义欧拉模 $\mathcal{D}_n^Y := A_n(A_m(C)) = A_n(R^Y\langle \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle)$- 模。给定 $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$，注意到 $M_{(u_0,*)} = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{(u_0,v)}$ 且 $M_{*,v_0} = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v_0)}$。因此，对所有 $e \in M_{(u_0,v_0)}$，都存在 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $(\mathcal{E}_m^Y - v_0)^a \cdot e = 0$ 且 $(\mathcal{E}_n^X - u_0)^b \cdot e = 0$。由定义可知，$\mathcal{T}(R)$ 是一个双分次广义欧拉模 $A_{n,m}(C)$-模。 □

5. 双分次广义欧拉模分量的性质

本节旨在讨论双分次局部上同调模各分量的一些性质。根据定理 4.2，我们将在下述设定下更一般地研究双分次广义欧拉模的各分量。

5.1. 标准假设：设 C 是任意一个诺特环，包含一个特征为零的域 K，且 $R = C[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ 是 C 上的多项式环。令 $A_{m,n}(C) = R\langle \partial_1, \dots, \partial_n, \delta_1, \dots, \delta_n \rangle$ 表示 C 上的双分次 $(n, m)^{th}$-Weyl 代数，其中 $\partial_i = \partial/\partial X_i$ 且 $\delta j = \partial/\partial Y_j$。将 R 和 $A_{m,n}(C)$ 都视为标准 $\mathbb{Z}^2$分次环，对所有 $c \in C$，令 $\text{bideg}(c) = (0, 0)$，$\text{bideg } X_i = (1, 0)$，$\text{bideg } Y_j = (0, 1)$，$\text{bideg } \partial_i = -(1, 0)$，且当 $i = 1, \dots, m$ 和 $j = 1, \dots, n$ 时，$\text{bideg } \delta_i = -(0, 1)$。设 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 是一个双分次广义欧拉模 $A_{m,n}(C)$- 模。

我们将注意力集中在消失、温和性和刚性问题上。由于这些性质在分次情形中已为人所知（见 [16], [18]），我们可以使用注释 3.6 和 3.7。

5.2. 消失性质。
我们证明，对于可数生成双分次模 M，几乎所有双分次分量消失，蕴含M消失。我们先证明以下引理。

引理 5.3. 设 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 是一个可数生成的多分次 $R = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{N}^2} R_{(u,v)}$-模。那么对于每个$(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $M_{(u,v)}$都是一个可数生成的 $R_{(0,0)}$-模。

证明。 假设 $\{m_1, m_2, \dots\}$ 是 M 作为一个R-模的可数生成集，且双次数为 $m_i = (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2$。我们有一个双分次$R$-模的正合列

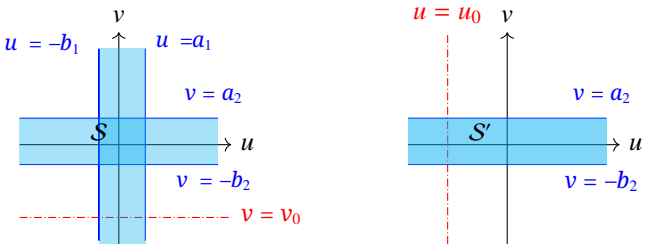
$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} R(-(u_i, v_i)) \to M \to 0,$$

从而得到一个$R_{(0,0)}$-模的正合列

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_{(u-u_i, v-v_i)} \to M_{(u,v)} \to 0$$

对所有的 $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ 均成立。由于每个 $R_{(u-u_i,v-v_i)}$ 都是有限生成的$R_{(0,0)}$-模，因此$M_{(u,v)}$ 是可数生成的$R_{(0,0)}$-模。 □

定理 5.4 (消失)。 (假设与 *5.1* 中相同) 进一步假设 K 是一个不可数域，且 $M = \bigoplus_{u,v\in\mathbb{Z}} M_{u,v}$ 是一个可数生成的双分次 R-模。假设对于每个$(u, v) \notin S$，$M_{(u,v)} = 0$均成立，其中 S 是图(i)中的阴影区域，则 $M = 0$。



图（i）　　图（ii）

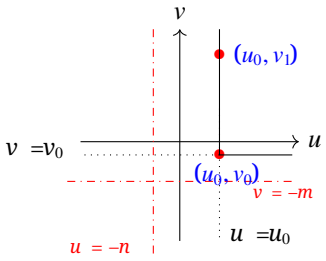
证明。令 $R^X := C[X_1, \dots, X_n]$，并令 $R^Y = C[Y_1, \dots, Y_m]$。将 $R = S\,X := R^X[Y_1, \dots, Y_m]$ 视为标准分次环，其中对所有 $z \in R^X$，$\deg z = 0$，且对 $j = 1, \dots, m$，$\deg Y_j = 1$。于是由引理 5.5], [18, $(S\,X) = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{\star,v}$是一个可数生成的分次 S X-模。类似地，将 $R = S\,Y := R^Y[X_1, \dots X_n]$ 视为标准分次环，其中对所有 $z \in R^Y$，$\deg z = 0$，且对 $i = 1 \dots n$，$\deg X_i = 1$。于是得到 $\mathcal{T}(S\,Y) = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{u,\star}$是一个可数生成的

分次 S Y-模。因此由引理 5.3，$M_{\star,v} = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v)}$（分别地，$M_{u,\star} = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{(u,v)}$）是可数生成的 R^X-模（分别地，R^Y-模）。此外，由注 3.7 可知，$M_{\star,v}$（分别地，$M_{u,\star}$）是分次广义欧拉 $A_n(C)$-模（分别地，$A_m(C)$-模）。固定 $v \in \mathbb{Z}$。由 [18, 推论 5.12] 可得："若 $M_{\star,v} \neq 0$，则对于无穷多个 $u \gg 0$，有 $(M_{\star,v})_u = M_{(u,v)} \neq 0$，或对于无穷多个 $u \ll 0$，有 $M_{(u,v)} \neq 0$。"因此，存在某些 $a, b \in \mathbb{Z}$，且 $a < b$，使得若对所有 $u \notin [a, b]$，$M_{(u,v)} = 0$，则 $M_{\star,v} = 0$。交换 u 和 v 后，同一结论仍成立。

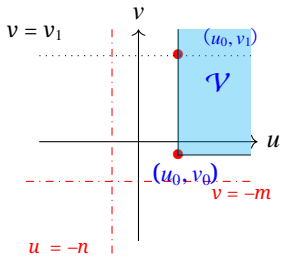
现在考虑图 (i) 中的阴影区域 $\mathcal{S}$，并令 $M_{(u,v)} = 0$ if $(u, v) \notin \mathcal{S}$。对于每个固定的 $v_0 > a_2$ 或 $v_0 < -b_2$, as $(M_{*,v_0})_u = M_{(u,v_0)} = 0$ 对所有 $u \gg 0$ 和 $u \ll 0$ 都成立，因此可得 $M_{*,v_0} = 0$。现在我们有如下情形：$M_{(u,v)} = 0$ if $(u, v) \notin \mathcal{S}'$，即图 (ii) 中新的阴影部分。固定 $u_0 \in \mathbb{Z}$。由于 $(M_{u_0,*})_v = M_{(u_0,v)} = 0$ 对所有 $v \gg 0$ 和 $v \ll 0$ 都成立，因此得到 $M_{u_0,*} = 0$。因此，对所有 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，$M_{(u,v)} = 0$ 均成立。结论得证。 □

5.5. 驯性。
现在我们证明以下结果，它表明M具有驯性。

定理 5.6（温和性）。（假设与 *5.1* 中相同）。若 $M \neq 0$，则存在至少一个如图（*iv*）所示的区域 $\mathcal{V}$，使得对于所有（u，v）$\in \mathcal{V}$，$M_{(u,v)} \neq 0$。



图（*iii*）



图（*iv*）

证明。若$M \neq 0$则$M_{(u_0,v_0)} \neq 0$对某个 $(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2$成立。因此$M_{\star,v_0} = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v_0)} \neq 0$且$M_{u_0,\star} = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{(u_0,v)} \neq 0$。根据 [18, 推论 5.13],

$$M_{(u_0,v)} \begin{cases} \neq 0 \ \forall v \geq v_0 & \text{if } v_0 \geq -m+1 \\ \neq 0 \ \forall v \leq v_0 & \text{if } v_0 \leq -m \end{cases} \quad \text{and} \quad M_{(u,v_0)} \begin{cases} \neq 0 \ \forall u \geq u_0 & \text{if } u_0 \geq -n+1 \\ \neq 0 \ \forall u \leq u_0 & \text{if } u_0 \leq -n \end{cases}$$

特别地，若 $u_0 \geq -n+1$ 且 $v_0 \geq -m+1$，则得到图（iii）。例如，取 $v_1 \geq v_0$。由于 $M_{(u_0,v_1)} \neq 0$，我们有 $M_{\star,v_1} = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v_1)} \neq 0$。现在由于 $u_0 \geq -n+1$，所以根据 [18, 推论 5.13] $(M_{\star,v_1})_u = M_{u,v_1} \neq 0$，对所有 $u \geq u_0$均成立。令 v_1 从 v_0 变化到 ∞，我们得到图（iv）中的阴影区域 $\mathcal{V}$，使得对所有 $(u, v) \in \mathcal{V}$，$M_{(u,v)} \neq 0$ 均成立。同样地，利用 [18, 推论 5.13]，根据 (u_0,v_0) 的取值，我们将得到不同的区域。 □

5.7. 刚性性质。
In this subsection我们探讨双分次广义 Euler 型$A_{n,m}(C)$-模M的分量的刚性性质。这一性质比第5.2小节中的性质更强，并且在分析双分次局部上同调模的分量时起着至关重要的作用。利用这一性质，我们在第6节中获得了关于双分次分量的 Bass 数、关联素理想、支撑的维数和内射维数的一些有趣信息。

定理 5.8 (刚性-1)。(假设与 *5.1* 中相同，记号与第 *2.2* 小节相同)。设 $\mathcal{R}$ 为集合 $\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}\}$中的一个区域。那么下列条件等价：

(a) 存在$(u_0, v_0) \in \mathcal{R}$，使得对于所有$(u,v) \in \mathfrak{B}_{(u_0,v_0)}$，$M_{(u,v)} \neq 0$。

(b) $M_{(u,v)} \neq 0$ 对所有$(u,v) \in \mathcal{R}$成立。

(c) $M_{(u_1,v_1)} \neq 0$ 对某个$(u_1,v_1) \in \mathcal{R}$成立。

注。利用与定理 5.9 相同的论证，可以对上述结果给出一个简短的证明。不过，下面这个相对较长的证明将有助于读者深入理解这些陈述。

证明。我们固定 $\mathcal{R}$ 为区域 $\mathcal{NE}$。显然，$(b) \implies (a) \implies (c)$。我们只需证明 $(c) \implies (b)$。我们对 $r = n + m$ 使用归纳法。由于 $n,m \geq 1$，所以 $r \geq 2$。令 $r = 2$，这仅当 $n = 1 = m$ 时成立。

现在，只有当 $H_1(Y_1, M)_{(u,v)}$ 非零时 $v = 0$ 才成立；而 $H_1(X_1, M)_{(u,v)}$ 非零时 $u = 0$ 才成立，其中 $l = 0, 1$。我们有以下正合列

$$\begin{aligned} &(1)\quad 0 \to H_1(Y_1, M)_{(u,v)} \to M_{(u,v-1)} \xrightarrow{\cdot Y_1} M_{(u,v)} \to H_0(Y_1, M)_{(u,v)} \to 0, \\ &(2)\quad 0 \to H_1(X_1, M)_{(u,v)} \to M_{(u-1,v)} \xrightarrow{\cdot X_1} M_{(u,v)} \to H_0(X_1, M)_{(u,v)} \to 0. \end{aligned} \tag{5.8.1}$$

因此，对于所有 $v \geq 1$，我们得到 $M_{(u,v)} \cong M_{(u,v-1)}$；也就是说，对于所有满足 $v \geq 0$ 的 $(u, v) \in \mathbb{Z}$，$M_{(u,v)} \cong M_{(u,0)} \cong M_{(u,v_1)}$。类似地，由第二个等式可得，对于所有满足 $u \geq 0$ 的 $(u, v) \in \mathbb{Z}$，$M_{(u,v)} \cong M_{(0,v)} \cong M_{(u_1,v)}$。因此，对于每个 $(u, v) \in \mathcal{NE}$，$M_{(u,v)} \cong M_{(u_1,v_1)} \neq 0$。

现在令 $r > 2$。对于 $j = 0$、1，我们有 $H_j(Y_m, M)$ 和 $H_j(X_n, M)$ 分别是双分次广义欧拉 $A_{n,m-1}(C)$-模和 $A_{n-1,m}(C)$-模。

我们分别处理 $n = 1$ 或 $m = 1$ 的情形。令 $n = 1$，则 $H_l(X_n,M)_{(u,v)}$ 仅当 $u = 0$ 时才非零。由正合列

$$0 \to H_1(X_1, M)_{(u,v)} \to M_{(u-1,v)} \xrightarrow{\cdot X_1} M_{(u,v)} \to H_0(X_1, M)_{(u,v)} \to 0,$$

我们得到，对于所有满足 $u \geq 0$ 的 $(u,v) \in \mathbb{Z}$，$M_{(u,v)} \cong M_{(u-1,v)} \cong M_{(0,v)} \cong M_{(u_1,v)}$。回顾一下，$M_{\star,v_1} := \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}} M_{(u,v_1)}$ 是一个分次广义欧拉 $A_1(C)$-模，并且对于某个 $u_1 \geq 0$，有 $(M_{\star,v_1})_{u_1} = M_{(u_1,v_1)} \neq 0$。因此根据 [18, 定理 7.1（II）]，可得对于所有 $u \geq 0$，$(M_{\star,v_1})_u = M_{(u,v_1)} \neq 0$。选取 $u \in (-\infty, -1]$ 并固定它。由于 $M_{u,\star} := \bigoplus_{v \in \mathbb{Z}} M_{(u,v)}$ 是一个分次广义欧拉 $A_m(C)$-模，并且对于某个 $v_1 \geq 0$，有 $(M_{u,\star})_{v_1} = M_{(u,v_1)} \neq 0$，因此再次由 [18, 定理 7.1（II）] 可得，对于所有 $v \geq 0$，$(M_{u,\star})_v = M_{(u,v)} \neq 0$。

现在令 $n > 1$ 和 $m > 1$。这使我们能够对 $H_1(Y_m,M)$ 和 $H_1(X_n,M)$ 使用归纳假设（因为 $n - 1 \geq 1$ 和 $m - 1 \geq 1$）。我们有以下正合列

$$\begin{aligned} &(1)\quad 0 \to H_1(Y_m, M)_{(u,v)} \to M_{(u,v-1)} \xrightarrow{\cdot Y_m} M_{(u,v)} \to H_0(Y_m, M)_{(u,v)} \to 0, \\ &(2)\quad 0 \to H_1(X_n, M)_{(u,v)} \to M_{(u-1,v)} \xrightarrow{\cdot X_n} M_{(u,v)} \to H_0(X_n, M)_{(u,v)} \to 0. \end{aligned} \tag{5.8.2}$$

现在考虑以下三种情况：

情况 *1*：$H_0(Y_m; M)_{(u_2,v_2)} \neq 0$ 对于某个 $(u_2,v_2) \in \mathcal{NE}$。

由归纳假设可知，对于所有 $(H_0(Y_m; M)_{(u,v)} \neq 0$，均有 $(u,v) \geq 0$。因此，由正合列 (5.8.2)(1) 可得，对于所有 $(u,v) \geq (0, 0)$，都有 $M_{(u,v)} \neq 0$。

情况 *2*：$H_1(Y_m; M)_{(u_2,v_2)} \neq 0$ 对于某个 $(u_2,v_2) \in \mathcal{NE}$。

由归纳假设可知，对于所有 $(u,v) \geq 0$，$H_1(Y_m; M)_{(u,v)} \neq 0$。因此，由正合列 (5.8.2)(1) 可知，对于所有 $(u, v) \geq (0, -1)$，$M_{(u,v)} \neq 0$，进而对于所有 $(u,v) \geq (0, 0)$。

情形 *3*：$H_0(X_n; M)_{(u_2,v_2)} \neq 0$ 对于某个 $(u_2,v\{v21>) \in \mathcal{NE}$。

由归纳假　设可知，对于所有 $(u,v) \geq 0$，$H_0(Y_m; M)_{(u,v)} \neq 0$。因此，由正合列 (5.8.2)(2) 可知，$M_{(u,v}$　$)\neq 0$ 对于所有 $(u,v) \geq (0, 0)$。

情形 *4*：$H_1(X_n; M)_{(u_2,v_2)} \neq 0$ 对某个 $(u_2,v_2) \in \mathcal{NE}$ 成立。

由归纳假设可得，对所有 $(u,v) \geq 0$，$H_1(Y_m; M)_{(u,v)} \neq 0$ 成立。因此，由正合列 (5.8.2)(2) 可得，对所有 $(u, v) \geq$，$M_{(u,v)} \neq 0\,(-1, 0)$ 成立，从而对所有 $(u,v) \geq (0, 0)$ 成立。

情形 *5*：对于 $j = 0,\ 1$；$H_j(Y_m; M)_{(u_2,v_2)} = 0$，并且对所有 $(u_2,v_2) \in \mathcal{NE}$，$H_j(X_n; M)_{(u_2,v_2)} = 0$ 成立。

由 (5.8.2) 可得，对所有 $(u, v) \geq$，$M_{(u,v-1)} \cong M_{(u,v)} \cong M^{(u-1,v)}\,(0, 0)$ 成立。因此，对所有 $(u, v) \geq$，$M_{(u,v)} \cong M_{(u_1,v_1)} \neq 0\,(0, 0)$ 成立。结论得证。

对于区域 $\mathcal{NW}^*$：使用以下一对短正合列

$$\begin{aligned} &(1)\quad 0 \to H_1(Y_m, M)_{(u,v)} \to M_{(u,v-1)} \xrightarrow{\cdot Y_m} M_{(u,v)} \to H_0(Y_m, M)_{(u,v)} \to 0, \\ &(2)\quad 0 \to H_1(\partial_n, M)_{(u,v)} \to M_{(u+1,v)} \xrightarrow{\cdot \partial_n} M_{(u,v)} \to H_0(\partial_n, M)_{(u,v)} \to 0. \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

对于区域 $\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$：使用以下一对短正合列

$$\begin{aligned}&(1)\quad 0\to H_1(\delta_m,M)_{(u,v)}\to M_{(u,v+1)}\xrightarrow{\cdot\delta_m}M_{(u,v)}\to H_0(\delta_m,M)_{(u,v)}\to 0,\\&(2)\quad 0\to H_1(\partial_n,M)_{(u,v)}\to M_{(u+1,v)}\xrightarrow{\cdot\partial_n}M_{(u,v)}\to H_0(\partial_n,M)_{(u,v)}\to 0.\end{aligned}\tag{5.8.4}$$

对于区域 $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$：使用以下一对短正合列

$$\begin{aligned}&(1)\quad 0\to H_1(\delta_m,M)_{(u,v)}\to M_{(u,v+1)}\xrightarrow{\cdot\delta_m}M_{(u,v)}\to H_0(\delta_m,M)_{(u,v)}\to 0,\\&(2)\quad 0\to H_1(X_n,M)_{(u,v)}\to M_{(u-1,v)}\xrightarrow{\cdot X_n}M_{(u,v)}\to H_0(X_n,M)_{(u,v)}\to 0.\end{aligned}\tag{5.8.5}$$

□

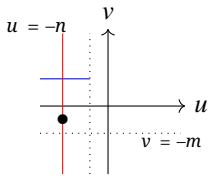
现在我们讨论刚性性质的第二部分。为此，我们将沿用定理 5.8 中的编号。

定理 5.9 (刚性-2)。 假设与 *5.1* 中相同，且记号沿用第 *2.2* 小节)。从集合中的某个截断区域中选取一个坐标 (u_0,v_0)

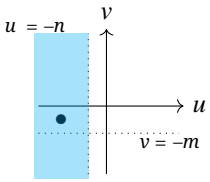
$$\{\mathrm{Trun}(\mathcal{N}),\mathrm{Trun}(\mathcal{W}^*),\mathrm{Trun}(\mathcal{S}^*),\mathrm{Trun}(\mathcal{E})\}.$$

假设 $M_{(u_0,v_0)}\neq 0$。那么，对于集合 $\{\mathcal{N},\mathcal{W}^*,\mathcal{S}^*,\mathcal{E}\}$ 中相应区域内所有(u,v)，$M_{(u,v)}\neq 0$，并保持顺序不变。此外，若对于某个 $-n<u_0<0$ 和 $-m<v_0<0$，有 $M_{(u_0,v_0)}\neq 0$，则对所有$(u,v)\in\mathbb{Z}^2$，都有 $M_{(u,v)}\neq 0$。

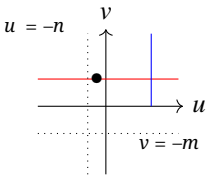
证明。对于区域 $\mathcal{N}$，我们只需证明 (b) $\Longrightarrow$ (a)。回忆一下，$\mathrm{M}_{\star,v_0}=\bigoplus_{u\in\mathbb{Z}}\mathrm{M}_{(u,v_0)}$ 是一个分次广义欧拉型 A_n(C)-模，并且 $(\mathrm{M}_{\star,v_0})_{u_0}=\mathrm{M}_{(u_0,v_0)}\neq 0$ 对某个 $-\mathrm{n}<\mathrm{u}_0<0$ 成立。因此，根据定理 7.3]，可得对所有 $\mathrm{u}\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{M}_{(u,v_0)}\neq 0$，见图 $\mathcal{N}$(b)（红线）。现在，对任意固定的 $\mathrm{u}\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{M}_{u,\star}=\bigoplus_{v\in\mathbb{Z}}\mathrm{M}_{(u,v)}$ 是一个分次广义欧拉型 A_m(C)-模，并且 $(\mathrm{M}_{u,\star})_{v_0}=\mathrm{M}_{(u,v_0)}\neq 0$ 对某个 $\mathrm{v}_0\geq 0$ 成立。根据定理 7.1（II），可得对所有 $\mathrm{v}\geq 0$，$(\mathrm{M}_{u,\star})_v=\mathrm{M}_{(u,v)}\neq 0$，见图 $\mathcal{N}$(b)（蓝线）。



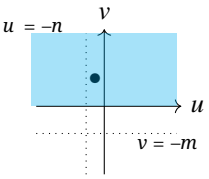
图： $\mathcal{W}^*(b)$



图： $\mathcal{W}^*(a)$

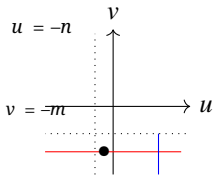


图： $\mathcal{N}(b)$

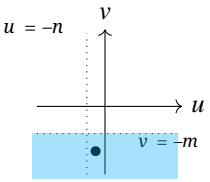


图： $\mathcal{N}(a)$

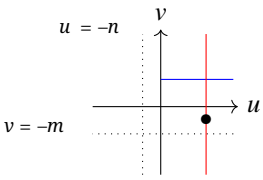
对于区域 $\mathcal{W}^*$，我们只需证明 (b) $\Longrightarrow$ (a)。回顾一下，$\mathrm{M}_{u_0,\star}=\bigoplus_{v\in\mathbb{Z}}\mathrm{M}_{(u_0,v)}$ 是一个分次广义欧拉型 A_m(C)-模，并且 $(\mathrm{M}_{u_0,\star})_{v_0}=\mathrm{M}_{(u_0,v_0)}\neq 0$ 对于某个 $-\mathrm{m}<\mathrm{v}_0<0$成立。因此，由 [18, 定理 7.3] 可知，对于所有 $\mathrm{v}\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{M}_{(u_0,v)}\neq 0$ 均成立，见图 $\mathcal{W}^*$(b)（红线）。现在，对于任意固定的 $\mathrm{v}\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{M}_{\star,v}=\bigoplus_{u\in\mathbb{Z}}\mathrm{M}_{(u,v)}$ 是一个分次广义欧拉型 A_n(C)-模，并且 $(\mathrm{M}_{\star,v})_{u_0}=\mathrm{M}_{(u_0,v)}\neq 0$ 对于某个 $\mathrm{u}_0\leq -\mathrm{n}$ 成立。由 [18, 定理 7.1 (I)] 可得，对于所有 $\mathrm{u}\leq -\mathrm{n}$，$(\mathrm{M}_{\star,v})_u=\mathrm{M}_{(u,v)}\neq 0$均成立，见图 $\mathcal{W}^*$(b)（蓝线）。



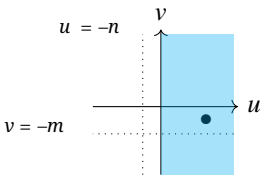
图： $\mathcal{S}^*(b)$



图： $\mathcal{S}^*(a)$



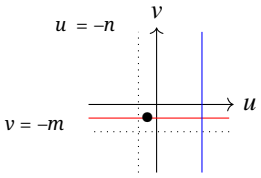
图： $\mathcal{E}\ (b)$



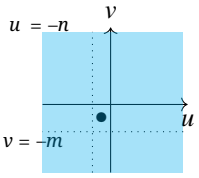
图： $\mathcal{E}\ (a)$

与上述论证类似，可以证明其余区域的结论。

最后，对于最后一个断言，我们只需证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。回顾一下，$M_\star$, $_{v_0} = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v_0)}$ 是一个分次广义欧拉型 $A_n(C)$-模，并且 $(M_\star,_{v_0})_{u_0} = M_{(u_0,}$ $v_0) \neq 0$ 对于某个 $-n < u_0 < 0$。因此，根据 [18, 定理 7.3]可知，对于所有 $u \in\mathbb{Z}$，$M_{(u,v_0)} \neq 0$，参见 uv 平面 (b)（红线）。现在，对于任意固定的 $u \in \mathbb{Z}$，$M_{u,\star} = \bigoplus_{v\in\mathbb{Z}} M_{(u,v)}$ 是一个分次广义欧拉型 $A_m(C)$-模，并且 $(M_{u,\star})_{v_0} = M_{(u,v_0)} \neq 0$对于某个 $-m < v_0 < 0$。因此，再次根据 [18,定理 7.3] 可得，对于所有 $v \in \mathbb{Z}$，$M_{(u,v)} \neq 0$，参见图 uv 平面 (b)。



图：uv平面（b）



图：uv平面（a）

□

5.10. 现在我们讨论几个例子，其中非零分量与上述图中uv平面的阴影区域相关联。

设$R = K[X_1, \ldots, X_n]$是域K上的多项式环。则

$$H^n_{(X_1,\ldots,X_n)}(R) = E_R(K) \cong X_1^{-1}\cdots X_n^{-1}K[X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}],$$

见 [4, 第 277]页。取S中的理想 $\mathfrak{a} = (X_1, \ldots, X_t) =: K[X_1, \ldots, X_t]$，其中某个$t \leq n$。则

$$\begin{aligned} H^t_{\mathfrak{a}}(R) &= H^t_{\mathfrak{a}}(S) \otimes_S R \\ &\cong X_1^{-1}\cdots X_t^{-1}K[X_1^{-1}, \ldots, X_t^{-1}] \otimes_K K[X_{t+1}, \ldots, X_n] \\ &\cong X_1^{-1}\cdots X_t^{-1}K[X_1^{-1}, \ldots, X_t^{-1}, X_{t+1}, \ldots, X_n]. \end{aligned}$$

例5.11. 设 $R = K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ 是域 K 上的多项式环，其中 X_i 的双次数为(1, 0)，Y_j 的双次数为(0, 1)，对于 $i = 1, \ldots, n$ 和 $j = 1, \ldots, m$。取 R 中的理想 $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$、$\mathfrak{a} = (X_1, \ldots, X_n)$、$\mathfrak{b} = (Y_1, \ldots, Y_m)$、$\mathfrak{c} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1)$ 和 $\mathfrak{d} = (X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$。则可以验证如下结论：

(i) $H^1_{(X_1)}(R) \cong X_1^{-1}K[X_1^{-1}, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$, (ii) $H^1_{(Y_1)}(R)$ $\cong Y_1^{-1}K[X_1, \ldots, X_n, Y_1^{-1}, Y_2, \ldots, Y_m]$, (iii) $H^2_{(X_1,Y_1)}(R) \cong (X_1^{-1}Y_1^{-1})$ $K[X_1^{-1}, X_2, \ldots, X_n, Y_1^{-1}, Y_2, \ldots, Y_m]$, (iv) $H^n_{\mathfrak{a}}(R) \cong (X_1^{-1}\cdots X_n^{-1})K[X_1^{-1},$ $\ldots, X_n^{-1}, Y_1, \ldots, Y_m]$, (v) $H^m_{\mathfrak{b}}(R) \cong (Y_1^{-1}\cdots Y_m^{-1})K[X_1, \ldots, X_n, Y$ $_1^{-1}\cdots Y_m^{-1}]$, (vi) $H^{n+1}_{\mathfrak{c}}(R) \cong (X_1^{-1}\cdots X_n^{-1}Y_1^{-1})K[X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}, Y_1^{-1}, Y_2, \ldots$ $, Y_m]$, (vii) $H^{m+1}_{\mathfrak{b}}(R) \cong (X_n^{-1}Y_1^{-1}\cdots Y_m^{-1})K[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n^{-1}, Y_1^{-1}\cdots$ $Y_m^{-1}]$, (viii) $H^{n+m}_{\mathfrak{m}}(R) \cong (X_1^{-1}\cdots X_n^{-1}Y_1^{-1}\cdots Y_m^{-1})K[X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}, Y_1^{-1}, \ldots$ $, Y_m^{-1}]$

.

对于任意整数$i_1, \ldots, i_n$和$j_1, \ldots, j_m$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^n_X \cdot X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} = (i_1 + \cdots + i_n)X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \\ \text{and}\quad &\mathcal{E}^m_Y \cdot Y_1^{j_1}\cdots Y_m^{j_m} = (j_1 + \cdots + j_m)Y_1^{j_1}\cdots Y_m^{j_m}. \end{aligned}$$

因此，$H^0(0)(R) = R$、$H^n_{\mathfrak{a}}(R)$、$H^{n+m}_{\mathfrak{m}}(R)$、$H^m_{\mathfrak{b}}(R)$、$H^2_{(X_1,Y_1)}(R)$、$H^1_{(X_1)}(R)$、$H^{n+1}_{\mathfrak{c}}(R)$、$H^{m+1}_{\mathfrak{b}}(R)$ 和 $H^1_{(Y_1)}(R)$ 都是双分次欧拉 $A_{n,m}(K)$-模。注意，它们分别由区域 $\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}$、uv 平面、$\mathcal{N}, \mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*, \mathcal{E}$ 表示，尤其当 $n, m \geq 2$ 时。

由于对所有 $j \neq n$ 都有 $H^j_{\mathfrak{a}}(S) = 0$，因此对所有 $j \neq n$ 都有 $H^j_{\mathfrak{a}}(R) = 0$。类似地，对所有 $j \neq m$ 都有 $H^j_{\mathfrak{b}}(R) = 0$，且对所有 $j \neq n + m$ 都有 $H^j_{\mathfrak{m}}(R) = 0$。令 $m \geq n \geq 2$。注意，$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$。考虑以下 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \to H^n_{\mathfrak{m}}(R) \to H^n_{\mathfrak{a}}(R) \oplus H^n_{\mathfrak{b}}(R) \to H^n_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(R) \to H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(R) \to \cdots$$

由于n，$n + 1 < n + m$，我们得到：若$m = n$，则$H^n_{\mathfrak{a}}(R) \oplus H^n_{\mathfrak{b}}(R) \cong H^n_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(R)$由图 (II) 和 (IV) 的组合表示。而若$m > n$，则$H^n_{\mathfrak{a}}(R) \cong H^n_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(R)$由图 (II) 表示。

注。 取$I=(X+Y)$为$R=K[X,Y]$中的理想。由于$R=K[X,\ X+Y]\cong K[$整数集$_1$,整数集$_2]:=R'$，其中Z_1,Z_2为变量，所以

$$H_I^1(R)\cong H_{(Z_2)}^1(R')\cong Z_2^{-1}K[Z_1,Z_2^{-1}]\cong (X+Y)^{-1}K[X,(X+Y)^{-1}].$$

因此，例5.11 可改写为适用于I 这类非单项式理想的形式。

注5.12. 设M 是一个多重分次广义欧拉$A^{(n,m)}(C)$-模。设f 是R 中的双齐次元素，其双次数为$f=(u,v)$；设z 是M 中的双齐次元素，其双次数为$z=(u',v')$。按照与 [20,引理3.5], 相同的方法，可以证明

$$(\mathcal{E}_n^X-u'+u)\cdot\frac{z}{f}=\frac{1}{f}(\mathcal{E}_n^X-u')\cdot z\quad\text{ and }\quad(\mathcal{E}_m^Y-v'+v)\cdot\frac{z}{f}=\frac{1}{f}(\mathcal{E}_m^Y-v')\cdot z.$$

然后，沿用 [20, 引理3.6、推论3.7], 的证明思路，可得M^f 是一个双分次广义欧拉$A^{(n,m)}(C)$-模。

例5.13. 设 $R=K[X_1,X_2,Y_1,Y_2]$ 是域 K 上的多项式环。取 R 中的理想 $I=(X_1,X_2)$。由例5.11可知，$H_I^2(R)=X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1},Y_1,Y_2]$。由 [4, 练习1.2.7]，还可得 $H_I^2(R)_{Y_1}\cong H^2_{IR_{Y_1}}(R_{Y_1})$。此外，$H^2_{IR_{Y_1}}(R_{Y_1})\cong H_I^2(R_{Y_1})$。由于 $H_I^2(R)$ 是一个多重分次广义欧拉全纯 $A^{(2,2)}(K)$-模（见定义 6.1），根据注5.12和 [4, 定理3.4.1], $H_I^2(R)_{Y_1}$ 也具有这一性质。注意到

$$\begin{aligned}
H_I^2(R)_{Y_1}\cong&H_I^2(R)\otimes_R R_{Y_1}\\
=&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1},Y_1,Y_2]\otimes_R\frac{K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1}]\otimes_K K[Y_1,Y_2]\otimes_R\frac{K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1}]\otimes_K\frac{R}{(X_1,X_2)}\otimes_R\frac{K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1}]\otimes_K\frac{K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,W_1]}{(X_1,X_2,1-Y_1W_1)},\quad\text{as }\frac{R}{I}\otimes_R M\cong\frac{M}{IM}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1}]\otimes_K\frac{K[Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1}]\otimes_K K[Y_1,Y_2,W_1]\otimes_{K[Y_1,Y_2,W_1]}\frac{K[Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1},Y_1,Y_2,W_1]\otimes_{K[Y_1,Y_2,W_1]}\frac{K[Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&\frac{X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1},Y_1,Y_2,W_1]}{(1-Y_1W_1)}\\
\cong&X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1},X_2^{-1},Y_1,Y_2,Y_1^{-1}].
\end{aligned}$$

显然，$H_I^2(R)_{Y_1}$ 由定理 5.8 中图(VII)(a)的阴影区域表示。类似地，可以验证，$H^2_{(Y_1,Y_2)}(R)_{X_1}\cong Y_1^{-1}Y_2^{-1}K[X_1,X_2,X_1^{-1},Y_1^{-1},Y_2^{-1}]$ 由定理 5.8 中的图(VIII)(a)表示。进一步注意，$R_{Y_1}=K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Y_1^{-1}]$ 和$R_{X_1}=K[X_1,X_2,X_1^{-1},Y_1,Y_2]$ 分别由定理 5.8 中的图 (IX)(a) 和图 (VI)(a) 表示。

6. 双分次分量的K-向量空间维数的多项式表达式

设C 是一个正则环，其中含有一个特征为零的域 K。令$R=C[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m]$ 为标准双分次多项式环，其中对于$i=1,\dots,n$ 和$j=1,\dots,m$，$\operatorname{bideg}X_i=(1,0)$，且$\operatorname{bideg}Y_j=(0,1)$。

设$B=K[[Y_1,\dots,Y_d]]$ 是一个幂级数环，且$A=B[X_1,\dots,X_n]$ 是一个以B为系数的多项式环。将A视为分次环，其中对所有$b\in B$，$\deg b=0$，且对$i=1,\dots,n$，$\deg X_i=1$。令$D_K(B):=B\langle\partial_1,\dots,\partial_d\rangle$ 为.....环

K上的K-线性微分算子，其中对$i = 1, \dots, n$， $\partial_i = \partial/\partial X_i$。记 $\mathcal{D}_n := A_n(D_K(B))$为$n^{th}$元$D_K(B)$上的Weyl代数。将 $\mathcal{D}_n$ 视为分次环，其中对所有$a \in D_K(B)$，$\deg a = 0$；$\deg X_i = 1$，并且对$i = 1, \dots, n$，$\deg \partial_i = -1$。注意A 是 $\mathcal{D}_n$的一个分次子环。

存在一个滤过 $\mathcal{B}$ of $\mathcal{D}_n$，使得伴随分次环 $\mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}_n)$ 是一个定义在C 上的、以 $(d + 2n)$ 个变量生成的多项式环，见 [16, 4.5]。由 [3, 3.1.9] 可知， $\mathcal{D}_n$ 的弱整体维数为$d + n$。因此，如果一个 $\mathcal{D}_n$-模M 为零，或者存在一个 $\mathcal{B}$-相容滤过 $\mathcal{F}$，使得M 的伴随分次模 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(M)$ 是有限生成的 $\mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}_n)$-模（等价地，$M$ 是有限生成的 $\mathcal{D}_n$-模，见 [16, 定理 4.9]），且维数为$d + n$，则称该模为全纯 模。现在我们将全纯模的这一概念推广到双分次情形。

定义 6.1. 如果$C = K[[Y_1, \dots, Y_d]]$，那么我们称双分次的$A_{n,m}(D_K(C))$-模M 为全纯 模，当且仅当 $\mathrm{Tot}(M)$ 作为$A_{n+m}(D_K(C))$-模是全纯的。

注意。 显然，若 $\mathrm{Tot}(M)$ 为零，则 M 也为零。此外，注意，$A_s(D_K(C))$ 和 $\mathrm{Tot}(A_{n,m}(D_K(C)))= A_{n+m}(D_K(C))$ 的环结构相同。同样，M 和 $\mathrm{Tot}(M)$ 的模结构也相同。因此，如果 $\mathrm{Tot}(M)$ 是有限生成的 $A_{n+m}(D_K(C))$-模，那么 M 就是有限生成的 $A_{n,m}(D_K(C))$-模。

设 $\mathcal{T}$ 是定义在 $^*\mathrm{Mod}(R)$ 上的双分次 Lyubeznik 函子。由 [16, 定理 4.2] 可立即得出， $\mathcal{T}(R)$ 是一个全纯的 $A_{n,m}(D_K(C))$- 模。

在本节中，$C = K$ 是一个域。注意，$A_{n,m}(K)$-模 M 是全纯的，当且仅当它为零，或者它是有限生成的 $A_{n+m}(K)$-模，且维数为 $n + m$。下一节将需要全纯 $A_{n,m}(D_K(C))$-模的一般定义。

本节中，我们采用以下设定。

6.2. 设定。令 $R = K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ 为 K 上具有 $(n + m)$ 个变量的标准双分次多项式环，其中 K 的特征为 $= 0$。令 $A_{n,m}(K) = R\langle\partial_1, \dots, \partial_n, \delta_1, \dots, \delta_m\rangle$ 为 K 上的双分次 $(n, m)^{th}$-Weyl代数，其中$\partial_i = \partial/\partial X_i$, $\delta j = \partial/\partial Y_j$，对所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le m$ 均成立。令 $M = \oplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$为一个双分次广义欧拉、全纯 $A_{n,m}(K)$-模。

注 6.3. 令 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 为一个全纯双分次 $A_{n,0}(K)$-模。固定 $v \in \mathbb{Z}$。设 $M_{*,v} := \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} M_{(u,v)}$。显然，$M_{*,v}$ 是 M 的双分次 $A_{n,0}(K)$-子模。由 [18, 引理 3.3], 可知，$A_n(K)$ 是左诺特环（也为右诺特环）。由左 $A_n(K)$-模的序列 $0 \to M_{*,v} \to M$，我们还可得 M_v 是有限生成的左 $A_n(K)$-模。由 [3, 命题 5.2]，进而可知 $M_{*,v}$ 是全纯左 $A_n(K)$-模。对任意全纯双分次 $A_{0,m}(K)$-模，类似论证同样成立。

本节的一个核心结果如下。

定理 6.4. 设 M 是一个全纯双分次广义欧拉 $A_{n,m}(K)$-模，且 $m, n \ge 1$。假设，对于某些 $a_1, b_1 \ge 0$ 以及某些 $a_2, b_2 \le -1$，有维数$_K M_{(a_i,b_j)} < \infty$。那么，对于所有$(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，都有维数$_K M_{(u,v)} < \infty$。

我们需要以下引理，其证明关键地用到了 [19,定理 2.12]。

引理 6.5. 设 M 是一个全纯双分次广义欧拉 $A_{n,1}(K)$-模，且 $n \ge 1$。假设，对于某个 $b_1 \ge 0, b_2 \le -1$ 以及所有 $a \in \mathbb{Z}$，有维数$_K M_{(a,b_1)}$, 维数$_K M_{(a,b_2)} < \infty$。那么，对于所有$(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，都有维数$_K M_{(u,v)} < \infty$。

证明。 我们对n使用归纳法。当$n = 1$时，结论由 [19, 定理 2.12]得出。接下来，假设$n \ge 1$。考虑正合列

$$0 \to H_1(X_n, M)_{(u,v)} \to M_{(u-1,v)} \xrightarrow{\cdot X_n} M_{(u,v)} \to H_0(X_n, M)_{(u,v)} \to 0. \tag{6.5.6}$$

由定义 6.1 和 [3, 3.4.2, 3.4.4] 可知，$H_j(X_n, M)$ 是双分次全纯 $A_{n-1,1}(k)$-模，其中 $j = 0, 1$。现在，$\dim_K M_{(a,b)} < \infty$ 对 $b = b_1, b_2$ 成立意味着

$$\dim_K H_1(X_n, M)_{(a+1,b)} < \infty \quad \text{and} \quad \dim_K H_0(X_n, M)_{(a,b)} < \infty.$$

因此，由归纳假设可知，对于所有的 $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ 以及 $j=0,\ 1$，$\dim_K H_j(X_n,M)_{(u,v)}<\infty$ 均成立。对于 $u=a+1$ 和 $u=a$，由 (6.5.6) 分别可得 $\dim_K M_{(a+1,b)}<\infty$ 和 $\dim_K M_{(a-1,b)}<\infty$。重复这一过程，我们得到 $\dim_K M_{(u,b_1)}<\infty$ 和 $\dim_K M_{(u,b_2)}<\infty$。考虑正合列

$$0\to H_1(Y_1,M)_{(u,v)}\to M_{(u,v-1)}\xrightarrow{\cdot Y_1}M_{(u,v)}\to H_0(Y_1,M)_{(u,v)}\to 0 \tag{6.5.7}$$

固定$u\in\mathbb{Z}$。那么，(6.5.7)与命题 3.12 表明，对所有$v\geq 0$，$M_{(u,v)}\cong M^{(u,0)}$；对所有$v\leq -1$，$M_{(u,v)}\cong M^{(u,-1)}$。结论现在由$b_1$,$b_2$的假设得出。 □

定理 *6.4* 的证明。我们对$r=n+m$使用归纳法。由于m,$n\geq 1$，所以$r\geq 2$。若$r=2$，则$m=1=n$。因此，根据定理 2.12]，$\dim_k M_{(u,v)}<\infty$。

现在假设$r>2$，且结论对 $<r$成立。不失一般性，假设$n\geq 2$。于是我们有一个正合列

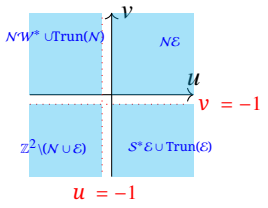
$$0\to H_1(X_n,M)_{(u,v)}\to M_{(u-1,v)}\xrightarrow{\cdot X_n}M_{(u,v)}\to H_0(X_n,M)_{(u,v)}\to 0. \tag{6.5.8}$$

由定义 6.1 和 [3, 3.4.2, 3.4.4]，我们得到$H_j(X_n,M)$ 是双分次全纯$A_{n-1,m}(k)$-模，其中$j=0,\ 1$。现在 $\dim_K M_{(a,b)}<\infty$蕴含

$$\dim_K H_1(X_n,M)_{(a+1,b)}<\infty \quad \text{and} \quad \dim_K H_0(X_n,M)_{(a,b)}<\infty.$$

于是，根据归纳假设，对于所有 $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$，且对于 $j=0,\ 1$，都有 $\dim_K H_j(X_n,M)_{(u,v)}<\infty$。令 $u=a+1$ 和 $u=a$，由 (6.5.8) 可得 $\dim_K M_{(a+1,b)}<\infty$ 和 $\dim_K M_{(a-1,b)}<\infty$。重复这一过程可得，对于每个 $i\geq 0$，都有 $\dim_K M_{(a+i,b)}<\infty$和 $\dim_K M_{(a-i,b)}<\infty$。因此，对于所有 $u\in\mathbb{Z}$，都有 $\dim_k M_{(u,b)}<\infty$。若 $m\geq 2$，则可在 (6.5.8) 中用 Y_m 替换 X_n，从而得到对于每个 $j\geq 0$，都有 $\dim_K M_{(a,b+j)}<\infty$ 和 $\dim_K M_{(a,b+j)}<\infty$。接下来，假设 $m=1$。此时结论由引理 6.5 得出，其中关键是选取特定的 (a_i,b_j)。因此，无论哪种情况，对于所有 $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$，都有 $\dim_K M_{(u,v)}<\infty$。 □

注 6.6. 定理　引理 6.5 的证明表明，对于任意 $a\in\mathbb{Z}$，如果对于某个$b_1\geq 0$，$\dim_K M_{(a,b_1)}<\infty$，那么 $\dim_K M_{(a,b)}<\infty$ 对所有 $b\geq 0$都成立。同样，如果对于某个 $b_2\leq -1$，$\dim_K M_{(a,b_2)}<\infty$，那么对所有 $b\leq -1$，$\dim_K M_{(a,b)}<\infty$ 都成立。在定理 6.4 证明的归纳步骤中，对 $r=m+n>2$ 且 $m=1$ 或 $n=1$的情形应用这一观察，我们得到以下结论：如果对于某个扇区 $\{\mathcal{NE},\mathcal{NW}^*\cup\mathrm{Trun}(\mathcal{N}),\ \mathbb{Z}^2\backslash(\mathcal{N}\cup\mathcal{E}),\ \mathcal{S}^*\mathcal{E}\cup\mathrm{Trun}(\mathcal{E})\}$中的所有 (a,b)，$\dim_K M_{(a,b)}<\infty$ 都成立，那么对于该扇区中的所有 (u,v)，$\dim_K M_{(u,v)}<\infty$ 都成立。



为了证明接下来的断言，我们需要以下引理。

引理 6.7。 设 $f\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 是关于 u 和 v 的二元函数。假设存在多项式 $P(X,Y),Q(X,Y)\in\mathbb{Q}[X,Y]$，使得对所有 $u,v\gg 0$，$f(u+1,v)-f(u,v)=P(u,v)$ 且 $f(u,v+1)-f(u,v)=Q(u,v)$。则 f 是多项式型的。

注。相反，假设 f 是一个函数，满足条件 $(i)(-\mathbb{N})\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，$(ii)\mathbb{N}\times(-\mathbb{N})\to\mathbb{N}$，$(iii)(-\mathbb{N})\times(-\mathbb{N})\to\mathbb{N}$，分别对所有 $(i)u\ll 0$、$v\gg 0$，$(ii)u\gg 0$、$v\ll 0$ 以及 $(iii)u$、$v\ll 0$ 成立。即便如此，沿用相同的证明思路，也可以证明 f 是多项式型的。

引理 6.7 的证明。假设存在某些 $u_0,v_0\geq 0$，使得对于所有 $u\geq u_0$ 和 $v\geq v_0$，都有 $f(u+1,v)-f(u,v)=P(u,v)$，且 $f(u,v+1)-f(u,v)=Q(u,v)$。那么对于所有 $u\geq u_0$ 和 $v\geq v_0$，有 $f(u,v)=f(u-1,v)+P(u-1,v)=\cdots=f(u_0,v)+\sum_{a=u_0}^{u-1}P(a,v)=f(u_0,v-1)+Q(u_0,v-1)+\sum_{a=u_0}^{u-1}P(a,v)=\cdots=f(u_0,v_0)+\sum_{=}^{v-1}b\,v_0\,Q(u_0,b)+\sum_{a=u_0}^{u-1}P(a,v)$。注意，最后两项是多项式函数。结论得证。 □

注 6.8. 注意，多项式 $\sum_{a=u_0}^{X-1}P(a,Y)$ 的 X 次数是 x-deg $P[X,Y]+1$，而多项式$\sum_{b=v_0}^{Y-1}Q(u_0,b)$ 的 Y 次数是 y-deg $Q[X,Y]+1$，见 [6, 引理 4.1.2]。因此

$$\begin{aligned}&\text{x-deg } f=\max\{\text{x-deg } P[X,Y]+1,\text{x-deg } Q[X,Y]\}\\ \text{and}\quad&\text{y-deg } f=\max\{\text{y-deg } P[X,Y],\text{y-deg } Q[X,Y]+1\}.\end{aligned}$$

我们还有如下命题 2.3.6] 的结果： [7,

命题 6.9。 设 f, $g\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{Z}$ 为函数， $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{N}^r$ 为线性无关向量，且 $\beta \in \mathbb{N}^r$，使得对于所有 $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^r$ 以及某个 $i = 1,\ldots, r$，均成立

$$f(\underline{\alpha}) - f(\underline{\alpha} - \gamma_i) = g(\underline{\alpha}).$$

若 g 是定义在 $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 上的次数为 d 的准多项式，则 f 也是定义在 $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 上的次数为 d 的准多项式 $+1$。

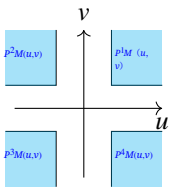
定理 6.10。 设 $n, m \geq 1$。令 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 为一个双分次全纯广义 *Euler* 型 $A_{n,m}(K)$-模。则存在多项式 $P_M^a(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$，其中 $a = 1, 2, 3, 4$ 满足

(i) $P_M^1(u, v) = \dim_K M_{(u,v)}$ 对所有 $u, v \gg 0$，若 $\dim_K M_{(u_1,v_1)}$ 对于某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{NE}$ 是有限的。

(ii) $P_M^2(u, v) = \dim_K M_{(u,v)}$ 对所有 $u \ll 0, v \gg 0$，若 $\dim_K M_{(u_1,v_1)}$ 对于某个 $(u_1, v_1) \in \mathcal{NW}^*$ 是有限的

(iii) $P_M^3(u, v) = \dim_K M_{(u,v)}$ 对所有 $u, v \ll 0$，若 $\dim_K M_{(u_1,v_1)}$ 对于某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 是有限的。

(iv) $P_M^4(u, v) = \dim_K M_{(u,v)}$ 对所有 $u \gg 0, v \ll 0$，若 $\dim_K M_{(u_1,v_1)}$ 对于某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{N}^*\mathcal{E}$ 是有限的。



证明。A应用注 6.6 于 (i)-(iv)，可得对于相应区域中的所有 (u,v)，$\dim_K M_{(u,v)}$ 均为有限 ns.

我们对 $r = n + m$ 进行归纳。若 $r = 1$，则 $n = 1, m = 0$ 或 $n = 0, m = 1$。在这两种情形下（它们等价于标准分次情形），结论由 [16,定理 11.1]得出。

若 $r = 2$，则（i）$n = 2, m = 0$，（ii）$n = 1, m = 1$，或（iii）$n = 0, m = 2$。对于（i）和（iii）这两种情形，结论由 [16, 定理 11.1]得出。现在假设 $m = 1 = n$。考虑正合列

$$0 \to H_1(\partial_1; M)_{(u,v)} \to M_{(u+1,v)} \xrightarrow{\cdot\partial_1} M_{(u,v)} \to H_0(\partial_1; M)_{(u,v)} \to 0. \tag{6.10.9}$$

对于 $i = 0,1$，由命题 3.11 可知，对所有 $u \neq -1$ 和任意 $v \in \mathbb{Z}$，$H_i(\partial_1^X, M)_{(u,v)} = 0$，因此由正合列 (6.10.9) 可得

$$\begin{aligned} & M_{(u,v)} \cong M_{(-1,v)} \quad \text{for all } u \leq -1 \text{ and any } v \in \mathbb{Z} \\ \text{and} \quad & M_{(u,v)} \cong M_{(0,v)} \quad \text{for all } u \geq 0 \text{ and any } v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

现在考虑正合列

$$0 \to H_1(\delta_1; M)_{(u,v)} \to M_{(u,v+1)} \xrightarrow{\cdot\delta_1} M_{(u,v)} \to H_0(\delta_1; M)_{(u,v)} \to 0. \tag{6.10.10}$$

对于 $i = 0, 1$，由命题 3.11 可知，对所有 $v \neq -1$ 和任意 $u \in \mathbb{Z}$，$H_i(\delta_1, M)_{(u,v)} = 0$，因此由正合列 (6.10.10) 得到

$$\begin{aligned} & M_{(u,v)} \cong M_{(u,-1)} \quad \text{for all } v \leq -1 \text{ and any } u \in \mathbb{Z} \\ \text{and} \quad & M_{(u,v)} \cong M_{(u,0)} \quad \text{for all } v \geq 0 \text{ and any } u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

因此，

$$M_{(u,v)} \cong \begin{cases} M_{(0,0)} & \text{if } u, v \geq 0 \\ M_{(-1,0)} & \text{if } u \leq -1 \text{ and } v \geq 0 \\ M_{(-1,-1)} & \text{if } u, v \leq -1 \\ M_{(0,-1)} & \text{if } u \geq 0 \text{ and } v \leq -1 \end{cases}$$

取 $P_M^1(u, v) = M_{(0,0)}$、$P_M^2(u, v) = M_{(-1,0)}$、$P_M^3(u,v) = M_{(-1,-1)}$、$P_M^4(u, v) = M_{(0,-1)}$，即可得到所需结果。

接下来，假设 $r > 2$，且结论对 $< r$ 成立。由 [16,定理 11.1] 可知，$m = 0$ 或 $n = 0$ 的情形成立。因此，我们可以假设 $m,n \geq 1$。考虑以下正合列

$$\begin{aligned} 0 \to H_1(\partial_n; M)_{(u,v)} \to M_{(u+1,v)} \xrightarrow{\cdot\partial_n} M_{(u,v)} \to H_0(\partial_n; M)_{(u,v)} \to 0. \\ 0 \to H_1(\delta_m; M)_{(u,v)} \to M_{(u,v+1)} \xrightarrow{\cdot\delta_m} M_{(u,v)} \to H_0(\delta_m; M)_{(u,v)} \to 0. \end{aligned} \tag{6.10.11}$$

对于 j = 0, 1, $H_j(\partial_n; M)(-1, 0)$ 是一个双分次广义欧拉 $A_{n-1,m}(K)$-模，而 $H_j(\delta_m; M)(0, -1)$ 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m-1}(K)$-模。对于每一对 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，由于 $\dim_K M_{(u,v)} < \infty$，我们得到 $\dim_K H_j(\partial_n, M)_{(u,v)} < \infty$ 和 $\dim_K H_j(\delta_m, M)_{(u,v)} < \infty$ 对 j = 0, 1 均成立。因此，根据归纳假设

$$\begin{aligned}\dim_K M_{(u+1,v)} - \dim_K M_{(u,v)} &= \dim_K H_1(\partial_1, M)_{(u,v)} - \dim_K H_0(\partial_1, M)_{(u,v)} \\ &= P^1_{H_1^X}(u, v) - P^1_{H_0^X}(u, v) \text{ for all } u, v \gg 0, \\ \text{and} \quad \dim_K M_{(u,v+1)} - \dim_K M_{(u,v)} &= \dim_K H_1(\delta_1, M)_{(u,v)} - \dim_K H_0(\delta_1, M)_{(u,v)} \\ &= P^1_{H_1^Y}(u, v) - P^1_{H_0^Y}(u, v) \text{ for all } u, v \gg 0.\end{aligned}$$

因此，根据引理 6.7，对于所有 $u,v \gg 0$，$\dim_K M_{(u,v)}$ 可由一个二元多项式表示。利用类似的论证和归纳假设，我们还可得到，对于$u \ll 0, v \gg 0$；$u,v \ll 0$以及$u \gg 0, v \ll 0$，$\dim_K M_{(u,v)}$ 也可由多项式表示。由此便证明了该结论。

□

例 6.11. 设$T = K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{N}^2} T_{(u,v)}$。那么众所周知，

(1) 对所有的 $(u,v) \in \mathbb{N}^2$，

$$\dim_K T_{(u,v)} = \binom{u+n-1}{n-1}\binom{v+m-1}{m-1}.$$

(2) 回顾一下，

$$E := E_T(K) = (X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} Y_1^{-1} \cdots Y_m^{-1}) K[X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}],$$

其中，$E_T(K)$ 表示T上的K的内射包。注意，$E_T(K)$具有由环R诱导的自然双分次。因此

$$\dim_K E_{(u,v)} = \binom{(n-u)+n-1}{n-1}\binom{(m-v)+m-1}{m-1} \quad \text{for all } (u, v) \le (-n, -m).$$

注。 对于任意整数集 $\{i_1, \dots, i_n\}$ 和 $\{j_1, \dots, j_m\}$，有

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_n^X \cdot X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} = (i_1 + \cdots + i_n) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \\ \text{and} \quad &\mathcal{E}_m^Y \cdot Y_1^{j_1} \cdots Y_m^{j_m} = (j_m + \cdots + j_m) Y_1^{j_1} \cdots Y_m^{j_m}.\end{aligned}$$

因此，T 和$E(n,m)$都是双分次欧拉型$A_{n,m}(K)$模。注意，它们的非零双分次分量分别可以由区域 $\mathcal{NE}$ 和 $\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 表示（见记号 2.2）。因此，它们满足定理 5.8 中所述的刚性性质。

我们需要以下引理。

引理 6.12. 设 $R = K[X_1, \dots, X_n]$ 是一个多项式环，$A_n(K) := R\langle\partial_1, \dots, \partial_n\rangle$ 是 K 上的 n^{th} *Weyl*代数，其中 $\partial_i = \partial/\partial X_i$ 对于 $i = 1, \dots, n$。那么对于 $c, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \ge 0$,

i) $\partial_i^c(X_1^{-a_1} \cdots X_n^{-a_n}) = (-1)^c \frac{(a_i+c-1)!}{(a_i-1)!} X_i^{-a_i-c} \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} X_j^{-a_j}\right)$,

ii) $\partial_i^c(X_1^{b_1} \cdots X_n^{b_n}) = \frac{b_i!}{(b_i-c)!} X_i^{b_i-c} \cdot \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} X_j^{b_j}\right)$.

证明。 对于任意 $f, g \in R = K[X_1, \dots, X_n]$ 且满足 $f \neq 0$，有

$$\partial_i\left(\frac{g}{f^k}\right) = \frac{\partial_i(g)f - k\partial_i(f)g}{f^{k+1}} = \partial_i(g)f^{-k} - kg\partial_i(f)f^{-k-1}. \tag{6.12.12}$$

显然，当 j = i 时，$\partial_i(X_j^{-d}) = \partial_i(1)X_j^{-d} - d\partial_i(X_j)X_j^{-d-1} = -dX_i^{-d-1}$；而当 j ≠ i 时，$\partial_i(X_j^{-d}) = 0$。现在，$\partial_i^c(X_i^{-d}) = \partial_i^{c-1} \cdot \partial_i(X_i^{-d}) = \partial_i^{c-1}\left(-dX_i^{-d-1}\right) = -d\partial_i^{c-2} \cdot \partial_i\left(X_i^{-d-1}\right) = (-d)(-d-1)\partial_i^{c-2}\left(X_i^{-d-2}\right) = \cdots = (-d)(-d-1)\cdots(-d-c+1)X_i^{-d-c} =$

$(-1)^c \frac{(d+c-1)!}{(d-1)!} X_i^{-d-c}$对任意$c$、$d \geq 1$。利用 (6.12.12) 以及这样一个事实：$\partial_i(fg) = f\partial_i(g) + \partial_i(f)g$ 对所有f、$g \in R$都可重复应用，我们得到

$$\partial_i^c(X_1^{-a_1}\cdots X_n^{-a_n}) = \partial_i^c(X_i^{-a_i})\cdot\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} X_j^{-a_j}\Big) = (-1)^c\frac{(a_i+c-1)!}{(a_i-1)!}X_i^{-a_i-c}\cdot\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} X_j^{-a_j}\Big).$$

再取任意的c、$d \geq 1$，有 $\partial_i^c(X_i^d) = \partial_i^{c-1}\cdot\partial_i(X_i^d) = \partial_i^{c-1}\left(dX_i^{d-1}\right) = d\partial_i^{c-2}\cdot\partial_i\left(X_i^{d-1}\right) = d(d-1)\partial_i^{c-2}\left(X_i^{d-2}\right) =$

$\cdots = d(d-1)\cdots(d-c+1)X_{d-ci} = \frac{d!}{(d-c)!}X_{d-ci}$若$c \leq d$，否则 $\partial_{ci}(X_{di}) = 0$。因此，

$$\partial_i^c(X_1^{b_1}\cdots X_n^{b_n}) = \partial_i^c(X_i^{b_i})\cdot\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} X_j^{b_j}\Big) = \frac{b_i!}{(b_i-c)!}X_i^{b_i-c}\cdot\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} X_j^{b_j}\Big).$$

□

现在回顾以下众所周知的结果。

引理 6.13. 取两个子集 $W \subseteq \{1,\ldots,n\}$和 $V \subseteq \{1,\ldots,m\}$。考虑由 $\{X_i, Y_j \mid i \in W, j \in V\}$和 $\{\partial_{i'}, \delta_{j'} \mid i' \notin W, j' \notin V\}$生成的 $\mathcal{D} := A_{(n,m)}(K)$中的左理想$\mathfrak{b}$。那么

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathfrak{b}} = K\{X_{i'}^{a_{i'}}Y_{j'}^{b_{j'}}\partial_i^{c_i}\delta_j^{d_j} \mid \textit{for some } i \in W, j \in V, i' \notin W, j' \notin V\}$$

以及映射

$$\varphi : \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathfrak{b}} \to F := \Big(\prod_{i\in W} X_i^{-1}\Big)\Big(\prod_{j\in V} Y_j^{-1}\Big)K\left[X_{i'}, Y_{j'}, X_i^{-1}, Y_j^{-1} \mid i \in W, j \in V, i' \notin W, j' \notin V\right]$$

定义为

$$X_{i'}^{a_{i'}}Y_{j'}^{b_{j'}}\partial_i^{c_i}\delta_j^{d_j} \mapsto (-1)^{c_i+d_j}c_i!\cdot d_j!\cdot X_{i'}^{a_{i'}}Y_{j'}^{b_{j'}}X_i^{-c_i-1}Y_j^{-d_j-1}$$

是左 $\mathcal{D}$-模的一个同构，其中 $\mathcal{D}$ 对 F 的作用由引理 6.12 定义。

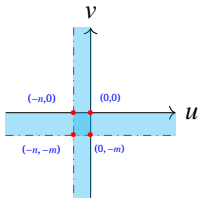
注 6.14。注意，在引理 6.13 中，φ 是 $\mathcal{D}$-线性的，1 在 $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathfrak{b}}$ 映射为 $\left(\prod_{i\in W}X_i^{-1}\right)\left(\prod_{j\in V}Y_j^{-1}\right)$且双次数 $\left(\prod_{i\in W}X_i^{-1}\right)\cdot\left(\prod_{j\in V}Y^{-1}{}_j\right) = (|W|, |V|)$。因此存在一个双分次同构

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\mathfrak{b}}((-|W|,-|V|)) \overset{\varphi}{\cong} \Big(\prod_{i\in W} X_i^{-1}\Big)\Big(\prod_{j\in V} Y_j^{-1}\Big)K\left[X_i^{-1}, Y_j^{-1}, X_{i'}, Y_{j'} \mid i \in W, j \in V, i' \notin W, j' \notin V\right]$$

左 $A_{(n,m)}(K)$-模。

命题 *6.15*。设 $n, m \geq 2$。令 $M = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$ 为一个双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(K)$-模。假设 $dim_K M_{(0,0)}$ 有限，并且对于区域 $Trun(\mathcal{N})$、$Trun(\mathcal{W}^*)$（或 $Trun(\mathcal{S}^*)$）和 $Trun(\mathcal{E})$ 中的每一个，都存在 (u_1,v_1)，使得 $M_{(u_1,v_1)} = 0$，但 $M \neq 0$。那么，$dim_K M_{(u,v)}$ 在四个区域$\mathcal{N}\mathcal{E}$、$\mathcal{N}\mathcal{W}^*$、$\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 和 $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$中的某些区域内有限且非零。此外，$dim_K M_{(u,v)}$ 在这些区域中的值如下表所示：

块	维数$_K M_{(u,v)}$
$\mathcal{N}\mathcal{E}$	维数$_K M_{(0,0)} \cdot \binom{u+n-1}{n-1}\binom{v+m-1}{-1}_m$
$\mathcal{N}\mathcal{W}^*$	$\dim_K M_{(-n,0)} \cdot \binom{(n-u)+n-1}{n-1}\binom{v+m-1}{-1}_m$
$\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$	$\dim_K M_{(-n,-m)} \cdot \binom{(n-u)+n-1}{n-1}\binom{(m-v)+m-1}{-1}_m$
$\mathcal{S}^*\mathcal{E}$	维数$_K M_{(0,-m)} \cdot \binom{u+n-1}{n-1}\binom{(m-v)+m-1}{-1}_m$



否则 $M_{(u,v)} = 0$。

证明。 由定理 6.4 可知，对于所有 $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$，$\dim_K M_{(u,v)} < \infty$。此外，由定理 5.8 可得，对于上述图中阴影区域内的所有 (u,v)，$M_{(u,v)} = 0$。由于 $M \neq 0$，因此在 $\mathcal{NE}$、$\mathcal{NW}^*$、$\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 和 $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$ 中的某个区域内，$M_{(u,v)} \neq 0$。

为方便起见，令 $\mathcal{D} = A_{n,m}(K)$，并考虑 $T = K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$，其唯一的极大齐次理想为 $\mathfrak{n} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$。此外，令 $E = \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathfrak{n}$ 表示作为 T-模的 $K = T/\mathfrak{n}$ 的内射包。

对于块 $\mathcal{NE}$，令 $\mathfrak{p} = \dim_k \mathrm{M}_{(0,0)}$。设 $\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_p\}$ 是 $\mathrm{M}_{(0,0)}$ 的一个 K-基。考虑映射 $\psi\colon \mathcal{D}^p \to \mathrm{M}$，它将 e_i 映到 u_i，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{p}$。令 $\mathfrak{b} := \mathcal{D}\partial + \mathcal{D}\delta$，其中 $\partial := \partial_1, \ldots, \partial_n$，且 $\delta := \delta_1, \ldots, \delta_m$。注意到 $\psi(\mathfrak{b}) = 0$，因为 $\mathrm{M}_{(-1,0)} = 0 = \mathrm{M}_{(0,-1)}$。因此 ψ 可分解为映射 $\psi\colon \mathrm{T}\,\mathfrak{p} \to \mathrm{M}$，因为 $\mathrm{T} \cong \mathcal{D}/\mathfrak{b}$。于是我们有一个正合列

$$0 \to K \to T^p \xrightarrow{\overline{\psi}} M \to C \to 0$$

双分次广义欧拉全纯 $\mathcal{D}$-模，其中 $\mathrm{K} = \ker\psi$ 和 $\mathrm{C} = \operatorname{coker}\psi$。注意，根据构造，对于所有 $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in \mathbb{Z}^2 \setminus [0,\infty) \times [0,\infty)$，$\mathrm{K}_{(u,v)} = \mathrm{C}_{(u,v)} = 0$，因为 T 和 M 具有这一性质。同样，由映射的构造可知，$(\mathrm{T}_{(0,0)})^p \cong \mathrm{M}_{(0,0)}$。因此 $\mathrm{K}_{(0,0)} = 0 = \mathrm{C}_{(0,0)}$。由定理 5.8(I)可知，对于所有 $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \geq (0,0)$，$\mathrm{K}_{(u,v)} = 0 = \mathrm{C}_{(u,v)}$，也就是说，对于所有 $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$。因此 $\mathrm{K} = \mathrm{C} = 0$，从而 $\mathrm{M} \cong \mathrm{T}\,\mathfrak{p}$。结论得证。

通过将 $\mathcal{D}$ 中的理想 $\mathfrak{b}$ 分别取为 $(X_1, \ldots, X_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$、$(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ 和 $(\partial_1, \ldots, \partial_n, Y_1, \ldots, Y_m)$，即可得到上述关于块 $\mathcal{NW}^*$、$\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$ 和 $\mathcal{S}^*\mathcal{E}$ 的结果（见引理 6.13 和注 6.14），证明思路与上文相同。由此得证。

□

注 6.16. 上述结果表明，若定理 5.8 中双分次广义欧拉全纯 $\mathrm{A}_{n,m}(\mathrm{K})$-模 M 的非零分量分别由块 $\mathcal{NE}$、$\mathcal{NW}^*$、$\mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$、$\mathcal{S}^*\mathcal{E}$ 表示，则 $\mathrm{M} \cong (\mathcal{D}/\mathfrak{b})^p$，其中 $\mathfrak{b}$ 分别表示 $\mathcal{D}$ 中的理想 $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m)$、$(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \delta_1, \ldots, \delta_m)$、$(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m)$、$(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m)$，而 'p' 分别是各部分 $\mathrm{M}_{(0,0)}$、$\mathrm{M}_{(-n,0)}$、$\mathrm{M}_{(-n,-m)}$、$\mathrm{M}_{(0,-m)}$ 的 K-向量空间维数。

7. 关于由双齐次理想支撑的局部上同调的应用

本节中，我们将讨论范围限定于局部上同调模。我们的目标是推广第二作者在 [16] 中证明的结果。本节始终假设 C 是一个正则环。我们的证明采用与 [16] 中类似的步骤，并遵循以下框架。

7.1. 设定：设 C 是一个包含特征零域 K 的正则环，并令 $\mathrm{R} = \mathrm{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m]$ 为 C 上的多项式环，其中对所有 $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$，$\operatorname{bideg} \mathrm{c} = (0,0)$，$\operatorname{bideg} \mathrm{X}_i = (1,0)$，且 $\deg \mathrm{Y}_j = (0,1)$，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{m}$。令 $\mathcal{T}$ 为 $^*\mathrm{Mod}(\mathrm{R})$ 上的一个双分次 Lyubeznik 函子。设 $\mathrm{M} := \mathcal{T}(\mathrm{R}) = \bigoplus_{(\mathrm{u},\mathrm{v}) \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{M}_{(u,v)}$。

7.2. Bass 数的增长。

我们需要以下引理，出自 [12, 1。4]

引理7.3。 设 B 是一个诺特环，N 是一个（不一定有限生成的）B-模。设 P 是 B 中的一个素理想。若对于所有 $j \geq 0$，$(H^j{}_P(N))_P$ 都是内射的，则

$$\mu_j(P, N) = \mu_0(P, H^j_P(N)) \quad \textit{for all } j \geq 0.$$

定理 7.4（假设同 7.1）。 设 P 是 C 中的一个素理想。令 $N := M_{(u,v)}$，其中某个 $(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$。则对于所有 $i \geq 0$，$H^i_P(N)_P$ 都是内射的。

证明。 注意，$H^i_{PR} \circ \mathcal{T}$ 是一个双分次 Lyubeznik 函子，并且

$$H^j_{PR}(\mathcal{T}(R))_{(u,v)} = H^j_P(\mathcal{T}(R)_{(u,v)}) = H^j_P(N)$$

对每个 $\mathrm{j} \geq 0$ 以及所有 $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in \mathbb{Z}^2$。显然，$\mathrm{H\,j\,P(N)}_P = 0$ 或 P 是 $\mathrm{H}^j\mathrm{P(N)}$ 的一个极小素理想。设 $\mathrm{H\,j\,P(N)}_P \neq 0$。令 $\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{C}_P$，并令 $\mathrm{S} = \mathrm{B}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m]$。由于所有作用都作用在零次元素上，因此通过与 [16, 2.6] 中分次情形类似的论证，我们得到 $\mathrm{G}(-) = \mathrm{B} \otimes_C \mathrm{H\,j\,PR} \circ \mathcal{T}(-) = \mathrm{S} \otimes_R \mathrm{H\,j\,PR} \circ \mathcal{T}(-) = \mathrm{H}^j\mathrm{PS} \circ \mathcal{T}(-)$ 是 $\mathrm{B} \otimes_C \mathrm{R} = \mathrm{C}_P \otimes_{C_P} \mathrm{C}_P \otimes_C \mathrm{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m] = \mathrm{S}$ 上的一个双分次 Lyubeznik 函子。由于 C 是正则环，

根据 Cohen结构定理，我们有 B $=$K[[$Z_1,\ldots,Z_g$]]，其中 K $=$k(P)，即 C_P 的剩余域，且 g $=$ht P。令 Λ 为 B 上的 K-线性微分算子，并令 $A_{n,m}(\Lambda)$ 为Λ上的标准双分次 $(n, m)^{th}$-Weyl代数。于是由定理 4.2 和 [16, 定理 4.2] 可知，L $:=$ G(S) $=$S $\otimes_R$ H^jPR($\mathcal{T}$(R)) $=$H j PS$\circ\mathcal{T}$(S) 是一个双分次广义欧拉 $A_{n,m}(\Lambda)$-模。因此由 [16, 2.12] 可得 $L^{(u,v)} = H^j P(N)_P \neq 0$。由于 P 是 H^jP(N) 的极小素理想，故 $L^{(u,v)}$ 仅支撑于 n $=(Z_1,\ldots,Z_g)$，即 B 的唯一极大理想。由于 Λ 包含在 $A_{n,m}(\Lambda)$ 的零次分量中，我们得到 $L^{(u,v)}$ 也是一个 Λ- 模。因此由 [12, 定理 2.4]，$L_{(u,v)} \cong E_B(K)^{\alpha}$，其中 E_B(K) 是 K 作为 B-模的内射包，且 α是某个序数（可能为无限）。由于作为 A-模，$E_B(K) \cong E_{C_P}(k(P)) \cong E_C(C/P)$，可知 $H^j P(N)_P$ 是一个内射C-模。 □

注 7.5. 由定理 7.4 和引理7.3可知，对于所有$j \geq 0$以及所有$(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，$\mu_j(P, M^{(u,v)}) = \mu_0(P, H_j P(M_{(u,v)})$。

我们需要以下结果。

命题7.6。 设 E 是一个双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(\Lambda)$-模。那么，对于 $j = 0, 1$，$H_j(Y_g, E)$ 是双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(\Lambda')$-模，其中 $\Lambda' = C'\langle\delta_1,\ldots,\delta_{g-1}\rangle$，且 $C' = K[[整数集_1,\ldots,整数集_{g-1}]]$。

证明。由于 $H_1(Y_g, E) = \{e \in E \mid Y_g e = 0\}$，$H_0(Y_g, E) = E/Y_g E$，且映射 $E \xrightarrow{Y} E$ 是 $A_{n,m}(\Lambda')$-线性的，由命题 3.8 可知，对于 j $=0, 1$，$H_j(Y_g, E)$ 是双分次广义欧拉 $A_{n,m}(\Lambda')$- 模。此外，根据 [16, 定理 4.25],，对于 j $=0, 1$，$H_j(Y_g, E)$ 是全纯 $A_{n,m}(\Lambda')$-模。 □

对上述定理应用归纳法，得到以下结论。

推论 7.7。 设 E 是一个双分次广义欧拉型全纯 $A_{n,\ m}(\Lambda)$-模。那么对于每个 $\nu \geq 0$，*Koszul* 同调模 $H_\nu(Y_1,\ldots, Y_g;\ E)$ 都是双分次广义欧拉型全纯 $A_{n,\ m}(K)$-模。

接下来，我们推导出适用于双分次情形的 [16, 定理 9.2]。

定理 7.8 (　假设与 7.1 中相同，记号如第 2.2 小节所示)。 设 P 是 C 中的一个素理想。固定 $j \geq 0$　　. 恰好一个 o　以下情况成立:

(i) $\mu_j(P,\ M^{(u,v)})$ 对所有 $(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$均为无限。

(ii) $\mu_j(P,\ M^{(u,v)})$ 对所有 $(u,\ v)$ 均为有限，这些点属于 $\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^* \cup \mathrm{Trun}(\mathcal{N}),\ \mathbb{Z}^2\backslash(\mathcal{N}\cup\mathcal{E}),\ \mathcal{S}^*\mathcal{E}\cup\mathrm{Trun}(\mathcal{E})\}$ 的某个真子集；否则为无限。

(iii) $\mu_j(P,\ M^{(u,v)})$ 对所有 $(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$均为有限。在这种情况下，以下情况恰有一种成立:

(a) $\mu_j(P,\ M^{(u,v)}) = 0$ 对所有 $(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$均成立。(b) $\mu_j(P,\ M^{(u,v)}) \neq 0$ 对所有 $(u,\ v)$ 均成立，其中这些点属于 $\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}, C, \mathcal{N}, \mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*, \mathcal{E}\}$ 中的若干区域的并集；而$\mu_j(P,\ M^{(u,v)}) = 0$ 对所有 $(u,\ v)$ 均成立，其中这些点属于补区域。

证明。由注 7.5，对所有 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$，$\mu_j(P, M^{(u,v)}) = \mu_0(P, H\ j\ P(M^{(u,v)}))$。于是，由定理 7.4 的证明可得 $\mu_j(P, M^{(u,v)}) = \alpha_{(u,v)}$，因为 $H\ j\ P(M^{(u,v)})_P = L_{(u,v)} \cong E_B(k)^{\alpha_{(u,v)}}$，其中 B $=\widehat{\ }C_P$。由推论 7.7，V $=H_g(Y_1,\ldots, Y_g;$ L) 是一个双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(K)$-模，具有

$$V_{(u,v)} = H_g(\mathbf{Y}; L)_{(u,v)} = H_g(\mathbf{Y}; L_{(u,v)}) = H_g(\mathbf{Y}; E_B(K)^{\alpha_{(u,v)}}) = H_g(\mathbf{Y}; E_B(K))^{\alpha_{(u,v)}} = K^{\alpha_{(u,v)}},$$

其中 Y $:=Y_1,\ldots, Y_g$，最后一个等式由 [16, 2.11] 得出。注意 $\dim_K V_{(u,v)} = \alpha_{(u,v)} = \mu_j(P, M^{(u,v)})$。由于 V 是一个双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(K)$-模，有限性如 (ii) 和 (iii) 所述，可由定理 6.4 得出。设对某个 $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$，有 $\mu_j(P, M_{(u_0,v_0)}) = \alpha_{(u_0,v_0)} \neq 0$。则 $V_{(u_0,v_0)} = K^{\alpha_{(u_0,v_0)}} \neq 0$。将定理 5.8 和定理 5.9 应用于 V，即得所需结论。 □

定理 7.9 （假设与 7.1 中相同）。 设 $n,m \geq 1$。设 P 是 C 中的一个素理想。固定 $j \geq 0$。则存在多项式 $P_M^a(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$，使得对于 $a = 1, 2, 3, 4$，

(i) $P^1_M(u,v) = \mu_j(P, M_{(u,v)})$ 对所有 $u,v \gg 0$，若 $\mu_j(P, M_{(u_1,v_1)})$ 对某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{NE}$ 为有限。

(ii) 对所有 $u \ll 0$，$v \gg 0$，若对某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{NW}^*$，$\mu_j(P, M_{(u_1,v_1)})$ 是有限的，则 $P^2_M(u, v) = \mu_j(P, M_{(u,v)})$.

(iii) 对所有 u，$v \ll 0$，若对某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$，$\mu_j(P, M_{(u_1,v_1)})$ 是有限的，则 $P^3_M(u, v) = \mu_j(P, M_{(u,v)})$。

(iv) 对所有 $u \gg 0$，$v \ll 0$，若对某个 $(u_1,v_1) \in \mathcal{S}^*\mathcal{E}$，$\mu_j(P, M_{(u_1,v_1)})$ 是有限的，则 $P^4_M(u, v) = \mu_j(P, M_{(u,v)})$。

证明。 由定理 7.8 的证明可得 $\mu_j(P, M_{(u,v)}) = \alpha_{(u,v)} = \dim_K V_{(u,v)}$，其中 $V = H_d(Y_1, \dots, Y_d; L)$ 是一个双分次广义欧拉全纯 $A_{n,m}(k)$-模。结论由定理 6.10 即可得出。 □

7.10. 关联素理想。

定理 7.11 （假设与 7.1 中相同）。 进一步假设，C 是正则局部环，或是域 K 上特征为零的光滑仿射代数。则 $\bigcup_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}$ 关联素理想$_C M_{(u,v)}$ 是有限集。

此外，如果我们从其中一个块 $\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*\}$ 中选取 (u,v)，那么 关联素理想$_C M_{(u,v)}$ = 关联素理想$_C M_{(u_0,v_0)}$，其中 $(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2$ 表示相应块的角点。

证明。 第一条结论可沿用 [16, 定理 12.4 (1)] 的证明思路得到。

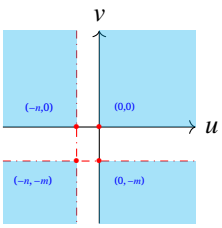
接下来，令

$$\bigcup_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{Ass}_C M_{(u,v)} = \{P_1, \dots, P_l\}.$$

令 $P = P_i$，其中 i 为某个值。由定理 7.8,

(i) $\mu_0(P, M_{(0,0)}) > 0$ if and only if $\mu_0(P, M_{(u,v)}) > 0$ for all $(u,v) \in \mathcal{NE}$.

(ii) $\mu_0(P, M_{(-n,0)}) > 0$ 当且仅当对于所有 $(u,v) \in \mathcal{NW}^*$，$\mu_0(P, M_{(u,v)}) > 0$。 (iii) $\mu_0(P, M_{(-n,-m)}) > 0$ 当且仅当对于所有 $(u,v) \in \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*$，$\mu_0(P, M_{(u,v)}) > 0$。 (iv) $\mu_0(P, M_{(0,-m)}) > 0$ 当且仅当对于所有 $(u,v) \in \mathcal{S}^*\mathcal{E}$，$\mu_0(P, M_{(u,v)}) > 0$。



这就确立了该结果。 □

7.12. 支撑的维数和内射维数。

引理 7.13 （假设同 7.1）。 则对于所有 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\operatorname{injdim} M_{(u,v)} \le \dim M_{(u,v)}.$$

证明。 设P 是C中的素理想。由注 7.5 可得

$$\mu_j(P, M_{(u,v)}) = \mu_0(P, H^j_P(M_{(u,v)})).$$

根据格罗滕迪克消失定理，对于所有$j > \dim M_{(u,v)}$，$H_{jP}(M_{(u,v)}) = 0$，见 [4, 6.1.2]。因此，对于每个$j > \dim M_{(u,v)}$，$\mu_j(P, M_{(u,v)}) = 0$。结论得证。 □

定理 7.14（假设同 7.1，记号同第 2.2 小节）。 从集合中选取一个区域 $\mathcal{R}$ *from the set*

$$\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}, \operatorname{Trun}(\mathcal{N}), \operatorname{Trun}(\mathcal{W}^*), \operatorname{Trun}(\mathcal{S}^*), \operatorname{Trun}(\mathcal{E})\}.$$

则对于所有 $(u, v) \in \mathcal{R}$，内射维数 $M_{(u,v)}$ 和维数 $M_{(u,v)}$ 均保持不变。特别地，如果 $\mathcal{R}$ 是 $\{\mathcal{NE}, \mathcal{NW}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{W}^*, \mathcal{S}^*\mathcal{E}\}$中的一个块，则

$$\operatorname{injdim} M_{(u,v)} = \operatorname{injdim} M_{(u_0,v_0)} \quad \textit{and} \quad \dim M_{(u,v)} = \dim M_{(u_0,v_0)}$$

对所有$(u,v) \in \mathcal{R}$，其中(u_0,v_0) 表示相应块的角。

证明。 第一个断言由引理 7.13 得出。

接下来，令 P 为 C中的一个素理想。令 $(u,v) \in \mathcal{NE}$。

固定 $j \geq 0$。由定理 7.8 可知，$\mu_j(P, M_{(u,v)}) > 0$当且仅当 $\mu_j(P, M_{(0,0)}) > 0$。因此

$$\operatorname{injdim} M_{(u,v)} = \operatorname{injdim} M_{(0,0)} \quad \text{for all } (u, v) \in \mathcal{NE}.$$

此外，注意到 $\mathcal{F}(-)_P$ 是 $^*\mathrm{Mod}(C_P[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m])$上的一个双分次 Lyubeznik 函子。由定理 5.8 可知，$(M_{(0,0)})_P \neq 0$当且仅当 $(M_{(u,v)})_P \neq 0$。因此

$$\dim M_{(u,v)} = \dim M_{(0,0)} \quad \text{for all } (u, v) \in \mathcal{NE}.$$

其他区域对应的结论也可以用与上述相同的论证得到。 □

定理 7.15 （假设与定理 7.1 中相同，记号与第 2.2 小节中相同）。 令 $n,m \geq 2$。取 $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ 使得$-n < u < 0$ 并且 $-m < v < 0$。则

(i) 注入维数 $M_{(u_1,v_1)} \leq$最小{注入维数 $M_{(0,0)}$, 注入维数 $M_{(-n,0)}$,注入维数 $M_{(-n,-m)}$,注入维数 $M_{(0,-m)}$},

(ii) 维数 $M_{(u_1,v_1)} \leq$最小{维数 $M_{(0,0)}$, 维数 $M_{(-n,0)}$, 维数 $M_{(-n,-m)}$,维数 $M_{(0,-m)}$}。

此外，假设 $\mathcal{R}$ 是截断区域 {截断$(\mathcal{N})$, 截断$(\mathcal{W}^*)$,截断$(\mathcal{S}^*)$,截断$(\mathcal{E})$}之一。*The* n

$$\operatorname{injdim} M_{(u,v)} \leq \min\{\operatorname{injdim} M_{(u_1,v_1)}, \operatorname{injdim} M_{(u_2,v_2)}\} \quad \textit{and} \quad \dim M_{(u,v)} \leq \min\{\dim M_{(u_1,v_1)}, \dim M_{(u_2,v_2)}\}$$

对所有$(u,v) \in \mathcal{R}$，其中 $\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\}$ 表示相应区域的两个角点。

证明。 由定理 7.8 可知，若 $\mu_j(P, M_{(u_1,v_1)}) > 0$，则所有 Bass 数 $\mu_j(P, M_{(0,0)})$, $\mu_j(P, M_{(-n,0)})$, $\mu_j(P, M_{(-n,-m)})$, $\mu_j(P, M_{(0,-m)}) > 0$。因此 (i) 得证。

由于 $\mathcal{F}(-)_P$ 是 $^*\mathrm{Mod}(C_P[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m])$ 上的双分次 Lyubeznik 函子，因此由定理 5.9 可知，$(M_{(u_1,v_1)})_P \neq 0$蕴含 $(M_{(0,0)})_P$、$(M_{(-n,0)})_P$、$(M_{(-n,-m)})_P$ 和 $(M_{(0,-m)})_P$ 均非零。因此 (ii) 得证。

利用与上文类似的论证，可以得到关于截断区域的断言。 □

7.16. 无限生成。

在本小节中，我们给出一个充分条件，以保证$H^i_I(R)$ 的分量无限生成。

定理 7.17 (假设同 7.1)。 进一步假设 C 是一个整环。设 I 是 R 中的一个双齐次理想，使得 $I \cap C \neq \phi$。令 $M := H^i_I(R) = \bigoplus_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} M_{(u,v)}$。若对于某个 $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$有 $M_{(u,v)} \neq 0$，则 $M_{(u,v)}$ 不是有限生成的 C-模。

证明。 设P 是C中的一个素理想。注意$R_P = C_P[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$。此外，

$$(M_{(u,v)})_P = H^i_I(R)_{(u,v)} \otimes_C C_P = H^i_I(R \otimes_C C_P)_{(u,v)} = H^i_I(R_P)_{(u,v)}.$$

对于每个（u,v） $\in \mathbb{Z}^2$。显然，如果$H^i_I(R_P)_{(u,v)}$ 不是有限生成的C_P-模，那么$M_{(u,v)}$ 也不是有限生成的C-模 。因此，只需在C 是局部环的假设下证明该结论。

若可能，假设 $\mathrm{M}_{(u,v)}$ 是有限生成的 C-模。则 $\operatorname{depth} \mathrm{M}_{(u,v)} \leq \dim \mathrm{M}_{(u,v)}$。由定理 7.13 可得 $\operatorname{injdim} \mathrm{M}_{(u,v)} \leq \dim \mathrm{M}_{(u,v)}$。因此，根据 [6, 定理 3.1.17], $\dim \mathrm{M}_{(u,v)} \leq \operatorname{injdim} \mathrm{M}_{(u,v)} = \operatorname{depth} \mathrm{C} = \dim \mathrm{C}$。综合可得 $\dim \mathrm{M}_{(u,v)} \leq \dim \mathrm{C} = \operatorname{injdim} \mathrm{M}_{(u,v)} \leq \dim \mathrm{M}_{(u,v)}$，也就是说，$\dim \mathrm{M}_{(u,v)} = \dim \mathrm{C}$。因此，$\mathrm{M}_{(u,v)}$ 是一个极大 Cohen-Macaulay C-模。令 $0 \neq \mathrm{c} \in \mathrm{I} \cap \mathbb{C}$。由于 C 是整环，$\mathrm{c}^t$ 是 B-正则的，因而对所有 $\mathrm{t} \geq 1$，都是 $\mathrm{M}_{(u,v)}$-正则的。但由于 $\mathrm{M}_{(u,v)}$ 是 I-挠的，因此对某个 t，有 $(0 :_{M_{(u,v)}} \mathrm{c}^t) \neq 0$，从而导出矛盾。 □

7.18. 希尔伯特级数。

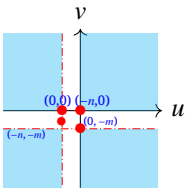
现在我们给出一个关于$H^i_I(R)$的双分次希尔伯特级数的寺井型公式（见 [22], [1,p. 19]）。

定理 7.19 （假设同定理 7.1）。 进一步假设 $C = K$ 是一个域。令 $M_{(u,v)} = 0$ 对所有 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$成立，且满足 $n < u < 0$ 或 $m < v < 0$，但 $M \neq 0$。那么 M 的双分次希尔伯特级数为

$$H_M(t_1,t_2) = \frac{d_1}{(1-t_1)^n(1-t_2)^m} + \frac{d_2 t_1^{-n}}{(1-t_1^{-1})^n(1-t_2)^m} + \frac{d_3 t_1^{-n}t_2^{-m}}{(1-t_1^{-1})^n(1-t_2^{-1})^m} + \frac{d_4 t_2^{-m}}{(1-t_1)^n(1-t_2)^m},$$

其中 $d_1 =$ 维数$_K M_{(0,0)}$、$d_2 =$ 维数$_K M_{(-n,0)}$、$d_3 =$ 维数$_K M_{(-n,-m)}$ 和 $d_4 =$ 维数$_K M_{(0,-m)}$。

注。 显然，对于所有位于图（ix）阴影部分之外的（$M_{(u,v)} = 0$ 、u、v），皆如此。注意，我们考虑的是这样的所有模 M： 它们的非零分量由定理 5.8 中图（I）、（II）、（III）和（IV）的阴影部分组合表示。



证明。 该结果由命题（6.15）推出。 □

现在我们讨论一些例子。

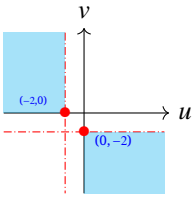
例 7.20. 设 $R = K[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ 是特征零的域 K 上的双分次多项式环，其中对 $1 \le i, j \le 2$，bideg $X_i = (1, 0)$，且 bideg $Y_j = (0, 1)$。取 R 中的理想 $I = (X_1Y_1, X_1Y_2, X_2Y_2, X_2Y_2)$。由于

$$\begin{aligned} (X_2Y_1)^2 &= (X_1Y_2 + X_2Y_1)X_2Y_1 - X_1Y_1X_2Y_2, \\ \text{and} \quad (X_1Y_2)^2 &= (X_1Y_2 + X_2Y_1)X_1Y_2 - X_1Y_1X_2Y_2, \end{aligned}$$

因此我们有 $\sqrt{(X_1Y_1, X_1Y_2 + X_2Y_1, X_2Y_2)} = \sqrt{I}$。注意，$I = \sqrt{(X_1, X_2) \cap (Y_1, Y_2)} = (X_1, X_2) \cap (Y_1, Y_2)$。设 $J = (X_1Y_1, X_1Y_2 + X_2Y_1, X_2Y_2)$，$a = (X_1, X_2)$，$b = (Y_1, Y_2)$。由例5.11，

$$\begin{aligned} H_J^2(R) = H_I^2(R) &\cong H_a^2(R) \oplus H_b^2(R) \\ &= X_1^{-1}X_2^{-1}K[X_1^{-1}, X_2^{-1}, Y_1, Y_2] \oplus Y_1^{-1}Y_2^{-1}K[X_1, X_2, Y_1^{-1}, Y_2^{-1}], \end{aligned}$$

这些非零分量可以用图中的阴影区域表示。因此，由定理 7.19 可得



$$\begin{aligned} H_{H_J^2(R)}(t_1,t_2) &= \dim_K M_{(-2,0)} \cdot \frac{t_1^{-2}}{(1-t_1^{-1})^2} \cdot \frac{1}{(1-t_2)^2} + \dim_K M_{(0,-2)} \cdot \frac{1}{(1-t_1)^2} \cdot \frac{t_2^{-2}}{(1-t_2^{-1})^2} \\ &= \frac{t_1^{-2}}{(1-t_1^{-1})^2} \cdot \frac{1}{(1-t_2)^2} + \frac{1}{(1-t_1)^2} \cdot \frac{t_2^{-2}}{(1-t_2^{-1})^2} \\ &= \frac{2}{(1-t_1)^2(1-t_2)^2}, \end{aligned}$$

因为 $\dim_K M_{(-2,0)} = 1 = \dim_K M_{(0,-2)}$。

现在我们应用关于二项式边理想的结果。

例7.21. 令 $R = K[W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6]$，，并令 $I = I_2(A)$ 为 R 中由矩阵 $A = \begin{pmatrix} W_1 W_2 W_6^3 \end{pmatrix} W_4 W_5 W$ 的 2×2 阶子式生成的理想。若对所有 $1 \le i \le 3$，将变量重新命名为 $W_i = X_i$；对所有$4 \le j \le 6$，将变量重新命名为 $W_j = Y_j$。显然，此时 I 是与 3-循环完全图 K_3 关联的二项式边理想。令 bideg $X_i = (1, 0)$，bideg $Y_j = (0, 1)$，其中 $1 \le i, j \le 3$。那么 I 是一个双齐次理想。在 [23, 例6.1], 中，Walther 证明了 $H_I^3(R) \cong E_R(K)$。因此，由定理 7.19 和例5.11可得

$$H(H_I^3(R); (t_1,t_2,t_3)) = \dim_K H_I^3(R)_{(-3,-3)} \cdot \frac{t_1^{-3}}{(1-t_1^{-1})^3} \cdot \frac{t_2^{-3}}{(1-t_2^{-1})^3} = \frac{t_1^{-3}t_2^{-3}}{(1-t_1^{-1})^3(1-t_2^{-1})^3}.$$

参考文献

[1] J. Àlvarez. Montaner，《由单项式理想支撑的局部上同调模》三讲，2012年。[2] J. Àlvarez Montaner，《二项式边理想及其一般初始理想的局部上同调》，Collect. Math.，第71卷（2020年），第2期，331–348。[3] J.-E. Björk，《微分算子环》，North-Holland Math. Library 21，North Holland，阿姆斯特丹，1979年。[4] M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp，《局部上同调：兼具几何应用的代数导论》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第60卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[5] M. P. Brodmann，R. Y. Sharp，《多重分次局部上同调模的支撑次数》，J. Algebra，第321卷（2009年），第2期，450–482。[6] W. Bruns 和 J. Herzog，《Cohen-Macaulay环》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[7] G. Colomé i Nin，《膨胀代数的多重分次结构与深度》，巴塞罗那大学，2008年，学位论文。[8] D. Cox，《托里克簇的齐次坐标环》，J. Algebraic Geom.，第4卷（1995年），17–50。[9] J. Herzog、T. Hibi、F. Hreinsdóttir、T.Kahle 和 J. Rauh，《二项式边理想与条件独立性陈述》，Adv. Appl. Math.，第45卷（2010年），第3期，317–333。[10] S. B. Iyengar、G. J. Leuschke、A. Leykin、C. Miller、E. Miller、A. K. Singh 和 U. Walther，《局部上同调的二十四小时》，Graduate Studies in Mathematics，美国数学学会，第87卷，2007年。[11] L. Li，《中岛的箭图簇与秩二簇代数的三角基》，J. Algebra，第634卷（2023年），97–164。[12] G. Lyubeznik，《局部上同调模的有限性性质（D-模在交换代数中的应用）》，Inv. Math.，第113卷（1993年），41–55。[13] L. Ma 和 W. Zhang，《欧拉分次D-模》，Math. Res. Lett. 第21卷（2014年），第1期，149–167。[14] M. Ohtani，《图与由某些二阶子式生成的理想》，Comm. Algebra，第39卷（2011年），第3期，905–917。[15] T. J. Puthenpurakal，《局部上同调模的 de Rham 上同调：分次情形》，Nagoya Math. J.，第217卷（2015年），1–21。[16] T. J. Puthenpurakal，《局部上同调模的分次分量》，Collect. Math.（2022年），1–37。[17] T. J. Puthenpurakal 和 S. Roy，《不变环的局部上同调模的分次分量》，Comm. Algebra，第48卷（2019年），第2期，803–814。[18] T. J. Puthenpurakal 和 S. Roy，《局部上同调模的分次分量 II》，Vietnam J. Math.，第52卷（2024年），第1期，1–24。[19] T. J. Puthenpurakal 和 S. Roy，《特征零下 C-单项式理想的局部上同调模的分次分量》，即将在 Comm. Algebra 发表，arXiv:2307.03574。[20] T. J. Puthenpurakal 和 J. Singh，《分次局部上同调模的导出函子》，Math. Proc. Camb. Philos. Soc.，第167卷（2019年），第3期，549–565。[21] P. Schenzel，《局部上同调在代数与几何中的应用》，载于《交换代数六讲》（贝拉特拉，1996年），Progr. Math.，第166卷，241–292，Birkh¨auser，巴塞尔，1998年。

[22] N. Terai，关于单项式理想的局部上同调模，《第20届交换环理论研讨会论文集》（1998年），181 - 189页。[23] U. Walther，代数簇局部上同调模及局部上同调维数的算法计算，《纯粹与应用代数杂志》，第139卷（1999年），第1-3期，303 - 321页。[24] D. Williams，*König* 型图的 *LF* 覆盖与二项式边理想，预印本：arXiv:2310.14410v4。[25] D. Williams，围长至少为*5*的连通图之补图的二项式边理想的局部上同调模，预印本：arXiv:2312.01613v3。