arXiv:2603.21328v1 [math.GT] 22 Mar 2026

广义透镜空间的结晶

Basudeb Datta

印度科学研究所数学系，印度班加罗尔 560012。智能推进研究所，TCG CREST，印度加尔各答 700 091。电子邮件：*dattab@iisc.ac.in,bdatta17@gmail.com*。

2026年3月22日

摘要

我们给出了广义透镜空间$L(p,\ q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n)$的一些自然结晶，其中整数 $p \geq 2$, $n \geq 1$ 以及整数 $q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n$ 与 p互质。这些结晶是球面S^{2n+1}的三角剖分的商。

2020年数学学科分类： 57Q15；57Q05；05C15；05E45；06A06。

关键词： 透镜空间；广义透镜空间；单纯胞腔复形；CW 复形；结晶；有色图。

1 引言

一个 d维流形 M 的单纯胞腔结构 K 至少包含 $d+1$个顶点。若 K 恰有 $d+1$ 个顶点，且 K 在 M 上诱导出一个 PL 结构，那么K 称为 M的结晶。在这种情况下，对偶图 $\Lambda(K)$具有一种自然的正常边染色 j，使用 $d+1$种颜色。文献中，将$(d+1)$正则彩色图$(\Lambda(K),\ j)$称为 M的结晶。在 [7], 中，Pezzana 证明了每个闭连通 PL 流形都存在结晶。对于 $p \equiv \pm 1$ (模 q)，文献 [2]构造了透镜空间 $L(p,q)$的结晶。在第 3 节中，我们为广义透镜空间 $L(p,q_1,\ldots,q_n)$构造结晶，其中 $p \geq 2$、 $n \geq 1$为整数，且整数 $q_1,\ldots,q_n$ 均与 p互素。这些结晶的导出细分给出了所有广义透镜空间的三角剖分。这些结晶比（广义）透镜空间的其他任何单纯胞腔结构或三角剖分都更为自然。这些结晶是球面S^{2n+1}的三角剖分的商。 $p=2$ 的情形已为人所知。最近，文献 [1] 证明， $L(2,1,\ldots,1)$是 $\mathbb{RP}^{2n+1}$唯一的面最小结晶。

2 预备知识

偏序集是指带有偏序关系 $\leq$的有限集合 X 。我们用 $\alpha < \beta$表示$\alpha \leq \beta$和 $\alpha \neq \beta$。两个偏序集之间的双射 $f\colon (K,\leq) \to (L,\leq)$称为同构，若且唯若对于 $a,b \in K$， $a \leq b$当且仅当 $f(a) \leq f(b)$成立。在这种情况下，我们称$(K,\leq)$与$(L,\leq)$同构。同构 $f\colon (K,\leq) \to (K,\leq)$称为$(K,\leq)$的自同构。所有$(K,\leq)$的自同构构成的集合 Aut$(K)$在复合运算下形成一个群，称为$(K,\leq)$的自同构群。Aut$(K)$的任意子群称为 K的自同构群。

如果一个 CW复形的所有闭胞腔都同胚于闭球，则称其为正则。给定一个 CW复形 M，令 $\mathcal{M}$ 为 M 的所有闭胞腔与空集 $\emptyset$ 构成的集合。那么 $\mathcal{M}$ 是一个偏序集，其偏序关系由集合包含给出。这个偏序集 $\mathcal{M}$ 称为 M 的面偏序集。如果 M 和 N 是两个有限正则 CW复形，且它们的面偏序集同构，那么 M 和 N 同胚。若一个正则 CW复形 M 的边界复形 $\partial\sigma := \{\alpha \in \mathcal{M} : \alpha < \sigma\}$ 中，每个胞腔 σ 的边界复形都与某个单形的边界复形（作为偏序集）同构，则称 M 为单纯的。

维数为 d 的单纯胞腔复形或单纯偏序集 $K = (K,\leq)$，是一个与 d 维单纯 CW复形 M 的面偏序集 $\mathcal{M}$ 同构的偏序集。拓扑空间 M 称为 K 的几何载体，也记作 $|K|$。如果拓扑空间 N 与 $|K|$同胚，则称 K 为 N 的单纯胞腔结构（或单纯胞腔分解，或伪三角剖分）。文献中也将单纯偏序集称为 CW偏序集、伪单纯复形或伪复形（详情见 $[3, 4, 6]$ ）。对于 $\alpha,\beta \in K$，若 $\alpha \leq \beta$，则称 α 是 β 的一个面。对于 d 维单纯偏序集 K，令 $f_j(K)$ 表示 K 中 j 维胞腔的数量，其中 $0 \leq j \leq d$。称 $(d+1)$ 元组 $f(K) := (f_0(K) \ldots, f_d(K))$ 为 K 的面向量或 f 向量。

对于单纯偏序集 K 中的胞腔 α， $\partial\alpha := \{\beta \in K : \beta < \alpha\}$ 是一个单纯偏序集，称为 α 的边界。若 $\partial\alpha$ 同构于一个 j 维单形的边界复形，则称 α 为 K 的一个 j 胞腔。单纯偏序集 K 的 0维胞腔和 1维胞腔分别称为 K 的顶点和边。单纯偏序集 K 的顶点集合 $V(K)$ 称为 K 的顶点集。若两个顶点是某条边的面，则称它们在 K 中相邻。对于两个胞腔 $\alpha \neq \beta$，其交集 $\partial\alpha \cap \partial\beta$ 可能不是一个单独的胞腔（及其各个面）。如果对于任意两个胞腔 $\alpha \neq \beta$， $\partial\alpha \cap \partial\beta$ 都是一个胞腔（及其各个面），那么这个单纯偏序集就是单纯复形。单纯复形的胞腔称为单形。对于单纯复形 X 中的单形 α， $V(\alpha) := \{v \in V(X) : v \leq \alpha\}$ 称为 α 的顶点集。由于单纯复形 X 中的单形 α 由 $V(\alpha)$ 唯一确定，我们将 α 与 $V(\alpha)$ 等同。

如果一个 d 维单纯胞腔复形的所有极大胞腔都是 d 胞腔，则称其为纯的。在一个 d 维单纯胞腔复形 K 中， d 胞腔和 $(d-1)$ 胞腔分别称为刻面和脊。纯单纯胞腔复形 K 的对偶图 $\Lambda(K)$ 是这样一个图：其顶点是 K 的刻面，边是有序对 $(\{\sigma_1,\sigma_2\}, \alpha)$，其中 α 是一个脊，并且是刻面 σ_1、 σ_2 的公共面。由于 K 的每个 1-胞腔都对应于一个几何一单形，因此图 $\Lambda(K)$ 没有环。不过请注意， $\Lambda(K)$ 可以有连接同一对顶点的重边

相同的两个顶点。

显然，一个（闭） d维流形 M 的单纯胞腔结构 K 至少包含 $d+1$ 个顶点。若 K 恰有 $d+1$ 个顶点，且 K 在 M 上诱导出一个 PL 结构，则称 K 为 M 的一个结晶。设 X 是一个 PL d维流形 N 的结晶。令 X 的顶点集 $V(X)$ 为 $\{0,1,\ldots,d\}$。对于 X 的任意极大面 σ 和 $0 \leq i \leq d$，令 σ_i 为 σ 中与顶点 i 对置的（$d-1$）面。显然，若 α 是 X 的一个脊，则对于两个极大面 α、β 及某个顶点 i，有 $\alpha = \beta_i = \gamma_i$。于是，$j((\{\beta,\gamma\},\alpha)) = i$ 在 $\Lambda(X)$ 上定义了一种含 $d+1$ 种颜色的正常边染色 j。文献中，称（$d+1$）正则彩色图（$\Lambda(X)$ j）为 N 的一个结晶（更多内容参见 [5] ）。在 [7], ，Pezzana 证明了每个闭连通 PL 流形都有一个结晶。

假设 $(X,\leq)$ 是单纯 CW 复形 M 的面偏序集。令 M' 为 M 的导出细分。M' 的面偏序集称为 $(X,\leq)$ 的**导出细分**，记作 $(X',\leq)$。由于 M' 是几何单纯复形，因此 $(X',\leq)$ 是单纯复形。（显然， X' 的顶点与 X 的非空胞腔一一对应。）由于拓扑空间 M 与 M' 相同，对于单纯偏序集 X，我们可以将 $|X'|$ 与 $|X|$ 视为相同。

如果单纯复形 X 的几何载体$|X|$在诱导的 PL 结构下是 PL 流形，则称 X 为组合流形。在这种情况下，我们称 X 是 $|X|$的组合（或*PL*）三角剖分 。因此，如果单纯胞腔复形 Y 的 $|Y|$ 是 PL 流形，那么 Y' 是组合流形。

设 X和 Y是两个顶点集不相交的单纯复形。由于 $\emptyset \in X,Y$,$X*Y := \{\alpha \cup \beta : \alpha \in X, \beta \in Y\}$ 是一个单纯复形（称为 X和Y的连接 ），且包含 X和 Y。注意，顶点集 $V(X*Y) = V(X) \sqcup V(Y)$，并且 $\dim(X*Y) = \dim(X) + \dim(Y) + 1$。若 X和 Y都是球面的（PL）三角剖分，则 $X*Y$也是球面的（PL）三角剖分（参见 [8]）。

设 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ 是偏序集 X 的自同构群。假设 X 是 CW复形 M 的面偏序集。那么 G 在 M 上有自然作用，且 M/G 仍是一个 CW复形。显然，商偏序集 X/G 同构于 CW复形 M/G 的面偏序集。一般而言，对于单纯胞腔复形 X 和 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$， X/G 不一定是单纯胞腔复形。在 [4], 中，作者定义了良作用，并证明单纯胞腔复形范畴上的良作用都是自然作用。若 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ 在单纯胞腔复形 X 上的作用满足以下条件，则称为**良作用**： X 中属于同一 G-轨道的两个顶点在 X 中不相邻。并且在 [4]中证明了以下结论。

命题 2.1. 设 X 是一个单纯胞腔复形，且 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$。商偏序集 X/G是单纯胞腔复形，当且仅当 G在 X 上的作用是良好的。

命题 2.2. 设 X 是一个单纯胞腔复形，且 $G \leq \mathrm{Aut}(X)$。如果 G 在 X 上的作用是良好的，那么 $|X/G| \cong |X|/G$。

对于 $n \geq 1$，设 $S^{2n+1} = \{(z_0,\ z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} :\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ 为单位（$2n+1$）-球面，并设 $q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n$为与某个整数互质的整数

$p \geq 2$。定义 $h\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$为

$$h(z_0, z_1, \ldots, z_n) := (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi i q_1/p} z_1, \ldots, e^{2\pi i q_n/p} z_n). \tag{1}$$

那么， h 是 S^{2n+1} 的一个周期为 p的同胚。因此，我们在 S^{2n+1}上得到一个 $\mathbb{Z}_p = \langle h \rangle$ 作用。此作用没有不动点。商空间 $L(p, q_1, \ldots, q_n) := S^{2n+1}/\langle h \rangle$ 是一个（$2n+1$）维光滑（因而也是 PL）流形，称为广义透镜空间（见 [9]）。当 p, q 互素时，三维流形 $L(p, q)$称为透镜空间。

3 结晶构造

在本节中， $n \geq 1$ 和 $p \geq 2$均为整数。空集是一个维数为 -1 的胞腔，属于所有单纯胞腔复形。我们还将单纯复形与相应的几何单纯复形视为同一对象。

令 $W = \{w_\ell = e^{\ell\pi i/p} : \ 0 \leq \ell \leq 2p-1\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$ 为 $2p$次单位根的集合。令 $U = \{w_{2k} : 0 \leq k \leq p-1\}$ 且 $V = W \setminus U$。因此， $U = \{e^{2k\pi i/p} : \ 0 \leq k \leq p-1\}$ 是 p次单位根的集合。

对于 $0 \leq j \leq n$，令 $\mathbb{C}_j := \{(z_0, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \ z_k = 0$ 对 $k \neq j\}$。则 $\mathbb{C}_j$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 和 $\mathbb{C}^{n+1} = \oplus_{j=0}^n \mathbb{C}_j$ 的一个 1 维子空间。令 S_j^1 为 $\mathbb{C}_j$ 中的单位圆。因此，$S_j^1 = \{(z_0, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{n+1}) : \ |z_j| = 1, \ z_k = 0$ 对于 $k \neq j\}$。令

$$\begin{aligned} W_j &:= \{w_{j,\ell} := (z_0, \ldots, z_j, \ldots, z_n) \in S_j^1, z_j = e^{\ell\pi i/p} \ : \ 0 \leq \ell \leq 2p-1\}, \\ U_j &:= \{w_{j,2k} \ : \ 0 \leq k \leq p-1\}, \text{ and } V_j := W_j \setminus U_j. \end{aligned}$$

现在，考虑单纯复形

$$\begin{aligned} &\Sigma_j := W_j \cup \{\emptyset, \{w_{j,2p-1}, w_{j,0}\}, \{w_{j,\ell}, w_{j,\ell+1}\} : 0 \leq \ell \leq 2p-2\}, \text{ for } 0 \leq j \leq n, \text{ and} \\ &\Sigma := \Sigma_0 * \Sigma_1 * \cdots * \Sigma_n. \end{aligned} \tag{2}$$

则 Σ_j 是 S_j^1 的一个 $2p$ 顶点三角剖分，其中 $0 \leq j \leq n$，因此 Σ 是 S^{2n+1} 的一个 $2p(n+1)$ 顶点三角剖分。事实上， Σ 是单纯 $2(n+1)$- 多面体 P 的边界复形，其顶点集为 $W_0 \cup \cdots \cup W_n$。如果 L_j，$_\ell := w_j$，$_\ell w_j$ 是连接顶点 w_j、$_\ell$ 和 w_j、$_{\ell+1}$ 的线段（下标中的加法模 $2p$），则 P 的 $(2n+1)$ 维面为 L_0、$_{\ell_0} L_1$、$_{\ell_1} \cdots L_n$、$_{\ell_n}$（$n+1$ 个几何 1-单形的连接）、ℓ_0、……、$\ell_n \in \{0, \ldots, 2p-1\}$。因此，$P$ 的边界 ∂P 是这些 $(2p)^{n+1}$ 个几何 $(2p-1)$-单形的并集，并取 $|\Sigma| = \partial P$。然后

$$\Phi : |\Sigma| \to S^{2n+1}, \text{ given by } w \mapsto w/\|w\|, \tag{3}$$

是一个同胚。

考虑映射 $\rho : \cup_{j=0}^n W_j \to \cup_{j=0}^n W_j$ 为

$$\rho(v) := \begin{cases} e^{2\pi i/p} \times v & \text{if} \quad v \in W_0, \text{ and} \\ e^{2\pi i q_j/p} \times v & \text{if} \quad v \in W_j \text{ for } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

对于 $\alpha = \{v_1, \ldots, v_m\} \in \Sigma$，我们定义

$$\rho(\alpha) := \{\rho(v_1), \ldots, \rho(v_m)\}. \tag{4}$$

引理 3.1. 映射 ρ 是单纯偏序集 Σ 和 $\langle\rho\rangle \cong \mathbb{Z}_p$ 的自同构。

证明. 要证明 $\rho \in$ 是 Aut(Σ) 的元素，只需证明 $\alpha \in \Sigma$ 蕴含 $\rho(\alpha) \in \Sigma$。根据连接的定义，我们可以写成 $\alpha = \alpha_1 \sqcup \cdots \sqcup \alpha_r$，其中 $\alpha_s \in \Sigma_{i_s}$、$s = 1$、……、$r$ 和 i_1、……、i_r 互不相同。由于每个 Σ_j 都是一维的，因此每个 α_r 都是顶点或边。现在，对任意 j、Σ_j 的任意一条边 $\{w_{j,k}, w_{j,k+1}\}$ 以及任意整数 t，$\{e^{2\pi it/p} w_{j,k}, e^{2\pi it/p} w_{j,k+1}\}$ 仍是 Σ_j 的一条边。因此，$\rho(\alpha_s) \in \Sigma_{i_s}$。由此可得，$\rho(\alpha) = \rho(\alpha_1) \sqcup \cdots \sqcup \rho(\alpha_r) \in \Sigma$。因此 $\rho \in$ 属于 Aut(Σ)。显然，ρ 的阶为 p。引理得证。 □

令 $w \in |\Sigma|$。设 w 位于 Σ 的单形 $\alpha = \{w_1, \ldots, w_m\}$ 的相对内部。令 $w = t_1 w_1 + \cdots + t_m w_m$，其中 t_1、……、$t_m \in \in (0,\ 1)$，且 $t_1 + \cdots + t_m = 1$。则 $t_1 \rho(w_1) + \cdots + t_m \rho(w_m)$ 位于 $\rho(\alpha)$ 的相对内部。于是

$$|\rho|(w) := t_1 \rho(w_1) + \cdots + t_m \rho(w_m) \tag{5}$$

给出一个（PL）同胚 $|\rho| : |\Sigma| \to |\Sigma|$。

引理 3.2。设 $h:\ S^{2n+1} \to S^{2n+1}$、$\Phi:\ |\Sigma| \to S^{2n+1}$ 和 $|\rho|:\ |\Sigma| \to |\Sigma|$ 分别如 (1)、(3) 和(5) 中所述。则 $\Phi \circ |\rho| \circ \Phi^{-1} \equiv h$。

证明。设 $w \in |\Sigma|$。假设 w 位于 α的相对内部。设 $\alpha = \alpha_1 \sqcup \cdots \sqcup \alpha_r$，其中 α_s 是 Σ_{i_s}的一个顶点或一条边，$s = 1,\ldots,r$ 和 $i_1, \ldots, i_r$ 互不相同。那么 $w = a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r$，其中 $x_1, \ldots, x_r$ 分别位于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 的相对内部，且 $a_1, \ldots, a_r \in (0, 1)$ 满足 $a_1 + \cdots + a_r = 1$。

断言 1。 $|\rho|(w) = a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p} x_1 + \cdots + a_r e^{2\pi i q_{i_r}/p} x_r$，其中 $q_0 = 1$。

不失一般性，设 $\alpha_1 = \{w_1, w_2\}, \ldots, \alpha_\ell = \{w_{2\ell-1}, w_{2\ell}\}$, $\alpha_{\ell+1} = w_{2\ell+1}, \ldots, \alpha_s = w_{\ell+s}$。设 $x_k = b_{2k-1} w_{2k-1} + b_{2k} w_{2k}$，其中 $b_{2k-1}, b_{2k} > 0$ 且 $b_{2k-1} + b_{2k} = 1$ 对于 $1 \le k \le \ell$。那么 $w = a_1 b_1 w_1 + a_1 b_2 w_2 + \cdots + a_\ell b_{2\ell} w_{2\ell} + a_{\ell+1} w_{2\ell+1} + \cdots + a_s w_{\ell+s}$ 且 $a_1 b_1 + \cdots + a_\ell b_{2\ell} + a_{\ell+1} + \cdots + a_r = a_1(b_1 + b_2) + \cdots + a_\ell(b_{2\ell-1} + b_{2\ell}) + a_{\ell+1} + \cdots + a_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r = 1$。然后，根据 (5) 中的定义，

$$\begin{aligned}
|\rho|(w) &= a_1 b_1 \rho(w_1) + a_1 b_2 \rho(w_2) + \cdots + a_\ell b_{2\ell} \rho(w_{2\ell}) + a_{\ell+1} \rho(w_{2\ell+1}) + \cdots + a_r \rho(w_{\ell+r}) \\
&= a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p}(b_1 w_1 + b_2 w_2) + \cdots + a_\ell e^{2\pi i q_{i_\ell}/p}(b_{2\ell-1} w_{2\ell-1} + b_{2\ell} w_{2\ell}) \\
&\qquad + a_{\ell+1} e^{2\pi i q_{i_{\ell+1}}/p} w_{2\ell+1} + \cdots + a_r e^{2\pi i q_{i_r}/p} w_{\ell+r} \\
&= a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p} x_1 + \cdots + a_r e^{2\pi i q_{i_r}/p} x_r.
\end{aligned}$$

这证明了断言 1。

现在，对于 $s = 1, \ldots, r$ 和 $i_1, \ldots, i_r$，它们互不相同。因此，$\{a_1 x_1, \ldots, a_s x_r\}$ 和 $\{a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p} x_1, \ldots, a_s e^{2\pi i q_{i_r}/p} x_r\}$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的两组正交向量。这意味着 $\||\rho|(w)\|^2 = \|a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p} x_1\|^2 + \cdots + \|a_r e^{2\pi i q_{i_r}/p} x_r\|^2 = \|a_1 x_1\|^2 + \cdots +$

$\|a_r x_r\|^2 = \||w\|^2$。对于 $1 \le s \le r$，令 $a_s x_s/\|w\| = c_s e_{i_s}$，其中 $e_0 = (1,0,\ldots,0)$ $e_1 = (0,1,0,\ldots,0)$，$e_n = (0,\ldots,0,1)$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的标准单位向量。于是

$$(\Phi \circ |\rho|)(w) = \frac{a_1|\rho|(x_1) + \cdots + a_r|\rho|(x_r)}{\||q|(w)\|} = \frac{a_1 e^{2\pi i q_{i_1}/p} x_1 + \cdots + a_r e^{2\pi i q_{i_r}/p} x_r}{\|w\|} \text{ and}$$
$$(h \circ \Phi)(w) = h(c_1 e_{i_1} + \cdots + c_s e_{i_s}) = e^{2\pi i q_{i_1}/p} c_1 e_{i_1} + \cdots + e^{2\pi i q_{i_r}/p} c_r e_{i_r}.$$

因此，对于所有 $w \in |\Phi|$，$(\Phi \circ |\rho|)(w) = (h \circ \Phi)(w)$。由此可得 $\Phi \circ |\rho| \cong h \circ \Phi$。引理得证。 □

定理 3.3. 对于整数 $n \ge 1$ 和 $p \ge 2$，设 $q_1, \ldots, q_n$ 是与 p 互质的整数。设 Σ 和 ρ 分别如 (2) 和 (4) 中所示。则商偏序集 $\Sigma/\langle\rho\rangle$ 是广义透镜空间 $L(p, q_1, \ldots, q_n)$ 的一个结晶。

证明。这里 Σ 是一个单纯胞腔复形，并且根据引理 3.1，$\langle\rho\rangle \le \mathrm{Aut}(\Sigma)$。

断言 2. $\langle\rho\rangle$ 在单纯胞腔复形 Σ 上的作用是良好的。

注意，Σ 的顶点构成 $2(n+1)$ 个 $\langle\rho\rangle$-轨道，即 $U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$。现在，$U_j$（分别地，$V_j$）中任意两个顶点在 Σ_j 中都不相邻，其中 $0 \le j \le n$。因此，根据连接的定义，任意一个 $\langle\rho\rangle$-轨道中的元素在 Σ 中都不相邻。由此，$\langle\rho\rangle$ 在 Σ 上的作用是良好的。断言 2 得证。

由命题 2.1 和断言 2，$\Sigma/\langle\rho\rangle$ 是一个单纯胞腔复形。接着，由命题 2.2，$|\Sigma/\langle\rho\rangle| \cong |\Sigma|/\langle|\rho|\rangle \cong S^{2n+1}/\langle\Phi \circ |\rho| \circ \Phi^{-1}\rangle$。现在，由引理 3.2，$S^{2n+1}/\langle\Phi \circ |\rho| \circ \Phi^{-1}\rangle = S^{2n+1}/\langle h\rangle = L(p, q_1, \ldots\ldots, q_n)$。因此，$|\Sigma/\langle\rho\rangle| \cong L(p, q_1, \ldots\ldots, q_n)$。于是，$\Sigma/\langle\rho\rangle$ 是 $L(p, q_1, \ldots\ldots, q_n)$ 的单纯胞腔结构。

令 $\eta : \Sigma \to \Sigma/\langle\rho\rangle$ 为自然投影。那么 η 是一个 p 重覆盖，胞腔的像也是胞腔。令 Σ' 和 $(\Sigma/\langle\rho\rangle)'$ 分别为 Σ 和 $\Sigma/\langle\rho\rangle$ 的导出细分。那么 η 给出一个 p 重单纯覆盖 $\tilde{\eta} : \Sigma' \to (\Sigma/\langle\rho\rangle)'$。由于每个 Σ_j 都是 S^1 的三角剖分，因此每个 Σ_j 都是组合流形，从而 $\Sigma = \Sigma_0 * \cdots * \Sigma_n$ 是组合流形。这意味着 Σ' 是组合流形。由于 $\tilde{\eta} : \Sigma' \to (\Sigma/\langle\rho\rangle)'$ 是单纯覆盖，$(\Sigma/\langle\rho\rangle)'$ 是组合流形。因此，$|\Sigma/\langle\rho\rangle| = |(\Sigma/\langle\rho\rangle)'|$ 是 PL 流形。

现在，$\Sigma/\langle\rho\rangle$ 的顶点是 Σ 的顶点的 $\langle\rho\rangle$-轨道，因此这些顶点为 $U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$。因此，$(2n+1)$ 维单纯胞腔复形 $\Sigma/\langle\rho\rangle$ 的顶点数为 $2(n+1)$。这表明 $\Sigma/\langle\rho\rangle$ 是 $L(p, q_1, \ldots, q_n)$ 的一个结晶。证明完毕。 □

参考文献

[1] A. Agarwal 和 B. Basak，关于 n-单形 Δ^n 及棱柱 $\Delta^n \times I$ 上小覆盖的结晶，《离散数学》**349** (2026)，115057。[2] B. Basak 和 B. Datta，三维流形的极小结晶，《电子组合学杂志》**21(1)** (2014)，#P1.61，共25页。[3] A. Bj¨orner，偏序集、正则 CW 复形与 Bruhat 序，《欧洲组合学杂志》**5**(1984)，7–16。

[4] B. Datta 和 J. Spreer, $\mathbb{CP}^n$的单纯胞腔分解, 《离散与计算几何》(2025)。https://doi.org/10.1007/s00454-025-00801-x。[5] M. Ferri、C. Gagliardi 和 L. Grasselli, PL 流形的图论表示——关于结晶的综述。《数学等式》**31**(1986), 121–141。[6] S. Murai, 流形单纯胞腔分解的面向量, 《以色列数学杂志》**195**(2013), 187–213。[7] M. Pezzana, 关于紧致代数簇的拓扑结构, 摩德纳大学数学与物理研讨会论文集**23** (1974), 269–277。[8] C. P. Rourke 和 B. J. Sanderson, 《分段线性拓扑导论》, 施普林格出版社, 柏林, 1982。[9] E. H. Spanier, 《代数拓扑》, 施普林格出版社纽约公司, 1990。