arXiv:2603.21351v1 [math.FA] 22 Mar 2026

相对有界扰动下的一对可交换自伴算子的函数

A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller

Abstract. 我们研究相对有界算子扰动下可交换自伴算子对的函数的行为。我们获得了先前关于相对有界扰动下单个自伴算子的函数所得结果的类似结论。主要工具是双算子积分

1. 引言

本文可视为我们早期论文 [Pe], [APPS] 和[AP3]的续篇。我们研究正规算子的函数（或者相对有界扰动下的可交换自伴算子对的函数）。

设 N 和 M 是定义域相同的（不一定有界的）正规算子。我们将 N 视为初始算子，而将 M 视为扰动算子。算子 $M-N$ 将被解释为扰动。回顾一下，如果 $M-N$ 满足 $\mathrm{Dom}(M)\subset\mathrm{Dom}(N)$ 且满足以下不等式，则称其为相对于 N 的相对有界扰动

$$\|(M-N)x\|\le \mathrm{const}\,\big(\|Nx\|+\|x\|\big),\quad x\in\mathrm{Dom}(M),$$

其中，$\mathrm{Dom}(N)$表示 N的定义域。

事实证明，考虑如下假设更为自然：$\mathrm{Re}\,M-\mathrm{Re}\,N$是$\mathrm{Re}\ N$的相对有界扰动，且 $\mathrm{Im}\,M-\mathrm{Im}\ N$是$\mathrm{Im}\ N$的相对有界扰动。容易看出，该假设意味着 $M-N$是 N的相对有界扰动。然而，反过来并不成立。事实上，设 A 是一个无界自伴算子。令

$$N=\mathrm{i}A\quad\text{and}\quad M=A+\mathrm{i}A.$$

显然， $M-N$是 N的相对有界扰动。另一方面，$\mathrm{Re}\ M$–$\mathrm{Re}\ N=A$和$\mathrm{Re}\ M-\mathrm{Re}\ N=A$，并且显然，$\mathrm{Re}\ M-\mathrm{Re}\,N$不是$\mathrm{Re}\,N=0$的相对有界扰动。

因此，我们将考虑这样的情形：$\mathrm{Re}\ M$–$\mathrm{Re}\ N$是 $\mathrm{Re}\ N$的相对有界扰动，而 $\mathrm{Im}\ M-\mathrm{Im}\ N$是 $\mathrm{Im}\ N$的相对有界扰动。转而考察实部和虚部后，我们得到一个未扰动的可交换自伴算子对 $(A_1,\ A_2)$ 和一个受扰动的可交换自伴算子对 $(B_1,\ B_2)$。注意，定义可交换自伴算子这一概念最自然的方式是说：如果两个自伴算子的谱测度可交换，那么这两个自伴算子就可交换。

我们的假设是， $B_1 - A_1$ 是 A_1 的相对有界扰动，且 $B_2 - A_2$是 A_2的相对有界扰动。众所周知（例如参见 [AP3]），这一假设等价于这样一个事实：$(A_1,\ A_2)$ 和 $(B_1,\ B_2)$ 是可交换自伴算子对，且这些算子

$$(B_1 - A_1)(A_1 + \mathrm{i}I)^{-1} \quad \text{and} \quad (B_2 - A_2)(A_2 + \mathrm{i}I)^{-1} \quad \text{are bounded.} \tag{1.1}$$

本文的主要结果将在 § 4 中给出。具体而言，我们将在 § 4 中得到相对有界扰动下可交换自伴算子对的函数偏差估计。回想一下，对于单个自伴算子的函数，类似结果最近已在 [AP3]中得到。

与此前的论文一样，双重算子积分将在本文中发挥重要作用。§ 2 简要介绍双重算子积分和舒尔乘子。

最后，§3 简要介绍 Besov 类 $B^1_{\infty,\ 1}(\mathbb{R}^2)$，它在扰动理论中发挥着重要作用。

2. 双重算子积分和舒尔乘子

本节简要介绍双重算子积分和舒尔乘子。更详细的信息请参阅 [BSh1], [BSh2], [AP1], [Pe2]和 [Pe3]。

双重算子积分的形式如下

$$\iint_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}} \Phi(x,y)\,\mathrm{d}E_1(x)Q\,\mathrm{d}E_2(y). \tag{2.1}$$

这里， E_1 和 E_2 是希尔伯特空间上的谱测度， Φ 是有界可测函数， Q 是希尔伯特空间上的有界线性算子。这类双算子积分最早出现在 Yu.L. Daletskii 和 S.G. Krein 的论文 [DK] 中。后来，M.Sh. Birman 和 M.S. Solomyak 在 [BSh1] 中创立了严谨而优美的双重算子积分理论。他们从 Q为希尔伯特–施密特算子的情形入手，并将式 (2.1) 中的双算子积分定义为

$$\left(\int_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}} \Phi\,\mathrm{dE}\right) Q,$$

其中，E 是希尔伯特–施密特类 $\boldsymbol{S}_2$上的谱测度，它在可测矩形上的定义为

$$\mathrm{E}(\Lambda\times\Delta)Q = E_1(\Lambda)QE_2(\Delta), \quad Q\in\boldsymbol{S}_2.$$

根据定义，在这种情况下，(2.1) 中的双算子积分属于 $\boldsymbol{S}_2$ ，并且

$$\left\|\iint \Phi(x,y)\,\mathrm{d}E_1(x)Q\,\mathrm{d}E_2(y)\right\|_{\boldsymbol{S}_2} \le \|\Phi\|_{L^\infty}\|Q\|_{\boldsymbol{S}_2}.$$

有界可测函数 Φ 在 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 被称为相对于谱测度*Schur* 乘子（迹类 $\boldsymbol{S}_1$ 的舒尔乘子）E_1 和 E_2，如果

$$Q\in\boldsymbol{S}_1 \quad\Longrightarrow\quad \iint \Phi\,\mathrm{d}E_1 Q\,\mathrm{d}E_2\in\boldsymbol{S}_1.$$

我们将相对于谱测度 E_1 和E_2 的 $\boldsymbol{S}_1$ 的舒尔乘子类记为$\mathfrak{M}_{E_1,\ E_2}$。

若$\Phi\in\mathfrak{M}_{E_2,\ E_1}$，则可通过对偶性为任意有界线性算子 Q 定义式 (2.1) 中的双算子积分，而变换算子

$$Q\mapsto\iint\Phi\,\mathrm{d}E_1 Q\,\mathrm{d}E_2$$

在算子范数下成为有界线性算子。

本文考察谱测度 E_1 和 E_2 定义在欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$的博雷尔子集上的情形。我们用 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$表示 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$上的博雷尔舒尔乘子类，即$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上的博雷尔函数中相对于欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$的博雷尔子集上任意谱测度均为舒尔乘子的函数类。

现在我们来定义 L^∞空间子空间的 Haagerup 张量积。

设 E_1 和 E_2 为谱测度。根据定义，$L^\infty_{E_{A_1}}$ 和 $L^\infty_{E_{A_2}}$ 的*Haagerup* 张量积 $L^\infty_{E_{A_1}}\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty_{E_{A_2}}$ 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上的函数 Φ 所构成的类，其形式为

$$\Phi(x,y)=\sum_{n\geq0}\varphi_n(x)\psi_n(y),\quad\text{for}\quad\varphi_n\in L^\infty_{E_{A_1}}\quad\text{and}\quad\psi_n\in L^\infty_{E_{A_2}}\tag{2.2}$$

使得

$$\sum_{n\geq0}|\varphi_n|^2\in L^\infty_{E_{A_1}}\quad\text{and}\quad\sum_{n\geq0}|\psi_n|^2\in L^\infty_{E_{A_2}}.\tag{2.3}$$

Φ 在 $L^\infty_{E_{A_1}}\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty_{E_{A_2}}$ 中的范数是以下表达式的下确界

$$\left\|\left(\sum_{n\geq0}|\varphi_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^\infty}\cdot\left\|\left(\sum_{n\geq0}|\psi_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^\infty}$$

遍历 Φ 的所有形如 (2.2) 的表示。

关于舒尔乘子空间 $\mathfrak{M}_{E_1,E_2}$ 有多种刻画，参见 [Pe],[AP1] 和 [AP2]。我们提及 [Pe] 中给出的一种刻画：$\Phi\in\mathfrak{M}_{E_1,E_2}$ 当且仅当$\Phi\in L^\infty_{E_1}\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty_{E_2}$。注意，蕴含关系

$$\Phi\in L^\infty_{E_1}\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty_{E_2}\quad\Longrightarrow\quad\Phi\in\mathfrak{M}_{E_1,E_2}$$

早先已在 [BSh2]中得到。

另请注意，在 [AP2]中已证明

$$\|\Phi\|_{\mathfrak{M}_{E_1,E_2}}=\|\Phi\|_{L^\infty_{E_1}\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty_{E_2}},\quad\Phi\in\mathfrak{M}_{E_1,E_2}.$$

3. Besov 类$B^1_{\infty,\,1}(\mathbb{R}^2)$

本节简要介绍 Besov 空间 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$。关于更一般情形下 Besov 空间的详细信息，可参见 [N], [Pee], [Pe3]和 [AP1]。

设 w 是定义在 $\mathbb{R}$上的无穷可微函数，使得

$$w \geq 0, \quad \operatorname{supp} w \subset [1/2, 2], \quad \text{and} \quad w(t) = 1 - w\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{for} \quad t \in [1, 2]. \tag{3.1}$$

我们在 $\mathbb{R}^2$ 上定义函数 W_n、 $n \in \mathbb{Z}$，如下：

$$\big(\mathscr{F}W_n\big)(x) = w\left(\frac{\|x\|}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = (x_1, x_2), \quad \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2},$$

其中 $\mathscr{F}$ 是定义在$L^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ 上的傅里叶变换，定义如下：

$$\big(\mathscr{F}f\big)(t_1, t_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\mathrm{i}(x_1 t_1 + x_2 t_2)}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2,$$

显然，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathscr{F}W_n)(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

对于 $\mathscr{S}'\big(\mathbb{R}^2\big)$ 中的每个缓增分布 f，我们关联序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

，

$$f_n \stackrel{\text{def}}{=} f * W_n. \tag{3.2}$$

形式级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ 是 f 的 Littlewood–Payley 型展开，不一定收敛到 f。我们首先定义（齐次）Besov 类 $\dot{B}^1_{\infty,1}\big(\mathbb{R}^2\big)$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$，它是由 f 属于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ 类的分布（即缓增分布）构成的空间，使得

$$\{2^n \|f_n\|_{L^\infty}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \|f\|_{B^1_{\infty,1}} \stackrel{\text{def}}{=} \big\|\{2^n \|f_n\|_{L^\infty}\}_{n\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \tag{3.3}$$

根据此定义，$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ 包含所有多项式；其次，对于任意多项式 f, $\|f\|_{B^1_{\infty,1}} = 0$。此外，分布 f 由序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 唯一确定，差一个多项式。容易看出，级数 $\sum_{n\geq 0} f_n$ 在 [1] $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中收敛。然而，级数 $\sum_{n<0} f_n$ 一般可能发散。尽管如此，可以证明级数

$$\sum_{n<0} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \quad \text{and} \quad \sum_{n<0} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \tag{3.4}$$

在 $\mathbb{R}^2$中一致收敛。

[1] The space $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ is equipped with the weak topology $\sigma\big(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2), \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)\big)$.

现在我们可以定义修正的（齐次）Besov 空间$B^s_{p,\,q}\big(\mathbb{R}^d\big)$。我们称一个分布 f 属于 Besov 类 $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^d)$，若满足 (3.3)，并且

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\quad\text{and}\quad\frac{\partial f}{\partial x_2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\partial f_n}{\partial x_2}$$

在空间 $\mathscr{S}'\big(\mathbb{R}^2\big)$ 中。现在，函数 f 由序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$唯一确定，至多相差一个常数。此外，多项式 g 属于 $B^1_{\infty,\,1}\big(\mathbb{R}^2\big)$ 当且仅当它是常数。

4. 主要结果

本文的关键在于下述定理给出的积分公式。我们将使用如下记号

$$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\quad\text{and}\quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

此外，对于可交换自伴算子对 $(A_1,\ A_2)$ 和 $(B_1,\ B_2)$，我们用记号 E_A 表示算子对 $(A_1,\ A_2)$ 的联合谱测度，并用 E_B 表示算子对 $(B_1,\ B_2)$ 的联合谱测度。

定理 4.1. 设 (A_1, A_2) 和 (B_1, B_2) 是满足 (1.1) 的可交换自伴算子对。设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，且函数

$$(x,y)\mapsto\frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}(x_2+\mathrm{i}),\quad(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,$$

and

$$(x,y)\mapsto\frac{f(y_1,y_2)-f(x_1,y_2)}{y_1-x_1}(x_1+\mathrm{i}),\quad(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,$$

属于博雷尔舒尔乘子的空间 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ 。

$$\begin{aligned}&f(B_1,B_2)-f(A_1,A_2)\\&=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}(x_2+\mathrm{i})\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_2-A_2)(A_2+\mathrm{i}I)^{-1}\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)\\&+\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y_1,y_2)-f(x_1,y_2)}{y_1-x_1}(x_1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_1-A_1)(A_1+\mathrm{i}I)^{-1}\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

首先，我们建立若干辅助事实。对于 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 f，我们定义

$$f_t(s)\stackrel{\text{def}}{=}f(t,s)\quad\text{and}\quad f^s(t)\stackrel{\text{def}}{=}f(t,s).$$

引理 4.2。 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$上的函数。假设

$$|(f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2))(x_2+\mathrm{i})|\le C|y_2-x_2|\tag{4.2}$$

and

$$|f(y_1,y_2)-f(x_1,y_2))(x_1+\mathrm{i})|\le C|y_1-x_1| \tag{4.3}$$

对所有的 $x,y\in\mathbb{R}^2$均成立。那么 f 有界。

证明。 条件 (4.2) 可改写如下

$$|f_t(s_1)-f_t(s_2)|\le C\frac{|s_1-s_2|}{\sqrt{s_1^2+1}}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$和 $s\in\mathbb{R}^2$均成立。代入 $s_2=0$，得到 $|f(t,s)-f(t,0)|\le C$对所有 $s,t\in\mathbb{R}$均成立。同理可得 $|f(t,s)-f(0,s)|\le C$对所有 $s,t\in\mathbb{R}$均成立。剩下只需注意到

$$|f(t,s)-f(0,0)|\le|f(t,s)-f(t,0)|+|f(t,0)-f(0,0)|\le 2C$$

并且 $|f(t,s)|\le 2C+|f(0,0)|$对所有 $t,s\in\mathbb{R}$均成立。 ■

我们还需要以下断言。

引理 4.3。 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数。假设

$$|f(x_1,y_2)(y_2+\mathrm{i})-f(x_1,x_2)(x_2+\mathrm{i})|\le C|y_2-x_2| \tag{4.4}$$

and

$$|f(y_1,y_2)(y_1+\mathrm{i})-f(x_1,y_2)(x_1+\mathrm{i})|\le C|y_1-x_1| \tag{4.5}$$

对所有 $x,y\in\mathbb{R}^2$ 均成立。则 f 有界。

证明。条件 (4.4) 可改写如下

$$|f_t(s_1)(s_1+\mathrm{i})-f_t(s_2)(s_2+\mathrm{i})|\le C|s_1-s_2|$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$ 和 $s\in\mathbb{R}^2$。代入 $s_2=t=0$，得到
$|f_0(s)(s+\mathrm{i})-f(0,\ 0)\mathrm{i}|\le C|s|$ 对所有 $s\in\mathbb{R}$。因此， f_0 是一个有界函数。令 $|f_0|\le C_1$。
条件 (4.5) 可改写如下

$$|f^s(t_1)(t_1+\mathrm{i})-f^s(t_2)(t_2+\mathrm{i})|\le C|t_1-t_2|$$

对所有 $s\in\mathbb{R}$ 和 $t\in\mathbb{R}^2$。因此,

$$|f(t,s)(t+\mathrm{i})-f(0,s)\mathrm{i}|\le C|t|$$

对所有 $s,\ t\in\mathbb{R}$。
还需注意到

$$|f(t,s)|\le\frac{C|t|+C_1}{|t+\mathrm{i}|}.\quad\blacksquare$$

定理 4.1 的证明。 首先假设所讨论的自伴算子是有界的。显然，差商

$$(x,y)\mapsto\frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}\quad\text{and}\quad(x,y)\mapsto\quad\frac{f(y_1,y_2)-f(x_1,y_2)}{y_1-x_1}$$

是相对于 E_A and E_B 的舒尔乘子。

我们有

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}(x_2+\mathrm{i})\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_2-A_2)(A_2+\mathrm{i}I)^{-1}\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_2-A_2)\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)$$

显然，函数

$$(x,y)\mapsto f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)$$

关于 E_A 和 E_B 也必须是舒尔乘子。

根据引理 4.2，函数 f 必须是有界的，因此函数 $(x,\ y)\mapsto f(x_1,\ x_2)$ 与 y 无关，必属于 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$，这反过来意味着函数 $(x,\ y)\mapsto f(x_1,\ y_2)$ 关于 E_A 和 E_B 必须是舒尔乘子。

因此，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2)}{y_2-x_2}\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_2-A_2)\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} (f(x_1,y_2)-f(x_1,x_2))\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,y_2)\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2) - f(A_1,A_2).$$

类似地，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y_1,y_2)-f(x_1,y_2)}{y_1-x_1}(x_1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)(B_1-A_1)(A_1+\mathrm{i}I)^{-1}\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2)$$

$$= f(B_1,B_2) - \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,y_2)\,\mathrm{d}E_B(y_1,y_2)\,\mathrm{d}E_A(x_1,x_2).$$

这就证明了有界算子的情形下的公式 (4.1)。将其约化到可能无界算子的情形是或多或少标准的，参见例如 [APPS] 中定理 5.2 的证明。

事实上，很明显，(4.1) 右端的双重算子积分确定了有界线性算子。将它们左乘谱投影

$$P_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_B(\{(y_1,y_2):\ |y_1|\le M\ \text{ and }\ |y_2|\le M\}$$

，并右乘谱投影

$$Q_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_B(\{(x_1,x_2):\ |x_1|\le M\ \text{ and }\ |x_2|\le M\}$$

在右侧。显然，所得序列在强算子拓扑下收敛到 (4.1) 的右侧。只需注意，将有界可交换自伴算子对 (A_1,A_2) 和 (B_1,B_2) 替换为算子对 (Q_MA_1,Q_MA_2) 和 (P_MB_1,P_MB_2)，并令 $M\to\infty$ 在强算子拓扑下取极限时，公式 (4.1) 仍然成立。 ■

引理 4.4。设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的有界函数，使得由下式定义的函数 g

$$g(s,t) = f(s,t)(s+i)$$

属于 *Besov* 类 $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$。那么函数

$$(x,y) \mapsto \frac{f(y_1,y_2)(y_1+\mathrm{i}) - f(x_1,y_2)(x_1+\mathrm{i})}{y_1 - x_1}$$

在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上属于 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$，其中

$$x = (x_1, x_2) \quad \textit{and} \quad y = (y_1, y_2).$$

证明。该结果可由 [APPS] 中的定理 6.2 轻易推出。 ■

推论 4.5。在引理 4.4 的假设下，函数

$$(x,y) \mapsto \frac{f(y_1,y_2) - f(x_1,y_2)}{y_1 - x_1}(x_1+\mathrm{i})$$

在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上属于 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$。

证明。我们有

$$\frac{f(y_1,y_2) - f(x_1,y_2)}{y_1 - x_1}(x_1+\mathrm{i}) = \frac{f(y_1,y_2)(y_1+\mathrm{i}) - f(x_1,y_2)(x_1+\mathrm{i})}{y_1 - x_1} - f(y_1,y_2).$$

由于函数

$$(x,y) \mapsto f(y_1,y_2)$$

有界且仅依赖于 y，因此它属于 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$。结论由引理 4.4 得出。 ■

推论 4.6。 在引理 4.4 的假设下

$$\|f(B_1,B_2) - f(A_1,B_2)\| \le \operatorname{const} \|g\|_{B^1_{\infty,1}} \left\|(B_1 - A_1)(A_1 + \mathrm{i}I)^{-1}\right\|.$$

定理 4.7。 设 (A_1, A_2) 和 (B_1, B_2) 是满足 (1.1) 的可交换自伴算子对。假设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数，使得由下式定义的函数 g_1 和 g_2

$$g_1(s,t) = f(s,t)(s+i) \quad \textit{and} \quad g_2(s,t) = f(s,t)(t+i)$$

属于 *Besov* 类 $B^1_{\infty,\,1}(\mathbb{R}^2)$。那么函数

$$(x,y) \mapsto \frac{f(y_1,y_2) - f(x_1,y_2)}{y_1 - x_1}(x_1+\mathrm{i})$$

and

$$(x,y) \mapsto \frac{f(x_1,y_2) - f(x_1,x_2)}{y_2 - x_2}(x_2+\mathrm{i})$$

是 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上的博雷尔舒尔乘子，并且

$$\begin{aligned}\big\|f(B_1,B_2) - f(A_1,A_2)\big\| &\le \operatorname{const}\left(\|g_1\|_{B^1_{\infty,1}} + \|g_2\|_{B^1_{\infty,1}}\right) \\ &\quad \times \max\left\{\big\|(B_1 - A_1)(A_1 + \mathrm{i}I)^{-1}\big\|, \big\|(B_2 - A_2)(A_2 + \mathrm{i}I)^{-1}\big\|\right\}.\end{aligned}$$

现在假设 $1 \le p < \infty$，并且 (A_1, A_2) 和 (B_1, B_2) 是两对可交换自伴算子，且 $(B_j - A_j)$ 是 A_j, $j = 1,2$ 的相对 $\boldsymbol{S}_p$ 扰动，即

$$(B_1 - A_1)(A_1 + \mathrm{i}I)^{-1} \in \boldsymbol{S}_p \quad \text{and} \quad (B_2 - A_2)(A_2 + \mathrm{i}I)^{-1} \in \boldsymbol{S}_p, \tag{4.6}$$

其中 $\boldsymbol{S}_p$ 表示 Schatten–von Neumann 类。

定理 4.8. 设 $1 \le p < \infty$，且 (A_1, A_2) 和 (B_1, B_2) 是满足 (4.6) 的可交换自伴算子对。假设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数，并满足定理 4.7 的假设。则 $f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2) \in \boldsymbol{S}_p$，并且存在一个正数 K，使得

$$\|f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2)\|_{\boldsymbol{S}_p} \le K \max\bigl\{\|B_1 - A_1\|_{\boldsymbol{S}_p}, \|B_2 - A_2\|_{\boldsymbol{S}_p}\bigr\}.$$

借助插值，可由定理 4.1 和定理 4.7 轻易推出该定理。

References

[AP1] A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller, *Operator Lipschitz functions*, Uspekhi Mat. Nauk 71:4 (2016), 3–106（俄文）。英文译本：Russian Math. Surveys 71:4, 605–702。[AP2] A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller, *Haagerup tensor products and Schur multipliers*, Algebra i Analiz 36:5 (2024), 70–85。[AP3] A.B. Aleksandrov 和 V.V. Peller, *Functions of self-adjoint operators under relatively bounded and relatively trace class perturbations* **298** 2025 3027 3048 , Math. Nachrichten ( ), –。[APPS] A.B. Aleksandrov, V.V. Peller, D.S. Potapov 和 F.A. Sukochev, *Functions of normal operators under perturbations* **226** 2011 5216 5251 , Adv. in Math. ( ), –。[BSh1] M.Sh. Birman 和 M.Z. Solomyak, *Double Stieltjes operator integrals*, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 1 (1966), 33–67（俄文）。英文译本：Topics Math. Physics 1 (1967), 25–54, Consultants Bureau Plenum Publishing Corporation，纽约。[BSh2] M.Sh. Birman 和 M.Z. Solomyak, *Double Stieltjes operator integrals. III*, Problems of Math. Phys., Leningrad. Univ. 6 (1973), 27–53（俄文）。[DK] Yu.L. Daletskii 和 S.G. Krein, *Integration and differentiation of functions of Hermitian operators and application to the theory of perturbations* （俄文）, Trudy Sem. Functsion. Anal., Voronezh. Gos. Univ. **1** 1956 81 105 ( ), – N, [ ] S.M. Nikol'skii *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*，莫斯科，Nauka，1969（俄文）；英文译本，Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第 205 卷。Springer-Verlag，纽约-海德堡，1975。[Pee] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*，Duke Univ. Press.，达勒姆，NC，1976。[Pe] V.V. Peller, *Hankel operators in the theory of perturbations of unitary and self-adjoint operators*，Funktsional. Anal. i Prilozhen. 19:2 (1985), 37–51（俄文）。英文译本：Funct. Anal. Appl. 19 (1985)，111–123。[Pe2] V.V. Peller, *Multiple operator integrals in perturbation theory*，Bull. Math. Sci. 6 (2016), 15–88。[Pe3] V.V. Peller, *Besov spaces in operator theory*（俄文），Uspekhi Mat. Nauk 79:1 (2024), 3–58。英文译本：Russian Math. Surveys 79:1 (2024), 1–52。[T] H. Triebel, *Theory of function spaces*，Monogr. Math.，第 78 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔–波士顿–斯图加特 1983。

A.B. Aleksandrov
圣彼得堡国立大学
大学滨河街，7/9
199034 俄罗斯圣彼得堡

圣彼得堡分部
斯捷克洛夫数学研究所
俄罗斯科学院
丰坦卡街27号，191023 圣彼得堡
俄罗斯
电子邮件：alex@pdmi.ras.ru

V.V. Peller
圣彼得堡国立大学
大学滨河街，7/9
199034 俄罗斯圣彼得堡

圣彼得堡分部
斯捷克洛夫数学研究所
俄罗斯科学院
丰坦卡街27号，191023 圣彼得堡
俄罗斯
电子邮箱：pellerv@gmail.com