arXiv:2603.21353v1 [cs.CC] 22 Mar 2026

4元布尔谓词非冗余性的分类

Joshua Brakensiek* Venkatesan Guruswami† Aaron Putterman‡

2026年3月24日

摘要

给定一个约束满足问题（约束满足问题）的谓词 $P \subseteq D^r$， P 的非冗余度（非冗余度）是关于 n 个变量的最大规模实例，使得对于该实例的每个子句，都存在一种赋值满足除该子句以外的所有子句。针对各种约束满足问题研究非冗余度，是一个活跃的研究领域，融合了极值组合学、逻辑、格论及其他方法。在 $r = 2$ 和 $(|D| = 2,\ r = 3)$ 的情形下，已有完整分类。

本文对 $(|D| = 2,\ r = 4)$ 的情形给出了近乎完整的分类。在 400 个不同的非平凡 4 元布尔谓词中，我们实施了一种算法过程，对其中 397 个进行了精确分类。在剩下的三个中，我们通过将其中两个归约为极值组合学问题而予以解决，最后一个则仍是一个开放问题。在此过程中，我们找到了第一个非冗余度渐近行为不是多项式的布尔谓词。

1 引言

在约束满足问题（CSP）的研究中，一个经常探讨的问题是：如何为输入的 CSP 实例找到简洁的表示，同时保留原实例的某些重要性质。这类任务最常见的名称是稀疏化，尽管许多此类表述的目标略有不同。例如，可以寻求对实例进行高效变换，使变换后的实例可满足当且仅当输入实例可满足（即使一开始无法高效判定该实例是否可满足） [DvM14, JP19, CJP20, LW20, Car22]。另一条看似无关的研究路线则试图对输入 CSP 实例的子句进行（稀疏）重加权，使每种赋值满足的子句比例近似保持不变 [Kar93, BK96, BSS09, ST11, FHHP11, KK15, FK17, SY19, BˇZ20, CCPS21, KKTY21b, JLS23, KKTY21a, Lee23, KPS24a, KPS24b, KPS25, BGP25]。

这两条研究脉络的共同主线，是非冗余性（NRD）这一核心组合概念。Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20] 最早系统研究了 NRD（以及一个相关概念，称为链长），旨在理解部分成员查询模型 [BCH+13]下约束满足问题的查询复杂度。后来，Carbonnel [Car22]

*加利福尼亚大学伯克利分校。部分经费由美国国家科学基金会 DMS-2503280 项目资助。联系方式：josh.brakensiek@berkeley.edu

†西蒙斯计算理论研究所和加利福尼亚大学伯克利分校。部分经费由西蒙斯研究员奖和美国国家科学基金会 CCF-2211972 项目资助。联系方式：venkatg@berkeley.edu

‡哈佛大学。部分经费由 Madhu Sudan 和 Salil Vadhan 获得的西蒙斯研究员奖以及美国空军科学研究办公室 FA9550-25-1-0112 项目资助。联系方式：aputterman@g.harvard.edu

发现了 NRD 在研究 CSP 核化中的作用，并进一步猜想，任何 CSP 的非冗余性都（近似地）构成[1] 任何 CSP 核化的上界。最近，Brakensiek 和 Guruswami [BG25]直接揭示了组合非冗余性与构造（加权）CSP 稀疏器之间的联系，表明这些不同研究领域所采用的方法（在很大程度上）都在探索相同的基本问题，而且结果往往有所重叠。

这些重叠结果的一个例子，是对某些 CSP 谓词族的非冗余性进行系统分类。例如，Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20]以及 Butti 和 ˇZivn´y [BˇZ20] （另见 [FK17]）都分类了所有元数为 2 的谓词，即形如 $P \subseteq D^2$ 的谓词，其中定义域 D为某个有限域。尽管这两项工作的分类所处的背景相当不同，但二分定理完全一致：[2] 如果 P 可以通过小工具归约（更准确地说，是 fg pp 归约 [Car22]）定义谓词 $\mathrm{OR}_2 := \{00, 01, 10\}$，那么 P具有二次非冗余度（其中增长率按实例中的变量数量 n来衡量）。否则， P 具有线性非冗余度。

类似地，Chen、Jansen 和 Pieterse [CJP20] 以及 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25] （实际上）完整分类了每个三元布尔谓词的非冗余性$P \subseteq \{0, 1\}^3$。小工具归约非常简单。如果 P 无法归约到 OR_2, ，那么 P具有线性非冗余度。否则，如果 P 可以归约到 OR_2 ，但不能归约到 $\mathrm{OR}_3 :=\{0, 1\}^3\backslash\{000\}$，那么 P 具有二次非冗余度。否则， P 具有三次非冗余度。特别地，每个这样的谓词的非冗余度都是变量数量的多项式函数。这促使 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25] 猜想，对于他们所定义的 CSP 可稀疏化性，其对变量数量的依赖始终是具有整数指数的多项式。

然而，这种“整数乐观论”最终被证明与事实相去甚远。Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20] 以及 Carbonnel [Car22]给出了一些谓词的例子，它们具有自然的非冗余性上界，但该上界并非变量个数的整数多项式函数；不过，他们无法给出下界来证明这种非多项式依赖关系是必要的。然而，几年后，Brakensiek 和 Guruswami [BG25] 找到了一个明确的谓词 $P \subseteq \{0, 1, 2\}^3$，其非冗余性作为变量个数的函数 n 介于 $\Omega(n^{1.5})$ 与 $O(n^{1.6} \log n)$之间。Brakensiek、Guruswami、Jansen、Lagerkvist 和 Wahlstr¨om [BGJ+25]还找到了其他具有分数指数的谓词，并证明对于每个有理数 $q \geqslant 1$ ，都存在一个有限元数 r 和一个有限定义域 D ，使得某个 $P \subseteq D^r$的非冗余性按 $\Theta(n^q)$增长。

然而，所有这类例子都涉及大小至少为三的定义域 D 。尤其是，目前尚没有已知例子能说明布尔谓词 $P \subseteq \{0, 1\}^r$ 的非冗余性不是整数系数多项式，因此 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25] 的猜想在这种情形下仍未解决。尽管如此，由于一个臭名昭著的谓词[3] $\mathrm{BoolBCK} \subseteq \{0, 1\}^9$ 被许多研究团队独立发现，人们普遍仍认为这一猜想在布尔情形下是错误的

[1]非冗余性只能作为上界的原因在于，易解的约束满足问题（例如 2-SAT）具有平凡的核，尽管仍可将其非冗余度作为一种组合量来研究。[2]我们按 [BCK20], 中的形式给出分类；不过，由于采用了不同的“可满足性约定”， [BˇZ20] 中的分类略有不同。具体而言，Butti 和 ˇZivn´y [BˇZ20] 证明，若 P 可以小工具归约到 $\mathbf{与}_2 := \{11\}$，则 P 具有二次稀疏化性；否则， P 具有近线性稀疏化性。这些不同的约定均见于多种著作中，但为简明起见，我们采用 Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20] 所用的约定，这与约束满足问题核化文献中的约定一致。关于此问题的进一步讨论，参见 Brakensiek 和 Guruswami [BG25] 。[3]对此谓词的简洁描述是对称群 S_3 在 $\mathrm{GL}(3)$ 上的表示，其

不同的研究团队 [CJP20、LW20、KPS25], 都从一个由 Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20]发现的非布尔三元谓词推导出该谓词——更多讨论和分析请参见 [BG25、BGJ+25]。

1.1 我们的贡献

不过请注意，已完成分类的 3 元谓词与这个被怀疑为分数谓词的 9 元谓词之间，仍存在很大差距。本文着重于系统地理解 4 元布尔谓词。具体而言，我们通过计算机搜索，枚举了全部 400 个非平凡[4] 布尔谓词 $P \subseteq \{0,\ 1\}^4$。为了分析这些谓词，我们实现了多种技术，分别用于求出 P非冗余性的下界和上界。具体来说，对于下界，我们检查了满足 P 可通过小工具归约归约到或r的最大 r 。对于上界，我们采用基于格的技术 [CJP20、KPS25] ，以确定 P的低次数多项式表示。仅凭这两种技术，我们便能对 400 个谓词中的 397 个的非冗余性完成精确分类，并为每个谓词给出一个整数指数。另外三个已识别的谓词如下（编号取自附录 A 中的表格）。

$$
\begin{aligned}
R_{181} &= \{0000, 0001, 0010, 0100, 0111, 1000, 1011, 1101, 1111\} \\
R_{299} &= \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 1000, 1110, 1111\} \\
R_{317} &= \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 1000, 1001, 1110\}.
\end{aligned}
$$

对于每个 $R \in \{R_{181}、\ R_{299}、\ R_{317}\}$，我们最初的方法表明，NRD($R$、 n) $\in$ [$\Omega(n^2)$、 $O(n^3)$]，因此还需要进一步的方法来确定这些谓词的非冗余性。对于 R_{317}，我们证明 $\Theta(n^3)$ 才是正确答案。然而，这一下界并非来自对 OR_3 的小工具归约，而是来自线性*3*一致超图的结构；见第4.1节。

对于 R_{299}，我们证明 NRD(R_{299}， n) 不会 随着 n 增长为多项式函数，这是首个展现这一现象的布尔例子。这也是首个非冗余性渐近为 $n^{s-o(1)}$ 的谓词例子，其中 s 是一个有理数。更准确地说，我们证明如下结论。

定理1.1。非冗余度(R_{299}， n) $\in \left[\frac{n^3}{2^{O(\sqrt{\log(n)})}}, \frac{n^3}{2^{\Omega(\log^*(n))}} \right]$。

证明通过说明 R_{299} 的非冗余性与图中打包诱导匹配的 Ruzsa-Szemerédi问题的最优解密切相关来展开。 [BCK20] 曾使用这种方法给谓词 BCK $\subseteq \{0,1,2\}^3$的非冗余性推导上界，但后来证明这种上界方法并不紧 [BG25, BGJ+25]。与此相反，我们找到了一个谓词，在其中 Ruzsa-Szemerédi 分析（本质上）是紧的。更多细节请参见第4.2节和定理 4.4。

对于 R_{181}，我们无法得到其非冗余性的改进上界。不过，表明 R_{181}与一个元数为 5 的对称布尔谓词密切相关，而已知方法也无法解决该谓词；进一步讨论请参见第4.3节。

1.2 概述

在第2节中，我们正式定义非冗余性，并介绍非冗余性的许多已知性质（以及条件非冗余性等相关概念）。在第3节中，我们将详细描述

移除单位矩阵 [BG25].[4]注意，谓词的某些操作不会改变非冗余性，例如对一个比特取反或交换两个坐标。因此，我们能够研究 400 个谓词，而不是 $2^{2^4} = 65536$。

我们用于系统分类 400 个 4元布尔谓词的过程。在第 4 节中，我们详细讨论三个例外谓词。在第 5 节中，我们以一些想法和开放问题作为论文的结尾。在附录 A 中，我们提供了包含完整 400 个谓词的分类表。

2 预备知识

我们的记号借鉴自 Brakensiek 和 Guruswami [BG25]。我们将子集 $P \subseteq D^r$定义为一个谓词（或关系），其中 D 是该谓词的定义域，r 是该谓词的元数。在大多数情况下，我们假设 $D = \{0, 1\}$，也就是说，P 是一个布尔谓词。如果 $P = \varnothing$ 或 $P = D^r$，我们称该谓词为平凡的；否则，该谓词为非平凡的。

给定一个元数为 r 的谓词 P，约束满足问题（CSP）(P) 的一个实例是一个 r-一致超图 $H := (V, E)$，其中 V是该实例的变量集合，$E \subseteq V^r$ 是约束集合。一般而言，一个约束中可以多次使用同一个变量；不过，我们通常假设该实例是 r-部的，即变量 V有一个划分 $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_r$，满足 $E \subseteq V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$。我们甚至可以假设 $|V_1| = \cdots = |V_r|$（假设 $|V|$是 r的倍数）。这些假设只会使谓词的非冗余性等量至多相差一个 $O_r(1)$ 因子。

对 H 的赋值是一个映射 $\psi : V \to D$，其中 D 是谓词 P 的定义域。若约束 $(x_1, \ldots, x_r) \in E$ 满足条件 P，则称它被 $\psi, \ldots, \psi(x_r)) \in P$ 满足（或简称为满足）。否则，该约束称为条件 P不满足（或简称为不满足）。现在我们来定义非冗余性的关键概念。

定义 2.1。实例 $H := (V, E)$ 是约束满足问题（CSP）(P) 的非冗余实例，当且仅当对于每个 $e \in E$，都存在一个赋值 $\psi_e : V \to D$，使得 $e' \in E$ 被 ψ_e 满足，当且仅当 $e \neq e'$。我们将 NRD(P, n) 定义为所有满足条件 $|V| = n$ 的约束满足问题（CSP）(P) 的非冗余实例 (V, E) 中 $|E|$ 的最大值。

例如，若我们令 OR$_r := \{0, 1\}^r \backslash \{0^r\}$，那么 NRD(OR$_r$, n) $= \binom{n}{r}$ [FK17, Car22, KPS25]作为顶点数为 n 的完全 r-一致超图是非冗余的：对于每个 $S \in \binom{[n]}{r}$，赋值$\psi_S(v) = \mathbf{1}[v \notin S]$。

2.1 条件非冗余性

另一个由Brakensiek和Guruswami [BG25]正式定义的关键概念（尽管它隐含在 Bessiere、Carbonnel 和 Katsirelos [BCK20]的工作中）是条件非冗余性。

定义 2.2。给定谓词 $P \subsetneq Q \subseteq D^r$，我们称一个 r-部超图 $H := (V, E)$为约束满足问题 CSP $(P \mid Q)$ 的条件非冗余实例，如果对于每个 $e \in E$，都存在一个赋值$\psi_e : V \to D$ （称为见证），使得 $e' \in E$ 被 ψ_e 满足 P 当且仅当 $e \neq e'$，并且 e 被 ψ_e 满足 $Q \backslash P$。我们用 NRD$(P \mid Q, n)$ 表示所有满足 $|V| = n$ 的约束满足问题 CSP$(P \mid Q)$ 条件非冗余实例 (V, E) 中 $|E|$ 的最大值。注意，NRD$(P \mid Q, n) \leqslant$ NRD(P, n)，且当 $Q = D^r$ 时取等号。

我们利用关于条件非冗余性的以下事实。

命题 2.3 （三角不等式 [BG25]）。设 $P \subseteq Q \subseteq R \subseteq D^r$ 为谓词，且 n 为正整数。那么，非冗余度$(P \mid R, n) \leqslant$ 非冗余度$(P \mid Q, n) +$ 非冗余度$(Q \mid R, n)$.

我们还会用到 Brakensiek 等人 [BGJ+25] 提出的以下条件非冗余性技巧：在某些情况下，我们可以将一个元数为 r 的谓词的非冗余性问题简化为一个元数为 $r-1$ 的条件 NRD 问题。我们需要将这一技巧用于比他们原本的应用场景更一般的情形，因此给出完整证明。

命题 2.4. 假设 $\{0,1\} \subseteq D$。设 $R \subseteq D^r$ 是一个谓词，使得 $R = (Q \times \{0\}) \cup (P \times \{1\})$且满足 $P \subseteq Q \subseteq D^{r-1}$。那么，

$$\mathrm{NRD}(P \mid Q, n/2) \cdot \Omega(n) \leqslant \mathrm{NRD}(R, n) \leqslant \mathrm{NRD}(P \mid Q, n) \cdot O(n) + \mathrm{NRD}(Q \times \{0,1\}).$$

证明。 我们先证明 NRD(R,n) 的下界。假设 n 为偶数，并设 $X \subseteq [n/2]^3$ 是 CSP$(P \mid Q)$ 的一个条件非冗余实例，其见证赋值为 ψ_e：对所有 $e \in X$，均有 $[n/2] \to D$。我们断言， $Y := X \times \{n/2+1, \ldots, n\}$ 是 CSP(R) 的一个非冗余实例。为说明这一点，固定一个子句 $e := (x_1, x_2, x_3) \in X$ 以及一个点 $x_4 \in \{n/2+1, \ldots, n\}$。并考虑$f := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Y$。我们的见证 ψ_f: $[n] \to D$ 定义为 $\psi_f \restriction [n/2] = \psi_e$, $\psi_f(x_4) = 1$，并且对所有 $y \in \{n/2+1, \ldots, n\} \backslash \{y\}$ 均有 $\psi_f(y) = 0$。由于 $R = (P \times \{1\}) \cup (Q \times \{0\})$，我们有 ψ_f 满足 Y 的所有子句，唯独 f 除外。

对于上界，首先注意到，根据命题 2.3，我们有 NRD$(R,n) \leqslant$ NRD$(R \mid Q \times \{0,1\}, n)$+NRD$(Q \times \{0,1\}, n)$。因此，只需证明 NRD$(R \mid Q \times \{0,1\}, n) \leqslant$ NRD$(P \mid Q, n) \cdot O(n)$。为说明原因，设 $Y \subseteq [n]^4$ 是 CSP$(R \mid Q \times \{0,1\})$ 的一个非冗余实例，并设$Y' \subseteq Y$是一个子实例，使得 $|Y'| \geqslant |Y|/n$，且所有子句 $e \in Y'$ 的最后一个坐标$x \in [n]$相同。令 $Z := \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3, x) \in Y\}$，则 $|Z| = |Y'| \geqslant |Y|/n$。我们声称， Z 是 CSP$(P \mid Q)$ 的一个条件非冗余实例，从而证明 $|Y| \leqslant |Z| n \leqslant$ NRD$(P \mid Q, n) \cdot n$，如所需。

对于每个 $f := (x_1, x_2, x_3, x) \in Y$，我们都有一个见证 ψ_f: $[n] \to D$使得 $\psi_f(f) \in (Q \backslash P) \times \{0\}$，因此 $\psi_f(x) = 0$。因此，对于所有其他 $f' \in Y$，条件 $\psi_f(f') \in R$意味着 $\psi_f(f') \in P \times \{0\}$。所以，如果我们将 ψ_f用作 $(x_1, x_2, x_3) \in Z$的见证，那么除非 $e = (x_1, x_2, x_3)$，否则有 $\psi_f(e) \in P$。因此， Z 是一个条件非冗余的约束满足问题实例$(P \mid Q)$。 □

2.2 平衡谓词与多项式表示

一般而言，目前已知用于检验并确立某个谓词 $P \subseteq D^r$ 的非冗余度 NRD$(P, n) = O(n)$ 的最佳[5] 方法，是检查 P 是否具有所谓的*Malt'sev* 嵌入 [CJP20、LW20、BCK20]。然而，根据 Brakensiek 等人近期的一项结果 [BGJ+25]，对于布尔谓词P，这类判据等价于一个简单得多的判据，即检查 P 是否平衡（例如，[CJP20]）。

定义 2.5 （例如， [CJP20]）。 布尔谓词 $P \subseteq \{0,1\}^r$ 若对所有奇整数$m \geqslant 1$ 以及所有 $t_1, \ldots, t_m \in P$，均满足以下条件，则称其为平衡

$$t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + t_m \in \{0,1\}^r \implies t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + t_m \in P,$$

其中加法和减法均在 $\mathbb{Z}^r$上进行。

给定一个布尔谓词 P，可以使用基于格的算法（例如 [CJP20、KPS25]）来判断 P 是否平衡；更多详情请参见第3节 3.3。不过，验证

[5]一个重要的开放问题是：Mal'tsev嵌入是否确实是谓词具有线性（甚至近线性）非冗余性的唯一原因 [CJP20, BCK20, LW20, Car22, BG25, BGJ+25]。

是否平衡，可以通过线性多项式证书更高效地判断。具体而言，Chen、Jansen 和 Pieterse（ [CJP20] 的定理 4.10 和 4.11）证明， $P \in \{0,\ 1\}^r$平衡，当且仅当存在整数 $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_r,\ q$ 使得

$$(x_1, \ldots, x_r) \in P \iff c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r \equiv c_0 \mod q.$$

这等 价于 P 在 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 中的 Mal'tsev嵌入（见 [CJP20]的定理 7.6） .

更一般地，要证明某个 $d \geqslant 1$ 具有非冗余度（NRD）$(P,\ n) = O(n^d)$ ，可以找到一个模数q 和系数 $\{c_S \in \mathbb{Z} :\ S \subseteq [r],\ |S| \leqslant d\}$ 使得

$$(x_1, \ldots, x_r) \in P \iff \sum_{\substack{S \subseteq [r] \\ |S| \leqslant d}} c_S \prod_{i \in S} x_i \equiv 0 \mod q.$$

有关这一事实的证明[6] 及进一步讨论，参见 [JP19、CJP20、LW20] 。

3 实验方法

本文的主要贡献是对4元布尔谓词的非冗余性进行全面分类。总体而言，我们采用的技术建立在此前对 3 [CJP20、KPS25]中布尔谓词的分类之上；然而，由于4元谓词数量庞大（总计400个），整个验证流程都需要自动化。本节将介绍实现这一分类算法的高层次技术细节。完整分类见附录 A，其中提供了充分细节，足以进行人工验证。总体而言，我们的分类算法（使用 Python 和 SageMath 实现[7] [The26、Mtt26]）由四个部分组成。

1. 通过对称性破缺枚举4元布尔谓词。
2. 使用或投影计算非冗余度下界。
3. 使用基于格的方法计算非冗余度上界。
4. 通过提取多项式方程证明非冗余度上界。

现在，我们将讨论这些步骤背后的主要技术思路。

3.1 4元布尔谓词的枚举

枚举所有 4 元布尔谓词是我们算法中最直接（也是标准）的组成部分。鉴于可能的谓词只有 $2^{2^4} = 65536$ 种，暴力枚举是可行的。然而，容易发现，谓词 $P \subseteq \{0,\ 1\}^4$ 的非冗余性在交换坐标以及对单个坐标进行位翻转后保持不变。例如，如果 $P = \{1000,\ 0100\}$，对第一个坐标进行位翻转并交换中间

[6]严格来说， [JP19、CJP20、LW20] 中讨论的稀疏化概念与非冗余性在形式上并不等价；然而，正如（例如， [BGJ+25]）所指出的，证明方法无需修改即可扩展到非冗余性情形。[7]我们的代码副本可在 https://github.com/jbrakensiek/Arity-4-NRD 获取。关于正确性的验证，附录 A 提供了充分的细节，便于手动验证。

两个坐标会得到谓词 $P' = \{0000,\ 1010\}$，其非冗余性相同。因此，我们可以通过在每个等价类中选取字典序最小谓词，大幅减少谓词的数量。

尽管我们的对称性破缺完全是手动实现的，但我们找到的不同非平凡布尔谓词总数为 400，这与文献中此前对这类谓词的枚举结果完全一致：Hast [Has05] 在最大约束满足问题背景下的工作，以及 Austrin、H˚astad 和 Martinsson [AHM26] 在承诺约束满足问题背景下的工作。附录 A 将这 400 个谓词从 0 到 399 依次列出。例如，在我们对谓词的编码中，$P = \{1000, 0100\}$ 的字典序最小表示为 $P'' = \{0000, 0011\}$，它在表中的编号为 3。

3.2 NRD 下界：或投影

一个众所周知的非冗余性界是，谓词 $\mathrm{OR}_k := \{0,1\}^k \backslash \{0^k\}$ 满足 $\mathrm{NRD}(\mathrm{OR}_k, n) = \Theta_k(n^k)$ [DvM14, FK17, BˇZ20, CJP20, LW20, Car22, KPS25]。利用适当的小工具归约，可以将这样的 NRD 下界推广到任意布尔谓词 $P \subseteq \{0,1\}^r$。沿用 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25] 的记号，若存在文字 $\ell_1, \ldots, \ell_r \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_k, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ 使得 OR_k 是 $P \subseteq \{0,1\}^r$ 的投影，则称 OR_k 是 $P \subseteq \{0,1\}^r$ 的投影。

$$\mathrm{OR}_k(x_1, \ldots, x_k) = P(\ell_1, \ldots, \ell_r), \tag{1}$$

其中，我们按照标准方式将谓词解释为布尔函数，或$_k$：$\{0,\ 1\}^k \to \{0,\ 1\}$ 以及 P：$\{0,\ 1\}^r \to \{0,\ 1\}$。在这种情况下，我们可以推导出非冗余度$(P,\ n) = \Omega($非冗余度(或$_k,\ n)) = \Omega_k(n^k)$。这些“或投影”是一个更一般的方法族的特例，这类方法称为函数守卫的原始正（fgpp）归约 [Car22, BGJ$^+$25]。

在我们的设定中，有 $r = 4$ 和 $k \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$。因此，对于我们的 400 个谓词，我们可以高效地枚举文字 ℓ_1、.....、ℓ_4 的所有取值，并检查等式 (1) 是否成立。在附录 A 中，我们给出了一个明确的文字选择，用以证明我们所声称的下界；请注意，一般而言，这样的证书不一定是唯一的。

3.3 非冗余度上界：格方法

接下来，我们将讨论用于给定谓词 $P \subseteq \{0,1\}^4$ 的非冗余度上界的算法技术。首先，我们先讨论如何测试 $\mathrm{NRD}(P, n) = O(n)$。实践中，使用格算法很容易检查这一平衡条件。首先，考虑映射 e_1：$\{0,1\}^r \to \mathbb{Z}^{r+1}$，其定义为 $e_1(x_1, \ldots, x_r) = (1, x_1, \ldots, x_r)$.。然后，我们可以定义一个与谓词 $P \subseteq \{0,1\}^r$ 对应的格 $\Lambda_{P,1}$，如下所示。

$$\Lambda_{P,1} := \Big\{ \sum_{t \in P} z_t e_1(t) \mid \forall t \in P, z_t \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

我们接下来观察 到以下事实（隐含于先前的工作中 [CJP20、LW20、KPS25、BGJ$^+$25]） .

命题 3.1. *P平衡当且仅当对于所有 $t \in \{0,1\}^r$, $e_1(t) \in \Lambda_{P,1}$，均有 $t \in P$。*

证明。对于所有 $t' \in \{0,1\}^r$，条件 $e_1(t') \in \Lambda_{P,1}$ 意味着存在整数 $z_t^{t'} \in \mathbb{Z}$ 使得 $e_1(t') = \sum_{t \in P} z_t^{t'} e_1(t)$. 由于 $e_1(t')$ 的第一个坐标始终为 1，我们有 $\sum_{t \in P} z_t^{t'} = 1$。令 $m = \sum_{t \in P} |z_t^{t'}|$，它是奇数。于是，存在一种对 $t_1, \ldots, t_m \in P$的选择，使得每个 $t \in P$

进一步恰好出现 $|z_t^{t'}|$ 次；若 $z_t^{t'} \geqslant 1$，则 t 只出现在奇数位置；若 $z_t^{t'} \leqslant -1$，则 t只出现在偶数位置。换言之，我们有 $e_1(t') = e_1(t_1) - e_1(t_2) + e_1(t_3) - \cdots + e_1(t_m)$. 因此，特别地，$t' = t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + t_m$。所以，若 P是平衡的，则有 $t' \in P$，因此 $e_1(t') \in \Lambda_P$意味着 $t' \in P$。

反之，若 P不是平衡的，则存在 t_1、.....、$t_m \in P$使得 $t' := t_1 - t_2 + \cdots + t_m \in \{0,\ 1\}^r \backslash P$。显然，$e_1(t') = e_1(t_1) - e_1(t_2) + \cdots + e_1(t_m) \in \Lambda_P$。因此，$e_1(t') \in \Lambda_P$并不蕴含 $t' \in P$。

□

利用命题 3.1，我们可以直接设计一种算法，检查谓词 P是否平衡。我们使用 SageMath [The26, Mtt26] 的 IntegralLattice 库来构造格Λ_P。具体而言，我们构造一个矩阵 M，其行是所有 $t \in P$对应的 $e_1(t)$。我们计算该矩阵的埃尔米特标准形，并提取非零行，得到 Λ_P 的基 B。利用B，我们构建一个支持成员查询的 IntegralLattice 库。这样，我们就可以测试$t \in \{0,\ 1\}^r$ 是否 $e_1(t) \in \Lambda_P$。如果当且仅当 $t \in P$ 时测试成功，那么我们就知道 P是平衡的，因此非冗余度$(P, n) = O(n)$。

3.3.1 更高次数

到目前为止，我们讨论了检验 NRD$(P,\ n) = O(n)$的方法。然而，正如第 2.2 节所述，我们可以用一个次数为 d 的多项式来证明 NRD$(P,\ n) = O(n^d)$。更准确地说，对于任意 $d \geqslant 1$，令 $\binom{r}{\leqslant d} := \sum_{i=0}^{d} \binom{r}{i}$，并考虑由下式定义的映射 $e_d \colon \{0,\ 1\}^r \to \{0,\ 1\}^{\binom{r}{\leqslant d}}$

$$e_d(x_1, \ldots, x_r) = \left(\prod_{i \in S} x_i : \forall S \subseteq [r], |S| \leqslant d \right).$$

注意，e_1 与我们先前的定义一致。对于任意 $d \geqslant 1$ 和谓词 $P \subseteq \{0,\ 1\}^d$，我们可以构造由 $\{e_d(t) \colon t \in P\}$ 生成的格 $\Lambda_{P,\ d}$。于是，我们得到命题 3.1 的如下类比

命题 3.2. 如果对所有 $t \in \{0,1\}^r$, $e_d(t) \in \Lambda_{P,\ d}$，都有 $t \in P$，那么 非冗余度$(P, n) = O(n^d)$.

证明。 令 $R := \Lambda_{P,\ d} \cap \{0,\ 1\}^{\binom{r}{\leqslant d}}$。由于 $e_d(t) \in R$对所有 $t \in P$都成立，因此有 $\Lambda_{P,\ d} \subseteq \Lambda_{R,\ 1}$。由于$R \subseteq \Lambda_{P,\ d}$，因此有 $\Lambda_{R,\ 1} \subseteq \Lambda_{P,\ d}$。于是，$\Lambda_{R,\ 1} = \Lambda_{P,\ d}$。因此，$R = \Lambda_{R,\ 1} \cap \{0,\ 1\}^{\binom{r}{\leqslant d}}$，所以根据命题 3.1，$R$ 是平衡的。因此，存在一个有限的 q，使得对于所有满足条件的 $S \subseteq [r]$，$|S| \leqslant d$，系数 $c_S \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$满足

$$x \in R \iff \sum_{\substack{S \subseteq [r] \\ |S| \leqslant d}} c_S x_S \equiv 0 \mod q.$$

特别地，对于所有 $t \in \{0,\ 1\}^r$，有 $e_d(t) \in R$（即 $t \in P$）当且仅当

$$\sum_{\substack{S \subseteq [r] \\ |S| \leqslant d}} c_S \prod_{i \in S} t_i \equiv 0 \mod q.$$

换句话说，P 是一个在 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上次数为 d 的多项式的零点。因此，根据 [JP19、CJP20、LW20], , 我们有 NRD$(P,\ n) = O(n^d)$。

□

利用命题 3.2，我们可以通过检验命题 3.2 是否对所有 $d \in [r]$ 都成立，来测试形如 $O(n^d)$ 的任意界。所有 400 个谓词的这些次数界见附录 A。

3.4 提取多项式证书

与或投影不同，格算法无法直接给出所声称的非冗余性上界的简洁证书。不过，通过改进 Chen、Jansen 和 Pieterse [CJP20]以及 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25]，的方法，我们可以提取一个合适的多项式，使其能够通过手工验证。我们关注的是验证 P 是否平衡这一任务——只需稍作调整，即可将这一技术推广到更高次数。

回顾一下，$\Lambda_{P,\ 1} \subseteq \mathbb{Z}^{r+1}$ 是由 $\{e_1(t) :\ t \in P\}$ 生成的格。我们用 $\Lambda_{P,\ 1} \otimes \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}^{r+1}$表示由 $\Lambda_{P,\ 1}$在 $\mathbb{Q}$ 上生成的向量空间。回顾一下，要验证 P 是否平衡，我们必须检查对每个 $t \in \{0,\ 1\}^d \backslash P$，是否都有 $e_1(t) \notin \Lambda_{P,\ 1}$。这可能有两种原因：要么（1）$e_1(t) \notin \Lambda_{P,\ 1} \otimes \mathbb{Q}$，要么（2）$e_1(t) \in \Lambda_{P,\ 1} \otimes \mathbb{Q}$，但 $e_1(t) \notin \Lambda_{P,\ 1}$。

第一种情况等价于存在一个向量 $y \in \mathbb{Q}^{d+1}$，使得 $\langle y,\ \Lambda_{P,\ 1} \rangle = 0$，但$\langle y,\ e_1(t)) \rangle \neq 0$。选取适当的正整数 N，使得 Ny 的各项均为整数；再选取一个不整除 $\langle Ny,\ e_1(t) \rangle$ 的正整数 q，则方程 $\langle Ny,\ e_1(t') \rangle \equiv 0$ 模 q 包含所有 $t' \in P$，但不包含 $t' = t$。

在第二种情形中，我们可以通过考察对偶格来构造一个类似的映射

$$\Lambda^*_{P,1} := \{y \in \mathbb{Q}^{d+1} \mid \forall x \in \Lambda_{P,1}, \langle y, x \rangle \in \mathbb{Z}\},$$

并找到一个映射 $y \in \Lambda^*_{P,\ 1}$使得 $\langle y,\ e_1(t) \rangle \notin \mathbb{Z}$。如果 $\langle y,\ e_1(t) \rangle = p/q$，其中 $p,\ q \in \mathbb{Z}$，并选取正的 N，使得 Ny具有整数项，那么对于所有 $t' \in P$，都有 $Nq\langle y,\ e_1(t') \rangle \equiv 0$ 模 Nq，但 $Nq\langle y,\ e_1(t) \rangle \neq 0$ 模 Nq。

在两种情形下，我们都找到了一个线性多项式，它以 P 中的所有元素为零点，但不以 t 为零点。在 Khanna、Putterman 和 Sudan [KPS25]，中，作者将所有 $t \in \{0,\ 1\}^r \backslash P$ 对应的这些线性多项式汇总起来，得到一个线性方程组[8]，以此见证 P 是平衡的。然而，正如 [CJP20]，所预示的那样，我们发现（通过对较小模数进行适当的暴力搜索），可以找到一个线性方程，排除所有属于情形（1）的 $t \in \{0,\ 1\}^r \backslash P$；也可以找到一个线性方程，排除所有属于情形（2）的 $t \in \{0,\ 1\}^r \backslash P$。由于情形（1）中模数 q 的选择较为灵活，我们可以选取两个互素模数上的方程，从而根据中国剩余定理将它们合并为一个方程。附录 A 中给出了针对 400 个谓词提取出的这个线性方程。

4 三个例外谓词

如前所述，第3节中的算法技术对400个谓词中的397个的非冗余度进行了完备分类。本节研究三个例外谓词，即谓词181、299和317，并对其中两个谓词的非冗余度给出紧确的理论分析。我们先分析谓词317和299，并为它们给出紧确界限，最后讨论谓词181，并将其留作开放问题。

4.1 谓词317

谓词317具有满足赋值

$$R_{317} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 1000, 1001, 1110\}.$$

[8]等价地，该系统可以表示为阿贝尔群上的单个线性方程 p.

根据附录 A，我们看到 $x \in \{0,\ 1\}^4$ 满足 $x \in R_{317}$ 当且仅当 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_4 \equiv 0$模 3。因此，非冗余度$(R_{317},\ n) = O(n^3)$。因此，我们试图证明非冗余度$(R_{317},\ n) = \Omega(n^3)$。首先，注意到

$$R_{317} = \{000, 001, 010, 100, 111\} \times \{0, 1\} - \{1111\}.$$

因此，令 $P_{317} = \{000,\ 001,\ 010,\ 100\}$，$Q_{317} = P_{317} \cup \{111\}$，我们有 $R_{317} = (Q_{317} \times \{0\}) \cup (P_{317} \times \{1\})$。根据命题 2.4，我们知道非冗余度$(P_{317} \mid Q_{317},\ n/2) \cdot \Omega(n) \leqslant$ 非冗余度$(R_{317},\ n)$.

4.1.1 条件非冗余度下界

现在我们继续给出非冗余度$(P_{317} \mid Q_{317},\ n)$的下界。为此，我们采用线性超图的以下构造性性质：

定理4.1（例如参见 [DEF78]）。存在顶点集为$[n] \times [n] \times [n]$ 的三部线性超图，其边数为$\Omega(n^2)$。

据此，我们证明：

引理4.2. 非冗余度$(P_{317} \mid Q_{317},\ n) = \Omega(n^2)$。

证明。我们考虑定理4.1所保证的三部线性超图 $H = (V, E)$，其中$|E| = \Omega(n^2)$。我们声称该超图是条件非冗余的，因此得出引理。为说明该超图为何是条件非冗余的，我们考虑任意超边 $e \in E$，以及赋值 ψ_e：当 $x \in e$ 时将 $\psi_e(x) = 1$ 映射为 $x \in e$，否则将变量映射为 0。于是注意到 $\psi_e(e) = 111$，正如我们所希望的。剩下只需证明，对于任意 $e' \neq e$，都有 $\psi_e(e') \in \{000, 001, 010, 100\}$。这是因为 $|e' \cap e| \leqslant 1$，因此 e' 中至少有两个变量被 ψ_e映射为 0。证明完毕。

□

因此，我们现在可以证明以下结论：

定理4.3。非冗余度$(R_{317},\ n) = \Theta\left(n^3\right)$。

证明。根据命题 2.4，我们知道非冗余度$(P_{317} \mid Q_{317},\ n/2) \cdot \Omega(n) \leqslant$ 非冗余度$(R_{317},\ n)$. 。代入引理4.2可得非冗余度$(R_{317},\ n) = \Omega(n^3)$。由于 R_{317} 具有三次多项式表示，我们知道非冗余度$(R_{317},\ n) = O(n^3)$，证明完毕。 □

4.2 谓词 299

谓词 299具有满足赋值

$$R_{299} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 1000, 1110, 1111\}.$$

在本节中，我们证明以下定理：

定理 4.4。非冗余度$(R_{299},\ n) \geqslant \frac{n^3}{2^{O(\sqrt{\log(n)})}}$ 以及 非冗余度$(R_{299},\ n) \leqslant \frac{n^3}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$

为证明该定理，注意到我们可以写成

$$R_{299} = \{000, 001, 010, 100, 111\} \times \{0, 1\} - \{1001\}.$$

现在，令 $P_{299} = \{000, 001、010、111\}$ 以及 $Q_{299} = P_{299} \cup \{100\}$。我们立即可以观察到 $R_{299} = (Q_{299} \times \{0\}) \cup (P_{299} \times \{1\})$。因此，根据命题 2.4，我们知道

$$\text{非冗余度}(P_{299} \mid Q_{299},\ n/2) \cdot \Omega(n) \leqslant \text{非冗余度}(R_{299},\ n) \leqslant \text{非冗余度}(P_{299} \mid Q_{299},\ n) \cdot O(n) + \text{非冗余度}(Q_{299} \times \{0,\ 1\}).$$

接下来，我们证明 $Q_{299} \times \{0,\ 1\}$ 的非冗余性为 $O(n^2)$:

断言 4.5。 非冗余度$(Q_{299} \times \{0,\ 1\},\ n) = O(n^2)$。

证明。 $Q_{299} \times \{0,\ 1\}$ 对应于附录 A 中的谓词 318。 $O(n^2)$ 的上界可由以下事实推出：对于任意 $x \in \{0,\ 1\}^4$， $x \in Q_{299} \times \{0,\ 1\}$ 当且仅当 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \equiv$模 3 为 0。

□

我们再指出一点，以简化后续的记号：由于对谓词中的变量进行置换或取反不会改变非冗余度，我们可以自由地重新定义 $P'_{299} =$ {001，011，101，110} 和 $Q'_{299} = P'_{299} \cup \{000\}$，同时确保非冗余度$(P'_{299} \mid Q'_{299},\ n) =$ 非冗余度$(P_{299} \mid Q_{299},\ n)$。请注意，这里我们只是将第一位取反，然后将第一位与第三位交换。现在，我们的目标是给非冗余度$(P'_{299} \mid Q'_{299},\ n)$设定上界。

4.2.1 条件非冗余性的上界

在对这些谓词的条件非冗余性进行上界估计之前，我们先回顾 Fox 三角形消除引理 [Fox11]的陈述:

定理 4.6 (Fox 三角形消除引理，简化版)。 设 G 是一个有 n 个顶点的图，且三角形数量至多为 cn^2，其中 c 是一个绝对常数。那么，存在一个包含 $\frac{n^2}{2^{\Omega_c(\log^*(n))}}$条边的集合，将其移除后， G 便成为无三角形图。

引理 4.7. 非冗余度$(P'_{299} \mid Q'_{299}, n) \leqslant \frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$。

证明。 我们证明非冗余度$(P'_{299} \mid Q'_{299}, 3n) \geqslant \frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$ 由此即可推出所述引理。

令 $E = \{e_1 \ldots e_m\} \subseteq [n] \times [n] \times [n]$ 表示这些约束，它们构成 $P'_{299} \mid Q'_{299}$ 的条件非冗余实例（允许在规模上损失一个常数因子；我们可以假设这些非冗余实例是三部的）。也就是说，对于每个约束 $e_i \in E$，都存在一个相应的赋值 $\psi_{e_i} \in \{0,1\}^n$，使得 $\psi_{e_i}(e_i) = 000$；而对于所有其他的 $e_j \neq e_i$，我们有 $\psi_{e_i}(e_j) \in$ {001, 011, 101, 110}。

现在，我们考虑如下构造：我们创建一个顶点集为$A = [n]$, $B = [n]$ 和 $C = [n]$的辅助图 G，对于每条边 $e_i = (u, v, w)$，我们添加一条从 $u \in A$ 到$v \in B$的边、一条从 $u \in A$ 到 $w \in C$的边，以及一条从 $v \in B$ 到 $w \in C$的边。我们将这些三角形 (u, v, w) 定义为**典范三角形**，并注意到它们的数量为 $|E|$。由于我们的目标是界定 $|E|$，我们将证明，只需删除少量边，就能移除 G 中的所有三角形（尤其是所有典范三角形），并且平均而言，每条边所能移除的典范三角形数量不会太多。

为便于后续分析，我们还将使用以下子图：对于 $c \in [n]$的一个选择，令 $E[c]$ 表示包含边 $\{e - c :\ e \in \{e_1 \ldots e_m\},\ e[3] = c\}$ 的图（换言之，我们取所有第三个位置上包含变量 c 的约束，并考虑它们在 $A \cup B$上诱导出的图）。在此图中，我们只包含与这些边之一相接的顶点。重要的是，关于这些诱导图，我们有以下两个断言:

Claim 4.8. 令 $E = \{e_1 \dots e_m\} \subseteq [n] \times [n] \times [n]$ 表示构成 $P'_{299} \mid Q'_{299}$非冗余性见证的（有序）约束，并令 $E[c]$ 按上述方式针对 $c \in [n]$定义。那么，$E[c]$是一个匹配。

命题 4.9。 令 $E = \{e_1 \dots e_m\} \subseteq [n] \times [n] \times [n]$ 表示构成 $P'_{299} \mid Q'_{299}$ 非冗余性见证的（有序）约束，并令 $E[c]$ 按照上述方式为 $c \in [n]$ 定义。那么，对于任意 $c \neq c' \in [n]$， $V(E[c])$ 在 $E[c']$ 中至多诱导出2 条边。

我们暂且推迟这些命题的证明，不过，正如我们将看到的，它们足以推导出对初始条件非冗余实例大小的最终界。为此，我们首先利用上述命题证明，图 G 中只有 $O(n^2)$ 个三角形。要理解原因，考虑构成一个三角形的任意三个顶点 $a \in A$， $b \in B$， $c \in C$ （注意，由于这些部分内部没有边，因此任何三角形都不可能有两个顶点属于 A， B， C 中的同一部分）。若 a， b， c 构成一个三角形，这意味着图 G 中必定存在边 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$, $(a,\ c)$。我们需要考虑两种情况：

1. 假设边 $(a, b) \in E[c]$ 存在。那么显然，这意味着 $(a, b), (b, c), (a, c) \in G$，它们构成了前述的典范三角形。2. 假设边 $(a, b) \notin E[c]$ 存在。那么必然存在某条边$(a, y) \in E[c]$、某条边 $(x,\ b) \in E[c]$，以及某个 c'，使得 $(a, b) \in E[c']$。甚至可能出现 $x = a$ 和 $y = b$ （即 $E[c']$ 和 $E[c]$ 可能共享边）的情况。重要的是，这意味着来自 $E[c']$ 的边 (a, b) 是由 $V(E[c])$诱导的。我们称这些为**非规范三角形**。

现在我们来界定这些三角形的数量。首先可以看到， G 中的典范三角形数量至多为 n^2，因为 $\sum_{c\in[n]} |E[c]| \leqslant n \cdot \max_{c\in[n]} |E[c]| \leqslant n^2$；根据 Claim 4.8，我们知道每个 $E[c]$ 都是一个匹配（因此至多有 n 条边）。

接下来，我们来界定非规范三角形的数量。正如上文所述，这里的关键观察是，任意一个非规范三角形都包含一条边 $(a,\ b) \in E[c']$ 而这条边由 $V(E[c])$诱导。为了界定非规范三角形的数量，我们根据命题 4.9 得到：

$$\sum_{c\in[n]} \sum_{c'\neq c\in[n]} \left|\{e \in E[c'] : e \text{ induced by } V(E[c])\}\right| \leqslant \sum_{c\in[n]} \sum_{c'\neq c\in[n]} 2 \leqslant 2n^2.$$

因此，对于这个图 G，我们知道 G 至多有 $3n^2$ 个三角形。根据 Fox 三角形消除引理（定理 4.6），我们由此知道，存在一个包含 $\frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$ 条边的集合，可以将其从 ~~G 中删除~~，使得到的图无三角形。

重要的是，这意味着从 G 中删除 $\frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$ ~~条边，~~ 就能从图 G中删除所有 典范三角形。令 E' 表示从 G中删除的这组边。现在我们来分析每条边被删除时会移除多少个典范三角形 ，将其记为 ℓ_e。

1. 假设 E' 中被删除的边的形式为 $(a,\ c)$ 或 $(b,\ c)$（不失一般性，我们考虑 $(a,\ c)$）。在这种情况下，唯一失去的典范三角形是与 $E[c]$中包含顶点 a的边对应的那些三角形。但是，由于 $E[c]$ 是一个匹配（根据 Claim 4.8 ），我们知道 $E[c]$ 中至多有一条边包含 a。因此，至多失去一个典范三角形。于是，我们令 $\ell_{(a,\ c)} = 1$。

2. 假设 E' 中被删除的边的形式为 $(a,\ b)$。在这种情况下，当且仅当 $(a,\ b) \in E[c]$ 时，典范三角形 $(a,\ b,\ c)$ 会被移除。因此，被移除的典范三角形数量恰为 $\ell_{(a,\ b)}$：满足 $(a,\ b) \in E[c]$ 的 $c \in [n]$ 的选择数。

现在，根据命题 4.9，我们知道，每一对标签 $c, c' \in [n]$ 共有的边至多有两条。因此，

$$2 \cdot \binom{n}{2} \geqslant \sum_{e \in E'} \binom{\ell_e}{2} \geqslant |E'| \cdot \binom{\frac{1}{|E'|} \cdot \sum_{e \in E'} \ell_e}{2},$$

其中，上面的第二个不等式仅仅是利用了凸性。由此可得 $|E'| \cdot \frac{(\sum_{e \in E'} \ell_e)^2}{|E'|^2} \leqslant 2 \cdot \binom{n}{2} \leqslant n^2$，或者等价地，$\sum_{e \in E'} \ell_e \leqslant n \cdot \sqrt{|E'|}$. 根据上述结论，我们知道 $|E'| = \frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$，因此这立即推出 $\sum_{e \in E'} \ell_e \leqslant \frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$. 总而言之，我们已经证明，删除边集 E' 后，图 G 中的所有三角形都会消失。同时，这一过程至多从图中移除 $\frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$ 个典范三角形。综上，G 至多有 $\frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$ 个典范三角形，因此我们最初的非冗余 CSP 中的约束数量至多为 $\frac{n^2}{2^{\Omega(\log^*(n))}}$。

□

现在我们证明辅助断言。首先证明 Claim 4.8。

Claim 4.8 的证明。与之前一样，设非冗余 CSP 实例中的约束为 $E = \{e_1, \ldots e_m\}$，并考虑任意 $c \in [n]$ 所对应的 $E[c]$。现在，对于任意边 $(a, b) \in E[c]$，我们知道 (a, b, c) 是 CSP 实例中的一个约束。重要的是，由于我们的 CSP 实例是非冗余的，我们知道必定存在一个赋值 $\psi \in \{0,1\}^n$，使得 $\psi(a, b, c) = 000$，而对于其他任意约束 e', $\psi(e') \in \{001,\ \mathbf{011}, \mathbf{101}, 110\}$。现在，为了使 $\psi(a, b, c) = 000$，这意味着所有 $\psi(a), \psi(b), \psi(c) = 0$。现在，反设在 $E[c]$ 中还有其他边与 (a, b) 共享一个顶点（不失一般性，假设 a），并将这条边记为 (a, b')。那么，在赋值 ψ 下，对于任意选择的 $\psi(b')$，我们有 $\psi(a, b', c) = 0 \circ \psi(b') \circ 0 \notin \{001,\ \mathbf{011}, \mathbf{101}, 110\}$。因此，该实例不可能成为 $P'_{299} \mid Q'_{299}$ 非冗余性的见证。所以，在 $P'_{299} \mid Q'_{299}$ 的任何非冗余实例中，$E[c]$ 中的每个顶点的度都必须为 $\leqslant 1$（即，一个匹配）。

□

命题 *4.9* 的证明。考虑任意 $c,\ c' \in [n]$，并来看一下 $E[c]$ 和 $E[c']$。现在，反设存在三条边 $e_1 = (a_1,\ b_1),\ e_2 = (a_2,\ b_2),\ e_3 = (a_3,\ b_3)$，它们来自 $E[c']$，并由 $V(E[c])$ 诱导。由于这三条边互不相同，且 $E[c']$ 是一个匹配，因此必有三个互不相同的左侧顶点 $a_1,\ a_2,\ a_3$，同样也有三个互不相同的右侧顶点 $b_1,\ b_2,\ b_3$。

现在，考虑边 $e \in E[c]$，使得 $a_1 \in e$，以及赋值 ψ，它是这条边 e 的非冗余证书。根据定义，必然有 $\psi(a_1) = 0$。重要的是，这也确定了 $\psi(c')$的取值：事实上，在第一个变量取 0 的条件下，第三个变量在 P_{299} 中唯一可能的取值是 1。因此，我们知道 $\psi(c') = 1$。

同时，我们知道，对于 $V(E[c]) - e$ 中的每个变量 x，必定有 $\psi(x) = 1$。这是因为，最终变量为 0 且属于 P_{299} 的唯一元组是 110（根据上述内容，我们知道 $\psi(c) = 0$，实际上这迫使这些其他赋值成立）。因此，为了得出矛盾，我们知道，由于 a_1、a_2、a_3 各不相同，且 b_1、b_2、b_3 各不相同，$(a_2$、$b_2)$ 或 $(a_3$、$b_3)$ 必定不与 e 相交（不失一般性，设它是 $(a_3$、$b_3)$）。但是，由于 $(a_3$、$b_3)$ 是由 $V(E[c])$ 诱导的，这意味着 a_3、$b_3 \in V(E[c])$，因此 $\psi(a_3) = \psi(b_3) = 1$。与此同时

我们知道 $\psi(c')=1$，这意味着 $\psi(a_3、\ b_3、\ c')=111$ 不在 P_{299} 中。因此，这违背了我们一开始给出的实例是非冗余实例这一事实。

因此， $V(E[c])$ 从 $E[c']$ 至多诱导出 2 条边。 □

4.2.2 条件非冗余性的下界

现在我们给出条件非冗余度 $\mathrm{NRD}(P_{299} \mid Q_{299})$ 的一个下界。在我们的构造中，将用到极具魅力的 ***Ruzsa-Szemerédi*** 图 [RS78]。

定义 4.10. 我们称一个有 n 个顶点的图 $G=(V,E)$ 为 (r,t)-RS 图，如果 E 可以划分为一组 t 个匹配 $M_1,\dots M_t$，每个匹配的大小均为 r，且对每个 $i\in[t]$， M_i 都是 G 中的一个诱导匹配。

我们将用到的关键事实如下。

定理4.11 ([Beh46, FLN+02]). 存在顶点集为 $|L|=|R|=n$ 的二部 (r,t)-RS 图，其满足 $t=\Omega(n)$ 且 $r\geqslant \frac{n}{2^{O(\sqrt{\log n})}}$。

有了这些准备，我们现在证明以下结论。

引理 4.12. 非冗余度$(P_{299}\mid Q_{299},\ n)\geqslant \frac{n^2}{2^{O(\sqrt{\log n})}}$。

证明。首先，根据定理 4.11，我们固定一个有 $2n$ 个顶点（顶点集为 L,R）的（二分） (r,t) RS 图，并满足 $t=\Omega(n)$和 $r=\frac{n}{2^{O(\sqrt{\log(n)})}}$。为了构造非冗余实例，我们现在添加 t 个指定变量 $z_1,\dots z_t$，以及对应于图中各顶点的 $2n$ 个变量 $x_1,\dots x_n,y_1,\dots y_n$。现在，对于每个匹配 M_i： $i\in[t]$，我们添加一个由 $\{u,v,z_i\}$ 构成的约束，对应于 $e=(u,v)\in M_i$（这里我们认为 R_{299} 作用于 x_u,y_v,z_i，其中 $e=(u,v)$）。因此，所得约束满足问题中的约束总数（将该约束满足问题记为 C）恰好为 $|E|=t\cdot r=\frac{n^2}{2^{O(\sqrt{\log n})}}$.

现在只需证明 C 是一个（条件）非冗余实例。为此，固定 $e=(u,\ v)\in M_i$ 的一个约束 $R_{299}(e\cup\{z_i\})$，其中假定 $u\in L, v\in R$。我们必须证明存在一个赋值 ψ：$\{x_1,\ \dots x_n,\ y_1,\ \dots y_n,\ z_1,\ \dots z_t\}\to\{0,\ 1\}$，使得$\psi(e\cup\{z_i\})=000$；而对于其他每个约束 $\psi(e'\cup\{z_j\})\in\{001,\ \mathbf{011},\ \mathbf{101},\ 110\}$。

为此，我们考虑如下赋值 ψ

$$\psi(z_i)=0 \qquad\qquad \forall j\neq i\in[t]:\psi(z_j)=1,$$

$$\psi(x_a)=\begin{cases}0 \text{ if } a=u\\ 1 \text{ if } a\in L\cap V(M_i)-\{u\}\\ 0 \text{ if } a\in L-V(M_i)\end{cases},\quad \psi(y_b)=\begin{cases}0 \text{ if } b=v\\ 1 \text{ if } b\in R\cap V(M_i)-\{v\}\\ 0 \text{ if } b\in R-V(M_i)\end{cases}.$$

根据构造可知 $\psi(e\cup\{z_i\})=000$。因此，现在只需证明，对于每个 $e'\in M_j$，都有 $\psi(e'\cup\{z_j\})\in\{001,\ \mathbf{011},\ \mathbf{101},\ 110\}$。我们分情况证明:

1. 假设 $e'\in M_i$，其中 M_i 是包含 e的同一个匹配。由此可见， $e'\cap e=\varnothing$，因为 M_i 是一个匹配。这意味着，赋值ψ将 e' 中的两个顶点都赋值为 1，即 $\psi(e')=11$。根据构造，我们知道 $\psi(z_i)=0$，因此 $\psi(e'\cup\{z_j\})=110$。

2. 假设 $e'\in M_j$ 对于 $j\neq i$。那么，根据构造可知 $\psi(z_j)=1$。同样，由于 M_i 是图 G 中的一个诱导匹配（这意味着每条边 $e'\in G-M_i$ 至少有一个顶点位于 $V(M_i)$之外），因此可知 $|e'\cap V(M_i)|\leqslant 1$。于是，$\psi(e')\in\{00,\ \mathbf{01},\ 10\}$。因此， $\psi(e'\cup\{z_j\})\in\{001,\ \mathbf{011},\ 101\}$，正如我们所希望的。

□

因此，我们现在可以证明定理 4.4。

定理 *4.4* 的证明。根据命题 2.4，我们知道

非冗余度$(P_{299} \mid Q_{299}, n/2) \cdot \Omega(n) \leqslant \mathrm{NRD}(R_{299}, n) \leqslant \mathrm{NRD}(P_{299} \mid Q_{299}, n) \cdot O(n) + \mathrm{NRD}(Q_{299} \times \{0,1\})$

代入引理 4.7、引理 4.12 和断言 4.5，即可得到所需断言。 □

4.3 谓词 181 与超图交问题的联系

谓词 181 有满足赋值

$$R_{181} = \{0000, 0001, 0010, 0100, 0111, 1000, 1011, 1101, 1111\}.$$

根据附录 A，我们知道非冗余度$(R_{181},\ n) \in [\Omega(n^2),\ O(n^3)]$。更准确地说，对于下界，我们可以观察到 $R_{181}(0,\ 0,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2) =$ 或$_2(x_1,\ x_2)$。对于上界，R_{181} 有一个多项式表示

$$2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + 2x_1x_2x_4 \mod 3.$$

然而，我们无法进一步对 R_{181} 的非冗余性进行分类。

与一个对称的 5 元数 谓词的联系。考虑谓词 $P_{181} = \{x \in \{0,1\}^5 : \mathrm{wt}(x) \in \{0, 2, 3\}\}$。我们立即可以观察到，谓词 $Q_{181} = \{x \in \{0,1\}^5 : \mathrm{wt}(x) \in \{0, 2, 3, 5\}\}$ 满足非冗余度$(Q_{181}, n) = O(n^2)$，因为 Q_{181} 恰好是次数多项式$f(x) = |x| \cdot (|x| - 2)$ 模 3的零点集合。

因此，根据命题 2.3，我们知道 NRD$(P_{181}, n) \leqslant$ NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n) +NRD(Q_{181}, n) \leqslant$NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n) + O(n^2)$。所以，理解 P_{181} 的非冗余度可归结为理解 $P_{181} \mid Q_{181}$ 的非冗余度（相差 $O(n^2)$ 的加性误差）。

乍一看，我们在讨论谓词 181 时提到这个元数为 5 的谓词 P_{181} 或许令人费解。不过，我们可以考虑通过强制 $x_4 = x_5$对 P_{181} 进行限制：这样便得到满足赋值

$$(P_{181})_{x_4 = x_5} = \{0000, 0001, 0110, 1100, 1010, 1001, 0101, 0011, 1110\}.$$

更进一步，如果现在对最后一个变量取反，我们会看到：

$$(P_{181})_{x_4 = x_5, \neg x_4} = \{0001, 0000, 0111, 1101, 1011, 1000, 0100, 0010, 1111\}$$

$$= \{0000, 0001, 0010, 0100, 0111, 1000, 1011, 1101, 1111\} = R_{299}$$

因此，利用命题 2.3，我们得到：

断言 4.13. 非冗余度$(R_{181},\ n) \leqslant$非冗余度$(P_{181},\ n) \leqslant$非冗余度$(P_{181} \mid Q_{181},\ n) +$非冗余度$(Q_{181},\ n) \leqslant$非冗余度$(P_{181} \mid Q_{181},\ n) + O(n^2)$。

因此，限制 NRD(R_{181}, n) 的一种有前景的方法，是通过给出 NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n)$ 的上界。

将 NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n)$ 与超图交问题联系起来。 为了更好地理解 NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n)$，我们考虑这个量的超图诠释：任何构成 NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n)$ 条件非冗余实例的超图 $H = (V, E)$ 都必须满足以下性质：对于每个 $e \in E$ （每个 e 的大小均为 5），都存在一个赋值ψ_e：$V \to \{0, 1\}$，使得 $(\psi_e)(e) = 11111$，而对于所有其他 $e' \neq e \in E$，都有 wt$(\psi_e(e')) \in \{0,2,3\}$。

构造此类非冗余超图的一种自然方法，是考虑赋值集合 $\psi_e(x_i) = \mathbf{1}[i \in e]$，也就是说，$\psi_e$ 仅将 e 中的变量映射为 1，而所有其他变量都映射为 0。在这种情况下，我们可以观察到，一个超图是条件非冗余的当且仅当对于每一对超边 e，e', $|e \cap e'| \in \{0, 2, 3\}$。这引出一个自然的极值超图交问题：一个超图中最多能有多少条超边$H = (V, E)$ 定义在 n 个顶点上，元数为5，并且对每一对超边 e，e'，$|e \cap e'| \in \{0, 2, 3\}$?

Deza、Erd¨os 和 Frankl [DEF78], 的研究正是对这类问题的探讨，他们证明了任何此类超图都必然含有 $O(n^2)$ 条超边。进而，这立即意味着，上文定义的"典型"赋值集合 ψ_e 无法构造出规模大于 n^2的条件非冗余实例。请注意，利用 Ray-Chaudhuri、Wilson [RCW75] 的线性代数／多项式方法（以及 [FW81]中的素模数版本），可得出 $O(n^3)$ 这一上界，这是一个标准结果。Deza等人 [DEF78] 对这一方法进行了有力的改进，从而得到了更紧的 $O(n^2)$ 上界；我们希望能在约束满足问题设置中仿效这一做法。

界定非冗余度的障碍 NRD$(P_{181} \mid Q_{181}, n)$。 然而，需注意的是，上述讨论并未给出非冗余实例最大规模的一般上界，因为不存在任何条件能迫使赋值 ψ_e 成为 $e \in E$的退化指示赋值族。尽管如此，这确实引出了一个问题：能否修改 [DEF78]中的技术，使其适用于这种新的条件非冗余情形。从较高层面来看， [DEF78]的关键洞见如下：

命题 4.14。 设 $H = (V, E)$ 是一个元数为5 的超图，其中 $|e \cap e'| \in \{0,2,3\}$。对于任意顶点$v \in V$，令 $H_v = (V, E_v)$ 为包含 v的所有超边构成的超图。若 $|E_v| = \omega(n)$，则存在另一个顶点 $u \in V$，使得对于所有 $e \in E_v$，$(u, v) \subseteq e$。

本质上， [DEF78]表明，只要具有适当交集大小的超图 H 达到临界密度，那么这些超图 H_v 必定都具有两个共享顶点的核心。这为 [DEF78] 提供了足够的结构信息，从而可以推导出它们的 $O(n^2)$ 上界。遗憾的是，在我们的情形中，命题 4.14 的类似结论并不成立。事实上，一个可能的类似结论如下：

猜想 4.15 (错误**)**。 设 $H = (V, E)$ 是一个元数为5 的超图，并且它对于 $P_{181} \mid Q_{181}$是条件非冗余的。对于任意顶点 $v \in V$，令 $H_v = (V, E_v)$ 为包含 v的所有超边组成的超图。若 $|E_v| = \omega(n)$，则存在另一个顶点 $u \in V$，使得对于所有$e \in E_v$，$(u, v) \subseteq e$均成立。

例如，将顶点集 $V - \{v\}$ 划分为两个大小相等的部分，记作 V_1，V_2。现在，在 V_1中任意选取一个顶点 u_1，并在 V_2 中任意选取一个顶点u_2。对于剩余顶点 $V_1 - \{u_1\}$，我们构造一个元数为 3、大小为 $\Omega(n^2)$的超图 H_1，使得对所有 f，$f' \in H_1$，$|f \cap f'| \leqslant 1$（注意，这种构造是可行的，例如参见 [DEF78]）。[9] 同样地，我们在 $V_2 - \{u_2\}$上构造 H_2。现在令我们的超图为

[9]形式上，这称为线性超图。

$E_v = \{\{u_1,\ v\} \cup e\colon\ e \in H_1\} \cup \{\{u_2,\ v\} \cup e\colon\ e \in H_2\}$。值得注意的是，我们可以观察到，这个超图不 满足猜想 4.15 的结构条件。不过，我们声称它对于 $P_{181} \mid Q_{181}$是条件非冗余的。为此，考虑任意超边 $\{(u_1,\ v),\ e\} \in E$，并假设（不失一般性） $e \in H_1$。现在，考虑赋值 ψ_e：它将 e 中的变量映射为 1，将 $v,\ u_1,\ u_2$ 映射为 1，并将所有其他变量映射为 0。我们看到：

1. $\psi_e(\{(u_1, v), e\}) = 11111$. 2. 对任意 $\{u_1, v\} \cup e'\colon\ e' \in H_1$、 u_1, v 都映射到 1，并且由于 $|e' \cap e| \leqslant 1$，我们看到 $\mathsf{wt}(\{u_1, v\} \cup e') \geqslant 2$和 $\mathsf{wt}(\{u_1, v\} \cup e') \leqslant 3$，因为 e' 中至多只有另一个变量映射到 1。3. 对任意 $\{u_2, v\} \cup e'\colon\ e' \in H_2$、 u_2, v都映射到 1，而 e'映射到 0（请注意，这些变量与 V_1不相交）。因此，$\mathsf{wt}(\{u_2, v\} \cup e') = 2$。

因此，这确实是 $P_{181} \mid Q_{181}$的一个非冗余实例，从而表明，不存在沿着猜想 4.15 思路的可能刻画。

5 结论与开放问题

本文对 400 个 4元布尔谓词中的 399 个的非冗余性进行了分类。剩下的情况 R_{181} 是我们留下的主要开放问题。我们所分类的最值得注意的情况 R_{299}，是首个布尔谓词（无论是否为布尔谓词），其非冗余性可证明不具有某个有理数 β对应的形式 $\Theta(n^\beta)$。是否存在一个布尔谓词（元数为 $r \geqslant 4$），其非冗余性对于某个 $\beta \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$为 $\Theta(n^\beta)$？我们知道 β 不可能落在范围 $(r-1, r)$ [CJP20, Car22, KPS25]内。是否存在非冗余性落在范围 $[\omega(n), o(n^2)]$内的布尔谓词?

参考文献

[AHM26] Per Austrin、Johan H˚astad 和 Bj¨orn Martinsson。关于承诺的用途。载于*2026*年 *ACM-SIAM* 离散算法年会（*SODA*）论文集，第 6332–6378 页。SIAM，2026年。[BCH+13] Christian Bessiere、Remi Coletta、Emmanuel Hebrard、George Katsirelos、Nadjib Lazaar、Nina Narodytska、Claude-Guy Quimper 和 Toby Walsh。通过部分查询获取约束。载于第二十三届国际人工智能联合会议，2013年。[BCK20] Christian Bessiere、Cl´ement Carbonnel 和 George Katsirelos。链长与可通过少量查询学习的约束满足问题。*AAAI* 人工智能会议论文集，34(02):1420–1427，2020年4月。doi:10.1609/aaai.v34i02.5499。[Beh46] Felix A Behrend。关于不含三项等差数列的整数集。美国国家科学院院刊，32(12):331–332，1946年。[BG25] Joshua Brakensiek 和 Venkatesan Guruswami。冗余就是你所需要的一切。载于第*57* 届美国计算机协会年度计算理论研讨会论文集，第 1614–1625 页，2025年。

[BGJ+25] Joshua Brakensiek、Venkatesan Guruswami、Bart MP Jansen、Victor Lagerkvist 和 Magnus Wahlstr¨om。CSP 非冗余性的丰富内涵。arXiv 预印本 arXiv:2507.07942，2025年。[BGP25] Joshua Brakensiek、Venkatesan Guruswami 和 Aaron Putterman。随机约束满足问题稀疏化的紧确界。arXiv 预印本 arXiv:2508.13345，2025年。[BK96] Andr´as A. Bencz´ur 和 David R. Karger。在 $\tilde{O}(n^2)$ 时间内近似求解 s-t 最小割。载于 Gary L. Miller 编，《第二十八届美国计算机协会年度计算理论研讨会论文集》，费城，宾夕法尼亚州，美国，1996年5月22日至24日，第 47–55 页。美国计算机协会，1996年。doi:10.1145/237814.237827。[BSS09] Joshua D. Batson、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。双重拉马努金稀疏化器。载于 Michael Mitzenmacher 编，《第41届美国计算机协会年度计算理论研讨会论文集》，STOC 2009，贝塞斯达，马里兰州，美国，2009年5月31日至6月2日，第 255–262 页。美国计算机协会，2009年。doi:10.1145/1536414.1536451。[BˇZ20] Silvia Butti 和 Stanislav ˇZivn´y。二元约束满足问题的稀疏化。《SIAM离散数学杂志》，34(1):825–842，2020年1月。doi:10.1137/19M1242446。[Car22] Cl´ement Carbonnel。约束满足问题中的冗余。载于 DROPS-IDN/v2/Document/10.4230/LIPIcs.CP.2022.11。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。doi:10.4230/LIPIcs.CP.2022.11。[CCPS21] Ruoxu Cen、Yu Cheng、Debmalya Panigrahi 和 Kevin Sun。通过割平衡稀疏化有向图。载于 Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell 编，《第48届国际自动机、语言与程序设计研讨会》，ICALP 2021，2021年7月12日至16日，格拉斯哥，苏格兰（线上会议），LIPIcs 第198卷，第 45:1–45:21 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年。网址：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2021.45，doi: 10.4230/LIPICS.ICALP.2021.45。[CJP20] Hubie Chen、Bart M. P. Jansen 和 Astrid Pieterse。布尔约束满足问题在最佳与最差情况下的可稀疏化性。Algorithmica，82(8):2200–2242，2020年8月。doi: 10.1007/s00453-019-00660-y。[DEF78] Michel Deza、Paul Erd¨os 和 P´eter Frankl。有限集系统的交性质。《伦敦数学会会刊》，3(2):369–384，1978年。[DvM14] Holger Dell 和 Dieter van Melkebeek。除非多项式时间层次坍塌，否则可满足性问题不允许非平凡稀疏化。《美国计算机协会会刊》，61(4):23:1–23:27，2014年7月。doi:10.1145/2629620。[FHHP11] Wai Shing Fung、Ramesh Hariharan、Nicholas J.A. Harvey 和 Debmalya Panigrahi。图稀疏化的一般框架。载于《第四十三届美国计算机协会年度计算理论研讨会论文集》，STOC ’11，第 71–80 页，纽约，纽约州，美国，2011年。美国计算机协会。doi:10.1145/1993636.1993647。

[FK17] Arnold Filtser 和 Robert Krauthgamer。二元变量值约束满足问题的稀疏化。*SIAM* 离散数学杂志，31(2):1263–1276，2017。doi: 10.1137/15M1046186。[FLN+02] Eldar Fischer、Eric Lehman、Ilan Newman、Sofya Raskhodnikova、Ronitt Rubinfeld 和 Alex Samorodnitsky。一般偏序集定义域上的单调性测试。载于第三十四届年度 *ACM* 计算理论研讨会论文集，第 474–483 页，2002。[Fox11] Jacob Fox。图移除引理的新证明。数学年刊，第 561–579 页，2011。[FW81] Peter Frankl 和 Richard M. Wilson。具有几何推论的交集定理。组合数学，1(4):357–368，1981。doi:10.1007/BF02579457。[Has05] Gustav Hast。击败随机赋值：近似约束满足问题。博士论文，KTH，2005。[JLS23] Arun Jambulapati、Yang P. Liu 和 Aaron Sidford。链式分析、群杠杆分数高估与快速谱超图稀疏化。载于 Barna Saha 和 Rocco A. Servedio 编，第 *55* 届 *ACM* 计算理论年会论文集，*STOC 2023*，奥兰多，佛罗里达州，美国，*2023*年*6*月*20*日至*23*日，第 196–206 页。美国计算机协会，2023。doi:10.1145/3564246.3585136。[JP19] Bart MP Jansen 和 Astrid Pieterse。利用低次多项式对某些二元约束满足问题进行最优稀疏化。美国计算机协会计算理论汇刊（*TOCT*），11(4):1–26，2019。[Kar93] David R. Karger。在 RNC 中求全局最小割，以及简单最小割算法的其他推论。载于 Vijaya Ramachandran 编，第四届 *ACM/SIGACT-SIAM* 离散算法年会论文集，*1993*年*1*月*25*日至*27*日，美国得克萨斯州奥斯汀，第 21–30 页。ACM/SIAM，1993。URL：http://dl.acm.org/citation.cfm?id=313559.313605。[KK15] Dmitry Kogan 和 Robert Krauthgamer。图与超图中的割草图。载于 Tim Roughgarden 编，*2015* 年理论计算机科学创新会议论文集，*ITCS 2015*，以色列雷霍沃特，*2015*年*1*月*11*日至*13*日，第 367–376 页。美国计算机协会，2015。doi:10.1145/2688073.2688093。[KKTY21a] Michael Kapralov、Robert Krauthgamer、Jakab Tardos 和 Yuichi Yoshida。近线性规模的谱超图稀疏器。载于第 *62* 届 *IEEE* 计算机科学基础年会，*FOCS 2021*，美国科罗拉多州丹佛，*2022*年*2*月*7*日至*10*日，第 1159–1170 页。IEEE，2021。doi:10.1109/FOCS52979.2021.00114。[KKTY21b] Michael Kapralov、Robert Krauthgamer、Jakab Tardos 和 Yuichi Yoshida。探索超图谱稀疏化的紧确界。载于 Samir Khuller 和 Virginia Vassilevska Williams 编，*STOC '21*：第 *53* 届 *ACM SIGACT* 计算理论研讨会，线上活动，意大利，*2021*年*6*月*21*日至*25*日，第 598–611 页。美国计算机协会，2021。doi:10.1145/3406325.3451061。

[KPS24a] Sanjeev Khanna、Aaron Putterman 和 Madhu Sudan。代码稀疏化及其应用。载于 *2024*年 *ACM-SIAM* 离散算法年会（*SODA*）论文集，第 5145–5168 页。SIAM，2024年。[KPS24b] Sanjeev Khanna、Aaron Putterman 和 Madhu Sudan。用于超图割稀疏器的近乎最优规模线性草图。载于*2024*年 *IEEE* 第 *65* 届计算机科学基础年会（*FOCS*），第 1669–1706 页。IEEE，2024年。[KPS25] Sanjeev Khanna、Aaron Putterman 和 Madhu Sudan。约束满足问题稀疏化的高效算法与新刻画。载于第 *57* 届 *ACM* 计算理论年会论文集，第 407–416 页，2025年。[Lee23] James R. Lee。通过链式分析实现超图谱稀疏化。载于 Barna Saha 和 Rocco A. Servedio 编，第 *55* 届 *ACM* 计算理论年会论文集，*STOC 2023*，奥兰多，佛罗里达州，美国，*2023*年*6*月*20*日至*23*日，第 207–218 页。美国计算机协会，2023。doi:10.1145/3564246.3585165。[LW20] Victor Lagerkvist 和 Magnus Wahlstr¨om。通过可处理扩展对SAT和CSP问题进行稀疏化。美国计算机协会计算理论汇刊，12(2):1–29，2020年6月。doi:10.1145/3389411。[Mtt26] Matthias K¨oppe、passagemath贡献者和Sage开发者。passagemath，2026年2月。URL：https://github.com/passagemath/passagemath，doi:10.5281/zenodo.15265940。[RCW75] Dijen K. Ray-Chaudhuri 和 Richard M. Wilson。关于 t-设计。大阪数学杂志，12(3):737–744，1975。[RS78] Imre Z Ruzsa 和 Endre Szemer´edi。没有六个点承载三个三角形的三元系。组合学（凯斯特海伊，*1976*），*Bolyai*数学会文集，18(939-945):2，1978。[ST11] Daniel A. Spielman 和 Shang-Hua Teng。图的谱稀疏化。*SIAM* 计算杂志，40(4):981–1025，2011。doi:10.1137/08074489X。[SY19] Tasuku Soma 和 Yuichi Yoshida。超图谱稀疏化。载于 Timothy M. Chan 编，第三十届 *ACM-SIAM* 离散算法年会论文集，*SODA 2019*，美国加利福尼亚州圣迭戈，*2019*年*1*月*6*日至*9*日，第 2570–2581 页。SIAM，2019。doi:10.1137/1.9781611975482.159。[The26] Sage开发者。*SageMath，Sage*数学软件系统（*10.8.1*版），2026年。https://www.sagemath.org。

完整表格

在本附录中，我们给出 4 元布尔谓词的完整分类，并简要说明表格中各列的含义。

- **谓词**。 具体谓词 $P \subseteq \{0,\ 1\}^4$ 按照以下顺序以二进制表示：(0000， 0001，0010， 0011，0100，0101， 0110，0111， 1000， 1001，1010， 1011， 1100，1101， 1110，1111).

- 或。 </style}使某个 P 的投影等于或$_k$ 的最大 $k \in [4]$ 。
- **或证书**。 能够证明或次数的特定投影 P 。
- **次数**。 TA P 的多项式表示的最小次数。
- **多项式**。 P的多项式表示。我们用 x_S 作为 $\prod_{i\in S} x_i$的简写。

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
0	1000000000000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + x_3 + x_2 + x_1$ 模 5
1	1000000000000001	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + x_3 + x_2 + 2x_1$ 模 5
2	1000000100000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + x_3 + 5x_2 + 3x_1$ 模 7
3	1001000000000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 6x_3 + 2x_2 + 2x_1$ 模 7
4	1001000000000100	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 4x_3 + 2x_2 + 2x_1$ 模 5
5	1001000000000110	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$6x_4 + 6x_3 + x_2 + 5x_1$ 模 12
6	1001000000001000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + x_{34} + x_2 + 2x_1 + x_{14} + x_{13}$ 模 3
7	1001000000001001	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 4x_3 + 2x_2 + 3x_1$ 模 5
8	1001010000000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 4x_3 + 4x_2 + 3x_1$ 模 5
9	1001010000000010	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 4x_3 + 4x_2 + 2x_1$ 模 5
10	1001010000100000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + x_{34} + x_2 + x_{24} + x_1 + x_{13}$ 模 3
11	1001010000101000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + x_{34} + x_2 + x_{24} + x_1 + x_{13} + x_{12}$ 模 3
12	1001010000101001	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 2x_3 + 2x_2 + x_1$ 模 3
13	1001010001000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$x_4 + 4x_3 + 4x_2 + 4x_1$ 模 5
14	1001010001000010	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$4x_4 + 2x_3 + 2x_2 + 2x_1$ 模 6
15	1001011000000000	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$3x_4 + 3x_3 + 3x_2 + 4x_1$ 模 6
16	1001011001000000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + x_{34} + 2x_2 + x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
17	1001011001100000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + x_{34} + 2x_2 + 2x_1$ 模 3
18	1001011001101000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_2)$	2	$x_4 + x_3 + 3x_{34} + x_2 + 3x_{24} + 3x_{23} + x_1 + 3x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
19	1001011001101001	1	$(0,0,\ 0,\bar{x}_1)$	1	$3x_4 + 3x_3 + 3x_2 + 3x_1$ 模 6
20	1100000000000000	1	$(0,0,\bar{x}_1,\ 0)$	1	$x_3 + x_2 + x_1$ 模 5
21	1100000000000010	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + 2x_{23} + x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
22	1100000000000011	1	$(0,0,\bar{x}_1,\ 0)$	1	$x_3 + x_2 + x_1$ 模 3
23	1100001000000000	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + 2x_1 + x_{13} + x_{12}$ 模 3
24	1100001000000001	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
25	1100001000000010	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{12}$ 模 3
26	1100001000010000	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
27	1100001000010010	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + 2x_2 + 2x_{24} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{13}$ 模 3
28	1100001000100000	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13}$ 模 3
29	1100001000100001	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + 2x_2 + 2x_{24} + 2x_1 + 2x_{14}$ 模 3
30	1100001000100100	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_{34} + x_2 + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13}$ 模 3
31	1100001000100101	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
32	1100001000101000	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + 2x_2 + 2x_{24} + 2x_1 + 2x_{14} + 2x_{12}$ 模 3
33	1100001000101001	2	$(0,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3 + x_2 + x_{24} + 3x_{23} + x_1 + 2x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
34	1100001100000000	1	$(0,0,\bar{x}_1,\ 0)$	1	$x_3 + 4x_2 + 2x_1$ 模 5

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
35	1100001100100000	2	$(\bar{x}_1,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3+x_2+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
36	1100001100100100	2	$(\bar{x}_1,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3+2x_2+x_1+x_{14}+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
37	1100001100101000	2	$(\bar{x}_1,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3+x_2+x_{23}+2x_1+2x_{14}$ 模 3
38	1100001100110000	1	$(0,0,\bar{x}_1,0)$	1	$x_3+2x_2+2x_1$ 模 3
39	1100001100111000	2	$(1,\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_3+x_{34}+2x_2+4x_{24}+2x_{23}+3x_1+4x_{14}+x_{13}$ 模 5
40	1100001100111100	1	$(0,0,\bar{x}_1,0)$	1	$3x_3+3x_2+3x_1$ 模 6
41	1110000000000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1+2x_{12}$ 模 3
42	1110000000000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1$ 模 3
43	1110000000000100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 3
44	1110000000000101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+2x_{24}+2x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
45	1110000000000110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
46	1110000000000111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
47	1110000000001000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_1+2x_{14}+2x_{13}$ 模 3
48	1110000000001001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
49	1110000000001100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{14}$ 模 3
50	1110000000001101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_1+2x_{13}$ 模 3
51	1110000000001110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1+x_{12}$ 模 3
52	1110000100000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+2x_1+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
53	1110000100000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+2x_{12}$ 模 3
54	1110000100000100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+2x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 3
55	1110000100000101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
56	1110000100000110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_1+x_{14}+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
57	1110000100001000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
58	1110000100001001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
59	1110000100001100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{12}$ 模 3
60	1110000100001110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+2x_1+2x_{13}$ 模 3
61	1110000100010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{13}$ 模 3
62	1110000100010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1+x_{12}$ 模 2
63	1110000100010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_1+x_{14}+2x_{12}$ 模 3
64	1110000100010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{14}$ 模 3
65	1110000100011000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+3x_{23}+x_1+2x_{14}+x_{13}+3x_{12}$ 模 5
66	1110000100011001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{12}$ 模 3
67	1110000100011100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{23}+2x_1$ 模 3
68	1110000100011110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_1$ 模 2
69	1110010000000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1$ 模 3
70	1110010000000010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
71	1110010000000011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 3
72	1110010000010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+x_{14}+2x_{12}$ 模 3
73	1110010000010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+x_{14}$ 模 3
74	1110010000010010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}$ 模 3
75	1110010000010011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+x_{13}$ 模 3
76	1110010000011000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
77	1110010000011010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+2x_1+2x_{12}$ 模 3
78	1110010000011011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_1$ 模 2
79	1110010000100000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_1+2x_{13}$ 模 3
80	1110010000100001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+2x_{13}$ 模 3
81	1110010000100100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+2x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
82	1110010000100110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+2x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
83	1110010000100111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 2
84	1110010000101000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_1+x_{13}$ 模 2
85	1110010000101001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+2x_1+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
86	1110011000000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{12}$ 模 3
87	1110011000000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{13}$ 模 3
88	1110011000000100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
89	1110011000000101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+3x_{24}+3x_{23}+x_1+x_{13}+4x_{12}$ 模 5

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
90	1110011000000110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{12}$ 模 3
91	1110011000000111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
92	1110011000001000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
93	1110011000001001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 3
94	1110011000001100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{14}+2x_{12}$ 模 3
95	1110011000001110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
96	1110011000010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1$ 模 3
97	1110011000010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+3x_{24}+3x_{23}+2x_1+2x_{13}+2x_{12}$ 模 5
98	1110011000010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{12}$ 模 3
99	1110011000010101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
100	1110011000010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{12}$ 模 3
101	1110011000011000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{13}$ 模 3
102	1110011000011001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{12}$ 模 3
103	1110011000011100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_2+3x_{24}+3x_{23}+2x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 5
104	1110011000011110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+3x_2+2x_{24}+2x_{23}+3x_1+3x_{14}+3x_{13}+4x_{12}$ 模 5
105	1110011100000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+2x_{23}+x_1$ 模 3
106	1110011100010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+2x_{24}+2x_{23}+x_1+x_{13}$ 模 3
107	1110011100011000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_2+x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 2
108	1110100000000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
109	1110100000000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
110	1110100000010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+x_{14}+x_{12}$ 模 3
111	1110100000010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+x_{13}$ 模 3
112	1110100000010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
113	1110100000010101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1$ 模 3
114	1110100000010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 5
115	1110100000010111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 2
116	1110100001000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 3
117	1110100001000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
118	1110100001000010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}$ 模 2
119	1110100001000011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+3x_{14}+2x_{12}$ 模 5
120	1110100001010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
121	1110100001010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}$ 模 3
122	1110100001010010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}$ 模 3
123	1110100001010011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}$ 模 3
124	1110100001010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
125	1110100001010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+4x_{23}+3x_1+2x_{14}+4x_{13}+4x_{12}$ 模 5
126	1110100001100000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
127	1110100001100001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
128	1110100001100100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
129	1110100001100101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+3x_1+2x_{14}+2x_{13}+4x_{12}$ 模 5
130	1110100001100110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+3x_1+2x_{14}+2x_{13}+4x_{12}$ 模 5
131	1110100001100111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+3x_{14}+3x_{13}+4x_{12}$ 模 5
132	1110100001101000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+3x_{14}+3x_{13}+3x_{12}$ 模 5
133	1110100001101001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+4x_{23}+3x_1+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 5
134	1110100001110000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}$ 模 3
135	1110100001110001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 2
136	1110100001110100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
137	1110100001110110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
138	1110100001111000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+3x_{23}+x_1+4x_{14}+4x_{13}+4x_{12}$ 模 5
139	1110100001111100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
140	1110100001111110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 2
141	1110100010000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+2x_{23}+2x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
142	1110100010000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 2
143	1110100100000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 3
144	1110100100000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
145	1110100100010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{12}$ 模 3
146	1110100100010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+x_1+3x_{13}+x_{12}$ 模 5
147	1110100100010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{14}$ 模 3
148	1110100100010101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
149	1110100100010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1$ 模 3
150	1110100101000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
151	1110100101000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}$ 模 3
152	1110100101000010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 3
153	1110100101000011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}$ 模 3
154	1110100101010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}$ 模 3
155	1110100101010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+3x_1+2x_{14}+4x_{13}+x_{12}$ 模 5
156	1110100101010010	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+3x_1+2x_{14}+4x_{13}$ 模 5
157	1110100101010011	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+2x_1+3x_{14}+4x_{13}+x_{12}$ 模 5
158	1110100101010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
159	1110100101010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+4x_1+x_{14}+4x_{13}+4x_{12}$ 模 5
160	1110100101100000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}$ 模 3
161	1110100101100001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+3x_1+2x_{14}+2x_{13}+3x_{12}$ 模 5
162	1110100101100100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+2x_1+3x_{14}+3x_{13}+4x_{12}$ 模 5
163	1110100101100101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+4x_1+x_{14}+x_{13}+4x_{12}$ 模 5
164	1110100101100110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$2x_{34}+4x_{24}+4x_{23}+3x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 5
165	1110100101100111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$2x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
166	1110100101101000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_1+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
167	1110100101101001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$6x_{34}+6x_{24}+18x_{23}+15x_1+15x_{14}+15x_{13}+15x_{12}$ 模 30
168	1110100101110000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}$ 模 3
169	1110100101110001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{14}+2x_{13}+x_{12}$ 模 3
170	1110100101110100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+3x_{24}+x_{23}+x_1+4x_{14}+4x_{13}+2x_{12}$ 模 5
171	1110100101110110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$2x_{34}+4x_{24}+4x_{23}+2x_1+3x_{14}+3x_{13}+x_{12}$ 模 5
172	1110100101111000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+2x_{24}+2x_{23}+x_1+4x_{14}+4x_{13}+4x_{12}$ 模 5
173	1110100101111001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$6x_{34}+x_{24}+5x_{23}+6x_1+6x_{14}+6x_{13}+6x_{12}$ 模 12
174	1110100101111100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+x_1+4x_{14}+4x_{13}+4x_{12}$ 模 5
175	1110100101111110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$4x_{34}+4x_{24}+4x_{23}+4x_1+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 6
176	1110100110000000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
177	1110100110000001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+2x_{14}+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
178	1110100110010000	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_{14}+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
179	1110100110010001	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+x_{14}+3x_{13}+x_{12}$ 模 5
180	1110100110010100	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+3x_{23}+x_{14}+3x_{13}+3x_{12}$ 模 5
181	1110100110010101	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	3	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_{14}+x_{13}+2x_{12}+2x_{124}$ 模 3
182	1110100110010110	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+28x_{23}+13x_{14}+16x_{13}+16x_{12}$ 模 30
183	1110100110010111	2	$(0,0,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$	2	$x_{34}+x_{24}+x_{23}+x_{14}+x_{13}+x_{12}$ 模 3
184	1111000000000000	1	$(0,\bar{x}_1,0,0)$	1	x_2+x_1 模 3
185	1111000000001000	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_2+x_{23}+x_1+x_{14}+x_{12}$ 模 3
186	1111000000001001	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_2+x_{23}+2x_1+2x_{14}$ 模 3
187	1111000000001100	2	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,0)$	2	$x_2+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
188	1111000000001110	3	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$	3	$x_2+x_1+x_{134}+x_{12}$ 模 3
189	1111000000001111	1	$(0,\bar{x}_1,0,0)$	1	x_2+x_1 模 2
190	1111100000000000	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{13}+2x_{12}$ 模 3
191	1111100000000001	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+x_1$ 模 3
192	1111100000000100	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+x_1+x_{13}+x_{12}$ 模 3
193	1111100000000101	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{13}$ 模 3
194	1111100000000110	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+x_1+x_{12}$ 模 3
195	1111100000000111	3	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$	3	$x_{24}+x_{23}+x_{234}+x_1$ 模 2
196	1111100000001000	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+x_1+2x_{12}$ 模 3
197	1111100000001001	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+x_1+x_{13}+2x_{12}$ 模 3
198	1111100000001100	2	$(0,\bar{x}_1,0,\bar{x}_2)$	2	$x_{24}+x_{23}+2x_1+2x_{14}+x_{12}$ 模 3
199	1111100000001101	3	$(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$	3	$x_{24}+x_{23}+x_{234}+x_1+x_{12}+x_{124}$ 模 2

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
200	1111100000001110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_1 + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
201	1111100000001111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 3x_1 + 4x_{14} + 4x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
202	1111100000010000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + 2x_{13}$ 模 3
203	1111100000010100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + 3x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
204	1111100000010110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13}$ 模 3
205	1111100000011000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
206	1111100000011001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
207	1111100000011100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 3x_1 + 4x_{14} + 3x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
208	1111100000011101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{134} + 2x_{12} + 2x_{124}$ 模 3
209	1111100000011110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{134} + 2x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
210	1111100000011111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
211	1111100001000000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
212	1111100001000010	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + 3x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 5
213	1111100001000011	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{13}$ 模 3
214	1111100001001000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + 3x_{14} + x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
215	1111100001001001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 3x_1 + 2x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
216	1111100001001010	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
217	1111100001001011	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{134} + 2x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
218	1111100001001100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
219	1111100001001110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{134} + 2x_{12} + 2x_{123}$ 模 3
220	1111100001001111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + 4x_{14} + 3x_{13} + 4x_{12}$ 模 5
221	1111100010000000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
222	1111100010000001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
223	1111100010000100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
224	1111100010000101	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + 2x_{14} + 4x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
225	1111100010000110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
226	1111100010000111	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + 2x_{134} + 2x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
227	1111100010001000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13}$ 模 3
228	1111100010001001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + 2x_{13}$ 模 5
229	1111100100000000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + x_{13}$ 模 3
230	1111100100000100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + x_{12}$ 模 3
231	1111100100000110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1$ 模 2
232	1111100100001000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + x_{14} + 2x_{12}$ 模 3
233	1111100100001001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{12}$ 模 2
234	1111100100001100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{12}$ 模 3
235	1111100100001101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_1 + 2x_{12} + 2x_{124} + x_{123}$ 模 3
236	1111100100001110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_1 + 2x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
237	1111100100001111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + 2x_1 + 4x_{14} + x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
238	1111100101000000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{13}$ 模 3
239	1111100101000010	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 2x_{13}$ 模 3
240	1111100101000100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
241	1111100101000110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + 3x_1 + 2x_{14} + 4x_{13} + 4x_{12}$ 模 5
242	1111100101001000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + 2x_1 + 3x_{14} + 4x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
243	1111100101001001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
244	1111100101001010	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + 2x_1 + 3x_{14} + x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
245	1111100101001011	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
246	1111100101001100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + x_1 + 4x_{14} + 2x_{13} + 4x_{12}$ 模 5
247	1111100101001101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{134} + x_{12}$ 模 2
248	1111100101001110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{134} + x_{12} + x_{123}$ 模 2
249	1111100101001111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + 2x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
250	1111100101100000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_1 + x_{14} + x_{13}$ 模 2
251	1111100101101000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + 2x_1 + 3x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
252	1111100101101001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$4x_{24} + 2x_{23} + 3x_1 + 3x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 6
253	1111100101101100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
254	1111100101101110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
255	1111100101101111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$3x_{24} + 3x_{23} + 3x_1 + 3x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 6
256	1111100110000000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
257	1111100110000001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
258	1111100110000100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
259	1111100110000101	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
260	1111100110000110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
261	1111100110000111	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
262	1111100110001000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 4x_{23} + x_{14} + 2x_{13}$ 模 5
263	1111100110001001	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_{14} + x_{13} + 2x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
264	1111100110001100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + 2x_{14} + 2x_{13}$ 模 3
265	1111100110001101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{123}$ 模 2
266	1111100110010000	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 2
267	1111100110010100	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
268	1111100110010110	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 11x_{23} + 5x_{14} + 7x_{13} + 6x_{12}$ 模 12
269	1111100110011000	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + 2x_{123}$ 模 3
270	1111100110011001	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + 2x_{23} + x_{14} + 2x_{13}$ 模 3
271	1111100110011100	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{123}$ 模 2
272	1111100110011101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{124} + 2x_{123}$ 模 3
273	1111100110011110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{24} + x_{23} + x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
274	1111100110011111	2	$(0, \bar{x}_1, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{24} + x_{23} + x_{14} + x_{13}$ 模 2
275	1111110000000000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1$ 模 3
276	1111110000000010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + 2x_{14}$ 模 3
277	1111110000000011	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1$ 模 2
278	1111110000100000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1 + x_{14} + 2x_{13}$ 模 3
279	1111110000100001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{13}$ 模 3
280	1111110000100010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 3x_{13} + 4x_{12}$ 模 5
281	1111110000100011	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + 2x_{13} + x_{134} + x_{12} + 2x_{124} + x_{123}$ 模 3
282	1111110000100100	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 3x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
283	1111110000100110	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
284	1111110000100111	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + x_{13} + x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
285	1111110000101000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + 2x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
286	1111110000101001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
287	1111110000101010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
288	1111110000101011	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124}$ 模 2
289	1111110000110000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1 + x_{13}$ 模 2
290	1111110000111000	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + 2x_{13} + 2x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
291	1111110000111001	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + x_{13} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
292	1111110000111010	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + x_{13} + x_{12} + x_{124}$ 模 2
293	1111110000111100	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_1 + x_{13} + x_{12}$ 模 3
294	1111110000111110	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_1 + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{134} + 2x_{12} + 2x_{124}$ 模 3
295	1111110000111111	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_1 + x_{13} + x_{12}$ 模 2
296	1111110010000000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
297	1111110010000001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
298	1111110010000010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
299	1111110010000011	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	3	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 2x_{124}$ 模 3
300	1111110010010000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + x_{12}$ 模 3
301	1111110010010001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_{14} + x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
302	1111110010010010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_{14} + 3x_{13} + x_{12}$ 模 5
303	1111110010010011	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
304	1111110010010100	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 5
305	1111110010010101	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 2
306	1111110010010110	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$2x_{23} + x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
307	1111110010010111	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{23} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124}$ 模 3
308	1111110010100000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{12}$ 模 5
309	1111110010100001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{12}$ 模 3

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
310	1111110010100100	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + 2x_{14} + x_{12} \mod 3$
311	1111110010100101	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_2)$	3	$x_{23} + x_{14} + x_{12} + x_{123} \mod 2$
312	1111110010100110	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} + x_{12} \mod 2$
313	1111110010100111	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_2)$	3	$x_{23} + x_{14} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 3$
314	1111110010101000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} \mod 3$
315	1111110010101001	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{14} \mod 2$
316	1111110011000000	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{13} + x_{12} \mod 2$
317	1111110011000010	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	3	$x_{23} + x_{13} + x_{12} + x_{124} \mod 3$
318	1111110011000011	2	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{23} + x_{13} + x_{12} \mod 3$
319	1111111000000000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 \mod 3$
320	1111111000000001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 \mod 2$
321	1111111000010000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{134} \mod 2$
322	1111111000010001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{134} + x_{124} + x_{123} \mod 3$
323	1111111000010100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{134} + 2x_{124} + x_{123} \mod 3$
324	1111111000010101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{134} + x_{124} \mod 2$
325	1111111000010110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{134} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
326	1111111000010111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} \mod 3$
327	1111111001000000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{134} + x_{124} \mod 2$
328	1111111001000001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{134} + x_{124} \mod 3$
329	1111111001000010	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{134} + x_{124} + 2x_{123} \mod 3$
330	1111111001000011	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{134} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
331	1111111001010000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{124} \mod 3$
332	1111111001010001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{124} \mod 2$
333	1111111001010010	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
334	1111111001010011	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{12} + x_{123} \mod 3$
335	1111111001010100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} \mod 2$
336	1111111001010101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123} \mod 3$
337	1111111001010110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + x_{12} + 2x_{124} + x_{123} \mod 3$
338	1111111001010111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{123} \mod 2$
339	1111111001100000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{124} + x_{123} \mod 3$
340	1111111001100001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
341	1111111001100100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{123} \mod 2$
342	1111111001100101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{12} + 2x_{124} \mod 3$
343	1111111001100110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123} \mod 3$
344	1111111001100111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} \mod 2$
345	1111111001101000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{12} \mod 2$
346	1111111001101001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12} + 2x_{124} + 2x_{123} \mod 3$
347	1111111001110000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
348	1111111001110100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{134} + x_{123} \mod 3$
349	1111111001110110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{134} \mod 2$
350	1111111001111000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{134} + 2x_{12} + 2x_{123} \mod 3$
351	1111111001111001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} \mod 2$
352	1111111001111100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} \mod 2$
353	1111111001111101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{134} + 2x_{12} + x_{124} + 2x_{123} \mod 3$
354	1111111001111110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + 2x_{14} + 2x_{13} + x_{134} + 2x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 3$
355	1111111001111111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_1 + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
356	1111111010000000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
357	1111111010000001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 2x_{123} \mod 3$
358	1111111010010000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} \mod 3$
359	1111111010010001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 2$
360	1111111010010100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + x_{123} \mod 2$
361	1111111010010101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} \mod 3$
362	1111111010010110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123} \mod 3$
363	1111111010010111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{14} + x_{13} + x_{12} \mod 2$
364	1111111011000000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + x_{12} + 2x_{123} \mod 3$

Num.	谓词	OR	或证书	Deg	多项式
365	1111111011000001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + x_{12} + x_{123}$ 模 2
366	1111111011000010	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + x_{12}$ 模 2
367	1111111011000011	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + 2x_{12} + 2x_{124}$ 模 3
368	1111111011010000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + x_{134} + x_{12} + x_{123}$ 模 2
369	1111111011010010	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + 2x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
370	1111111011010011	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{13} + x_{134} + x_{12}$ 模 2
371	1111111011100000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{12}$ 模 2
372	1111111011100001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{12}$ 模 3
373	1111111011100100	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{12} + 2x_{124}$ 模 3
374	1111111011100101	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{12} + x_{124}$ 模 2
375	1111111011100110	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
376	1111111011100111	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + 2x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
377	1111111011101000	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
378	1111111011101001	3	$(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{234} + x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
379	1111111100000000	1	$(\bar{x}_1, 0, 0, 0)$	1	x_1 模 2
380	1111111110000000	2	$(\bar{x}_1, 0, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 5
381	1111111110000001	2	$(\bar{x}_1, 0, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{14} + x_{13} + x_{12}$ 模 3
382	1111111110010000	2	$(\bar{x}_1, 0, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{14} + 4x_{13} + 2x_{12}$ 模 5
383	1111111110010100	2	$(\bar{x}_1, 0, 0, \bar{x}_2)$	2	$x_{14} + 2x_{13} + 2x_{12}$ 模 3
384	1111111110010110	2	$(\bar{x}_1, 0, 0, \bar{x}_2)$	2	$3x_{14} + 3x_{13} + 3x_{12}$ 模 6
385	1111111111000000	2	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{13} + x_{12}$ 模 3
386	1111111111000010	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{13} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
387	1111111111000011	2	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, 0)$	2	$x_{13} + x_{12}$ 模 2
388	1111111111100000	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{12}$ 模 3
389	1111111111100001	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{12}$ 模 2
390	1111111111100100	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{12} + x_{124}$ 模 2
391	1111111111100110	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + 2x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
392	1111111111100111	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{12} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
393	1111111111101000	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 2
394	1111111111101001	3	$(\bar{x}_1, 0, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	3	$x_{134} + x_{124} + x_{123}$ 模 3
395	1111111111110000	2	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, 0)$	2	x_{12} 模 2
396	1111111111111000	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, \bar{x}_3)$	3	$x_{124} + x_{123}$ 模 3
397	1111111111111001	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, \bar{x}_3)$	3	$x_{124} + x_{123}$ 模 2
398	1111111111111100	3	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, 0)$	3	x_{123} 模 2
399	1111111111111110	4	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$	4	x_{1234} 模 2