arXiv:2603.21372v1 [math.OA] 22 Mar 2026

# c-自由随机变量中的多项式及其在自由去噪中的应用

ADRIAN CELESTINO、FRANZ LEHNER 和 KAMIL SZPOJANKOWSKI

我们研究条件自由（$c$-自由）随机变量的多项式分布。这是双态非交换概率空间中的一种独立性概念（$\mathcal{A}$，$\varphi$，$\psi$），由 Bo˙zejko、Leinert 和 Speicher 提出。为此，我们建立了 $c$-自由随机变量的联合布尔累积量之间的递归关系，类似于先前为自由随机变量的布尔累积量推导出的递归关系。将这些递归关系代数化地改写为自由结合代数上的形式后，便可得到一种有效的形式化工具，用于计算矩生成函数，进而求出任意 $c$-自由随机变量的自伴多项式的分布。

作为近期一项观察结果的应用，我们的方法可用于求出形如 $E\left[a|P(a,\ b)\right]$的条件期望，其中 $P$是自由（按 Voiculescu 的定义）随机变量 $a$，$b$的自伴多项式。我们通过一个 $P(a,\ b)\ = i[a,b]$的例子加以说明。

最后，我们定义正交投影，它们在形式上扮演着 $c$-自由性的框架中的条件期望的角色，并与自由变量的条件期望具有某些相同性质。特别是，它们可用于通过纯代数方法重新推导 Popa 和 Wang 关于 $\Sigma$-变换在$c$-自由乘法卷积中的公式。

谨以此文献给 *Marek Bo˙zejko* 教授，
祝贺他八十寿辰。

Contents

**1 引言 .2**
**2 预备知识.3**2.1 非交换概率空间.3 2.2 累积量.4 2.3 闭包算子与 M¨obius 反演.6 2.4 用累积量表示的累积量.6 2.5 递归图.7 2.6 以乘积为项的累积量.8**3 VNRP 的 $c$-自由性 .8**4 **Di**

**分布 of 多项式 in $c$-自由变量 .1** **1**
4.1 非交换多项式与形式幂级数.11 4.2 布尔累积量泛函与导子.11 4.3 布尔累积量泛函的微积分.13 4.4 矩阵扩张.13 4.5 矩阵值 $c$-自由加法卷积.14

日期：修订版 164，2026年3月24日。获奥地利联邦教育、科学与研究部及波兰科学与高等教育部资助，项目编号 N$^{os}$ PL 08/2016 和 PL 06/2018。AC：本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略项目 EXC 2044/2 –390685587“明斯特数学：动力学–几何–结构”资助。FL：本研究部分由奥地利科学基金（FWF）项目 I 6232-N BOOMER（WEAVE）资助。KSz：本研究部分由波兰国家科学中心 WEAVE-UNISONO 项目 BOOMER 2022/04/Y/ST1/00008 资助。

**5 自由去噪的应用 .16**5.1 自由去噪综述.16 5.2 一个完整示例.176 **Al**

**关于 $c$-自由变量的代数条件期望 . . . . . 1**

**96**6.1 条件期望.19 6.2 代数条件期望.19 6.3 正性失效与模性质.20 6.4 右拟条件期望的一个递推关系 . . . . . 217 $c$-自由乘法卷积.**参考文献 .31**

## 1. Introduction

$c$-自由性（或条件自由性）的概念由 Bo˙zejko、Leinert 和 Speicher 在 [10, 9]中提出。这是双态非交换概率空间（$\mathcal{M}$, $\varphi$, $\psi$）框架下的一种非交换独立性。这一概念以下述方式推广了自由性：若随机变量 $a$, $b \in \mathcal{M}$ 关于态对（$\varphi$, $\psi$）是 $c$-自由的，则它们相对于第二个态按照 Voiculescu 的意义是自由的 $\psi$ ，并且相对于第一个态 $\varphi$满足因子分解条件。关于这两类独立性的精确定义，见下文第2节。

双态概率空间中的自伴元素 $a$ 的分布由一对测度 $\mu_a^\varphi$ 和 $\mu_a^\psi$描述，分别对应于关于 $\varphi$ 和 $\psi$的分布。在本文中，我们提出一种确定 $c$-自由变量的多项式分布的方法。更确切地说，对于 $c$-自由变量 $a$, $b$ 以及非交换多项式 $P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，我们给出一种确定 $P(a, b)$关于 $\varphi$ 的（普通）矩生成函数的方法（见定理 4.16）。为简便起见，本文主要讨论两个变量的情形，但该方法很容易推广到 $n$ 个变量的情形。我们的主要工具与 [18] 中所使用的相同，在那里我们研究了自由变量的多项式：

- 自由代数上的导子，可将布尔累积量的组合递归转化为其生成函数之间有效的代数恒等式；• 线性化，使我们能够将预解式 $(1 - zP(X, Y))^{-1}$ 表示为 $u^t(I - zAX - zBY)^{-1}v$ 的形式，其中向量为 $u$, $v \in \mathbb{C}^n$ 矩阵为 $n \times n$ 和 $A$ 。

在这一发展的组合方面，我们用布尔累积量给出了 $c$-自由性的一种新刻画（见定理 3.5）。事实证明，它与 [12], 自由性的刻画非常相似，并涉及所谓的垂直不重复性质；该性质根据记作 $\ll$ 的偏序，确定彩色非交叉分拆中的极大元素。这个偏序在自由概率的背景下自然出现（见 [6]）。

我们研究这一问题的动机源于 [13] 的最新进展，其中揭示了 $c$-自由性与所谓的自由去噪之间一个令人惊讶的联系，下面我们将对此作简要介绍。设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个迹型 $W^*$-概率空间，即 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实正规迹 $\psi$ 的冯·诺依曼代数。进一步假设两个随机变量 $a, b$ 关于 $\psi$ 相互自由。我们将随机变量 $a$ 视为感兴趣的“信号”，将 $b$ 视为“噪声”，并将 $P(a, b)$ 看作 $a$ 的含噪版本，其中 $P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$。我们关注条件期望 $E[a|P(a, b)]$, ，它是在关于 $\psi$ 的 $L^2$-范数意义下，以 $P(a, b)$ 的函数逼近 $a$ 的最佳近似。文献 [13] 证明，在假设 $a \geqslant 0$ 和 $\psi(a) = 1$ 成立时，若定义一个新的态 $\varphi(c) = \psi(ac)$，则 $a, b$ 关于这一对 $(\varphi, \psi)$ 是 $c$-自由的；此外，我们有 $E[a|P(a, b)] = h(P(a, b))$，其中 $h = d\mu_{P(a,b)}^\varphi/d\mu_{P(a,b)}^\psi$ 是拉东–尼科迪姆导数。自由变量中多项式分布的确定方法

已为人所知（参见 [5, 18]），因此我们填补了这一空缺，并提供了一种计算上述拉东–尼科迪姆导数的方法，从而也能计算条件期望。

为说明我们的结果，我们给出一个例子，并在第 5 节中进行了全面讨论。设 $a$ 是一个标准半圆元素，且 $b$ 的分布为 $\frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$。令 $c = i[a,b]$ 为它们的交换子，则对于 $s < 1/2$，我们有

$$E\left[(1-sa)^{-1}|c\right] = h(c)$$

with

$$h(t) = \frac{2(2+\tilde{\eta}_a^2(s))}{(1-s\tilde{\eta}_a^2(s))\left((2+\tilde{\eta}_a(s))^2 - \tilde{\eta}_a^2(s)t^2\right)},$$

其中，$\tilde{\eta}_a(s) = \frac{1-\sqrt{1-4s^2}}{2s}$ 是标准半圆分布的平移布尔变换。

在 $s = 0$ 处展开上述幂级数，我们得到

$$E[a^2|c] = \frac{c^2+2}{4},$$
$$E[a^4|c] = \frac{c^4+6c^2+12}{16}.$$

对于反交换子，实际上对于任意形如 $c = \theta ab + \theta ba$的元素，只要 $\theta \in \mathbb{C}$ 任意且满足 $|\theta| = 1$，同样的公式也成立。

在一般的二态 $W^*$-非交换概率空间（$\mathcal{M}$, $\varphi$, $\psi$）中研究 $c$-自由随机变量时，自然会问：关于 $\varphi$，到 $c$-自由子代数的条件期望是否存在？这个问题并非显然，因为一般而言，$c$-自由性与迹态不相容。事实上，下面第6节中的例子表明，在 $c$-自由情形下，严格意义上的条件期望并不存在；然而，在 $L^2(\mathcal{M})$ 中，相对于内积的投影

$$\langle a, b\rangle = \varphi(ab^*)$$

存在，并作为条件期望的一种形式类比。我们将这一投影称为右拟条件期望，因为它仅具有右模性质，且不是正的。当我们计算在由 $b$生成的子代数上的投影时，用 $\overrightarrow{E}_b^{\varphi}$ 表示它。我们证明，这一投影与关于 $\varphi$的条件期望具有某些共同性质。特别地，对于 $c$-自由变量$\overrightarrow{E}_b^{\varphi}[P(a,b)]$中的任意多项式 $P$，]是 $b$ 中的一个多项式，其次数至多为$\deg(P)$。此外，我们给出了 $E_b[P(a,b)]$ 的递归公式，与针对 [18]中的自由变量多项式所得到的条件期望递归公式类似。利用这一方法，我们证明，若干 $c$-自由变量之和的预解式的右拟条件期望仍是一个预解式，乘以一个解析函数。这与 [7]中自由加法卷积的从属现象相似。在第7节中，我们证明，利用右拟条件期望，可以推导出 [22]中 $c$-自由乘法卷积的 $\Sigma$-变换公式。

本文的组织结构如下。第2节回顾有关自由性和 $c$-自由性的基本定义与事实。第3节利用布尔累积量证明 $c$-自由性的一种刻画。第4节给出一种计算 $c$-自由变量的多项式分布的方法。第5节介绍我们的结果在自由去噪问题中的应用。第6节研究右拟条件期望，并给出一种基于布尔累积量的递归公式。第7节利用右拟条件期望，推导 $c$-自由乘法卷积的 $\Sigma$-变换。

## 2. Preliminaries

**2.1. 非交换概率空间。** A非交换概率空间 是一个二元组 $(\mathcal{M}, \psi)$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个含幺 $*$-代数，而 $\psi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$ 是一个正的含幺线性

泛函，通常称为态。当 $\mathcal{M}$ 是冯·诺依曼代数且 $\psi$ 是忠实正规态时，二元组 $(\mathcal{M},\psi)$ 称为 $W^*$-概率空间。

双态非交换概率空间 是一个三元组 $(\mathcal{M},\varphi,\psi)$，其中 $\mathcal{M}$ 配备了两个态 $\varphi$和 $\psi$。我们始终假设第二个态 $\psi$ 是迹型的。

**定义 2.1**。

(i) 非交换概率空间 $(\mathcal{M},\psi)$ 的一族子代数 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 称为自由或自由独立，如果

$$\psi(u_1u_2\cdots u_n)=0$$

对于任意满足 $\psi(u_j)=0$ 且 $u_j\in\mathcal{A}_{i_j}$（其中 $i_j\neq i_{j+1}$ 对所有 $j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ 均成立）的 $u_j\in\bigcup_i\mathcal{A}_i$，均有此性质。(ii) 双态非交换概率空间 $(\mathcal{M},\varphi,\psi)$ 的一族子代数 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 称为条件自由或 $c$-自由，如果$\psi(u_1u_2\cdots u_n)=0$ 且 $\varphi(u_1u_2\cdots u_n)=\varphi(u_1)\varphi(u_2)\cdots\varphi(u_n)$；当 $u_j\in\bigcup_i\mathcal{A}_i$ 且 $\psi(u_j)=0$，并且 $u_j\in\mathcal{A}_{i_j}$ 且对所有 $j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ 均有 $i_j\neq i_{j+1}$ 时，以上关系成立。换言之，该族关于 $\psi$ 是自由的，此外还满足关于 $\varphi$ 的因子分解性质。

2.2. **累积量**。 借用 Fisher [14], 的话来说，在描述随机变量的联合分布时，用累积矩函数（或半不变量）代替原始矩，可以大大简化公式。对于非交换随机变量，这一点更是如此。本文将讨论三种累积量。

**记号 2.2**。

(i) 令 $[n]:=\{1,\ldots,n\}$。阶数为 $n$ 的集合划分是由 $\pi=\{V_1,\ldots,V_m\}$ 个非空且两两不相交的子集 $V_i\subseteq[n]$组成的集合，这些子集称为块，并满足 $\bigcup_{i=1}^m V_i=[n]$。每个阶数为 $n$ 的集合划分 $\pi$ 都会在 $[n]$上诱导一个等价关系，记作$\sim_\pi$，使得 $k\sim_\pi l$ 当且仅当 $k$ 和 $l$ 属于 $\pi$的同一个块。(ii) 反过来，任何函数 $f:[n]\to C$ 到某个“颜色”集合 $C$ 的映射，都会诱导一个等价关系 $i\sim j:\iff f(i)=f(j)$。相应的集合划分 $\pi=\ker f$ 称为 $f$的核。(iii) 如果不存在一对块$V$、$W\in\pi$，其元素分别为 $a$、$c\in V$和 $b$、$d\in W$，且满足 $a<b<c<d$，则称 $[n]$ 的集合划分 $\pi$ 为非交叉划分。$[n]$ 的非交叉划分集合记作 NC $(n)$。(iv) $[n]$ 的区间划分是 NC $(n)$中的一个非交叉划分 $\pi\in$ ，且每个块都是 $[n]$的区间。$[n]$ 的区间划分集合记作 Int $(n)$。

(v) 令 $\pi\in NC(n)$ 和 $V$，$W\in\pi$ 为两个不同的块。若对于任意 $w\in W$，都有 $\min(V)\leqslant w\leqslant\max(V)$，则称块 $W$ 嵌套在块 $V$ 内。若不存在这样的 $V\in\pi$ 使得 $W$ 嵌套在 $V$ 内，则称块 $W\in\pi$ 为外块 。非外块的块 $W$ 称为内块。我们分别用 $\mathrm{inn}(\pi)$ 和 $\mathrm{out}(\pi)$ 表示 $\pi\in NC(n)$ 中内块和外块的集合。区间划分不含内块。

(vi) 对于多线性泛函族 $(L_n:\mathcal{M}^n\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ 和分划 $\pi$，我们用 $L_\pi$ 表示分块多线性泛函

$$L_\pi(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\prod_{V\in\pi}L_V(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

其中，对于块 $V=\{i_1<i_2<\cdots<i_s\}$，我们将 $L_V(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n):=L_s(a_{i_1},\ a_{i_2},\ \ldots\ldots,\ a_{i_s})$。通过令 $\varphi_n(b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_n):=\varphi(b_1b_2\cdots b_n)$。，将此记号推广到线性泛函。

(vii) 关于反向细化序，$NC(n)$ 和 $Int(n)$ 都是格：$[n]$ 的两个划分 $\pi$ 和 $\rho$ 满足关系 $\pi \leqslant \rho$，即对于每个块 $V \in \pi$，都存在一个块 $W \in \rho$ 使得 $V \subseteq W$。

**定义 2.3**。

(i) 设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个非交换概率空间。以下恒等式唯一确定多重线性泛函族 $(\beta_n^\psi)_{n\in\mathbb{N}}$、$(r_n^\psi)_{n\in\mathbb{N}}$，分别称为布尔累积量和自由累积量：

$$\psi(a_1a_2\cdots a_n) = \sum_{\sigma\in Int(n)} \beta_\sigma^\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2.1}$$

$$\psi(a_1a_2\cdots a_n) = \sum_{\sigma\in NC(n)} r_\sigma^\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{2.2}$$

(ii) 设 $(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 是一个双态非交换概率空间。以下恒等式唯一确定 $c$-自由累积量族：$(r^{\varphi,_n\ \psi})_{n\in\mathbb{N}}$

$$\varphi(a_1a_2\cdots a_n) = \sum_{\sigma\in NC(n)} \prod_{V\in \mathrm{out}(\sigma)} r_V^{\varphi,\psi}(a_1, \ldots, a_n) \prod_{W\in \mathrm{inn}(\sigma)} r_W^{\psi}(a_1, \ldots, a_n). \tag{2.3}$$

**注 2.4**。请注意，在处理双态非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 时，我们将使用关于两个态 $\varphi$ 和 $\psi$ 的布尔累积量 $\beta^\varphi$ 和 $\beta^\psi$。

**命题 2.5**。

*(i)* 子代数彼此自由，当且仅当混合自由累积量为零 [24]。*(ii)* 子代数彼此 $c$-自由，当且仅当混合自由累积量和混合 $c$-自由累积量均为零 [9]。

布尔独立性也有类似的结论，不过本文不予讨论。虽然从这一刻画可以得出，每种独立性概念最好都用其“原生”的累积量变体来研究，但最近的研究发现，布尔累积量具有最广泛的通用性，可用于研究不同类型的独立性 [15], ，尤其是自由概率 [12, 17, 18], ；此外，它们在经典概率中也有应用 [23, 27]。本文将展示，它们同样适用于研究 $c$-自由性。

以下对布尔矩-累积量关系的递归改写，对我们的研究最为有用：

$$\varphi(a_1a_2\cdots a_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \varphi(a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_n), \tag{2.4}$$

$$\psi(a_1a_2\cdots a_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^\psi(a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \psi(a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_n). \tag{2.5}$$

**注 2.6.** 前述递归可以自然地转化为生成函数的语言。更确切地说，设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个非交换概率空间，且设 $a \in \mathcal{M}$。那么，随机变量 $a$ 关于 $\psi$ 的（普通）矩生成函数（或矩变换）定义为

$$M_a^\psi(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(a^n) z^n.$$

类似地，我们将布尔变换和随机变量的平移布尔变换 $a$ 分别定义为其累积量的生成函数

$$\eta_a^\psi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^\psi(a) z^n, \qquad \tilde{\eta}_a^\psi(z) := \frac{1}{z}\eta_a^\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^\psi(a) z^{n-1},$$

其中 $\beta_n^\psi(a) := \beta_n^\psi(a, a, \ldots, a)$。不难验证，递推关系 (2.5) 等价于函数方程

$$M_a^\psi(z) = \frac{1}{1 - \eta_a^\psi(z)}.$$

2.3. **闭包算子与莫比乌斯反演**。¨ 以下这个简单引理涵盖了本文中大多数组合证明。

**定义 2.7**。设 $P$ 是一个偏序集。映射 $c : P \to P$ 称为闭包算子（或样本算子 [2]），若满足以下条件：

(i) 它是递增的，即对每个 $x \in P$，$x \leqslant c(x)$；(ii) 它是保序的，即若 $x \leqslant y$，则 $c(x) \leqslant c(y)$；(iii) 它是幂等的，即 $c \circ c = c$。

若 $x = c(x)$，则称元素 $x \in P$ 为闭元 。闭元集合记为 $P$，并继承原有的序。

**引理 2.8**。设 $(P, \leqslant)$ 为一个偏序集，$c : P \to P$ 为闭包算子，且 $(P, \leqslant)$ 为闭元构成的子偏序集，并带有诱导序。给定函数 $f : P \to \mathbb{C}$，定义其部分和

$$F(x) = \sum_{\substack{y \in P \\ y \leqslant x}} f(y).$$

假设存在一个函数 $g : P \to \mathbb{C}$，使得对于每个 $x \in P$，我们还有 $F(x) = \sum_{y \in P, y \leqslant x} g(y)$。那么

$$g(y) = \sum_{\substack{z \in P \\ c(z) = y}} f(z)$$

对所有 $y \in P$ 均成立。

证明。对于每个 $x \in P$，我们可以写成

$$F(x) = \sum_{z \leqslant x} f(z) = \sum_{\substack{y \in P \\ y \leqslant x}} \sum_{\substack{z \in P \\ c(z) = y}} f(z)$$

并在 $P$ 上应用莫比乌斯反演。□

2.4. **用累积量表示的累积量**。

**定义 2.9**。非交叉划分 $\pi$ 的区间闭包 $\overline{\pi}$ 是满足 $\pi \leqslant \rho$ 的最小区间划分 $\rho$。其块是 $\pi$ 的外块的凸包。若非交叉划分 $\pi \in NC(n)$ 满足 $\pi = \hat{1}_n$，则称其为不可约，也就是说，它有唯一的外块，等价地，$1 \sim_\pi n$。$\pi$ 的各块在 $\pi$ 上的限制称为它的不可约分量，因此 $\pi$ 是其不可约分量的串接。我们用 $NC^{irr}(n)$ 表示不可约非交叉划分的集合。

不可约划分是表达不同类型累积量 [16, 1], 之间相互关系的一种自然方式，尤其是：

**命题 2.10**。

*(i)* 设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个非交换概率空间，且 $(r_n^\psi)_{n \geqslant 1}$、$(\beta_n^\psi)_{n \geqslant 1}$ 分别是自由累积量泛函和布尔累积量泛函序列。那么

$$\beta_n^\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in NC^{irr}(n)} r_\pi^\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{2.6}$$

对于任意 $n \geqslant 1$ 和 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$。

***(ii)*** 设 $(\mathcal{M}、\ \varphi、\ \psi)$ 为一个非交换概率空间，则对于任意 $n \geqslant 1$ 和$a_1$，……，$a_n \in \mathcal{M}$，布尔累积量可表示为如下的 $c$-自由累积量和自由累积量：

$$\beta_n^{\varphi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in NC^{irr}(n)} \prod_{V \in \mathrm{out}(\pi)} r_V^{\varphi,\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\pi)} r_W^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{2.7}$$

证明。 注意，文献中并未明确给出 (2.7)，但它与 (2.6) 一样，可由引理 2.8 应用于偏序集 $NC(n)$，并采用定义 2.9 中的区间闭包算子得到；对于 $\pi \in NC(n)$，我们设

$$F(\pi) = \varphi_\pi(a_1, \ldots, a_n),$$
$$f(\pi) = \prod_{V \in \mathrm{out}(\pi)} r_V^{\varphi,\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\pi)} r_W^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

对于 $\pi \in Int(n)$，我们设

$$g(\pi) = \beta_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

□

**注记与定义 2.11**。

**(i)** 设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个非交换概率空间。假设 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ 是 $\mathcal{M}$ 的自由子代数。由混合累积量消失（命题 2.5）以及前述命题可立即推出，自由随机变量的布尔累积量满足循环交错累积量消失这一性质，简称性质（CAC）：

$$\beta_n^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

只要 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{A}_i$、$a_1$ 和 $a_n$ 来自不同的子代数。

**(ii)** 类似地，在双态非交换概率空间 $(\mathcal{M},\ \varphi,\ \psi)$ 中，两个态对应的布尔累积量都满足空间性质 (CAC)：假设 $\mathcal{A}_1,\ \ldots,\ \mathcal{A}_s$ 是 $\mathcal{M}$ 的 $c$-自由子代数。那么

$$\beta_n^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$
$$\beta_n^{\varphi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

只要 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{A}_i$、$a_1$ 和 $a_n$ 来自不同的子代数。

**定义 2.12**。 在 $NC(n)$ 上的不可约细化序定义如下：设 $\pi,\ \sigma \in NC(n)$。若 $\pi \leqslant \sigma$，且此外 $\pi$ 在 $\sigma$ 的各块上的限制均不可约，则称 $\pi \ll \sigma$；也就是说，对每个 $W \in \sigma$，都有 $\min(W) \sim_\pi \max(W)$。

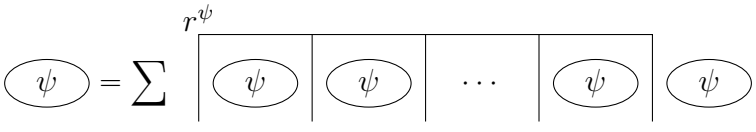
不可约细化序由 [6] 和 [21] 引入（另见 [20], [8]），旨在将公式 (2.6) 推广到分划累积量。

**命题 2.13**。 设 $(\mathcal{M}, \psi)$ 是一个非交换概率空间，且 $(r_n^{\psi})_{n\geqslant 1}$、$(\beta_n^{\psi})_{n\geqslant 1}$分别是自由累积量泛函和布尔累积量泛函序列。那么

$$\beta_\rho^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \ll \rho} r_\pi^{\psi}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{2.8}$$

对于任意 $n \geqslant 1$, $\rho \in NC(n)$ 以及 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$。

**2.5. 递归图**。 设 $(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 是一个双态非交换概率空间。我们采用 [9, p.366] 中递推关系的基本模式。自由累积量和 $c$-自由累积量满足所谓的 反洗牌 递推关系

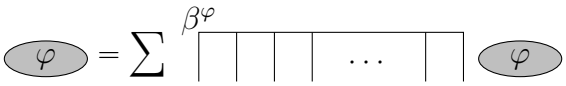




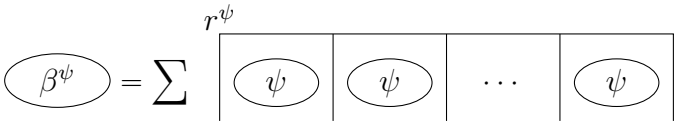
而相应的布尔累积量满足所谓的 拆分串接 递推关系 (2.4) 和 (2.5)：

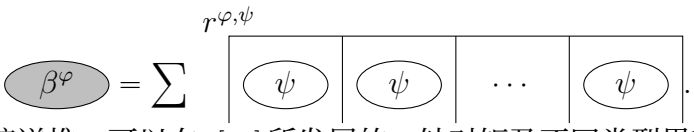
(2.9)





因此，非交叉累积量与布尔累积量之间的关系也呈现类似的模式：





非洗牌递推和去连接递推，可以在 [11] 所发展的、针对矩及不同类型累积量的霍普夫代数方法中得到概念上的解释。

2.6. **以乘积为项的累积量**。Leonov-Shiryaev 关于以乘积为项的累积量的经典公式，在布尔累积量中也有其自然的类似物。这同样是引理 2.8 的推论，此时闭包算子为 $c(\pi) = \pi \vee \rho$。

**命题2.14**。设 $a_1$、$a_2$、…、$a_n \in \mathcal{A}$ 为随机变量，则

(2.10)
$$\beta_{m+1}(a_1a_2\cdots a_{d_1}, a_{d_1+1}a_{d_1+2}\cdots a_{d_2}, \ldots, a_{d_m+1}a_{d_m+2}\cdots a_n) = \sum_{\substack{\pi\in Int(n)\\ \pi\vee\rho=1_n}} \beta_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

其中 $\rho = \{\{1, 2, \ldots, d_1\}, \{d_1+1, d_1+2, \ldots, d_2\}, \ldots, \{d_m+1, \ldots, n\}\} \in \mathit{Int}(n)$，而 $\vee$ 是区间划分格中的上确界。条件 $\pi \vee \rho = 1_n$ 等价于
$\pi \geqslant \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{d_1-1\}, \{d_1, d_1+1\}, \{d_1+2\}, \ldots, \{d_m-1\}, \{d_m, d_m+1\}, \ldots, \{d_n\}\}$.

展开式 (2.10) 可递归地改写如下 [18]。

**推论2.15**。设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ 为随机变量。给定一个区间划分
$\rho = \{\{1, \ldots, d_1\}, \{d_1+1, \ldots, d_2\}, \ldots, \{d_{m-1}+1, \ldots, n\}\} \in \mathit{Int}(n)$，以相应乘积为条目的布尔累积量为

(2.11)
$$\beta_m(a_1a_2\cdots a_{d_1}, a_{d_1+1}a_{d_1+2}\cdots a_{d_2}, \ldots, a_{d_{m-1}+1}a_{d_{m-1}+2}\cdots a_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{d_{k-1}<j<d_k} \beta_j(a_1, a_2, \ldots, a_j)\beta_{m-k+1}(a_{j+1}a_{j+2}\cdots a_{d_k}, a_{d_k+1}a_{d_k+2}\cdots a_{d_{k+1}}, \ldots, a_{d_{m-1}+1}\cdots a_n).$$

## 3. VNRP FOR $c$-FREENESS

本节中，我们推导出一个关于 $c$-自由元素的布尔累积量的公式，将 [12] 中的结果加以推广；这些结果使用具有所谓垂直不重复性质的非交叉划分来表示自由元素的布尔累积量。

为了陈述下一个组合结果，我们固定 $m \in \mathbb{N}$和一个着色 $c : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, s\}$。然后，我们定义

$$NC(m; c) := \{\sigma \in NC(m) \mid \sigma \leqslant \ker c\},$$

与 $c$相容的非交叉划分集合。我们还定义 $NC^{irr}(m; c) := NC(m; c) \cap NC^{irr}(m)$。

**定理 3.1** ([12, 定理 1。1])。 对于每个 $\sigma \in NC(m; c)$，都存在唯一的极大$\rho \in NC(m; c)$ 使得 $\sigma \ll \rho$，其特征由垂直不重复性质（VNRP）给出，即 $\rho$ 的每个内块都立即嵌套在一个不同颜色的块内。

我们的目标是将自由性的刻画从 [12]推广到二态非交换概率空间（$\mathcal{M}, \varphi, \psi$），并给出 Bo˙zejko、Leinert 和 Speicher [9]的条件自由性的类似刻画。

以下“$c$-自由布尔累积量泛函” $\beta^{\varphi,\psi}$依赖于两个态，类似于 $c$-自由累积量（2.3），并自然地出现在（2.7）的推广中。

**定义 3.2.** 设 $(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 是一个双态非交换概率空间，并固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\pi \in NC(n)$。我们通过以下公式定义嵌套二态布尔累积量泛函$\beta^{\varphi,\psi}_{\pi} : \mathcal{M}^n \to \mathbb{C}$：

$$\beta^{\varphi,\psi}_{\pi}(a_1, \ldots, a_n) := \prod_{V \in \mathrm{out}(\pi)} \beta^{\varphi}_{V}\big(a_1, \ldots, a_n\big) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\pi)} \beta^{\psi}_{W}\big(a_1, \ldots, a_n\big),$$

对每个 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$。

**注 3.3.** 注意，对于区间划分 $\pi \in Int(n)$，我们有

$$\beta^{\varphi,\psi}_{\pi}(a_1, \ldots, a_n) = \beta^{\varphi}_{\pi}(a_1, \ldots, a_n).$$

**命题 3.4.** 设$(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 是一个双态非交换概率空间，固定$n \in \mathbb{N}$和 $\pi \in NC(n)$。那么对每个 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$，嵌套二态布尔累积量由下式给出

$$\beta^{\varphi,\psi}_{\pi}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\rho \ll \pi} \prod_{V \in \mathrm{out}(\rho)} r^{\varphi,\psi}_{V}\big(a_1, \ldots, a_n\big) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\rho)} r^{\psi}_{W}\big(a_1, \ldots, a_n\big).$$

证明。 我们知道

$$\beta^{\varphi}_{n}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\rho \ll 1_n \\ 1 \in V_0}} r^{\varphi,\psi}_{V_0}\big(a_1, \ldots, a_n\big) \prod_{\substack{V \in \rho \\ V \neq V_0}} r^{\psi}_{V}\big(a_1, \ldots, a_n\big),$$

$$\beta^{\psi}_{n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in NC^{irr}(n)} r^{\psi}_{\pi}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

将两个公式代入定义 3.2 中的公式，即可得到所要证明的结论。□

上述命题对于下面利用布尔累积量刻画 $c$-自由性至关重要。

**定理 3.5.** 设$(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 是一个双态非交换概率空间。假设含幺子代数 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{M}$ 关于 $\psi$ 自由。那么以下两个断言等价。

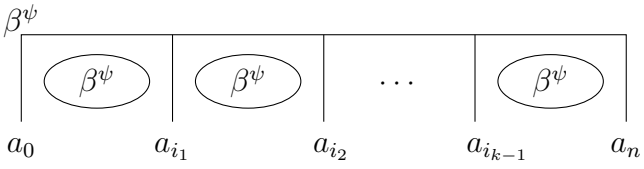
*(i)* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ 关于 $(\varphi, \psi)$ 是 $c$-自由独立的。*(ii)* 对于任意 $n \in \mathbb{N}$、任意着色 $c : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, s\}$，以及任意 $x_1 \in \mathcal{A}_{c(1)}, \ldots, x_n \in \mathcal{A}_{c(n)}$，均有

$$\beta^{\varphi}_{n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC^{irr}(n; c) \\ \text{with VNRP}}} \beta^{\varphi,\psi}_{\pi}(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.1}$$

**注 3.6**。

(i) 特殊情形 $\varphi = \psi$ 重现了 [12] 中对自由性的刻画。(ii) 对于交替自由变量的情形，公式 (3.1) 可以用图示表示如下：在自由情形下，我们有

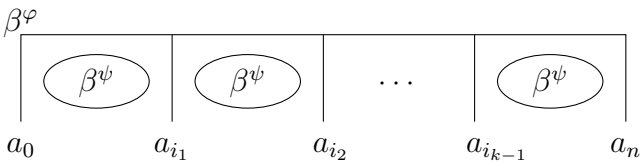
$$\beta^{\psi}(a_0, b_1, a_1, \ldots, b_n, a_n) = \sum$$




(3.2)

而 $c$-自由推广式 (3.1) 遵循相同的模式：

$$\beta^{\varphi}(a_0, b_1, a_1, \ldots, b_n, a_n) = \sum$$




(3.3)

**定理 *3.5* 的证明。**证明 $(i) \implies (ii)$.

这实质上是引理 2.8 的另一个应用，只不过这次的偏序集是 $(NC(m;\, c) \ll)$，而元素 $\pi$ 的闭包 $c(\pi)$ 是由定理 3.1 保证的 $\pi$ 的唯一 VNRP 闭包。

我们先应用命题 3.4，并记住，对于每个区间划分 $\pi$，都有 $\beta^{\varphi,\, \psi}_{\pi} = \beta^{\varphi}_{\pi}$

$$\beta^{\varphi}_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\rho \in NC^{irr}(n)} \prod_{V \in \mathrm{out}(\rho)} r^{\varphi,\psi}_V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\rho)} r^{\psi}_W(a_1, \ldots, a_n).$$

注意，由 $c$-自由性可立即看出，若 $\rho$不遵循颜色，则右侧为零。回顾一下，我们用 $NC^{irr}(n;\, c)$ 表示相对于 $c$着色的不可约非交叉划分集合。于是有：

$$\beta^{\varphi}_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\rho \in NC^{irr}(n;c)} \prod_{V \in \mathrm{out}(\rho)} r^{\varphi,\psi}_V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{W \in \mathrm{inn}(\rho)} r^{\psi}_W(a_1, \ldots, a_n).$$

现在我们使用定理 3.1，并注意到，可以按照定义 2.12 中不可约细化序 $\ll$ 下的极大元素，对上述求和按着色划分重新分组；这些极大元素恰好是具有 VNRP 性质的划分：

$$\beta^{\varphi}_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC^{irr}(n;c) \\ \text{with VNRP}}} \sum_{\rho \ll \pi} r^{\varphi,\psi}_{V_o}(a_1, \ldots, a_n) \prod_{V \in \mathrm{inn}(\rho)} r^{\psi}_V(a_1, \ldots, a_n)$$

其中，对于每个 $\rho$，我们用 $V_o$ 表示其唯一的外块。再次应用命题 3.4，我们得出

$$\beta^{\varphi}_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC^{irr}(n;c) \\ \text{with VNRP}}} \beta^{\varphi,\psi}_{\pi}(a_1, \ldots, a_n).$$

蕴含关系 $(ii) \implies (i)$ 的证明遵循标准论证，其依据是联合累积量决定所有联合矩这一事实。□

**注 3.7.** 上述内容为注和定义 2.11 中的 (CAC) 性质提供了另一种证明，因为在上述刻画中，如果首尾元素是 $c$-自由的，那么求和范围就是空集。

## 4. Distribution of polynomials in $c$-free variables

本节中，我们推导一种确定 $c$-自由变量的多项式分布的方法。我们的主要工具是非交换多项式代数上的一种微分演算，更一般地说，是系数为非交换多项式的形式幂级数上的一种微分演算。这一框架对于分析 $c$-自由变量的分布至关重要。在一般的非交换概率空间中，元素可能满足非平凡关系（例如 $a^2 = 1$），从而使下文定义的导子不再满足莱布尼茨法则。而在非交换多项式代数中，不存在此类障碍，因此这一设定更适合我们的研究目的。

### 4.1. **非交换多项式与形式幂级数**。

**记号 4.1.** 设 $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是一个字母表，即一个由字母组成的集合。我们用以下记号表示

$$\mathcal{X}^+ = \{X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

由 $\mathcal{X}$生成的自由半群，以及由 $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^+ \cup \{1\}$ 生成的自由幺半群。此外，我们还用 $\mathbb{C}\langle\mathcal{X}\rangle = \mathbb{C}\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ 表示由变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$生成的自由结合代数，即 $\mathcal{X}^*$ 在连接乘积下的线性张成空间，也称为非交换多项式代数。

对于元素 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ 和 $P \in \mathbb{C}\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$，我们用 $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 表示多项式 $P \in \mathbb{C}\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$的求值，即将每个 $X_i$ 替换为 $a_i$（$i = 1, 2, \ldots, n$）后得到的 $\mathcal{M}$ 中的元素。

**定义 4.2.** 固定一个非交换概率空间 $(\mathcal{M}, \psi)$。一组随机变量 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in \mathcal{M}$ 的非交换联合分布 是线性泛函$\psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n} : \mathbb{C}\langle X_1, \ldots\ldots, X_n\rangle \to \mathbb{C}$，由以下求值给出

$$\psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}(P(X_1, \ldots, X_n)) := \psi\left(P(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right).$$

**注 4.3.**

1. 关于 $\psi$的任意多项式 $Q(a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 的分布，与 $Q(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 关于 $\psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$的分布相同，因此只需研究 $(\mathbb{C}\langle X_1, \ldots\ldots, X_n\rangle, \psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n})$ 中多项式的分布。这有以下优点。

   (i) 增广同态 $\epsilon : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 将多项式映射到其常数项 $\epsilon(P) = P(0)$，从而可以将自由积与张量代数等同起来，并由此将多重线性映射明确地转化为自由积上的线性映射。(ii) 下文将定义的自由代数上的导子，使布尔累积量和条件期望的组合递归关系转化为简洁的代数恒等式。

   其缺点是可能会损失忠实性和正性，这一点必须牢记。不过，我们将滥用记号，用 $\psi$ 代替$\psi_{a_1, a_2, a_n}$，这应该不会造成任何混淆。

2. 为简便起见，我们只讨论两个变量的情形，即关注非交换概率空间 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 及其态 $\psi = \psi_{a, b}$ 和$\varphi = \varphi_{a, b}$。推广到多变量情形是显而易见的，留给读者完成。

3. 将这些公式从多项式推广到具有多项式系数的形式幂级数是显而易见的，我们将不再赘述，默认如此处理。

### 4.2. **布尔累积量泛函与导子**。

将单项式分解为来自不同子代数的“纯”单项式所组成的交替块，这一点将十分重要。

**定义 4.4**。 多项式的支撑 是其各项中出现的字母集合。单项式 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 的块分解 是将其分解 $W = U_1 U_2 \cdots U_n$为非平凡单项式 $U_i$的（唯一）方式，每个单项式的支撑要么仅含 $X$，要么仅含 $Y$

，并在两者之间交替。单项式 $W$ 的块长度等于块的数量 $n$。例如，字 $W = X^3Y^2X$ 的块长度等于 3。

现在，我们可以定义两种与布尔累积量相关的线性泛函：一种作用于块，另一种作用于字母。

**定义 4.5**。块布尔累积量泛函 是线性泛函 $\beta^{b,\psi}$ :$\mathbb{C}\langle X, Y\rangle \to \mathbb{C}$，由其在单项式基上的以下取值确定：

$$\begin{aligned} \beta^{b,\psi}(1) &= 1 \\ \beta^{b,\psi}(W) &= \beta_n^{\psi}(U_1, U_2, \ldots, U_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $W = U_1U_2\cdots U_n$ 是单项式 $W$的块分解。类似地，我们将部分块布尔累积量泛函 *partial block Boolean cumulant functional* $\beta^{b}{}_{,X}{}^{\psi}$ : $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\beta_X^{b,\psi}(1) = 1,$$

$$\beta_X^{b,\psi}(W) = \begin{cases} \beta^{b,\psi}(W) & \text{if } W = XVX \text{ and } V \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

线性泛函 $\beta^{b}{}_{,Y}{}^{\psi}$ :$\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 以类似方式定义。

For example we have $\beta_X^{b,\psi}(X^3Y^2X) = \beta_3^{\psi}(X^3, Y^2, X)$.

**定义 4.6**。逐字母布尔累积量泛函 是线性泛函$_{\beta^{\delta,\psi}}$ :$\mathcal{M} \to \mathbb{C}$，由其在单项式基上的以下取值确定：

$$\begin{aligned} \beta^{\delta,\psi}(1) &= 1 \\ \beta^{\delta,\psi}(Z_1Z_2\cdots Z_k) &= \beta_k^{\psi}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $Z_i \in \{X, Y\}$ 当 $1 \leqslant i \leqslant k$时。类似于 $\beta^{b}{}_{,X}{}^{\psi}$，我们在单项式基上定义部分逐字母布尔累积量泛函 $\beta^{\delta}{}_{,X}{}^{\psi}$ :$\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 如下：

$$\beta_X^{\delta,\psi}(1) = 1,$$

$$\beta_X^{\delta,\psi}(Z_1Z_2\cdots Z_k) = \begin{cases} \beta_k^{\psi}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k) & \text{if } Z_1 = Z_k = X, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例如，我们有 $\beta^{\delta}{}_{,X}{}^{\psi}(X^3Y^2X) = \beta_6^{\psi}(X, X, X, Y, Y, X)$。

**注 4.7.** 对于 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$上的任意态，都可以构造这些累积量泛函；特别地，我们将考虑双态非交换概率空间的两个态对应的泛函 $\beta^{b,\varphi}$ 和 $\beta^{\delta,\varphi}$。注意，如果 $X$ 与 $Y$的联合分布相对于态 $\varphi$ 满足性质（CAC），那么

$$\beta^{b,\varphi} = \beta_X^{b,\varphi} + \beta_Y^{b,\varphi} - \epsilon \qquad \beta^{\delta,\varphi} = \beta_X^{\delta,\varphi} + \beta_Y^{\delta,\varphi} - \epsilon. \tag{4.3}$$

以下导子对于将带有乘积作为输入项的布尔累积量 Leonov-Shiryaev 公式的递归形式（2.11）作代数重述很有用。

**定义 4.8**。自由差商 是满足以下条件的唯一导子：$\partial_X(X) = 1 \otimes X$ 且 $\partial_X(Y) = 0$。因此我们有

$$\partial_X(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \otimes X^{n-k-1}.$$

该算子是余结合的，我们定义

$$\partial_X^2 = (\mathrm{id} \otimes \partial_X) \circ \partial_X = (\partial_X \otimes \mathrm{id}) \circ \partial_X$$

对于更高次幂 $\partial_X^k$，定义也类似。我们还需要自由除幂导子或部分去拼接算子，其定义为

$$\overrightarrow{\delta}_X(P) = (1 \otimes X)\partial_X(P), \qquad \overleftarrow{\delta}_X(P) = (X \otimes 1)\partial_X(P),$$

即,

$$\overrightarrow{\delta}_X(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \otimes X^{n-k} \qquad \overleftarrow{\delta}_X(X^n) = \sum_{k=1}^{n} X^k \otimes X^{n-k}$$

**注 4.9.** 注意，上文讨论的线性泛函 $\beta_X^b$, $\beta_X^\delta$ 和导子在扩展到以多项式为系数的形式幂级数时，仍保留其性质。

4.3. **布尔累积量泛函的微积分**。 以下定理以代数方式概括了映射 $\beta^{b,\psi}$ 和 $\beta^{\delta,\psi}$ 之间的泛函关系，从而能够有效地计算这些泛函。

**命题 4.10.** 假设随机变量 $X$ 和 $Y$ 在非交换概率空间 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 上相对于态 $\psi$ 自由。

*(i)* 对任意元素 $P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，有

$$\begin{aligned} \beta_X^{b,\psi}(P) &= \epsilon(P) + (\beta_X^{\delta,\psi} \otimes \beta_X^{b,\psi})(\overleftarrow{\delta}_X P) \\ &= \epsilon(P) + (\beta_X^{b,\psi} \otimes \beta_X^{\delta,\psi})(\overrightarrow{\delta}_X P). \end{aligned} \tag{4.4}$$

*(ii)* 对任意元素 $P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，我们有

$$\beta_X^{\delta,\psi}(P) = \epsilon(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\psi}(X) \left[\epsilon \otimes \left(\beta_Y^{b,\psi}\right)^{\otimes(k-1)} \otimes \epsilon\right] \left(\partial_X^k(P)\right). \tag{4.5}$$

*(iii)* 此外，若 $X$ 和 $Y$ 关于定义在 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 上的态对 $(\varphi, \psi)$ 是 $c$-自由的，则式 (4.4) 对关于 $\varphi$ 的布尔泛函也成立。此外，对任意元素 $P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，我们有

$$\beta_X^{\delta,\varphi}(P) = \epsilon(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\varphi}(X) \left[\epsilon \otimes \left(\beta_Y^{b,\psi}\right)^{\otimes(k-1)} \otimes \epsilon\right] \left(\partial_X^k(P)\right). \tag{4.6}$$

证明。 关于自由变量的结论由 [18, 定理 5.5] 得出。关于 $c$-自由变量的证明遵循相同的论证。利用 VNRP 对 $c$-自由情形也成立这一事实（如定理 3.5 所证）。特别地，注意到额外项由推论 2.11 中的性质（CAC）消去，因此 (4.4) 是 $\beta_n^\varphi$ 的 Leonov-Shiryaev 公式 (2.10) 的直接推论。等式 (4.6) 可用与 [18, 定理 5.5], 相同的论证得到；不同之处在于，在定理 3.5 的恒等式 (3.1) 中，唯一的外块使用 $\beta_n^\varphi$ 求值，而内块使用 $\beta_n^\psi$ 求值。□

4.4. **矩阵扩张**。 回顾一下，线性映射 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的放大是线性映射 $f^{(N)} := \mathrm{id}_{M_N} \otimes f : M_N(\mathcal{A}) \to M_N(\mathcal{B})$，即逐项应用 $f^{(N)}([a_{ij}]_{ij}) = [f(a_{ij})]_{ij}$。因此，这是一个矩阵双模映射，即

$$f^{(N)}(UAV) = Uf^{(N)}(A)V$$

对于任意 $A \in M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)$ 以及标量矩阵 $U \in M_{k\times N}(\mathbb{C})$ 和 $V \in M_{N\times k}(\mathbb{C})$。如 [18] 中所述，上文引入的泛函和导子都可放大到带矩阵系数的非交换多项式上。特别地，$(M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)\ \psi^{(N)})$ 是一个矩阵值非交换概率空间，我们将 $M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle) \cong M_N(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 并分别将 $AX$ 和 $BY$ 写作 $A \otimes X$ 和 $B \otimes Y$。注意，$X$ 和 $Y$ 的自由性意味着，对于任意 $A, B \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$，元素 $AX$ 和 $BY$ 在矩阵值概率空间 $(M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)\ \psi^{(N)})$ 中关于 $M_N(\mathbb{C})$ 具有带合并的自由性。

当上下文清楚表明我们正在矩阵值概率空间中工作时，我们将省略上标，并将 $\varphi$, $\psi, \beta_X^b$ 和 $\beta_X^\delta$ 分别用于表示矩阵值泛函，将 $I$ 用于表示 $I_N \in M_N(\mathbb{C})$ 的单位矩阵。

**注记 4.11.** 对于一个元素 $A \in M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)$，在矩阵值概率空间 $(M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)\ \psi^{(N)})$ 中，我们定义其关于 $B \in M_N(\mathbb{C})$ 的矩变换为

$$M_A^\psi(B) = I_N + \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(N)}\left((AB)^n\right),$$

类似地

$$\eta_A^\psi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\psi,(N)}\left((AB)^n\right).$$

我们仍有

$$M_A^\psi(B) = \left(I_N - \eta_A^\psi(B)\right)^{-1}.$$

在下文中，我们始终假设 $B = zI_N$ 对于 $z \in \mathbb{C}$。

**注记与记号 4.12.**

1. 导子$\delta_X$,$\partial_X$,上一节引入的导子也可以推广到矩阵值框架（参见 [18, 推论 6.6]）。我们将相应的导子逐项作用于多项式系数矩阵。式 (4.8) 中导子的莱布尼茨法则形式如下

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot (1 \otimes b) + (a \otimes 1) \cdot D(b),$$

而放大后的版本为

$$D^{(N)}(A \cdot B) = D^{(N)}(A) \cdot (1 \odot B) + (A \odot 1) \cdot D^{(N)}(B),$$

其中，对于元素为 $A = [a_{ij}]_{ij}$ 的矩阵 $A \in M_N(\mathbb{C})$，我们记 $1 \odot A = [1 \otimes a_{ij}]_{ij}$和 $A \odot 1 = [a_{ij} \otimes 1]_{ij}$。

2. 运用莱布尼茨法则的一个简单论证表明，对于可逆矩阵

$$D^{(N)}(A^{-1}) = -(A^{-1} \odot 1) D^{(N)}(A)(1 \odot A^{-1}). \tag{4.7}$$

3. 更一般地，我们定义 $A \odot B = (A \odot 1) \cdot (1 \odot B)$，即

$$(A \odot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

4. 对线性泛函逐项应用后，$\odot$ 就变成标量矩阵的简单乘法：

$$(f \otimes g)^{(N)}(A \odot B) = f^{(N)}(A) \cdot g^{(N)}(B)$$

而命题 4.10 中的公式 (4.4)–(4.6) 在放大到矩阵值情形后仍然成立。

**4.5. 矩阵值 $c$自由加法卷积。**假设我们有一个次数为 $m$ 的多项式$P \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 以及其预解式的一个线性化：

$$(1 - z^m P)^{-1} = u^t (I_N - zL)^{-1} v,$$

其中 $u$, $v \in \mathbb{C}^N$ 且 $L = AX + BY$。这里，$(1 - z^m P)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^m P)^n$ 是一个系数属于 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 的形式幂级数；类似地，$(I_N - zL)^{-1}$ 是一个系数属于 $M_N(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle)$ 的形式幂级数。于是

$$\varphi\left((1 - z^m P)^{-1}\right) = u^t \varphi^{(N)}\left((I_N - zL)^{-1}\right) v$$

由于矩生成函数唯一确定了 $P$ 的分布，计算多项式 $P$ 的分布问题便归结为矩阵值加法卷积。这可以通过矩阵值布尔累积量生成函数来实现，它们满足下述命题中的不动点方程。

**命题 4.13**。 假设 $X$ 和 $Y$ 在双态非交换概率空间 $(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle,\varphi,\psi)$ 中是 $c$-自由的。给定矩阵 $A,B\in M_N(\mathbb{C})$，记 $\mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix} I & -z(AX+BY)\\ & \end{pmatrix}^{-1}$ 为预解式，并令

$$H_X:=\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}),\qquad F_X:=\beta^{\delta,\ \psi}_{\ X}(X\mathbf{\Psi}), \tag{4.8}$$

$$H_Y:=\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}),\qquad F_Y:=\beta_Y^{\delta,\psi}(Y\mathbf{\Psi}), \tag{4.9}$$

$$F_X^{\varphi}:=\beta_X^{\delta,\varphi}(X\mathbf{\Psi}), \tag{4.10}$$

$$F_Y^{\varphi}:=\beta_Y^{\delta,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}). \tag{4.11}$$

则以下恒等式成立：

$$H_X=(I-zAF_X)^{-1}, \tag{4.12}$$

$$H_Y=(I-zBF_Y)^{-1}, \tag{4.13}$$

$$F_X=\tilde{\eta}_X^{\psi}\left(zH_YA\right), \tag{4.14}$$

$$F_Y=\tilde{\eta}_Y^{\psi}\left(zH_XB\right). \tag{4.15}$$

$$F_X^{\varphi}=\tilde{\eta}_X^{\varphi}(zH_YA), \tag{4.16}$$

$$F_Y^{\varphi}=\tilde{\eta}_Y^{\varphi}(zH_XB). \tag{4.17}$$

**注 4.14**。 在命题 4.13 中，为简单起见，我们假设系数矩阵 $A$ 和 $B$ 是标量矩阵。实际上，非齐次多项式的线性化会得到矩阵 $A$和 $B$ ，它们对$z$具有非线性依赖关系；然而，很容易看出，所有公式仍然成立。

**注 4.15**。 这些矩阵

$$H_X^{\varphi}:=\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}),$$

$$H_Y^{\varphi}:=\beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}),$$

满足恒等式

$$H_X^{\varphi}=(I-zAF_X^{\varphi})^{-1}, \tag{4.18}$$

$$H_Y^{\varphi}=(I-zBF_Y^{\varphi})^{-1}, \tag{4.19}$$

与 $H_X$ 和 $H_Y$ 满足的恒等式 (4.12) 和 (4.13) 类似，不过这些恒等式并非必需，因为我们可以通过公式 (4.16) 和 (4.17)，直接由 $H_X$ 和 $H_Y$ 得到矩阵 $F_X^{\varphi}$ 和 $F_Y^{\varphi}$。事实上，[3] 中已经指出，支撑自由加法卷积的正是同一组从属函数，它们在 $c$-自由加法卷积的从属方法中仍发挥作用。

证明。 为方便读者，我们给出 (4.12) 和 (4.16) 的证明。其余结论的证明完全类似。根据 $\mathbf{\Psi}$ 和 $\delta_X$ 的定义，我们有

$$\overrightarrow{\delta}_X(\mathbf{\Psi})=z\mathbf{\Psi}A\odot X\mathbf{\Psi}=z\mathbf{\Psi}\odot AX\mathbf{\Psi}.$$

Leonov-Shiryaev 公式 (4.4) 的矩阵放大形式为

$$\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})=I+z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\beta_X^{\delta,\psi}(AX\mathbf{\Psi}),$$

因此

$$H_X=\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})=\left(I-zA\beta_X^{\delta,\psi}(X\mathbf{\Psi})\right)^{-1}=(I-zAF_X)^{-1}.$$

最后，不难证明

$$\partial_X^n(X\mathbf{\Psi})=z^{n-1}I\odot(\mathbf{\Psi}A)^{\odot n-1}\odot\mathbf{\Psi}+z^nX(\mathbf{\Psi}A)\odot(\mathbf{\Psi}A)^{\odot n-2}\odot\mathbf{\Psi}$$

将其代入递推关系 (4.6) 后，我们得出

$$F_X^{\varphi} = \beta_X^{\delta,\varphi}(X\mathbf{\Psi}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\varphi}(X) z^{k-1} \beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}A)^{k-1}$$
$$= \tilde{\eta}_X^{\varphi}\Big(z\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})A\Big).$$

□

前述不动点方程的解现在可用于通过线性化计算 $c$-自由变量中多项式的分布，如下一个定理所示。

**定理 4.16**。 采用命题 *4.13* 中的记号，设在双态非交换概率空间 $(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle,\varphi,\psi)$ 中， $X$ 和 $Y$ 关于 $c$- 自由。进一步设给定多项式 $P\in\mathbb{C}\langle X,Y\rangle$ （次数为 $m$ ）的预解式具有如下线性化形式： $\Psi=(1-z^mP)^{-1}=u^t\mathbf{\Psi}v$，其中 $\mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix} I-z(AX+BY)\end{pmatrix}^{-1}$，且 $A$, $B\in M_N(\mathbb{C})$ 和 $u,v\in\mathbb{C}^N$。则

$$M_{AX+BY}^{\varphi}(z) := \varphi(\mathbf{\Psi}) = (I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y^{\varphi})^{-1} \tag{4.20}$$

因此

$$M_{P(X,Y)}^{\varphi}(z^m) = u^t M_{AX+BY}^{\varphi}(z) v.$$

证明。 根据预解式的定义，注意到

$$\mathbf{\Psi} = I + zAX\mathbf{\Psi} + zBY\mathbf{\Psi}. \tag{4.21}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\eta_{AX+BY}^{\varphi}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\varphi}(AX+BY) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{\delta,\varphi}\left((AX+BY)^n\right) z^n \\
&= \beta^{\delta,\varphi}(\mathbf{\Psi}) - I \\
&= \beta^{\delta,\varphi}(zAX\mathbf{\Psi} + zBY\mathbf{\Psi}) \\
&= zA\beta_X^{\delta,\varphi}(X\mathbf{\Psi}) + zB\beta_Y^{\delta,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}) \\
&= zAF_X^{\varphi} + zBF_Y^{\varphi},
\end{aligned}$$

其中，我们只需用到 $\eta^{\varphi}$的定义、 $\beta^{\delta}$ 的性质以及（4.3）。由恒等式 $M^{\varphi}(z) = (I - \eta^{\varphi}(z))^{-1}$ 即可得出结论。□

## 5. Applications to free denoising

现在，我们将把上述结果应用于自由去噪问题。首先，简要回顾自由去噪的框架。

5.1. 自由去噪回顾。考虑一个迹型 $W^*$-概率空间 $(\mathcal{M},\psi)$。固定两个自伴元素 $a,b\in\mathcal{M}$。我们将 $a$ 视为信号，将 $b$ 视为噪声。对于一个自伴多项式 $P\in\mathbb{C}\langle X,Y\rangle$，我们考虑元素 $P(a,b)$，它表示一个含噪元素。我们的目标是从含噪元素 $P(a,b)$中恢复信号 $a$，并注意到 $E[a|P(a,b)]$ 在 $L^2$ 距离意义下解决了这一问题，即在所有有界博雷尔函数 $g$ 中，$\|a-E[a|P(a,b)]\|_2\leqslant\|a-g(P(a,b))\|_2$。我们将研究一个稍微更一般的问题，并考虑 $E[f(a)|P(a,b)]$。 [13] 的关键观察是， $c$- 自由性为求得 $E[f(a)|P(a,b)]$ 提供了一个框架。固定一个非负函数 $f$，使得 $\psi(f(a))=1$，并定义一个新的态 $\varphi(c)=\psi(f(a)c)$。 [13] 的主要观察如下：

1. 元素 $a$、 $b$ 关于这对 $(\varphi$、 $\psi)$ 是 $c$-自由的。

2. 已知 $P$ 关于两个态 $\mu^{\psi}_{P\ (a、\ b)}$ 和 $\mu^{\varphi}_{P\ (a、\ b)}$的分布，测度 $\mu^{\varphi}_{P(a、\ b)}$相对于 $\mu^{\psi}_{P(a、\ b)}$绝对连续，因此存在拉东-尼科迪姆导数 $d\mu^{\varphi}_{P\ (a、\ b)} d\mu^{\psi}_{P\ (a}$

$\overline{\qquad\qquad}$，我们将其记为 $h_{.b)}$

3. 上述拉东-尼科迪姆导数与条件期望一致，具体而言，

$$E[f(a)|P(a,b)] = h(P(a,b)).$$

这将自由去噪问题归结为计算自由变量和 $c$自由变量中多项式的分布。在 [13] 中，虽然提供了这一通用框架，但由于缺乏确定 $c$自由变量中多项式分布的一般方法，尚无法将其应用于变量的加法和乘法之外的情形。定理 4.16 填补了这一空白。

5.2. **一个完整的示例**。给定一个非交换概率空间 $(\mathcal{M},\psi)$，设 $a$ 为一个标准半圆元素，且与 $a$ 自由，其分布为 $_{1\ 2}(\delta_{-1}+\delta_1)$。本小节给出一个完整的示例，展示如何在固定 $-1/2 < s < 1/2$ 的情况下求条件期望

$$E\Big[(1-sa)^{-1}\Big|i[a,b]\Big],$$

其中 $i[a,b] = i(ab-ba)$ 是 $a$ 和 $b$的交换子。定义一个态

$$\varphi(c) := \frac{\psi\left((1-sa)^{-1}c\right)}{M_a^{\psi}(s)}.$$

如上所述，我们需要确定相对于两个态 $\psi$ 和 $\varphi$的 $i[a,b]$ 的分布。正如第 4.1 小节所讨论的，我们将在自由代数 $\left(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle,\varphi_{a,b},\psi_{a,b}\right)$ 上进行研究，其中有 $\varphi_{a,b}(R(X,Y)) = \varphi(R(a,b))$，且 $\psi_{a,b}(R(X,Y)) = \psi(R(a,b))$；固定 $a$ 和 $b$ 之后，我们将简单地写作 $\varphi,\psi$，而不写 $\varphi_{a,b},\psi_{a,b}$，这应该不会引起任何混淆。

对于零附近某个邻域内的 $z$，我们有

$$M_X^{\varphi}(z) = \varphi\left((1-zX)^{-1}\right) = \frac{\psi\left((1-sX)^{-1}(1-zX)^{-1}\right)}{M_X^{\psi}(s)}$$

$$= \frac{\psi\left(\frac{s}{1-sX}-\frac{z}{1-zX}\right)}{(s-z)M_X^{\psi}(s)} = \frac{sM_X^{\psi}(s)-zM_X^{\psi}(z)}{(s-z)M_X^{\psi}(s)},$$

或者，等价地，

$$\tilde{\eta}_X^{\varphi}(z) = \frac{M_X^{\psi}(s)-M_X^{\psi}(z)}{sM_X^{\psi}(s)-zM_X^{\psi}(z)}. \tag{5.1}$$

线性化为

$$\Psi(z^2) = (1-z^2 i[X,Y])^{-1} = \left[(1-zC_X X - zC_Y Y)^{-1}\right]_{1,1}$$

with

$$C_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_Y = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以及 我们可以为矩阵 $F_X$、 $F_Y$、 $F_X^\varphi$、 $F_Y^\varphi$构造如下方程组 :
w

$$\begin{cases} H_X &= (I - zC_XF_X)^{-1}, \\ H_Y &= (I - zC_YF_Y)^{-1}, \\ F_X &= \tilde{\eta}_X^\psi(zH_YC_X), \\ F_Y &= \tilde{\eta}_Y^\psi(zH_XC_Y), \\ F_X^\varphi &= \tilde{\eta}_X^\varphi(zH_YC_X), \\ F_Y^\varphi &= \tilde{\eta}_Y^\varphi(zH_XC_Y). \end{cases}$$

注意，根据自由性假设， $Y$ 关于 $\varphi$ 和 $\psi$的分布相同，因此 $\tilde{\eta}_Y^\varphi(zH_XC_Y) = \tilde{\eta}_Y^\psi($ $zH_XC_Y) = zH_XC_Y$，其中后一个等式是由 $b$ 服从伯努利分布这一事实得出的。因此， $F_Y^\varphi = F_Y$ 也成立。

由于假设 $a$是标准半圆元素，其矩生成函数满足方程

$$M_X^\psi(z) = z^2M_X^\psi(z)^2 + 1.$$

对于 $\eta$-变换，我们得到 $\eta_X^\psi(z) = 1 - 1/M_X^\psi(z)$。这意味着 $\tilde{\eta}_X^\psi = zM_X^\psi(z)$。结合(5.1)，可得

$$\tilde{\eta}_X^\varphi(z) = \frac{s^2M_X^\psi(s)^2 - z^2M_X^\psi(z)^2}{sM_X^\psi(s) - zM_X^\psi(z)} = sM_X^\psi(s) + zM_X^\psi(z) = \tilde{\eta}_X^\psi(s) + \tilde{\eta}_X^\psi(z)$$

最后

$$F_X^\varphi = \tilde{\eta}_X^\psi(s)I + \tilde{\eta}_X^\psi(zH_YC_X) = \tilde{\eta}_X^\psi(s)I + F_X.$$

特别地，我们有

$$\eta_{C_XX+C_YY}^\varphi(z) = zC_XF_X^\varphi + zC_YF_Y^\varphi = zC_X\tilde{\eta}_X^\psi(s) + \eta_{C_XX+C_YY}^\psi(z)$$

解这个方程组（并注意到其中涉及的矩和 $\eta$-变换可解析延拓到上半平面），对于 $z \in \mathbb{C}^+$，我们得到

$$G_{i[a,b]}^\varphi(z) = G_{i[X,Y]}^\varphi(z) = \frac{(2 + \tilde{\eta}_X^2(s))\sqrt{z^2 - 8} + (\tilde{\eta}_X^2(s) - 2)z}{2\tilde{\eta}_X^2(s)z^2 - 2(\tilde{\eta}_X^2(s) + 2)^2}.$$

利用斯蒂尔切斯反演公式并直接计算可得

$$d\mu_{i[a,b]}^\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{(2 + \tilde{\eta}_X^2(s))\sqrt{8 - x^2}}{2\tilde{\eta}_X^2(s)x^2 - 2(\tilde{\eta}_X^2(s) + 2)^2}.$$

由于众所周知，半圆变量与伯努利变量的交换子的分布等于两个方差为一的半圆分布的自由卷积，因此我们得到密度 $\frac{1}{4\pi}\sqrt{8 - x^2}$。最后，我们得到拉东-尼科迪姆导数和条件期望

$$h(t) = M_a^\psi(s)\frac{d\mu_{i[a,b]}^\varphi}{d\mu_{i[a,b]}^\psi} = \frac{2(2 + \tilde{\eta}_X^2(s))}{(1 - s\tilde{\eta}_X(s))\left((2 + \tilde{\eta}_X(s))^2 - \tilde{\eta}_X^2(s)t^2\right)}.$$

从生成函数中提取前几个系数，我们得到

$$E[a^2|i[a,b]] = \frac{(i[a,b])^2 + 2}{4},$$
$$E[a^4|i[a,b]] = \frac{(i[a,b])^4 + 6(i[a,b])^2 + 12}{16}.$$

## 6. Algebraic conditional expectations of $c$-free variables

**6.1. 条件期望。** 本节中，我们研究 $c$-自由随机变量的条件期望的形式类似物。结果表明，经过一些修改， [18] 中的代数工具在 $c$-自由情形下仍然适用；由此我们得到投影到子代数上的映射，它们在形式上类似于条件期望，但缺少正性等重要的分析性质。不过，这些映射对于实际计算很有用；作为示例，在第7节中，我们用纯代数方法重新计算了 [22] 中的 $\Sigma$-变换的 $c$-自由类似物。

回顾一下，条件期望是一个保态投影 $E_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$，它将非交换概率空间 $\mathcal{M}$ 映射到子代数 $\mathcal{A}$，并且满足：对于每个 $u \in \mathcal{M}$ 以及每个 $a_1,\ a_2 \in \mathcal{A}$

$$\varphi(a_1 u) = \varphi(a_1 E_{\mathcal{A}}[u]), \qquad \varphi(u a_2) = \varphi(E_{\mathcal{A}}[u] a_2). \tag{6.1}$$

一般而言，这样的映射不一定存在。一个充分条件是 $\mathcal{M}$ 为有限冯·诺伊曼代数且 $\varphi$ 为迹型，即对于所有 $a,\ b \in \mathcal{M}$ [26,, 均有 $\varphi(ab) = \varphi(ba)$（命题 5.2.36]）；一般情形下的刻画见 [25]。若该映射存在且态 $\varphi$ 是忠实的，则条件期望 $E_{\mathcal{A}}[u]$ 由不变性 (6.1) 唯一确定，由此可知 $E_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 是一个酉的完全正 $\mathcal{A}$-双模映射，即：

$$E_{\mathcal{A}}[a_1 u a_2] = a_1 E_{\mathcal{A}}[u] a_2 \tag{6.2}$$

对于所有 $u \in \mathcal{M}$ 以及 $a_1,\ a_2 \in \mathcal{A}$。

关于记号的说明：子代数 $\mathcal{A}$ 上条件期望的标准记号是 $E_{\mathcal{A}}$；当子代数 $\mathcal{A}$ 由单个元素 $a$ 生成时，我们也写作 $E_a$。有时我们也将后者写作 $E[x|a] = E_a[x]$，例如在第 5 节中，以避免出现类似 $E_{i[a,b]}$ 这样的冗长表达式。

**6.2. 左、右拟条件期望。**从技术角度来看，将元素 $u \in \mathcal{M}$ 到子代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ 上的条件期望的计算，归结为构造一个满足条件 (6.1) 的元素 $E_{\mathcal{A}}[u] \in \mathcal{A}$。这相当于计算正交投影$L^2(\mathcal{M},\ \varphi) \to L^2(\mathcal{A},\ \varphi)$。

设 $(\mathcal{M},\ \varphi)$ 是一个 $W^*$-概率空间，具有忠实态 $\varphi$；$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ 是一个子代数，且$L^2(\mathcal{M})_r$ 和 $L^2(\mathcal{A})_r$ 是右 $L^2$-空间，即分别关于内积补全得到的 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A}$

$$\langle x, y \rangle = \varphi(x y^*).$$

于是，正交投影 $\vec{E}_{\mathcal{A}} : L^2(\mathcal{M},\varphi)_r \to L^2(\mathcal{A},\varphi)_r$ 存在，并满足右$\vec{\ }$模性质 $E_{\mathcal{A}}[ua] = E_{\mathcal{A}}[u]a$，其中 $u \in \mathcal{M}$ 和 $b \in \mathcal{A}$。类似地，左希尔伯特空间$L^2(\mathcal{M},\varphi)_l$ 和 $L^2(\mathcal{A},\varphi)_l$ 由内积得到

$$\langle x, y \rangle = \varphi(y^* x)$$

且投影 $\overleftarrow{E}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M},\varphi)_l \to L^2(\mathcal{A},\varphi)_l$ 满足左模性质$\overleftarrow{\ }$ $\overleftarrow{E}_{\mathcal{A}}[au] = a\, E_{\mathcal{B}}[u]$。

注意，映射$F : L^2(\mathcal{M})_r \to L^2(\mathcal{A})_r$ 在子空间 $\mathcal{A} \subseteq L^2(\mathcal{M})_r$ 上的限制，并不一定会自动产生映射$F : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$。在下文的 $c$-自由情形中，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A}$ 都将是多项式代数，我们将证明这些投影确实限制为从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{A}$的映射。我们将这些映射称为左和右拟条件期望。

这里还需注意忠实性问题：如果态 $\varphi$ 不忠实，那么内积就不是正定的，投影也不唯一，即它只在一个单边理想意义下定义。不过，我们将忽略这一问题，并定义一个形式上自洽的映射，满足实际计算所需的所有基本代数要求。

6.3. **正性失效与模性质**。以下示例表明，在 $c$-自由的情形下，关于 $\varphi$ 的准条件期望不是正映射，且不满足模性质（6.2）。更确切地说，正元素不一定映射为正元素；左模性质对右拟条件期望不成立，反之亦然。

**例 6.1**（左模性质失效）。 假设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathcal{M}, \varphi, \psi)$ 中的 $c$-自由子代数。那么对于 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathcal{B}$，我们有

$$\varphi(ba^n) = \varphi(b)\varphi(a^n)$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，因此到 $\mathcal{A}$ 上的右条件期望为

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{A}}^{\varphi}[b] = \varphi(b)1_{\mathcal{M}}.$$

另一方面，条件自由金字塔律断言

$$\varphi(a_1ba_2) = \varphi(a_1a_2)\psi(b) + \varphi(a_1)\varphi(a_2)(\varphi(b) - \psi(b))$$

即，

$$\begin{aligned}\varphi(aba^n) &= \varphi(a^{n+1})\psi(b) + \varphi(a)\varphi(a^n)(\varphi(b) - \psi(b)) \\ &= \varphi((a\psi(b) + \varphi(a)(\varphi(b) - \psi(b)))a^n)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_{\mathcal{A}}^{\varphi}[ab] &= a\psi(b) + \varphi(a)(\varphi(b) - \psi(b))1_{\mathcal{M}} \\ &\neq a\,\overrightarrow{E}_{\mathcal{A}}^{\varphi}[b] = a\varphi(b)\end{aligned} \tag{6.3}$$

除非 $\varphi(b) = \psi(b)$。

**例 6.2** (正性失效)。 条件自由性起源处的这个例子，根植于对自由群 [9] 的调和分析。令 $\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1\rangle$ 为由两个生成元生成的自由 Coxeter 群。则 $a$ 和 $b$ 关于冯·诺依曼迹 $\psi(w) = \delta_{e,w}$ 是自由的，而关于满足 $0 < \lambda < \infty$ 的正则态 $\varphi(w) = e^{-\lambda|w|}$ 是 $c$-自由的，其中 $|w|$ 表示一个（约化）字 $w \in \Gamma$ 的长度。这些泛函在群冯·诺依曼代数 $L(\Gamma)$ 上定义了态。令 $x = 1 + a$ 和 $y = b$。则 $x$ 是正的， $bxb$ 也是正的；然而将 $bxb$ 代入 (6.3)，我们得到

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{B}}^{\varphi}[bxb] = b^2 + (1 + e^{-\lambda})e^{-\lambda}b$$

当 $\lambda$ 足够小时，它不是正的。

然而请注意，在第 5 节的去噪背景下，左、右条件期望与自由条件期望相同。

**命题 6.3**。 设 $f$ 是定义在 $a$ 的谱上的严格正函数，使得$\psi(f(a)) = 1$。则态 $\varphi(x) = \psi(f(a)x)$是忠实的，且右拟条件期望 $\overrightarrow{E}_a^{(\varphi)}$ 与自由条件期望 $E_a^{\psi}$相同。

证明。 事实上，

$$\begin{aligned}\varphi\Big(E_a^{\psi}[x]g(a)\Big) &= \psi\Big(f(a)E_a^{\psi}[x]g(a)\Big) \\ &= \psi(f(a)xg(a)) \\ &= \varphi(xg(a))\end{aligned}$$

因此 $\overrightarrow{E}_a^{\varphi}[a] = E_a^{\psi}[a]$。 □

**注记 6.4.** 这与 (6.3) 并不矛盾，因为当 $b$ 相对于 $\psi$ 与 $a$ 自由时，我们有 $\varphi(b) = \psi(b)$。

**6.4. 右拟条件期望的递推关系。** 在着手研究 $c$-自由问题之前，我们先回顾一下 [18] 中自由条件期望的代数框架。

回想一下，为了构造非交换多项式 $u$ 关于变量 $a_1$，$a_2$，……，$a_n \in \mathcal{M}$ 在由变量子集 $a_1$，$a_2$，……，$a_k$ 生成的代数 $\mathcal{A}$ 上的条件期望，必须找到适当的表达式来表示如下形式的矩:

$$\varphi\left(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_r} b\right),$$

其中 $i_1$，$i_2$，……，$i_r \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $b \in \mathcal{A}$。自由性的一项基本性质（作为 [19]意义下普适独立性概念之一）是：自由独立随机变量的所有联合矩，均由相关变量的边缘矩唯一确定。因此，对于上述形式的每个矩，都存在一个普适公式（不依赖于 $a_1$，$a_2$，……，$a_n$的具体分布），可将任意联合矩表示为边缘矩乘积之和。

我们将在非交换多项式 $\mathbb{C}\langle X,\ Y\rangle$ 的形式框架下进行研究，其中配备了如第 4.1 小节所述的 $c$-自由态 $\varphi$ 和自由态 $\psi$ 。这些态可能不忠实，因此条件期望不唯一；然而，以下公式始终定义了一个关于 $\psi$ 的条件期望，并且当作用于冯·诺依曼代数中的自由元素时，会确定为正确的条件期望。

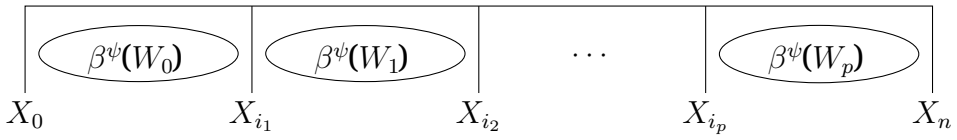
**命题 6.5** ([17])。 假设 $\psi$ 是 $\mathbb{C}\langle X$ 上的一个态，且 $Y\rangle$ 满足 $X$ 与 $Y$ 自由。给定一个按块分解 $W = X_0 Y_1 X_1 Y_2 \cdots X_{n-1} Y_n X_n$ 的字（其中 $X_0$ 和 $X_n$ 可以为空），我们定义线性映射 $E_X^{\psi}$：$\mathbb{C}\langle X, Y\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle$ 为

$$E_X^{\psi}\left[X_0 Y_1 X_1 Y_2 \cdots X_{n-1} Y_n X_n\right] = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{0=i_0<i_1<i_2<\cdots<i_{p+1}=n} X_0 X_{i_1} \cdots X_{i_p} X_n \prod_{j=0}^{p} \beta^{\psi}_{2(i_{j+1}-i_j)-1}(Y_{i_j+1}, X_{i_j+1}, \ldots, Y_{i_{j+1}}). \tag{6.4}$$

那么， $E_X^{\psi}$ 是相对于态 $\psi$ 的条件期望，也就是说，它具有双模性质 $E_X^{\psi}[X_0 W X_n] = X_0 E_X^{\psi}[W] X_n$，并且保持态 $\psi$。

展开式 (6.4) 有一个与备注 3.6 中 VNRP 类似的图示表示:

$$E_X^{\psi}[X_0 Y_1 X_1 \cdots Y_n X_n] = \sum$$



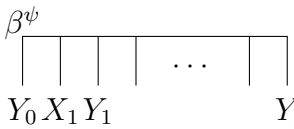

其中 $W_j = Y_{i_j+1} X_{i_j+1} \cdots Y_{i_{j+1}}$。

[18] 中的主要工具是以下关于条件期望 $E_X^{\psi}$ 的递推关系；该递推关系作用于以 $Y$ 开始和结束的单项式，即在上面的公式 (6.4) 中 $X_0 = X_n = 1$ 时:

$$E_X^{\psi}[Y_0 X_1 Y_1 \cdots X_n Y_n] = \sum_{k=0}^{n} \beta^{\psi}_{2k+1}(Y_0, X_1, Y_1, \ldots, X_k, Y_k)\, E_X^{\psi}[X_{k+1} Y_{k+1} \cdots X_n Y_n], \tag{6.6}$$

它遵循与 (2.9) 类似的模式

$$E_X^{\psi}[Y_0 X_1 Y_1 \cdots X_n Y_n] = \sum$$




$$E_X^{\psi}[X_{k+1} Y_{k+1} \ldots X_n Y_n]$$

此外，在 [18]第二位和第三位署名作者已描述了泛函 $E_X^{\psi}$ 与 $\beta^{b,\ Y^{\psi}}$ 之间以部分去串接表示的递归关系。

**定理 6.6** ([18, 定理 4。12])。 对于任意单项式 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，以下递推关系成立：

$$\begin{aligned} E_X^{\psi}[W] &= \beta_Y^{b,\psi}(W) + (\beta_Y^{b,\psi} \otimes E_X^{\psi})[\overrightarrow{\delta}_X(W)] \\ &= \beta_Y^{b,\psi}(W) + (E_X^{\psi} \otimes \beta_Y^{b,\psi})[\overleftarrow{\delta}_X(W)]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

**注 6.7**。 若要陈述前一定理的多变量版本，则相应的待考虑偏除幂导子为

$$\overrightarrow{\delta}_{\mathcal{X}}(P) = \sum (1 \otimes X_i)\partial_{X_i}(P), \tag{6.8}$$

$$\overleftarrow{\delta}_{\mathcal{X}}(P) = \sum (X_i \otimes 1)\partial_{X_i}(P), \tag{6.9}$$

对于任意 $P \in \mathbb{C}\langle \mathcal{S}\rangle$，其中字母表为 $\mathcal{S} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$，求和遍历字母$X_i \in \mathcal{X}$。

现在我们转而将前述结果推广到 $c$-自由情形。由于 $X$ 和$Y$ 是 $c$-自由的，因此它们相对于 $\psi$是自由的。除了命题 6.5 中的条件期望$E_X^{\psi}$ 之外，我们现在还将构造一个关于 $\varphi$的类似映射 $\overrightarrow{E}_X^{\varphi}$；正如我们在第 6.3 节所见，该映射不一定是正的，且仅满足右模性质。

**定义 6.8.** 设 $\varphi : \mathbb{C}\langle X, Y\rangle \to \mathbb{C}$ 是一个非交换分布。 $\varphi$ 的一个右拟条件期望 是一个线性映射 $E : \mathbb{C}\langle X, Y\rangle \to \mathbb{C}\langle X\rangle$，具有以下性质：

**(i)** 不变性。 对于任意多项式 $P(X, Y) \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，有

$$\varphi(E[P(X, Y)]) = \varphi(P(X, Y)).$$

**(ii)** 右模性质。 对于任意多项式 $P(X, Y) \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 以及多项式$Q(X)$，有

$$E[P(X, Y)Q(X)] = E[P(X, Y)]Q(X).$$

截至本文撰写之时，我们尚无法给出类似于 (6.4) 的 $\overrightarrow{E}_X^{\varphi}$ 的完整公式，因此只能依赖类似于递推关系 (6.7) 的递推关系来定义它。

**定理 6.9.** 假设 $X$ 和 $Y$ 关于 $\mathbb{C}\langle X, Y\rangle$上的态对$(\varphi, \psi)$是 $c$-自由的。那么，以下递推关系定义了一个从 $\varphi$到子代数 $\mathbb{C}\langle X\rangle$的右拟条件期望：

*(i)* $\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[P(X)] = P(X)$ 对于任意多项式 $P(X) \in \mathbb{C}\langle X\rangle$。

*(ii)* $\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[P(Y)] = \varphi(P(Y))$ 对于任意多项式 $P(Y) \in \mathbb{C}\langle Y\rangle$。

*(iii)* 若 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 是一个以 $Y$ 开头的单项式，则

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] = \beta_Y^{b,\varphi}(W) + \left(\beta_Y^{b,\varphi} \otimes \overrightarrow{E}_X^{\varphi}\right)[\overrightarrow{\delta}_X W]. \tag{6.10}$$

*(iv)* 若 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 是一个以 $X$ 开头的单项式，则

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] = E_X^{\psi}[W] + \left(\beta_X^{b,\varphi} \otimes (\overrightarrow{E}_X^{\varphi} - E_X^{\psi})\right)[\overrightarrow{\delta}_Y W]. \tag{6.11}$$

*(v)* 一般而言，对于任意单项式 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$，我们有

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] = \beta_Y^{b,\varphi}(W) + (\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi} \otimes \overrightarrow{E}_X^{\varphi})[\overrightarrow{\delta}_X W] + \left(\mathring{\beta}_X^{b,\varphi} \otimes (\overrightarrow{E}_X^{\varphi} - E_X^{\psi})\right)[\overrightarrow{\delta}_Y W] + X E_X^{\psi}[L_X(W)], \tag{6.12}$$

其中 $\mathring{\beta}^{b,\ \varphi} = \beta^{b,\ \varphi} - \epsilon$ 且 $L_X$ 是左湮灭算子，即，

$$L_X(W) = \begin{cases} 0 & \text{if } W = 1 \text{ or } W = YW' \text{ for some } W' \in \mathcal{M} \\ W' & \text{if } W = XW' \end{cases}$$

**注 6.10**。

(i) 注意到，由于可能缺乏忠实性，这个条件期望不一定唯一，但它是良定义的。

(ii) 不难看出，将方程 (6.10) 和 (6.11) 展开可得

$$\vec{E}_X^{\varphi}[Y_0X_1Y_1\cdots X_nY_n] = \sum_{k=0}^{n} \beta_{2k+1}^{\varphi}(Y_0, X_1, Y_1, \ldots, X_k, Y_k)\, \vec{E}_X^{\varphi}[X_{k+1}Y_{k+1}\cdots X_nY_n] \tag{6.13}$$

and

$$\begin{aligned}\vec{E}_X^{\varphi}[X_0Y_1X_1Y_2\cdots Y_n] &= E_X^{\psi}[X_0Y_1X_1\cdots Y_n] + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{2k+1}^{\varphi}(X_0, Y_1, X_1, Y_2, \ldots, X_k)\, \vec{E}_X^{\varphi}[Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_n] \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{2k+1}^{\varphi}(X_0, Y_1, X_1, \ldots, X_k)\, E_X^{\psi}[Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_n]\end{aligned} \tag{6.14}$$

分别地，其中 $X_0$、.....、$X_n$ 是在 $X$ 中的非恒定单项式，而 $Y_0$、.....、$Y_n$是在 $Y$ 中的非恒定单项式。特别地，等式 (6.13) 与自由情形中的递推关系 (6.6) 完全相同。

**注 6.11**。 重新整理恒等式 (6.11)，我们注意到，对于任何以 $X$ 开头的单项式 $W$，元素 $\widetilde{W} = W - (\beta^{b,\varphi} \otimes \mathrm{id})[\vec{\delta}_Y W]$ 满足

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\widetilde{W}] = E_X^{\psi}[\widetilde{W}].$$

以下引理将 $c$-自由准条件期望与自由条件期望联系起来，也是证明前述定理的关键。

**引理 6.12.** 如果 $W \in \mathbb{C}\langle X, Y\rangle$ 是一个以 $X$ 开头的单项式，那么

$$\varphi(E_X^{\psi}[W]) = \beta^{b,\varphi}(W) + \Big(\beta^{b,\varphi} \otimes (\varphi \circ E_X^{\psi})\Big)[\vec{\delta}_Y W]; \tag{6.15}$$

也就是说，如果 $W = X_0Y_1X_1\cdots Y_nX_n$，其中 $X_0, \ldots, X_n$ 是 $X$ 中的非恒定单项式，且 $Y_0, \ldots, Y_n$ 是 $Y$ 中的非恒定单项式，那么

$$\varphi(E_X^{\psi}[W]) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{2k+1}^{\varphi}(X_0, Y_1, X_1, \ldots, X_k)\, \varphi(E_X^{\psi}[Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_nX_n]). \tag{6.16}$$

如果 $X_n$ 是常数，即如果 $W = X_0Y_1X_1\cdots X_{n-1}Y_n$，那么该恒等式也成立，但项 $\beta^{b,\varphi}(W) = 0$ 消失。

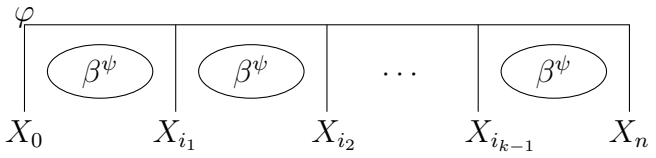
证明。我们使用条件期望的完全展开式 (6.4)，然后对布尔累积量应用递推关系 (2.4)，如下所示:

$$\begin{aligned}&\varphi(E_X^{\psi}[X_0Y_1X_1\cdots Y_nX_n]) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{0=i_0<i_1<i_2<\cdots<i_p=n} \varphi(X_0X_{i_1}\cdots X_{i_{p-1}}X_n)\, \beta^{\psi}(W_1)\beta^{\psi}(W_2)\cdots\beta^{\psi}(W_p) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_p=n} \sum_{k=0}^{p} \beta_{k+1}^{\varphi}(X_0, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})\, \varphi(X_{i_{k+1}}\cdots X_{i_{p-1}}X_n)\, \beta^{\psi}(W_1)\beta^{\psi}(W_2)\cdots\beta^{\psi}(W_p) \\ &= \sum_{s=0}^{n} \sum_{\substack{0<i_1<i_2<\cdots<i_k=s \\ s<i_1'<i_2'<\cdots<i_l'<n}} \beta_{k+1}^{\varphi}(X_0, X_{i_1}, \ldots, X_{i_{k-1}}X_s)\, \beta^{\psi}(W_1)\beta^{\psi}(W_2)\cdots\beta^{\psi}(W_k) \\ &\qquad\qquad \times \varphi(X_{i_1'}\cdots X_{i_l'}X_n)\beta^{\psi}(W_0')\beta^{\psi}(W_1')\cdots\beta^{\psi}(W_l') \\ &= \sum_{s=0}^{n} \beta^{\varphi}(X_0Y_1X_1\cdots X_s)\, \varphi(E_X^{\psi}[Y_{s+1}X_{s+1}\cdots Y_nX_n])\end{aligned}$$

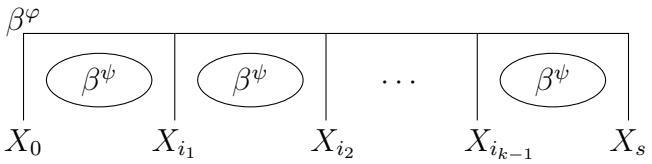
其中，对于 $j \geqslant 1$，因子为 $W_j = Y_{i_{j-1}+1}X_{i_{j-1}+1}\cdots Y_{i_j}$、$W_0' = Y_{s+1}X_{s+1}\cdots Y_{i_1'}$ 和 $W_j' = Y_{i_j'+1}X_{i_j'+1}\cdots Y_{i_{j+1}'}$。最后，我们使用了 VNRP (3.1) 和条件期望 $E^\psi$ 的完全展开式 (6.4)。□

图示证明。

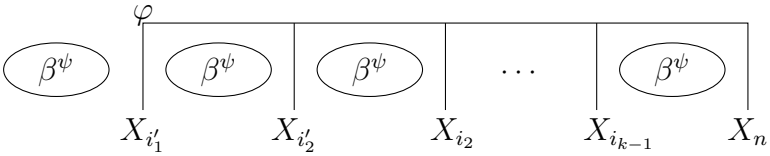
$$\varphi(E_X^\psi[X_0Y_1X_1\cdots Y_nX_n]) = \sum$$




$$= \sum_s \sum$$




$$\times$$




并且我们识别出 VNRP (3.3) 以及条件期望 (6.5) 的展开式，其中含有 $X_0 = 1$。□

定理 *6.9* 的证明。我们对一个字的块长度进行归纳。对于块长度至多为 1 的字，所需的两个性质都可直接由定义得出。

我们来证明定义 6.8 中的不变性 (i)。对于 $W = X_1Y_1\cdots X_nY_nX_n$假设对于长度小于$W$的字，(6.10) 和 (6.11) 均成立。

首先，对于以 $Y$ 开头的字，我们证明不变性 (i)。为此，将其代入递推关系 (6.10)，并注意到后者右侧出现的字的块长度严格小于原字$W$ 的块长度，因此可以应用归纳假设：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{E}_X^\varphi[Y_1X_1Y_2\cdots Y_nX_n]) &= \varphi\Big(\sum_{k=1}^n \beta_{2k-1}^\varphi(Y_1,X_1,Y_2,\ldots,Y_k)\,\vec{E}_X^\varphi[X_kY_{k+1}\cdots Y_nX_n]\Big)\\ &= \sum_{k=1}^n \beta_{2k+1}^\varphi(Y_1,X_1,Y_2,\ldots,Y_k)\,\varphi(X_kY_{k+1}\cdots Y_nX_n)\\ &= \varphi(Y_1X_1Y_2\cdots Y_nX_n),\end{aligned}$$

最后一行中，我们用到了这样一个事实：根据注记与定义 2.11 中的性质（CAC），递推关系 (2.4) 中其他所有累积量都为零。对于以 $X$ 开头的字，采用类似方法可得

$$\begin{aligned}&\varphi(\vec{E}_X[X_0Y_1X_1Y_2\cdots Y_nX_n])\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{2k+1}^\varphi(X_0,Y_1,X_1,Y_2,\ldots,X_k)\,\varphi(\vec{E}_X^\varphi[Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_n]X_n) + \varphi(E_X^\psi[X_0Y_1X_1\cdots Y_n]X_n)\\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{2k+1}^\varphi(X_0,Y_1,X_1,\ldots,X_k)\,\varphi(E_X^\psi[Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_n]X_n).\end{aligned}$$

由前述引理可知，最后两项合并为累积量$\beta_{2n+1}^\varphi(X_0,\ Y_1,\ X_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots,\ X_n)$，并对第一项应用归纳假设，我们

得到布尔递推关系 (2.4)，从而得证

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[X_0Y_1X_1Y_2\cdots Y_nX_n]) &= \sum_{k=0}^{n-1}\beta_{2k+1}^{\varphi}(X_0,Y_1,X_1,Y_2,\ldots,X_k)\,\varphi(Y_{k+1}X_{k+1}\cdots Y_nX_n)\\ &\quad+\beta_{2n+1}^{\varphi}(X_0,Y_1,X_1,Y_2,\ldots,Y_n,X_n)\\ &= \varphi(X_0Y_1X_1Y_2\cdots Y_nX_n).\end{aligned}$$

为了证明 (6.12)，注意到若 $W\in\mathcal{M}$ 是一个以 $X$ 开头的单项式，那么根据 $\beta^{b,\cdot}_{\cdot\,Y}{}^{\varphi}$，(6.10) 中除最后一项外的每一项都会被消去，因此我们有

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] = \big(\beta_Y^{b,\varphi}\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi}\big)[1\otimes W].$$

特别地，若我们写作 $\mathring{\beta}^{b,\cdot}_{\cdot\,Y}{}^{\varphi} = \beta^{b,\cdot}_{\cdot\,Y}{}^{\varphi} - \epsilon$，则有

$$0 = \mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(W) + \big(\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi}\big)[\overrightarrow{\delta}_X W]. \tag{6.17}$$

另一方面，由 (6.11) 可知，对于任意 $W\in\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}E_X^{\psi}[W] + \big(\beta_X^{b,\varphi}\otimes(\overrightarrow{E}_X^{\varphi}-E_X^{\psi})\big)[\overrightarrow{\delta}_Y W] &= \big(\mathring{\beta}_X^{b,\varphi}\otimes(\overrightarrow{E}_X^{\varphi}-E_X^{\psi})\big)[\overrightarrow{\delta}_Y W] + (\epsilon\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi})[\overrightarrow{\delta}_Y W]\\ &\quad+E_X^{\psi}[W]-(\epsilon\otimes E_X^{\psi})[\overrightarrow{\delta}_Y W].\end{aligned} \tag{6.18}$$

现在，根据 $\delta_Y W$ 的定义，很容易看出

$$(\epsilon\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi})[\overrightarrow{\delta}_Y W] = \begin{cases}0 & \text{if } W = XW' \text{ or } W=1\\ \overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] & \text{if } W = YW'\end{cases}$$

and

$$\begin{aligned}E_X^{\psi}[W]-(\epsilon\otimes E_X^{\psi})[\overrightarrow{\delta}_Y W] &= \begin{cases}E_X^{\psi}[W] & \text{if } W = XW' \text{ or } W=1\\ 0 & \text{if } W = YW'\end{cases}\\ &= \epsilon(W) + XE_X^{\psi}[L_X W].\end{aligned}$$

由于当 $W$ 是一个以 $X$ 开头的单项式时，Ä$\mathring{\beta}^{b,\cdot}_{\cdot\,X}{}^{\varphi}$⊗(E⃗$_X^{\varphi}$ −$E_X^{\psi}$)ä $[\overrightarrow{\delta}_Y W]=0$，我们得到 (6.11) 对任意 $W\in\mathcal{M}$ 也成立。最后，我们可以合并上述等式，从而得出对于任意 $W\in\mathcal{M}$，都有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[W] &= \mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(W) + (\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi})[\overrightarrow{\delta}_X W] + \big(\mathring{\beta}_X^{b,\varphi}\otimes(\overrightarrow{E}_X^{\varphi}-E_X^{\psi})\big)[\overrightarrow{\delta}_Y W] + E_X^{\psi}[W] - \epsilon\otimes E_X^{\psi}[\overrightarrow{\delta}_Y W]\\ &= \beta_Y^{b,\varphi}(W) + (\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}\otimes\overrightarrow{E}_X^{\varphi})[\overrightarrow{\delta}_X W] + \big(\mathring{\beta}_X^{b,\varphi}\otimes(\overrightarrow{E}_X^{\varphi}-E_X^{\psi})\big)[\overrightarrow{\delta}_Y W] + XE_X^{\psi}[L_X W].\end{aligned}$$

□

以下来自 [18] 的结果说明了如何计算自由随机变量 $X$ 和 $Y$的预解式的条件期望。

**命题 6.13**。 假设随机变量 $X$ 和 $Y$ 在非交换概率空间 $(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle,\psi)$中自由。则使用命题 *4.13* 中的记号，预解式 $\mathbf{\Psi} = (I - z(AX+BY))^{-1}$ 的条件期望为

$$E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] = \big(I - z\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})AX\big)^{-1}\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}) \tag{6.19}$$

$$= \beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\big)^{-1} \tag{6.20}$$

$$= (I - zAX - zBF_Y)^{-1}. \tag{6.21}$$

证明。 利用 (6.7)，我们得到

$$\begin{aligned}E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] &= \beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}) + z(\beta_Y^{b,\psi}\otimes E_X^{\psi})[\mathbf{\Psi}\odot AX\mathbf{\Psi}]\\ &= \beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\big(I + zAXE_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]\big).\end{aligned}$$

因此

$$E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] = \Big(I - z\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})AX\Big)^{-1}\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}).$$

□

**注记 6.14.** 在前一个命题的框架下，相应的从属函数 [7]由下式给出

$$\omega_X(1/z) = (z\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}))^{-1},$$
$$\omega_Y(1/z) = (z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}))^{-1}.$$

本节最后一个定理将命题 6.13 推广到 c-自由情形，即说明如何计算 c-自由元素 $X$ 和 $Y$ 的右拟条件期望。

**定理 6.15.** 设 $(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle,\varphi,\psi)$ 是一个双态非交换概率空间，其中 $X$ 和 $Y$ 是 $c$-自由的。假设给定多项式 $P \in \mathbb{C}\langle X,Y\rangle$ 的预解式，其次数为 $m$，具有如下线性化： $\Psi = (1-z^mP)^{-1} = u^t\mathbf{\Psi}v$，其中

$$\mathbf{\Psi} = (I - z(AX + BY))^{-1},$$

其中 $A, B \in M_N(\mathbb{C})$ 以及 $u, v \in \mathbb{C}^N$。于是

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = \Big(I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y^{\varphi}\Big)^{-1}\Big(I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y\Big)(I - zAX - zBF_Y)^{-1}. \tag{6.22}$$

证明。 我们首先证明一个辅助公式：

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = \beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1}\Big(I - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)\Big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1}. \tag{6.23}$$

首先，由 (4.7) 可得

$$\vec{\delta}_X\mathbf{\Psi} = z\mathbf{\Psi}A \odot X\mathbf{\Psi}, \qquad \vec{\delta}_Y\mathbf{\Psi} = z\mathbf{\Psi}B \odot Y\mathbf{\Psi}.$$

其次，我们将 $\vec{E}_X^{\varphi}$ 应用于预解式恒等式 (4.21)，得到

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = I + zA\,\vec{E}_X^{\varphi}[X\mathbf{\Psi}] + zB\,\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}]. \tag{6.24}$$

接下来，我们将定理 6.9 中的递推关系应用于 (6.24) 的每一项。更准确地说，公式 (6.12) 中的递推关系给出

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = \beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}) + z\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})A\,\vec{E}_X^{\varphi}[X\mathbf{\Psi}] + z\mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})B\Big(\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] - E_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}]\Big) + zAXE_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] \tag{6.25}$$

现在应用递推关系 (6.10)，得到

$$\begin{aligned}\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] &= \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}) + z\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})A\,\vec{E}_X^{\varphi}[X\mathbf{\Psi}]\\ &= \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\Big(I + zA\,\vec{E}_X^{\varphi}[X\mathbf{\Psi}]\Big)\\ &= \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\Big(\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] - zB\,\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}]\Big),\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们用到了 (6.24)。因此可得

$$\Big(I + z\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})B\Big)\,\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] = \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]$$

因此

$$\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] = \Big(I + z\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})B\Big)^{-1}\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]. \tag{6.26}$$

此外，前一个方程意味着

$$\begin{aligned}zB\,\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] &= \Big(I + zB\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\Big)^{-1}zB\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]\\ &= \Big(I - (I + zB\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}))^{-1}\Big)\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]\\ &= \Big(I - \beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big)\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]\end{aligned}$$

其中，最后一个等号是将 $\beta^{b,\varphi}_{Y}$ 应用于预解式恒等式 (4.21) 得出的。特别地，我们得到

$$\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - zB\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[Y\mathbf{\Psi}] = \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}].$$

另一方面，由上述方程和 (6.24) 可得

$$\begin{aligned} zA\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[X\mathbf{\Psi}] &= \vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - zB\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[Y\mathbf{\Psi}] - I \\ &= \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - I. \end{aligned}$$

将所有内容代入 (6.25)，可得

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] &= \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big(\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - I\Big) \\ &\quad + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big(\Big(I - \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big)\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - zBE^{\psi}_{X}[Y\mathbf{\Psi}]\Big) + zAXE^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] \end{aligned} \tag{6.27}$$

现在我们聚焦于 $zBE^{\psi}_{X}[Y\mathbf{\Psi}]$。将 $E^{\psi}_{X}$ 应用于预解式恒等式 (4.21)，可得

$$zBE^{\psi}_{X}[Y\mathbf{\Psi}] = E^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - zAXE^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - I,$$

因此，我们可以将其代入 (6.27)，得到

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] &= \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big(\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - I\Big) + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big)\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] \\ &\quad - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big((I - zAX)E^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] - I\Big) + zAXE^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}]. \end{aligned}$$

接下来，我们可以将前一个等式重新整理如下：

$$\begin{aligned} &\Big(I - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1} - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big)\Big)\,\vec{E}^{\varphi}_{X}[\mathbf{\Psi}] \\ &\quad = \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big((I - zAX)E^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}]\Big) + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) + zAXE^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] \\ &\quad = I + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) + \Big(\beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})zAX - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big)E^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}] \\ &\quad = \beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) + \Big(\beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})zAX - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big)\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAX\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &\quad = \beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) + \beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big(\Big(I - zAX\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} - I\Big) \\ &\qquad\quad - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAX\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &\quad = \Big(\beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)\Big(I - zAX\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &\quad = \Big(I - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)\Big(I - zAX\beta^{b,\psi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \end{aligned} \tag{6.28}$$

其中，在第三个等号处，我们使用了 $E^{\psi}_{X}[\mathbf{\Psi}]$ 的表达式 (6.20)。最后，(6.28) 左端的前置因子可以写成

$$\begin{aligned} I - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1} - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big) &= \Big(\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi}) + \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\Big)\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1} \\ &= \Big(I - \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})\Big)\beta^{b,\varphi}_{Y}(\mathbf{\Psi})^{-1} \end{aligned}$$

由此得出 (6.23)。

现在我们继续证明 (6.22)。首先，注意到

$$\begin{aligned} \mathring{\beta}^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) &= \beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi}) - I \\ &= (I - zAF^{\varphi}_{X})^{-1} - I \\ &= (I - zAF^{\varphi}_{X})^{-1}zAF^{\varphi}_{X} \\ &= \beta^{b,\varphi}_{X}(\mathbf{\Psi})zAF^{\varphi}_{X}. \end{aligned}$$

另一方面，利用

$$\beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})^{-1} = I - zBF_Y^{\varphi},$$

$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}]$ 在 (6.28) 中的系数可写为

$$\begin{aligned} I - \mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})^{-1} - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})^{-1}\Big) \\ &= I - zBF_Y^{\varphi} - zAF_X^{\varphi}(I - zAF_X^{\varphi})^{-1}zBF_Y^{\varphi} \\ &= I - (I - zAF_X^{\varphi})^{-1}zBF_Y^{\varphi} \\ &= (I - zAF_X^{\varphi})^{-1}\Big(I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y^{\varphi}\Big) \\ &= \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})M_{AX+BY}^{\varphi}(z)^{-1}, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了方程 (4.18) 和 (4.20)。最后，(6.28) 中第三个等式的右端为

$$\begin{aligned} &\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}) + \Big(\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})zAX - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big)\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &= \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}) + \Big(\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})zAX - \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})zAF_X^{\varphi}\Big)\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &= \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}) + zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}) - zAF_X^{\varphi}\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)\Big(I - zAX\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1} \\ &= \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - zAF_X^{\varphi}(I - zBF_Y)^{-1}\Big)\Big(I - zAX(I - zBF_Y)^{-1}\Big)^{-1} \\ &= (I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y^{\varphi})^{-1}\Big(I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y\Big)\Big(I - zAX - zBF_Y\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

我们利用 (4.18)、(6.30) 和 (6.21) 得出结论。 □

**注 6.16**。 利用 (6.20)，我们可以将 (6.23) 写成

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = \beta_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big(I - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}_Y^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\Big)^{-1}\Big(I - \mathring{\beta}_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi})\mathring{\beta}_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})\Big)\beta_Y^{b,\psi}(\mathbf{\Psi})^{-1}E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]. \tag{6.29}$$

**命题 6.17**。 采用定理 *4.16* 的记号和假设，我们有 $e$

$$\varphi(E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]) = (I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y)^{-1}. \tag{6.30}$$

由此我们得到

$$\overrightarrow{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = M_{AX+BY}^{\varphi}(z)\varphi(E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}])^{-1}E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]. \tag{6.31}$$

证明。 我们使用命题 4.13 和命题 6.13 中的恒等式。特别地，利用 (6.21) 和 (4.13)，可得

$$\begin{aligned} \varphi(E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]) &= \varphi\Big((I - zAX - zBF_Y)^{-1}\Big) \\ &= (I - zBF_Y)^{-1}\varphi\Big((I - zAX(I - zBF_Y)^{-1})^{-1}\Big) \\ &= H_Y\varphi((I - zAXH_Y)^{-1}) \\ &= H_Y M_X^{\varphi}(zAH_Y). \end{aligned}$$

现在，利用 $M_X^{\varphi}(zAH_Y) = (I - \eta_X^{\varphi}(zAH_Y))^{-1}$ 以及

$$\eta_X^{\varphi}(zAH_Y) = zA\tilde{\eta}_X^{\varphi}(zH_YA)H_Y = zAF_X^{\varphi}H_Y,$$

我们得到

$$\begin{aligned} \varphi(E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]) &= H_Y\Big(I - \eta_X^{\varphi}(zAH_Y)\Big)^{-1} \\ &= H_Y(I - zAF_X^{\varphi}H_Y)^{-1} \\ &= \Big((I - zAF_X^{\varphi}H_Y)H_Y^{-1}\Big)^{-1} \\ &= \Big(H_Y^{-1} - zAF_X^{\varphi}\Big)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \Big(I - zAF_X^{\varphi} - zBF_Y\Big)^{-1},$$

其中最后一个等式用到了 (4.13)。 □

## 7. $c$-FREE MULTIPLICATIVE CONVOLUTION

本节的目标是展示，作为本文所述研究成果的一项应用，如何计算两个 $c$自由随机变量乘积的分布。此外，我们还重现了来自 [22]的$Popa\text{-}Wang$ $\Sigma$-变换 的乘法性。

**命题 7.1.** 设$(\mathbb{C}\langle X, Y\rangle, \varphi, \psi)$ 为一个双态非交换概率空间，满足 $X$ 和 $Y$ 是 $c$-自由的。则 $XY$ 关于 $\varphi$ 的矩生成函数为

$$M_{XY}^{\varphi}(z) = \frac{1}{1 - z\tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z))\tilde{\eta}_Y^{\varphi}(\omega_Y(z))}, \tag{7.1}$$

其中， $\omega_X(z)$和 $\omega_X(Y)$分别是 $X$ 和 $Y$关于 $\psi$的自由乘法卷积的从属函数。此外，若令 $\Sigma^{\varphi} = \tilde{\eta}^{\varphi} \circ (\eta^{\psi})^{-1}$，则

$$\Sigma_{XY}^{\varphi} = \Sigma_X^{\varphi} \cdot \Sigma_Y^{\varphi}. \tag{7.2}$$

证明。 为了计算矩生成函数 $M_{XY}^{\varphi}(z)$，我们考虑

$$\mathbf{\Psi} := (1 - zXY)^{-1} = 1 + zXY\mathbf{\Psi} \tag{7.3}$$

因此 $M_{XY}^{\varphi}(z) = \varphi(\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}])$。容易计算出以下块导子:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_X\mathbf{\Psi} &= z\mathbf{\Psi} \otimes XY\mathbf{\Psi} \\ &= \mathbf{\Psi} \otimes (\mathbf{\Psi} - 1) \end{aligned} \qquad \vec{\delta}_Y\mathbf{\Psi} = z\mathbf{\Psi}X \otimes Y\mathbf{\Psi}$$

利用 (7.3) 中的预解式恒等式，我们可以采用定理 6.9 中较简单的递推关系 (6.11)，从而得到

$$\begin{aligned} \vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] &= 1 + z\,\vec{E}_X^{\varphi}[XY\mathbf{\Psi}] \\ &= 1 + zXE_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}] + z\beta_X^{b,\varphi} \otimes (\vec{E}_X^{\varphi} - E_X^{\psi})\vec{\delta}_Y[XY\mathbf{\Psi}]. \end{aligned}$$

经过简短计算可得

$$\vec{\delta}_Y[XY\mathbf{\Psi}] = \mathbf{\Psi}X \otimes Y\mathbf{\Psi}$$

因此

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] + z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\Big(\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] - E_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}]\Big) \tag{7.4}$$

定理 6.9 中关于 $\vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}]$ 的递推关系 (6.10) 与关于 $E_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}]$的递推关系 (6.7) 相同。这意味着:

$$\begin{aligned} \vec{E}_X^{\varphi}[Y\mathbf{\Psi}] &= \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}) + z\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[XY\mathbf{\Psi}] \\ &= \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] \end{aligned} \tag{7.5}$$

and

$$E_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}] = \beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]. \tag{7.6}$$

因此，将 (7.5) 和 (7.6) 代入 (7.4)，可得

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] + z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\Big(\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})\,\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] - \beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]\Big),$$

这意味着

$$\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}] = \frac{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})}{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})}E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] \tag{7.7}$$

现在，我们考察上述等式右侧的因子 $E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]$ 。由自由递推关系 (6.7) 和 (7.6) 可得

$$\begin{aligned} E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] &= 1 + zXE_X^{\psi}[Y\mathbf{\Psi}] \\ &= 1 + zX\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] \end{aligned}$$

并求解

$$E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}] = \left(1 - z\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})X\right)^{-1}. \tag{7.8}$$

由此可得

$$\omega_X(z) = z\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi}) \tag{7.9}$$

是从属函数，也就是说， $\omega_X(z)$ 满足

$$M_{XY}^{\psi}(z) = M_X^{\psi}(\omega_X(z)).$$

类似地，我们有

$$E_Y^{\psi}[\mathbf{\Psi}] = \left(1 - z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}X)Y\right)^{-1} \tag{7.10}$$

and

$$\omega_Y(z) = z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}X). \tag{7.11}$$

下一步是推导从属函数 $\omega_X(z)$ 和 $\omega_Y(z)$ 的方程组。首先注意，展开式 $\mathbf{\Psi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(XY)^n z^n$ 中的所有项都是交替词，且交替中的每个字母块长度为一。特别地，这意味着 $\beta^{b,}{}_Y{}^{\psi}(Y\mathbf{\Psi}) = \beta^{\delta,}{}_Y{}^{\psi}(Y\mathbf{\Psi})$。因此

$$\omega_X(z) = z\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi}) = z\beta_Y^{\delta,\psi}(Y\mathbf{\Psi}).$$

现在，由于 $\partial_Y(\mathbf{\Psi}) = z\mathbf{\Psi}X \otimes \mathbf{\Psi}$ and，我们可以通过归纳法证明

$$\partial_Y^n(Y\mathbf{\Psi}) = z^{n-1}1 \otimes (\mathbf{\Psi}X)^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{\Psi} + z^n Y\mathbf{\Psi}X \otimes (\mathbf{\Psi}X)^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{\Psi}.$$

那么，由 (4.5) 可得

$$\begin{aligned} \omega_X(z) &= z\beta_Y^{\delta,\psi}(Y\mathbf{\Psi}) \\ &= z\tilde{\eta}_Y^{\psi}(z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}X)) \\ &= z\tilde{\eta}_Y^{\psi}(\omega_Y(z)). \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\omega_Y(z) = z\tilde{\eta}_X^{\psi}(\omega_X(z)).$$

对 $\beta^{b,}{}_X{}^{\varphi}(\mathbf{\Psi}X)$ 和 $\beta^{b,}{}_Y{}^{\varphi}(Y\mathbf{\Psi})$ 进行类似的论证，但现在使用 (4.6)，可得

$$\begin{aligned} \beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X) &= \beta_X^{\delta,\varphi}(\mathbf{\Psi}X) \\ &= \tilde{\eta}_X^{\varphi}(z\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})) \\ &= \tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}) &= \beta_Y^{\delta,\varphi}(Y\mathbf{\Psi}) \\ &= \tilde{\eta}_Y^{\varphi}(z\beta_X^{b,\psi}(\mathbf{\Psi}X)) \\ &= \tilde{\eta}_Y^{\varphi}(\omega_Y(z)). \end{aligned}$$

最后，我们可以将上述恒等式代入 (7.7)，从而得到

$$M_{XY}^{\varphi}(z) = \varphi(\vec{E}_X^{\varphi}[\mathbf{\Psi}])$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})}{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})}\varphi(E_X^{\psi}[\mathbf{\Psi}]) \\
&= \frac{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})}{1 - z\beta_X^{b,\varphi}(\mathbf{\Psi}X)\beta_Y^{b,\varphi}(Y\mathbf{\Psi})}M_X^{\varphi}(z\beta_Y^{b,\psi}(Y\mathbf{\Psi})) \\
&= \frac{1 - z\tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z))\frac{\omega_X(z)}{z}}{1 - z\tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z))\tilde{\eta}_Y^{\varphi}(\omega_Y(z))}M_X^{\varphi}(\omega_X(z)).
\end{aligned}
$$

回忆一下，$M_X^{\varphi}(s) = (1 - \eta_X^{\varphi}(s))^{-1}$ 以及 $\eta_X^{\varphi}(s) = s\tilde{\eta}_X^{\varphi}(s)$。令 $s = \omega_X(z)$，即可得出 (7.1)：

$$
M_{XY}^{\varphi}(z) = \frac{1}{1 - z\tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z))\tilde{\eta}_Y^{\varphi}(\omega_Y(z))}.
$$

现在我们证明（7.2）。根据 [4, 定理 3.2]，，可知

$$
\begin{aligned}
\eta_{XY}^{\psi}(z) &= \eta_X^{\psi}(\omega_X(z)) \\
&= \eta_Y^{\psi}(\omega_Y(z)).
\end{aligned}
$$

如果令 $u = \eta_{XY}^{\psi}$（$z$），则

$$
\begin{aligned}
\omega_X(z) &= (\eta_X^{\psi})^{-1}(u) \\
\omega_Y(z) &= (\eta_Y^{\psi})^{-1}(u).
\end{aligned}
$$

此外，我们有

$$
\begin{aligned}
\eta_{XY}^{\psi}(z) &= \tilde{\eta}_X^{\psi}(\omega_X(z))\omega_X(z) \\
&= \tilde{\eta}_X^{\psi}(\omega_X(z))z\tilde{\eta}_Y^{\psi}(\omega_Y(z)).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\tilde{\eta}_{XY}^{\psi}(z) = \tilde{\eta}_X^{\psi}(\omega_X(z))\tilde{\eta}_Y^{\psi}(\omega_Y(z))
$$

从而

$$
\tilde{\eta}_{XY}^{\psi} \circ (\eta_{XY}^{\psi})^{-1}(u) = \tilde{\eta}_X^{\psi} \circ (\eta_X^{\psi})^{-1}(u) \cdot \tilde{\eta}_Y^{\psi} \circ (\eta_Y^{\psi})^{-1}(u).
$$

另一方面，由 (7.1) 可推得，$\varphi$ 下 $XY$ 的 $\tilde{\eta}$ 变换为

$$
\tilde{\eta}_{XY}^{\varphi}(z) = \tilde{\eta}_X^{\varphi}(\omega_X(z))\tilde{\eta}_Y^{\varphi}(\omega_Y(z)).
$$

再次令 $u = \eta_{XY}^{\psi}(z)$，我们得出

$$
\tilde{\eta}_{XY}^{\varphi} \circ (\eta_{XY}^{\psi})^{-1}(u) = \tilde{\eta}_X^{\varphi} \circ (\eta_X^{\psi})^{-1}(u) \cdot \tilde{\eta}_Y^{\varphi} \circ (\eta_Y^{\psi})^{-1}(u)
$$

令 $\Sigma^{\varphi} = \tilde{\eta}^{\varphi} \circ (\eta^{\psi})^{-1}$ 后，这便重现了 [22, 引理 2.1]，也正是 (7.2)。 □

## References


[1] O. Arizmendi、T. Hasebe、F. Lehner 和 C. Vargas。非交换概率中累积量之间的关系。《*Adv. Math.*》，282：56–92，2015。[2]M. Barnabei、A. Brini 和 D.-K. Rota。M¨obius 函数理论。《*Uspekhi Mat. Nauk*》，41(3(249))：113–157，1986。[3] S. T. Belinschi。具有无界支撑的测度的 c-自由卷积。载于锡比乌的冯·诺依曼代数，第10卷《Theta Ser. Adv. Math.》，第1–7页。Theta，布加勒斯特，2008。[4] S. T. Belinschi 和 H. Bercovici。自由概率中从属结果的新方法。《*J. Anal. Math.*》，101：357–365，2007。[5] S. T. Belinschi、T. Mai 和 R. Speicher。算子值自由加法卷积的解析从属理论及一般随机矩阵问题的解。《*J. Reine Angew. Math.*》，732：21–53，2017。[6] S. T. Belinschi 和 A. Nica。$\eta$-级数与有界 $k$-元组的布尔型 Bercovici-Pata 双射。《*Adv. Math.*》，217(1)：1–41，2008。[7] P. Biane。具有自由增量的过程。《*Math. Z.*》，227(1)：143–174，1998。

[8] P. Biane 和 M. Josuat-Verg`es。非交叉分拆、布鲁哈特序与簇复形。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，69(5)：2241–2289，2019。[9] M. Bo˙zejko、M. Leinert 和 R. Speicher。条件自由随机变量的卷积与极限定理。《太平洋数学杂志》，175(2)：357–388，1996。[10] M. Bo˙zejko 和 R. Speicher。$\psi$-独立与对称化白噪声。载于《量子概率与相关主题》，QP-PQ，VI，第219–236页。世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，1991。[11] K. Ebrahimi-Fard 和 F. Patras。条件自由累积量的群论方法。载于《代数组合学、重求和、模与应用》（CARMA），第67–92页。欧洲数学会出版社有限公司，2020。[12] M. Fevrier、M. Mastnak、A. Nica 和 K. Szpojankowski。利用布尔累积量研究自由随机变量的乘法与反对易子。《美国数学会汇刊》，373：7167–7205，2020。[13] M. Fevrier、A. Nica 和 K. Szpojankowski。通过重叠测度与 $c$-自由性技术实现自由去噪，2024。arXiv:2412.20792。[14] R. Fisher。抽样分布的矩与乘积矩。《伦敦数学会会刊》第二辑，30：199–238，1929。[15] D. Jekel 和 W. Liu。由树定义的非交换独立性欧拉德。《数学论文集》，553：100，2020。[16]F. Lehner。自由累积量与连通分拆的计数。《欧洲组合学杂志》，23(8)：1025–1031，2002。[17] F. Lehner 和 K. Szpojankowski。自由概率中的布尔累积量与从属。《随机矩阵：理论与应用》，10(4)：论文编号2150036，46页，2021。[18] F. Lehner 和 K. Szpojankowski。自由积分演算，2023。arXiv:2311.04039。[19]N. Muraki。作为准普适积的五种独立性。《无限维分析、量子概率及相关主题》，5(1)：113–134，2002。[20] A. Nica。非交叉链接分拆、NC($n$)上的偏序与 $S$-变换。《美国数学会会刊》，138(4)：1273–1285，2010。[21] P. Petrullo 和 D. Senato。凯罗夫多项式的显式公式。《代数组合杂志》，33(1)：141–151，2011。[22] M. Popa 和 J.-C. Wang。关于乘法条件自由卷积。《美国数学会汇刊》，363(12)：6309–6335，2011。[23] L. Saulis 和 V. A. Statulevi˘cius。大偏差极限定理，《数学及其应用》（苏联丛书）第73卷。克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1991。译自1989年俄文原版并经修订。[24] R. Speicher。非交叉分拆格上的乘法函数与自由卷积。《数学年刊》，298(4)：611–628，1994。[25] M. Takesaki。冯·诺依曼代数中的条件期望。《泛函分析杂志》，9：306–321，1972。[26] M. Takesaki。算子代数理论 I。施普林格出版社，纽约-海德堡，1979。[27] A. V. Werde 和 J. Sanders。通过普适性研究具有马尔可夫依赖的矩阵和的尖锐集中，2023。arXiv:2307.11632v2。

（A. Celestino） Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstr. 62, 48149Münster, Germany, ORCID: 0000-0003-3444-5000电子邮箱: adrian.celestino@uni-muenster.de（F. Lehner） Institut für Diskrete Mathematik, Technische Universität Graz, Steyr-ergasse 30, A-8010 Graz, Austria, ORCID: 0000-0002-6902-5148电子邮箱：lehner@math.tu-graz.ac.at（K. Szpojankowski） Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, ul.Sniadeckich 8, 00-656 Warszawa, Poland, and Faculty of Mathematics and InformationScience, Warsaw University of Technology, Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, Poland., ORCID: 0000-0003-0926-1285电子邮箱：kamil.szpojankowski@pw.edu.pl