arXiv:2603.21406v1 [cs.CC] 22 Mar 2026

稠密伊辛模型近似计数的临界窗口

Andreas Galanis* Daniel ˇStefankoviˇc† Eric Vigoda‡

2026年3月24日

摘要

我们研究临界区域内稠密伊辛模型配分函数近似计算的复杂性。Chen、Chen、Yin 和 Zhang 的近期工作（FOCS 2025）证明了临界性下的快速混合，甚至在宽度为 $N^{-1/2}$ 的窗口内超越临界性也能快速混合。我们通过证明几乎紧的困难性界，补充了这些算法结果，从而首次为近似计数的计算复杂性确定了一个尖锐的标度窗口。

具体而言，对于稠密伊辛模型，我们证明，在宽度为 $N^{-1/2+\varepsilon}$ 的窗口内，对于任意常数 $\varepsilon > 0$，近似计算配分函数都是计算困难的。由于底层构件中的涨落更大，适用于非临界区域的标准困难性归约在临界性下会失效，从而导致界不够紧。我们通过一种全局方法克服这一障碍：汇总所有构件中的涨落，而不是要求每个构件都分别满足紧的集中保证。这种新方法给出了临界窗口的最优指数。

1 引言

相变通常伴随着临界窗口：临界点附近的一段狭窄参数区间，在该区间内，系统的整体行为会随系统规模变化而迅速改变。这些窗口内微妙的行为一直是概率论与统计学中的一项重大挑战，近来又成为

*牛津大学计算机科学系。电子邮箱：andreas.galanis@cs.ox.ac.uk。

†罗切斯特大学计算机科学系。电子邮箱：stefanko@cs.rochester.edu。研究部分由美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号 CCF-1563757。

‡加利福尼亚大学圣塔芭芭拉分校计算机科学系。电子邮箱：vigoda@ucsb.edu。研究部分由美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号 CCF-2147094。为实现开放获取，作者已将本投稿所产生的任何作者接收稿版本置于知识共享署名许可（CC BY）公共版权许可之下。本文结果部分提供了全部数据。

采样与近似计数领域的新前沿。本文研究伊辛模型的临界窗口，重点关注其对计算复杂性的影响。

给定一个对称相互作用矩阵 $J \in \mathbb{R}^{N\times N}$，伊辛模型是由 $\mu_J(\sigma) \propto \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^\top J\sigma\right)$ 定义的概率分布 μ_J，适用于所有 $\sigma \in \{-1, +1\}^N$。我们将 J的各项称为权重。归一化常数 $Z_J = \sum_{\sigma\in\{+1,-1\}^N} \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^\top J\sigma\right)$ 称为配分函数。通常，J 取为某个图 G的邻接矩阵再乘以一个参数进行缩放；在这种情况下，μ_J 也可以视为定义在该图的割上的加权分布。研究最广泛的情形之一是 N 顶点完全图，其中每条边的权重为 $\frac{\beta}{N}$，而 $\beta > 0$ 称为逆温度。我们将重点研究 J 为半正定（psd）且其谱范数有界于某个常数的情形，具体而言，当 $\|J\|_2 \approx 1$ 时，这刻画了稠密图的临界性。[1]

对于完全图，人们早已知道，当临界点 $\beta_c = 1$处的 N不断增大时，该模型会发生相变。对于构型 $\sigma \in \{-1, +1\}^N$，令 $m_\sigma = \sum_{i\in[N]} \sigma_i$ 表示 σ的所谓磁化强度。当 $\beta < \beta_c$ 时，熵占主导，相关性较弱，因此典型样本 $\sigma \sim \mu_J$ 中的 ±1自旋大致平衡，并满足 $|m_\sigma| = O(N^{1/2})$。当 $\beta > \beta_c$时，相互作用占主导，并涌现长程有序；具体而言，典型的 $\sigma \sim \mu_J$ 偏向“+ 相”或“- 相”，其中 $|m_\sigma| = \Theta(N)$。因此，远离临界性时，底层系统的行为是可预测的。然而，在临界性附近，对于 $\beta = 1 \pm O(\frac{1}{N^{1/2}})$，上述高温和低温原理不再适用；相反，它们共同导致一种呈现非平凡标度行为的混合现象：典型样本 $\sigma \sim \mu_J$ 中的 ±1 自旋数量仍大致平衡，但 $|m_\sigma| = O(N^{3/4})$，也就是说，自旋的涨落量级为 $N^{3/4}$。

理解临界窗口区间一直是近似计数/采样中的一项关键挑战。关于非临界情形，已有大量研究成果，但适用于临界性的研究却寥寥无几，尤其是针对更一般的图类。就马尔可夫链而言，已有研究表明，在完全图上 [LLP10, DLP09]，标准 Glauber 动力学的混合时间在 $\beta < 1$, $O(N^{3/2})$ 时为 $O(N\log N)$，在 $\beta = 1$ 时为 $e^{\Omega(N)}$，而在 $\beta > 1$ 时为 [LNNP14, CDL+12]。相关结果另见 GˇSV19, BS15, BGZ25, BS25, HJP23] 。在二维格点上也得出了类似但证明更为精细的马尔可夫链结果 [MOS94, LS12, GL18]。

从算法/复杂度视角来看，一般相互作用矩阵情形下的研究进展 J 直到最近才取得，而这得益于谱独立性理论 [ALO20]。具体而言，对于具有一般相互作用矩阵 J的伊辛模型情形，[AJK+22，EKZ22] 证明了当 $\|J\|_2 < 1$时，Glauber动力学能够快速混合；而 [GKK24，Kun24] 证明了当 $\|J\|_2 > 1$时，近似采样/计数是困难的。请注意，条件 $\|J\|_2 = 1$ 恰好对应于完全图上的临界值 $\beta_c = 1$ 。针对稀疏伊辛模型（例如定义在

[1]注意，对 J 加上单位矩阵的一个标量倍数不会改变伊辛分布；因此，要求 J 为半正定且 $\|J\|_2 \approx 1$，等价于考虑谱直径（即 J的最大特征值与最小特征值之差）大致等于 1 的矩阵 J。

有界度图 d）也发展出了一系列类似的技术；其定性图景与之类似，但相关的相变与正则树和随机正则图的关系更为密切。

尽管在非临界区域取得了这些进展，但人们似乎仍难以理解临界性下的复杂度。Chen、Chen、Yin 和 Zhang[CCYZ25] 的近期工作然而取得了重大突破，表明当 $\|J\|_2 = 1$ 时，Glauber 动力学具有快速混合性质；他们还在稀疏图上的伊辛模型和硬核模型中证明了类似结果。尤其是在本文所考虑的稠密情形下，他们甚至将结果推广到了临界区域之外，并证明对于任意固定常数 $\alpha > 0$，混合时间为 $O(N^{3/2}\log N)$，当 $\|J\|_2 \le 1 + \frac{\alpha}{N^{1/2}}$。

我们证明了一个几乎匹配的困难性结果，从而首次揭示了近似问题计算复杂度存在尖锐的缩放窗口。

定理 1. 任取一个任意小的常数 $\varepsilon > 0$。当 $\|J\|_2 \le 1 + \frac{1}{N^{1/2-\varepsilon}}$ 时，在 $N \times N$ 半正定矩阵 J 上近似伊辛配分函数是 *NP*-困难的，即使近似因子为 $\exp(N^c)$，其中 $c = c(\varepsilon) > 0$ 是一个仅依赖于 ε 的常数。

我们指出，远离临界性时，有时可以证明近似困难性达到 $\exp(\Omega(N))$ 因子。但对于我们在此考虑的临界情形，情况并非如此：对于任意 $\eta > 0$ 和 $\|J\|_2 = 1 + \eta$，令 $\hat{J} = \frac{1}{1+\eta} J$，可得 $\|\hat{J}\|_2 = 1$ 且 $Z_J / Z_{\hat{J}} = \exp(\Theta(N\eta))$。随后，可以利用 [CCYZ25] 的临界情形算法，在多项式时间内近似计算 $Z_{\hat{J}}$，进而近似计算 Z_J。对于 $\eta = \frac{1}{N^{1/2-\varepsilon}}$，这尤其意味着可以对 Z_J 得到 $\exp(\Theta(N^{1/2+\varepsilon}))$ 因子的近似，即使对于满足 $\|J\|_2 = 1 + \frac{1}{N^{1/2-\varepsilon}}$、且属于定理 1 适用范围的矩阵 J 也是如此。

对于稀疏 Ising 模型和硬核模型，Chen、Chen、Yin 和 Zhang [CCYZ25]（另见 [CJ25]）证明了对于最大度为 Δ 的任意图，在临界性处 Glauber 动力学均具有多项式混合时间。此外，这些工作推测，多项式混合性质可扩展至宽度为 $N^{-1/2}$ 的窗口；但现有证明方法无法越过临界点，因此尚未确立标度窗口。因此，在稀疏情形下为算法结果或困难性结果确立标度窗口，是一个引人入胜的开放问题。

2 证明概述

在本节中，我们假设 $\|J\|_2 = 1 + \eta$ 对于某个较小的 $\eta > 0$。在给出不可近似性结果的证明之前，先说明 [GKK24] 针对非临界情形的归约方案会更有帮助：在该情形下，η 是一个（较小的）常数；而在我们的情形中，若允许 η 依赖于 N，该方案便会遇到问题。我们指出，这种归约方案的思路可追溯至 [DFJ02、Sly10、SS14] 关于计数独立集的研究，此后一直成为后续工作中建立配分函数近似困难性的主要范式。

归约的关键在于利用完全图上的相变来编码 MAX-CUT。该相变发生于 $\beta > \beta_c = 1$（对应于 $\|J\|_2 > 1$）。为与下一节的记号保持一致，令 t 表示图中的顶点数。回想一下，在此参数范围内，典型构型 $\sigma \in \{-1, +1\}^t$ 要么偏向 +1，要么偏向-1；也就是说，磁化强度 m_σ 以关于 σ的高概率满足 $m_\sigma = \Omega(t)$。更准确地说，对每个常数 $\beta > 1$，都存在 $b = b(\beta) > 0$，使得

$$\Pr\left[m_\sigma = bt + o(t)\right] = \tfrac{1}{2} + o(1) \text{ and } \Pr\left[m_\sigma = -bt + o(t)\right] = \tfrac{1}{2} + o(1).$$

该归约利用这种双峰性来编码 3-正则图上的 MAX-CUT。因此，将 G 的每个顶点替换为一个 t 个顶点的完全图副本；对于 G 的每条边，在相应构件副本之间放置一个大小为 r 的不相交匹配，并在这些边上赋予负权重 $-\gamma$，其中 $\gamma > 0$ 足够小，从而使最终图的谱范数由构件的谱范数主导。[2] 其思路是，每个构件都可以处于 + 相或 − 相（从而编码一个割划分），而相邻构件之间边 r 上的负权重则倾向于使两者处于不同的相。更准确地说，对于每个相指派 $Y = \{-, +\}^V$，与该相指派一致的构型对配分函数的总贡献正比于 $c^{r|\mathrm{CUT}(Y)|}$；当 γ 足够小时，有 $c = 1 + 2(2b-1)^2\gamma + o(\gamma^2)$（例如可由 [GKK24 附录 A.1] 中的论证推导得到）。关键在于，对于固定的 $\beta > 1$，c 是一个远小于 1 的常数，因此只需令连接数 r 足够大，就能使最大割的贡献占主导。

这一论证中有两个相互牵制的瓶颈：

1. 构件之间的连接需要放大相位分歧，使最大割的贡献压过次优割；在实践中，这要求构件之间的连接数 r 足够大，从而使$c^r = 1 + \Omega(1)$。

2. 另一方面，构件之间的连接数又必须足够少，以免这些连接造成的涨落干扰构件的相。事实上，为了利用相指派的权重完成计算，要求每个构件内连接的端点在给定相的条件下彼此独立。这使得端口数相对于构件的总规模只能是一个较小的多项式。对于非临界情形，例如 $r = o(\sqrt{t})$，要保证这种条件独立性，这一点绝对必不可少。

–

对于非临界情形，b 朝向该相的偏差与 0 保持一定距离，因此 c大于 1 且为常数，从而 r 可以取为任意小的常数。然而，对于临界情形，这些瓶颈要平衡起来就棘手得多：当 $\beta = 1 + \eta$

[2] 例如，令 $\beta = 1 + \Theta(\eta)$ 和 $\gamma = \Theta(\eta)$，即可得到 $\|J\|_2 \le \beta + 6\gamma = 1 + O(\eta)$。

对于某个较小的 η，b 大致为 $-\frac{1}{2}+\Theta(\sqrt{\eta})$，取 $\gamma=\Theta(\eta)$（参见脚注 2），可得 c 为 $1+\Theta(\eta^2)$。为了确保 $c^r=\Omega(1)$，因此必须满足 $r>1/\eta^2$。对于 $\eta=t^{-1/2+\varepsilon}$，这已经与要求 2) 严重冲突。沿着这一路径能得到的最佳界是对于 $\|J\|_2\le 1+N^{-1/4+\varepsilon}$不可近似；即便如此，由于临界性导致集中性较弱（众数附近的衰减是四次而非二次的），第 2) 部分的论证仍出乎意料地需要十分谨慎。因此，要得到一个紧的窗口，我们需要一种根本不同的方法。

我们获得最优窗口的方法出乎意料地直接。我们完全放弃了维持或证明此前归约中使用的强形式条件独立性（见上文条目 2）。摆脱这一限制后，我们便可以利用构件的整体偏置来控制它与其他构件的相互作用，进而通过在构件之间放置完全二分图，放大相位分歧。我们付出的代价是，构件带来的涨落可能极其巨大（达到 $O(t)$），并可能意外地改变某个割的贡献。

幸运的是，我们可以从更宏观的角度把握其中的情况。具体而言，我们记录每个构件的偏置 b_v；对于每个向量 $\{b_v\}_{v\in V}$，我们都可以写出一个显式的解析表达式 Φ，以刻画其对配分函数的贡献。于是，粗略地说，我们的目标是证明 b_v 在主导向量中对应的符号能够得到一个值较大的割。关键步骤之一（见引理 5）是证明在最优点处，每个 b_v 实际上都不超过 $t^{3/4+O(\varepsilon)}$，而非上文提到的最坏情形 $O(t)$；请注意，这与人们预期构件在临界区域内的表现一致。有了这一结果，证明的其余部分便相对简洁，只需通过一些仔细的估计恢复正确的渐近行为，并控制近优割与次优割之间的差距。

3 困难性证明

如上一节所述，归约的出发点是以下结果：对于 3-正则图，近似求解其最大割的大小至常数因子是 APX-困难的 [AK97]。令 $G=(V,E)$ 为一个 3-正则图。令 $n=|V|$ 和 t 为一个稍后确定的正偶数（我们将取 $t=n^C$ 为一个充分大的常数 C）。

定义 2。设 β,γ 为正实数。对于图 $G=(V,E)$ 和偶数 t，令$G_t(\beta,\gamma)=(V\times[t],E')$，其中在 E' 中有

- 一条权重为 β 的边，连接(v,i) 和(v,j)，对每个 $v\in V$和每个 $i\neq j\in[t]$,
- 一条权重为 $-\gamma$ 的边，连接(u,i) 和(v,j)，对每个 $\{u,v\}\in E$和每个 $i,j\in[t]$。

我们将 v 的“云”定义为由顶点（v，1）...，（v，t）组成。

考虑具有上述权重的 $G_t = G_t(\beta, \gamma)$ 上的伊辛模型。注意，每个云内部的相互作用为正，不同云之间的相互作用为负。此外， G_t 上的伊辛构型与 G上的割之间存在一种自然对应关系：我们令对应的割包含顶点 v ，使得 v 的云中自旋之和为 ≤ 0 （割另一侧的顶点的自旋之和为 > 0；这种对应关系中的轻微不对称并不重要，因为 t 会很大）。

对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\tau > 1$，我们将证明存在一组 β、γ 和 t，使得：1）若能高效地近似 G_t上的伊辛模型配分函数，就能得到一个高效算法，用于获得 τ的最大割的 G-近似；2）伊辛模型在$N \times N$（其中 $N = nt$）上的相互作用矩阵 J的谱直径为 G_t $\leq 1 + N^{-1/2+\varepsilon}$ （回顾一下，谱直径是J的最大特征值与最小特征值之差，参见脚注 1）。更准确地说，我们将证明如下结论。

定理 3。对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\tau > 1$，存在 c、$C > 0$，使得对于所有充分大的 n，都存在 β、$\gamma > 0$，满足以下结论。

对于任意具有 n 个顶点的 3-正则图 $G = (V, E)$，令 $G_t = G_t(\beta, \gamma)$ 为定义 2 中具有 $t = n^C$ 的伊辛实例，并令 J 为其 $N \times N$ 相互作用矩阵，其中$N = nt = n^{C+1}$ 是 G_t 中的顶点数。那么， J 的谱直径为$\leq 1 + N^{-1/2+\varepsilon}$。此外，对于任意满足 $A \geq \tau|E|/2$ 的 A，存在 T_1、$T_2 > 0$，使得 $T_1/T_2 \geq exp(2N^c)$：

1. 对于任意最大割大小为 $\geq A$ 的 G，配分函数 Z_J 为 $\geq T_1$；2. 对于任意最大割大小为 $\leq \frac{A}{\tau}$ 的 G，配分函数 Z_J 为 $\leq T_2$。

数值 β、γ、T_1、T_2 可在 $poly(n)$ 时间内计算。

定理3 立即推出定理 1。

定理 1 的证明。任取 $\varepsilon > 0$。根据 [AK97], 的 APX-困难性结果，存在一个明确的常数 $\tau > 1$，使得以下 MAX-CUT 的间隙版本为 NP-困难。输入为一个含有 n 个顶点的 3-正则图 $G = (V, E)$，以及一个满足 $A \geq \tau|E|/2 = 3\tau n/4$ 的数 A。已知 G 满足以下两种情况之一：(a) 最大割大小为 A；或 (b) 所有割的大小均为 $\leq A/\tau$；目标是判定属于哪一种情况。令 C、$c > 0$ 为定理 3 中的常数。我们将展示如何使用一个多项式时间算法判定 MAX-CUT 的间隙版本：该算法以满足 $\|J\|_2 \leq 1 + \frac{1}{N^{1/2-\varepsilon}}$ 的 $N \times N$ 半正定矩阵 J 为输入，并返回配分函数 Z_J 的一个近似值，其误差因子不超过 $\exp(N^c)$。

具体而言，对于输入 G 和 A，我们令 $t = n^C$ 和 $N = nt = n^{C+1}$，并按照定理 3 计算数值 β，γ，T_1，$T_2 > 0$。然后，构造由定义 2 给出的伊辛问题实例 $G_t = G_t(\beta, \gamma)$。根据定理3， G_t的相互作用矩阵 J 的维数为 $N \times N$，谱直径为 $\leq 1 + N^{-1/2+\varepsilon}$。令 $\hat{J} = J - \lambda I$，其中 J 的最小特征值为 λ，可得 J 是半正定矩阵，且其 2-范数等于 J 的谱直径；我们还有 $Z_{\hat{J}} = KZ_J$，其中 $K := \exp(-\frac{1}{2}\lambda N)$。注意到，可以在 $poly(n)$ 时间内以足够的精度计算 λ（以及由此得到的 K）。

假设我们能够以优于 $R = \exp(N^c)$ 的因子近似伊辛模型在 G_t 上的配分函数 $Z_{\hat{J}}$，即得到 Z，使得 $Z\hat{}_J/Z \in [1/R, R]$。那么， KZ 是配分函数 Z_J 的一个近似值，其因子优于 R。此外，利用 $T_1/T_2 \geq \exp(2N^c)$，我们有 $K\hat{}Z/R \geq T_1$ 和 $T_2 \geq K\hat{}ZR$ 中恰有一个成立。在前一种情况下，我们可以得出结论： $Z_J \geq T_1$；而在后一种情况下，我们可以得出结论：$T_2 \geq Z_J$。也就是说，对于 G ，我们可以区分情形 (a) 和 (b)（因为根据定理 3 的陈述，我们可以区分 G_t 的情形 1) 和 2)）。 □

我们先引入证明定理 3 所需的记号。设 $G = (V, E)$ 是一个含有 n 个顶点的 3-正则图。再设 t 是一个偶整数，且 $\beta, \gamma > 0$ 是实数，具体取值将在后文给出。最后，考虑定义 $G_t = G_t(\beta, \gamma)$ 中的图，并设 2其相互作用矩阵为 J。

给定一个向量 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$ （其中 $|b_v| \leq t/2$ 对于 $v \in V$），考虑一个构型 σ：在 v的云中，有 $t/2 + b_v$ 个顶点的自旋为 +1，其余 $t/2 - b_v$个顶点的自旋为 -1。这样的构型数量为

$$\prod_{v\in V} \binom{t}{t/2 + b_v}, \tag{1}$$

因为我们可以在每个云中独立于其他云，选择自旋为 +1 的顶点。

对于 v 对应的云，其中 σ 里的同色边数量为

$$\binom{t/2 + b_v}{2} + \binom{t/2 - b_v}{2} = 2\binom{t/2}{2} + b_v^2,$$

而异色边的数量为 $(t/2 + b_v)(t/2 - b_v)$；两者之差为 $2b_v^2 - t/2$。类似地，在 σ 中， u 和 v 对应的云之间的同色边数量为

$$(t/2 + b_v)(t/2 + b_u) + (t/2 - b_v)(t/2 - b_u) = t^2/2 + 2b_u b_v,$$

而双色边的数量为 $t^2/2 - 2b_u b_v$；因此两者之差为 $4b_u b_v$。由此可得 $\exp(\frac{1}{2}\sigma^T J\sigma)$ 等于

$$K \exp\Big(2\beta \sum_{v\in V} b_v^2 - 4\gamma \sum_{\{u,v\}\in E} b_u b_v\Big), \tag{2}$$

其中 $K := \exp(-\frac{1}{2}\beta nt)$ 与 σ 无关。配分函数 Z_J因此等于

$$Z_J = K \sum_{\mathbf{b}} \Big(\prod_{v\in V} \binom{t}{t/2 + b_v}\Big) \exp\Big(2\beta \sum_{v\in V} b_v^2 - 4\gamma \sum_{\{u,v\}\in E} b_u b_v\Big), \tag{3}$$

其中 求和遍历 $[-t/2, t/2]$ 中所有元素为整数的向量 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$。

对于 $x \in [0,1]$，令 $H(x) = -(x \ln x + (1-x)\ln(1-x))$ 为熵函数，并约定 $0 \ln 0 \equiv 0$。对于实数 $b \in [-t/2, t/2]$，进一步令

$$Q(b) := 2\beta b^2 + t\, H\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{b}{t}\right) \geq 2\beta b^2 + \log \binom{t}{t/2+b}, \tag{4}$$

且对于 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v \in V}$，其条目属于 $[-t/2, t/2]$ let

$$\Phi(\mathbf{b}) = \sum_{v \in V} Q(b_v) - 4\gamma \sum_{\{u,v\} \in E} b_u b_v.$$

函数 $\Phi(\mathbf{b})$ 粗略地刻画了规格为 $\{b_v\}_{v \in V}$ 的构型对配分函数的贡献的对数，将 (1) 和 (2) 结合起来（注意，根据 (4) 中最后一个不等式，我们有 $\Phi(\mathbf{b})$ 实际上是该贡献对数的上界）。

Let $\hat{b} \in (0, t)$。我们将取

$$\beta = \frac{1}{4\hat{b}} \ln \frac{t + 2\hat{b}}{t - 2\hat{b}}. \tag{5}$$

ˆ使得 b 是将 $Q(b)$ 限制在 $b \geq 0$ 上时的最大值点。注意，平衡构型（即正自旋和负自旋数量相等的构型）具有

$$Q(0) = t \ln 2, \tag{6}$$

a而在云上具有最大似然的构型（大致）具有

$$\begin{aligned} Q(\hat{b}) &= t \ln 2 - \frac{t}{2}\Big((1 + \hat{b}/t)\ln(1 + 2\hat{b}/t) + (1 - \hat{b}/t)\ln(1 - 2\hat{b}/t)\Big) \\ &= t \ln 2 + \frac{4}{3}\frac{\hat{b}^4}{t^3} + O\left(\frac{\hat{b}^6}{t^5}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

在归约中，我们需要使 $Q(0)$ 和 $Q(\hat{b})$ 的值之间存在较大（随 t 增长）的差距——这将迫使我们取 $\hat{b} = \omega(t^{3/4})$。（直观地说，函数 Q 描述了伊辛模型在一个云上的行为，两个最大值 $\hat{}\,\hat{}Q(b)$ 和 $Q(-b)$ 描述了两个相，而 $Q(0)$ 处的低谷则将这两个相分隔开。）

引理 4. 对于任意 $\hat{} \; b \in (0, t)$ 以及 $\beta = \frac{1}{4\hat{b}} \ln \frac{t+2b}{t-2b}$ ˆˆ如 (5)所示， $Q(b)$ 在ˆ上关于 $b \in [0, t/2]$ 的最大值唯一在 $b = b$处取得。 (4)

证明。我们有

$$\frac{\partial}{\partial b} Q(b) = 4\beta b - \ln \frac{t + 2b}{t - 2b}. \tag{8}$$

要使（8）为零，我们需要满足

$$\beta t = \frac{1}{2}\frac{t}{2b}\ln\frac{1+2b/t}{1-2b/t}.$$

我们将证明函数

$$y \mapsto \frac{1}{y}\ln\frac{1+y}{1-y} \tag{9}$$

ˆ 在 $[0,1]$ 上递增，因此存在唯一的临界 b （并且我们选择 β ，使得 b 是临界的）。

(9) 的导数为

$$\frac{2}{y(1-y^2)} - \frac{1}{y^2}\ln\frac{1+y}{1-y},$$

我们将证明该式在 (0,1) 上为正。只需证明以下表达式递增

$$\frac{2y}{(1-y^2)} - \ln\frac{1+y}{1-y}, \tag{10}$$

因为在 $y=0$ 处的值为 0。(10) 的导数

$$\frac{4y^2}{(1-y^2)^2} > 0,$$

对 $y \in (0,1)$ 成立。 □

ˆ令 ˆ$u \in (b,\ t)$。我们将取满足以下条件的 γ

$$\beta + 3\gamma = \frac{1}{4\hat{u}}\ln\frac{t+2\hat{u}}{t-2\hat{u}}. \tag{11}$$

ˆ 注意，由于 (9) 在 (0，1) 上是递增函数，且我们选择了 ˆ$u > b$ ，因此有 $\gamma > 0$。

γ 的参数化方式经过选择，使得 ˆu 能够界定 $\Phi(\mathbf{b})$（局部）极大值点的无穷范数；下面的引理将对此作出严格说明。

引理 5. 设 β，γ 由 (5) 和 (11)给出。设 $\{a_v\}_{v\in V}$ 满足 $a_v \in \{\pm 1\}$ 对每个 $v \in V$均成立。假设 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$ 在约束条件 $\Phi(\mathbf{b})$ 下最大化 $a_v b_v \geq 0$ ，其中 $v \in V$ （也就是说， b_v的符号由 a_v给定）。那么

$$\max_{v\in V}|b_v| \leq \hat{u}. \tag{12}$$

证明。 令$\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$ 为一个最大值点。不失一般性， b_1 的绝对值最大，且$b_1 > 0$。令

$$S = \sum_{u;\{u,1\}\in E} b_u. \tag{13}$$

注意到 $S \in [-3b_1, 3b_1]$ （因为 G 是一个3-正则图，且 b_1 是其他 $|b_u|$的界）。将Φ 视为 b_1 的函数，我们有

$$\Phi(b_1) = Q(b_1) - 4\gamma S b_1 + R, \tag{14}$$

其中 R 和 S 不依赖于 b_1。由于 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$ 是一个最大值点，且 b_1 不在边界上，我们必有

$$\frac{\partial}{\partial b_1}\Phi(b_1) = 4\beta b_1 + 4\gamma S - \ln\frac{1+2b_1/t}{1-2b_1/t} = 0. \tag{15}$$

我们有

$$\frac{1}{4b_1}\ln\frac{1+2b_1/t}{1-2b_1/t} = \beta + \gamma S/b_1 \le \beta + 3\gamma = \frac{1}{4\hat{u}}\ln\frac{1+2\hat{u}/t}{1-2\hat{u}/t},$$

并且由于 (9) 是递增的，我们得出 $b_1 \le \hat{u}$。 □

定理 *3* 的证明。 我们将设

$$t = n^C, \qquad \hat{b} = t^{3/4+\delta} \quad \text{and} \quad \hat{u} = \hat{b} + t^{3/4+\delta'}$$

其中 $C > 0$ 较大，而 $\delta > \delta' > 0$ 较小；事实上，我们取 $\delta = \varepsilon/6$， $\delta' = \varepsilon/12$，$C = \lceil 3/\varepsilon \rceil$ 和 $c = 1/(C+1)$，但这只有到后面才会用到。 β 的值由 (5) 给出，而 γ 的值由 (11) 给出。对于 $x \le 1/2$ ，我们有

$$(1/x)\ln\frac{1+x}{1-x} \le 2(1+x^2);$$

通过积分，这可由 $2/(1-x^2) \le 2(1+x)(1+3x)$ 对于 $x \in [0, 1/2]$ 得出。因此，对于充分大的 n，我们可以将其用于 $x = 2b/t \le 1/2$ （根据我们对 t 和 b的选择），从而得到

$$\beta = \frac{1}{2t}(1/(2\hat{b}/t))\ln\frac{1+2\hat{b}/t}{1-2\hat{b}/t} \le \frac{1}{t} + 8t^{-3/2+2\delta}. \tag{16}$$

将 b 和 $\hat{u}$ 的定义代入（11），得到

$$\gamma = \frac{8}{9}t^{-3/2+\delta+\delta'} + o(t^{-3/2+\delta+\delta'}). \tag{17}$$

接下来，我们根据 G 的割的大小，给出配分函数 Z_J 的界。回顾一下，

$$Z_J = K\sum_{\{b_v\}_{v\in V}}\left(\prod_{v\in V}\binom{t}{t/2+b_v}\right)\exp\left(2\beta\sum_{v\in V}b_v^2 - 4\gamma\sum_{\{u,v\}\in E}b_u b_v\right), \tag{3}$$

其中 求和遍历所有在 $[-t/2, t/2]$ 中具有整数分量的向量 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$。

首先，假设 G 的最大割大小为 A，并固定一个特定的 G 最大割。回想一下，我们假设 $A \geq \tau|E|/2 \geq (3/4)n$。对应于该最大割的 G_t 上的伊辛构型对配分函数的贡献至少为以下值

$$T_1 = K\binom{t}{t/2+\hat{b}}^n \exp\left(2\beta n\hat{b}^2 + 4\gamma\hat{b}^2(2A-(3/2)n)\right). \tag{18}$$

现在假设所有 G 割的大小至多为 A/τ。回顾式（4），有 $Q(b) \geq 2\beta b^2 + \log\binom{t}{t/2+b}$。配分函数至多为

$$T_2 = K(t+1)^n \exp\left(nQ(\hat{b}) + 4\gamma\hat{u}^2(2A/\tau-(3/2)n)\right), \tag{19}$$

因为式（ $\{b_v\}_{v\in V}$中 3）的选择数至多为（$t+1$）^{n} （ b_i 的符号决定了相应的割），而任意选择 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$ 对配分函数的贡献至多为

$$K \exp\left(nQ(\hat{b}) + 4\gamma\hat{u}^2(2A/\tau-(3/2)n)\right). \tag{20}$$

为说明最后一个结论为何成立，考虑一个向量 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$，它对配分函数的贡献最大。对于每个 i， b_i 的符号都与 $\sum_{u\text{ 的符号相反}\{u,i\}\in E} b_u$；否则，翻转 b_i 的符号就会增大其贡献。根据引理 5，在 $\mathbf{b} = \{b_v\}_{v\in V}$的最优选择中，所有项的绝对值都小于 $\hat{}u$。因此，式（20）中的上界适用，因为 $nQ(b)$ 是 $\sum_{v\in V} Q(b_v)$ 项的上界（对每一项应用引理4 ），而将所有 b_v 都设为 $\hat{}u$则是剩余项的上界。

为了完成证明，还需证明 $\log\ T_1 - \log\ T_2 \geq 2N^c$，以及 J 的谱直径小于 $1+N^{-1/2+\varepsilon}$。我们先证明第一个不等式。我们将使用以下二项式系数下界

$$\ln\binom{t}{t/2+b} \geq tH(1/2+b/t) - \ln(t+1). \tag{21}$$

利用（21）以及（ T_1 ）中的表达式（18），可得

$$\log T_1 \geq \log K + nQ(\hat{b}) - n\log(t+1) + 4\gamma\hat{b}^2(2A-(3/2)n).$$

结合（ T_2 ）中的表达式（19），可得

$$\log T_1 - \log T_2 \geq -2n(\log(t+1)) + 4\gamma\left(\hat{b}^2(2A-(3/2)n) - \hat{u}^2(2A/\tau-(3/2)n)\right). \tag{22}$$

我们可以对其进行界定

$$\begin{aligned}&\hat{b}^2(2A-(3/2)n) - \hat{u}^2(2A/\tau-(3/2)n) \geq 2A(\hat{b}^2-\hat{u}^2/\tau)\\ &= 2A\hat{b}^2(1-1/\tau) + 2A(\hat{b}^2-\hat{u}^2)/\tau \geq C'n\left(t^{3/2+2\delta} + O(t^{3/2+\delta+\delta'})\right),\end{aligned}$$

其中， C' 是一个依赖于 τ 的常数。结合式（17），可得

$$4\gamma\left(\hat{b}^2(2A-(3/2)n)-\hat{u}^2(2A/\tau-(3/2)n)\right)\geq C'n\big(t^{3\delta+\delta'}+o(t^{3\delta+\delta'})\big),$$

由此可知，根据（22），当 n 较大时，$\log T_1 - \log T_2 \geq 2n \geq 2N^c$（回顾 $N=tn=n^{C+1}$ 和 $c=\frac{1}{C+1}$）。

接下来需要界定相互作用矩阵 J的谱直径。我们可以将 J写成 J_1+J_2，其中 J_1 是一个分块对角矩阵，包含 n 个大小为 $t\times t$ 的块，块内填有 β，而J_2 是一个矩阵，其（v，i）项等于（u，j）项，且该项等于 $-\gamma$，如果 $\{u,v\}\in E$（其余项均为零）。根据（16），我们有

$$\|J_1\|_2 = t\beta \leq 1+8t^{-1/2+2\delta}.$$

注意到 J_1 是一个半正定矩阵，因此其谱直径不超过其 2-范数（回顾一下，对称矩阵的谱直径是最大特征值与最小特征值之差）。此外，根据（17），我们还有

$$\|J_2\|_2 \leq 3t\gamma = (24/9)t^{-1/2+\delta+\delta'}+o(t^{-1/2+\delta+\delta'})$$

因此， J_2 的谱直径不超过（$48/9$）$t^{-1/2+\delta+\delta'}+o$（$t^{-1/2+\delta+\delta'}$）。结合这两个界可得，$J=J_1+J_2$ 的谱直径不超过

$$1+8t^{-1/2+2\delta}+o(t^{-1/2+2\delta}).$$

矩阵 J 的维度为 $N\times N$，其中 $N=tn=n^{C+1}$。因此， J 的谱直径关于 N 的上界为

$$1+N^{-1/2+2\delta+1/(2(C+1))}+o(N^{-1/2+2\delta+1/(2(C+1))}).$$

由于 $\delta=\varepsilon/6$、 $\delta'=\varepsilon/12$和 $C=\lceil 3/\varepsilon\rceil$，我们得出 J 的谱直径为$\leq 1+N^{-1/2+\varepsilon}$，如所需。 □

参考文献

[AJK+22] Nima Anari、Vishesh Jain、Frederic Koehler、Huy Tuan Pham 和 Thuy-Duong Vuong。熵独立性：下上随机游走的最优混合。在第*54*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会论文集，第1418–1430页，2022年。[AK97] Paola Alimonti 和 Viggo Kann。三次图上问题近似的困难性。在意大利算法与复杂性会议，第288–298页，1997年。[ALO20] Nima Anari、Kuikui Liu 和 Shayan Oveis Gharan。高维扩张图中的谱独立性及其在硬核模型中的应用。在第*61*届*IEEE*计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集，第1319–1330页，2020年。[BGZ25] Antonio Blanca、Reza Gheissari 和 Xusheng Zhang。高熵初始状态下的平均场波茨模型与随机簇动力学。在*2025*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第5434–5467页，2025年。[BS15] Antonio Blanca 和 Alistair Sinclair。平均场随机簇模型的动力学。近似、随机化与组合优化：算法与技术（*RANDOM*），第528页，2015年。[BS25] Antonio Blanca 和 Zhezheng Song。完全图上 Swendsen-Wang 动力学的截断。在第*45*届*IARCS*软件技术基础与理论计算机科学年会（*FSTTCS*），第360卷 LIPIcs，第17:1–17:21页，2025年。[CCYZ25] Xiaoyu Chen、Zongchen Chen、Yitong Yin 和 Xinyuan Zhang。唯一性阈值处的快速混合。在第*57*届*ACM*计算理论研讨会（*STOC*）论文集，第879–890页，2025年。[CDL+12] Paul Cuff、Jian Ding、Oren Louidor、Eyal Lubetzky、Yuval Peres 和 Allan Sly。平均场波茨模型的Glauber动力学。《统计物理学杂志》，149(3):432–477，2012年。[CJ25] Zongchen Chen 和 Tianhui Jiang。临界硬核模型的混合改进。在第*29*届国际随机化与计算会议（*RANDOM*）论文集，第51:1–51:22页，2025年。[DFJ02] Martin Dyer、Alan Frieze 和 Mark Jerrum。关于稀疏图中独立集的计数。《*SIAM*计算杂志》，31(5):1527–1541，2002年。

[DLP09] Jian Ding、Eyal Lubetzky 和 Yuval Peres。平均场伊辛模型 Glauber动力学的混合时间演变。《数学物理通讯》，289(2):725–764，2009年。[EKZ22] Ronen Eldan、Frederic Koehler 和 Ofer Zeitouni。谱隙的谱条件：高温 Ising 模型中的快速混合。《概率论及相关领域》，182(3):1035–1051，2022年。[GKK24] Andreas Galanis、Alkis Kalavasis 和 Anthimos Vardis Kandiros。关于满足谱约束的伊辛模型采样。载于第*28*届随机化与计算国际会议（*RANDOM*）论文集，第317卷 LIPIcs，第70:1–70:14页，2024年。[GL18] Reza Gheissari 和 Eyal Lubetzky。临界二维 Potts 模型的混合时间。《纯粹与应用数学通讯》，71(5):994–1046，2018年。[GˇSV19] Andreas Galanis、Daniel ˇStefankoviˇc 和 Eric Vigoda。平均场波茨模型上的 Swendsen-Wang算法。《随机结构与算法》，54(1):82–147，2019年。[HJP23] Tyler Helmuth、Matthew Jenssen 和 Will Perkins。随机图上随机簇模型的有限尺寸标度、相共存与算法。载于《亨利·庞加莱研究所年刊（*B*辑）：概率与统计》，第59卷，第817–848页，2023年。[Kun24] Dmitriy Kunisky。通用伊辛模型采样与自由能近似中 Glauber动力学的最优性。载于*2024*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第5013–5028页，2024年。[LLP10] David A Levin、Malwina J Luczak 和 Yuval Peres。平均场伊辛模型的 Glauber动力学：截断现象、临界幂律与亚稳态。《概率论及相关领域》，146:223–265，2010年。[LNNP14] Yun Long、Asaf Nachmias、Weiyang Ning 和 Yuval Peres。临界平均场 *Swendsen-Wang*动力学的 *1/4* 阶幂律，第232卷。美国数学会，2014年。[LS12] Eyal Lubetzky 和 Allan Sly。正方格子上的临界伊辛模型在多项式时间内混合。《数学物理通讯》，313(3):815–836，2012年。

[MOS94] Fabio Martinelli、Enzo Olivieri 和 Roberto H Schonmann。对于二维晶格自旋系统，弱混合蕴含强混合。《数学物理通讯》，165(1):33–47，1994年。[Sly10] Allan Sly。唯一性阈值处的计算转变。载于第*51*届*IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS*），第287–296页，2010年。[SS14] Allan Sly 和 Nike Sun。在 d正则图上的双自旋模型计数。《概率年刊》，42(6):2383–2416，2014年。