arXiv:2603.21451v1 [math.CA] 22 Mar 2026

# 黎曼流形上的谱合成

A. IOSEVICH、A. MAYELI 和 E. WYMAN

Abstract. 我们研究支撑在紧黎曼流形稀薄子集上的测度的谱合成。我们证明，在自然的非集中条件下，这类测度具有定量谱合成性质，并给出明确的稳定性界。

我们表明，这一现象在很大程度上取决于底层几何。在环面上，谱合成在广泛的假设下成立；而在球面上，我们建立了刚性结果，表明谱合成可能以严格的方式失效。

作为推论，我们获得了定量逼近结果，并为具有稀薄谱支集的函数建立了不确定性原理。这些结果提供了一个统一框架，将紧流形上的谱合成、几何结构与稳定性联系起来。

## 1. Introduction

谱综合是调和分析中的核心问题，关注如何从部分傅里叶数据重构函数或测度。经典理论在欧几里得空间中已得到充分理解，而在紧流形上，我们所知甚少；在这些流形中，曲率和整体几何起着决定性作用。

本文建立了关于支撑在紧黎曼流形稀薄子集上的测度的定量谱综合结果。我们的主要定理表明，在自然的非集中假设下，这些测度可以根据其傅里叶数据实现稳定重构。我们进一步证明，谱综合是否成立与底层几何密切相关：在环面上，这一现象具有稳健性；而在球面上，我们证明了体现根本障碍的刚性结果。

Agranovsky 和 Narayanan 的一个著名结果 [2] 断言，若 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，$d \geq 2$，且 $\widehat{f}$ 支撑在一个 $C^1$ 子流形 $S \subset \mathbb{R}^d$ 上，其维数为 $k$，$1 \leq k < d$那么，$f$ 就是零函数，前提是 $1 \leq p \leq \frac{2d}{k}$。此前，Agmon、H¨ormander、Thangavelu 等人也证明了类似结果；例如参见 [1], [7], 和 [11]。

本文旨在建立 Agranovsky–Narayanan 定理的紧流形类比，并突出一系列在欧几里得空间中没有对应现象的结果。设 $(M, g)$ 是一个紧致的 $d$ 维无边界黎曼流形。设 $\Delta_g$ 为拉普拉斯–贝尔特拉米算子，对每个谱参数 $\lambda$，记 $E_\lambda$ 为到 $\Delta_g$ 的 $-\lambda^2$ 特征子空间上的正交投影。当 $u$ 是 $M$ 上的一个分布，且 $\varphi \in C^\infty(M)$ 时，我们将 $\int_M u\,\varphi$ 理解为分布配对 $\langle u, \varphi\rangle$。当 $u$ 是一个

A.I. 的部分研究经费由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2506858。A.M. 的部分研究经费由美国国家科学基金会（项目编号 DMS-2453769）、AMS-Simons 研究提升基金及 PSC-CUNY 研究基金提供。E.W. 的部分研究经费由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2422900。

$M$ 上的分布时，我们定义

$$E_\lambda u = \sum_{\lambda_j=\lambda} \left( \int_M u\overline{e_j} \right) e_j.$$

我们的第一个结果是关于支撑在薄集上的测度的刚性结论。

**定理 1.1**。设 $M$ 是一个无边界紧黎曼流形，且 $u$ 是一个由 $M$ 中维数为 $k$ 的 $C^1$ 子流形承载的拉东测度，$1 \le k < d$。若

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|^p_{L^2(M)} < \infty$$

对于某个 $p$，满足 $2 \le p \le \frac{2d}{k}$，则 $u$ 恒等于 0。

为方便起见，我们记

$$\|u\|_{\widehat{\ell^p}} := \left( \sum_\lambda \|E_\lambda u\|^p_{L^2(M)} \right)^{1/p}.$$

注 1.2。定理1.1的证明表明，若假设 $f$ 是支撑在$M$ 中某个上闵可夫斯基维数为 $k$ 的紧子集上的带符号测度，则论证仍可进行，直至端点。这与 Senthil Raani [9]给出的 Agranovsky–Narayanan 欧几里得推广相符。特别是，若支撑集的 $\delta$邻域的黎曼体积满足 $|E^\delta| \le C\delta^{d-k}$ 对所有充分小的 $\delta > 0$均成立，则端点情形也包含在内。

因此，定理 1.1 在适当的体积增长条件下可推广至具有分形性质的集合。

尽管我们通常以函数 $u \in L^2$来表述结果，但论证本身并不局限于这一情形。在许多情况下，相同的傅里叶比值界和谱估计也适用于有限测度，或更一般地，适用于其谱投影满足适当增长条件的分布。我们主要出于清晰和简洁的考虑而采用 $L^2$ 这一表述，但该框架无需实质性改动即可适用于更广泛的一类对象。

1.1. **唯一性与稳定性**。定理1.1 是紧流形上一个更稳健的综合原理中的唯一性部分。接下来的陈述为其补充了一个定量稳定性界，可将其理解为一种“信号恢复”原理：支撑在薄集上的$\widehat{\ }$信号若具有较小的 $\ell^p$ 谱含量，那么它在分布意义下也必然较小。

**定理 1.3 (**薄支撑信号的定量稳定性**)**。设 $u$ 是一个支撑在紧集 $E \subset M$ 上的（复）拉东测度，其上闵可夫斯基维数为 $k < d$。更确切地说，假设存在常数 $C_E$，使得对所有充分小的$\delta > 0$,

$$|E^\delta| \le C_E\, \delta^{d-k}, \tag{1.1}$$

其中，$E^\delta$ 表示 $M$ 中 $E$ 的 $\delta$邻域，$|\cdot|$ 表示黎曼体积。

取定 $p$，使得 $2 < p \lessdot \frac{2d}{k}$，并记

$$\|u\|_{\widehat{\ell^p}} := \left( \sum_\lambda \|E_\lambda u\|^p_{L^2(M)} \right)^{1/p}.$$

$\widehat{}$那么存在一个偶施瓦茨函数 $\psi$，满足 $\psi$，其支撑集包含于 $[-1,1]$，且 $\psi(0) = 1$; 还存在一个常数 $C = C(M, g, \psi, C_E, p)$，使得对于每个 $R \geq 1$ 以及每个测试函数$\chi \in C^\infty(M)$，

$$|\langle P_R u, \chi\rangle| \leq C \|u\|_{\widehat{\ell^p}} \|\chi\|_{L^\infty(M)} R^{\frac{k}{2}-\frac{d}{p}}, \tag{1.2}$$

其中 $P_R := \psi(\sqrt{-\Delta_g}/R)$。特别地，如果 $\|u\|_{\widehat{\ell^p}}$ 很小，那么所有低通重构$P_R u$ 在尺度 $R \gtrsim 1$ 上都一致地很小，且关于 $R$ 有明确的衰减率。

备注 1.4（与信号恢复的关系）。 尽管本文关注的是紧流形上的谱合成与几何刚性，定理 1.3 中的定量稳定性估计仍可自然地解释为反问题中的稳健可辨识性原理。事实上，对于测度 $u$ 其支撑集位于薄集 $E$ 上，且满足邻域体积界（1.1），该定理表明，只要谱 $P_R u$ 质量足够小，低频重构就会一致地很小，且谱 $\ell^p$ 质量 $u$ 具有关于 $R$的明确衰减率。等价地，在薄支撑信号这一类中，映射 $u \mapsto P_R u$ 在所有尺度 $R \gtrsim 1$上于分布意义下稳定。

这一视角表明，此处提出的方法应适用于流形上的一系列信号恢复问题，例如，在支撑集满足结构性假设的情况下，利用部分或粗略的谱信息进行恢复。本文不探讨这些方向。

1.2. **对流形上压缩感知的启示。** 定理 1.3 中的定量稳定性估计可视为流形上压缩感知保证的确定性先导结果。在欧几里得压缩感知中，只要信号的傅里叶变换满足适当的衰减或非相干条件，空间稀疏的信号便可通过少量随机傅里叶测量恢复 [4, 3]。

在我们的设定中，测度 $u$ 支撑于薄集 $E$ 上，且 $\|u\|_{\widehat{\ell^p}}$ 较小时，本质上具有空间稀疏和谱可压缩的特性。定理 1.3 表明，其低频投影 $P_R u$ 很小，这一性质表明，在不完整的谱测量下仍具有稳定性。

更具体地说，如果只观测谱系数的一个随机子集 $\{\langle u, e_j\rangle\}_{j\in J}$，其中 $J$ 是特征函数指标的随机集合，那么估计

$$\left|\langle P_R u, \chi\rangle\right| \lesssim \|u\|_{\widehat{\ell^p}} R^{\frac{k}{2}-\frac{d}{p}} \|\chi\|_{L^\infty(M)}.$$

这意味着，除非 $u$ 的支撑集足够厚，否则其能量无法集中在高频处，从而限制了欠采样可能导致的混叠伪影。

特征函数增长参数 $A(\lambda$（Theorem1.13中出现）所起的作用类似于经典压缩感知中感知字典的相干性。具有有界 $A(\lambda)$ 的流形（例如平坦环面）表现出最理想的不相干性，而球面上的 $A(\lambda) \sim \lambda^{(d-1)/2}$则处于更具挑战性的高相干性区域。因此，我们的结果提供了几何判据，可为流形上高效采样方案的设计提供参考：薄空间支撑与适度的特征函数增长，有利于利用少量谱测量实现稳定恢复。

一个自然的后续问题是：对谱系数进行随机欠采样，是否能够通过 $\ell^1$–最小化实现稳定恢复？所需的测量数量又如何取决于支撑集的维数 $k$ 及其增长 $A(\lambda)$？我们计划在未来的研究中探讨这一联系。

注 1.5（概念图景）。 本文的结果可以看作同一综合原理的体现：薄空间支撑会对谱质量的分布方式施加强约束。这一原理体现为刚性（定理 1.1）、定量稳定性（定理 1.3），以及后文中由傅里叶比支配的可压缩性／近似与不确定性现象。我们不试图在所述尖锐阈值之外建立一般的最优性理论，而是旨在提炼出适用于广泛紧流形类的稳健机制。

从概念层面看，本文的所有结果都由一个统一的结构机制支配：定量控制支撑在几何薄集上的分布的谱质量如何集中。核心结果是针对薄支撑测度的谱综合定理（定理1.1），它刻画了一个尖锐的情形，在此情形下，$\ell^p$ 谱投影的可和性迫使唯一性成立。定理1.3 中的稳定性估计是同一现象的定量体现，它通过在综合论证中保留显式误差项而得出。短谱和的逼近结果，以及涉及傅里叶比的不确定性原理，也体现了这种刚性，只不过它们从可压缩性而非消失的角度重新诠释了这一现象。球面例子揭示了一种极端几何情形，在其中这一机制的刚性达到最大，表明临界行为确实源于几何，而非欧几里得傅里叶分析的形式推广。

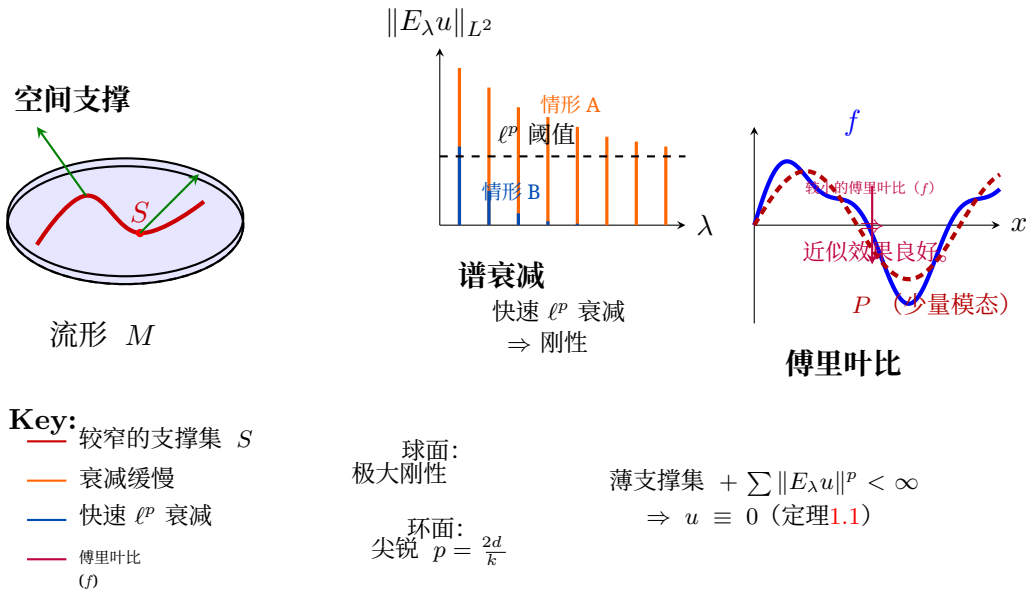


FIGURE 1. 紧致黎曼流形上谱综合的概念示意图 $M$。 **（左）**子流形上的薄支撑测度 $u$ 及其谱投影$S \subset M$。 **（中）**谱质量 $\|E_\lambda u\|_{L^2}$与频率 $\lambda$：快速 $\ell^p$ 衰减（情形 B）迫使 $u = 0$ 满足 $p \le 2d/k$ （定理 1.1）。 **（右）**傅里叶比 FR($f$) 控制短谱和的逼近（定理 1.9）。底部：关键概念与依赖几何的锐性。

为了说明前面的讨论，考虑情形 $M = \mathbb{T}^d$，即 $d$ 维环面。特征函数是指数函数 $e_j(x) = e^{2\pi i x \cdot j}$，因此对特征值有贡献的指标 $j$

特征值 $-\lambda^2$ 是

$$\left\{ j \in \mathbb{Z}^d : \sqrt{j_1^2 + \cdots + j_d^2} = \lambda \right\}.$$

因此， $E_\lambda$ 将信号投影到半径为 $\lambda$、其中 $\lambda$ 是非负整数平方根的球面上的频率上。在这种情形下，Agranovsky 和 Narayanan 在欧几里得情形中构造的锐性例子稍加改动即可适用；与此形成鲜明对比的是，如果特征函数呈现出较大的 $L^\infty$ 增长（某些流形上确实如此），那么合成阈值可能就失去了欧几里得意义。

1.3. **锐性与非锐性**。 Agranovsky 和 Narayanan [2] 证明了，当 $\frac{2d}{k}$ 的维数至少为 $S$ 时，指数 $\frac{d}{2}$ 通常是锐的。如果将本文情形中的 $\mathbb{R}^d$ 替换为 $\mathbb{T}^d$，也可以构造类似的例子。维数较小时，这种锐性可能不成立。例如，若 $S = \{(t, t^2, \ldots, t^d) : t \in [0,1]\}$ (或其微小$\widehat{\ }$扰动)，Guo、Iosevich、Zhang 和 Zorin-Kranich [6] 证明了，若 $f$ 由这条矩曲线上的光滑测度承载，且 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 对 $p < \frac{d^2+d+2}{2}$ 成立，则 $f$ 恒等于 0。我们即将看到，在黎曼情形下，经典估计缺乏锐性可能是由流形的底层几何所致。

与欧几里得空间和环面情形形成鲜明对比的是，以下结果表明，在球面上，合成现象变得极为僵化：不存在有限的锐性$L^p$ 阈值。

**命题 1.6** （球面上缺乏锐性）。 设 $M = S^d$ 为带标准度量的 $d$维球面， $u$ 为光滑嵌入子流形 $S$上的 $C^\infty$ 曲面承载测度。那么

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^p < \infty \qquad for\ some\ p < \infty$$

推出 $u = 0$。此外，若 $u \neq 0$，则

$$\sup_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)} < \infty$$

当且仅当 $S$ 是一个超曲面时成立。

**1.4. 关于 $S^2$ 的显式例子**。考虑带标准度量的 $M = S^2$ ，并令 $S$ 为赤道 $\{\theta = \pi/2\}$。令 $u = \delta_S$ 为 $S$上的归一化弧长测度。球谐函数 $Y_l^m (l > 0,\ |m| \le l)$ 构成 $L^2(S^2)$ 的标准正交基（相对于标准曲面测度），并且是拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数：

$$\Delta_{S^2} Y_l^m = -l(l+1) Y_l^m.$$

直接计算可知，只有 $m = 0$ 调和函数有贡献 ：

$$\langle u, Y_l^m \rangle = \begin{cases} 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0), & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

其中 $P_l$ 是勒让德多项式。因此，

$$\|E_{\sqrt{l(l+1)}} u\|_{L^2}^2 = \pi(2l+1)|P_l(0)|^2.$$

对于偶数 $l$，当 $l \to \infty$ 时，$\overline{|P_l(0)|} \sim \sqrt{2}/(\pi l)$，因此

$$\|E_{\sqrt{l(l+1)}}u\|_{L^2} \to 2, \quad (\text{as } l \to \infty).$$

因此，对于无穷多个 $\lambda$， $\|E_\lambda u\|_{L^2}$ 都被一个正的常数所下界。由于不同特征值的数量 $\lambda \le \Lambda$ 随 $\Lambda$ 线性增长，级数

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2}^p$$

对每个 $p < \infty$都发散，而 $u \neq 0$。这说明了命题 1.6 中所述的“极大刚性”：在球面上，没有任何有限的 $p$ 能够取代环面上有效的阈值 $p \le 2d/k$ 。

以下结论可直接由命题1.6推出。

**推论 1.7**。 设 $M = S^d$ 为配备标准度量的 $d$ 维球面，设$u$ 为定义在一个 $C^\infty$ 嵌入的 $k$ 维子流形 $S$ 上的 $C^\infty$ 曲面承载测度，且$1 \le k < d$ 并且

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^p < \infty$$

对于某个 $p < \infty$。那么， $u = 0$。

注记 1.8. 我们不知道是否可以合理地期待推论 1.7 能够推广到例如 $u \in L^1_{\text{loc}}(S^d)$。命题的证明使用了 Zelditch 的 Kuznecov 渐近求和公式，该公式的主项依赖于符号演算，并依赖于有限阶驻相展开。这导致结果在一定程度上依赖于导数。我们将在后续工作中详细研究这个问题。

1.5. **谱多项式逼近**。 定理 1.1和1.3 表明，对于支撑在一个薄子集上的信号，较小的谱可积性会迫使其具有唯一性与稳定性。我们的下一个结果表明，较小的谱“傅里叶比”意味着该信号可以在 $L^2(M$ 中被低复杂度的谱多项式很好地逼近。

Let

$$\|f\|_{\widehat{\ell}^1} := \sum_\lambda \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}, \qquad \mathrm{FR}(f) := \frac{\|f\|_{\widehat{\ell}^1}}{\|f\|_{L^2(M)}}.$$

**定理 1.9.** 令 $f$ 为 $M$ 上的一个非平凡 $\widehat{\ell}^1$ 函数。那么对每个满足以下条件的 $k$

$$k > \frac{\mathrm{FR}(f)^2 - 1}{\eta^2},$$

存在 $P$ 个 $k$ 特征函数（均来自同一特征子空间）的线性组合，在 $M$ 上满足

$$\|P - f\|_{L^2(M)} < \eta \|f\|_{L^2(M)}.$$

前述定理是单向的：较小的 FR($f$) 会带来谱可逼近性。在先验带限假设下，可以简洁地表述一个部分逆命题；该假设可防止误差的 $\widehat{\ell}^1$ 大小任意增大。

**定义 1.10** （带限函数）。 给定 $\Lambda > 0$，若对所有谱参数 $\lambda > \Lambda$ ， $\Lambda$-带限 $f \in L^2(M)$ 满足 $E_\lambda f \equiv 0$ （即 $f$ 在 $\Lambda$以上没有谱分量），则称其为 $\Lambda$。

**定理 1.11**（傅里叶比的带限反向界）。 固定 $\Lambda > 0$，并假设 $f \in L^2(M)$ 是 $\Lambda$-带限且非平凡的。假设存在由 $k$ 个拉普拉斯–贝尔特拉米特征函数构成的线性组合 $P$，使得

$$\|f - P\|_{L^2(M)} \le \eta \|f\|_{L^2(M)} \qquad \text{for some } 0 < \eta < 1.$$

令 $N(\Lambda) = \#\{j \in \mathbb{N}: \ \lambda_j \le \Lambda\}$ 为韦尔计数函数（计入重数）。那么

$$\mathrm{FR}(f) \le (1+\eta)\sqrt{k} + \eta\sqrt{N(\Lambda)}. \tag{1.3}$$

注 1.12. 不等式 (1.3) 在 $k \ll N(\Lambda)$ 且 $\eta$ 较小时才有意义：在这种情况下，强 $k$-项近似迫使傅里叶比$(f)$ 为 $\lesssim \sqrt{k}$。若没有带限假设，对于任意 $f$) $\lesssim \sqrt{k}$ 近似误差，都不可能成立形如傅里叶比$(\ L^2)$ 的界，因为误差的 $\widehat{\ell}^1$ 大小可能任意大。

**1.6. 傅里叶比的性质与不确定性原理。** 我们现在证明傅里叶比的上下界，并说明它是流形上的经典傅里叶不确定性原理变体中的一个控制参数。我们先给出一个下界。

**定理 1.13 (**尺度相关不确定性原理，带限版本**).** 假设存在一个非递减函数 $A: \ [0,\infty) \to (0,\infty)$，使得对每个拉普拉斯–贝尔特拉米特征函数 $\lambda$

$$\left(\sum_{\lambda_j=\lambda} |e_j(x)|^2\right)^{1/2} \le A(\lambda) \tag{1.4}$$

对所有 $x \in M$ 以及所有 $\lambda \in \mathrm{spec}(\sqrt{-\Delta_g})$。令 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为偶函数，并假设 $\widehat{\psi}$ 具有紧支撑。令 $C_\psi > 0$ 满足 $\inf\{t: \ |\psi(t)| > C_\psi\} > 0$，并再固定一个常数 $c_\psi > 0$，使得 $|\psi(t)| \ge c_\psi$ 对 $|t| \le C_\psi$成立。对于 $R \ge 1$，定义谱乘子

$$P_R = \psi\left(\frac{\sqrt{-\Delta_g}}{R}\right), \qquad P_R f = \sum_{\lambda} \psi(\lambda/R) E_\lambda f.$$

存在常数 $c_0$、$C_0 > 0$，它们仅依赖于 $(M$、$g)$ 和 $\psi$，并且满足以下结论。对于每个支撑在可测集 $E \subset M$ 上的 $f \in L^2(M)$ 以及每个 $R \ge 1$,

$$\mathrm{supp}(P_R f) \subset E_{C_0/R}.$$

进一步假设 $f$ 在尺度 $R$ 上是谱局部化的，即

$$E_\lambda f = 0 \qquad \text{whenever } |\lambda| > C_\psi R.$$

定义尺度为 $R$ 的局部傅里叶比如下

$$\mathrm{FR}_R(f) := \frac{\sum_\lambda |\psi(\lambda/R)| \, \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}}{\left(\sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \, \|E_\lambda f\|^2_{L^2(M)}\right)^{1/2}},$$

并定义特征函数增长参数

$$A_R := \sup\{A(\lambda) : \lambda \in \mathrm{spec}(\sqrt{-\Delta_g}), |\lambda| \le C_\psi R\}.$$

那么 $A_R < \infty$ 并且有下界

$$\mathrm{FR}_R(f) \geq \frac{c_0}{A_R R^{d/2}\sqrt{|E_{C_0/R}|}}. \tag{1.5}$$

注 1.14。在（1.4）中，量 $\sum_{\lambda_j=\lambda} |e_j(x)|^2$ 定义良好：对于 $\{e_j\}$ 的 $-\lambda^2$ 特征子空间的每个标准正交基，它的值都相同。事实上，如果 $E_\lambda$ 是到该特征子空间的正交投影，且 $\Pi_\lambda(x, y)$ 是 $E_\lambda$的施瓦茨核，那么

$$\Pi_\lambda(x,x) = \sum_{\lambda_j=\lambda} |e_j(x)|^2,$$

因此（1.4）可以写成与基无关的形式

$$\Pi_\lambda(x,x) \leq A(\lambda)^2 \qquad \text{for all } x \in M.$$

此外，$\Pi_\lambda(x, x)$可视为局域态密度：在 $M$ 上积分即可得到重数，

$$\mathrm{tr}(E_\lambda) = \int_M \Pi_\lambda(x,x)\, dV_g(x) = \dim\ker(\Delta_g + \lambda^2).$$

注 1.15。定理 1.13中的定量界隐含地依赖于特征函数增长假设

$$A(\lambda) \lesssim \lambda^a.$$

特别是，估计中的常数会随着指数 $a$ 的增大而变差。因此，具有更优特征函数界的流形会带来相应更强的定量结论。

注 1.16（对特征函数增长的依赖）。(1.5) 分母中的因子 $A_R R^{d/2}$ 反映了特征函数增长与谱集中共同作用的结果。在特征函数在 $L^\infty$ 上一致有界的流形上（例如平坦环面），有 $A_R \lesssim 1$，因此 $\mathrm{FR}_R(f) \gtrsim (R^{d/2}\sqrt{|E^{C_0/R}|})^{-1}$。在球面上，带谐函数达到 H¨ormander 界 $A(\lambda) \lesssim \lambda^{(d-1)/2}$，我们有 $A_R \lesssim R^{(d-1)/2}$，从而 $\mathrm{FR}_R(f) \gtrsim (R^{d-1/2}\sqrt{|E^{C_0/R}|})^{-1}$。常数 $c_0$ 取决于 $(M, g)$、$\psi$，以及 $A(\lambda)$ 增长界中的隐含常数。

注 1.17（全局与局部傅里叶比）。上述定义的傅里叶比 $\mathrm{FR}(f)$ 及其局部对应量 $\mathrm{FR}_R(f)$ 衡量的是相关但不同的谱集中概念。量 $\mathrm{FR}(f)$ 是全局的，涉及 $\sqrt{-\Delta_g}$的整个谱，并控制定理 1.9中所述的短谱和逼近。相较之下，$\mathrm{FR}_R(f)$ 刻画固定频率尺度 $R$ 上的谱集中，适用于尺度相关不确定性原理，例如定理1.13和1.18。本文的结果不假设也不要求 $\mathrm{FR}(f)$ 与 $\mathrm{FR}_R(f)$ 之间存在任何极限关系或单调关系。

我们的下一个结果给出了傅里叶比的上界。随后，我们将这个上界与定理 1.13 结合，得到经典傅里叶不确定性原理的一种变体。

**定理 1.18**。采用定理 *1.13*中的记号，存在常数 $c_0$，$C_0 > 0$（仅取决于 $(M, g)$ 和 $\psi$），使得以下结论成立。

（i）令 $0<\eta<1$，并令 $\Sigma_R \subset \operatorname{spec}(\sqrt{-\Delta_g})$ 为谱参数的一个子集。假设满足 $L^1$ 谱集中条件

$$\sum_{\substack{\lambda:\,|\psi(\lambda/R)|\neq 0\\ \lambda\notin\Sigma_R}} |\psi(\lambda/R)|\|E_\lambda f\|_{L^2(M)} \le \eta \sum_{\lambda} |\psi(\lambda/R)|\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

*Let*

$$M_R(\Sigma_R) = \#\{\lambda\in\Sigma_R : |\psi(\lambda/R)|\neq 0\}$$

表示 $\Sigma_R$ 中局部化谱参数的数量。于是

$$\mathrm{FR}_R(f) \le \frac{\sqrt{M_R(\Sigma_R)}}{1-\eta}.$$

(ii) 结合定理*1.13*和 (i) 可得

$$M_R(\Sigma_R)\,|E^{C_0/R}| \ge \frac{c_0^2}{A_R^2 R^d}(1-\eta)^2.$$

特别地，对于固定的 $\eta\in(0、1)$ 以及窗口上有界的特征函数增长（即 $A_R\lesssim 1$），$C_0/R$-加厚的空间体积与$\operatorname{supp} f$ 的活跃谱参数数量在 $\Sigma_R$ 中的乘积不可能任意小。

我们在附录A中汇总了全文所用的几何预备知识和标准谱事实。现在转而证明主要结果。

## 2. 主要结果的证明

我们先证明定理 1.3 （稳定性），再推出定理 1.1 对 $2<p<2d/k$成立，最后通过二进分解处理端点 $p=2d/k$。

### 2.1. 定理1.3的证明。

^证明。设 $\psi$ 是一个偶施瓦茨函数，且 $\psi$ 的支撑集包含于 $[-1,1]$，并且 $\psi(0)=1$，令

$$P_R\mu = \sum_{\lambda} \psi(\lambda/R)\,E_\lambda\mu.$$

^由于 $\psi$ 是偶函数且 $\psi$ 具有紧支撑集，我们可以写成

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \cos(t\lambda)\,\widehat{\psi}(t)\,dt,$$

因此，在函数演算的意义下，

$$P_R = \frac{R}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(Rt)\,\cos\!\big(t\sqrt{-\Delta_g}\big)\,dt.$$

由$(M,g)$上的波动方程的有限传播速度性质，存在一个常数 $C=C(M,g,\psi)>0$，使得若 $\operatorname{supp}\mu\subset E$，则

$$\operatorname{supp}(P_R\mu)\subset E^{C/R}.$$

由正交性及指数为 $q=\frac{p}{p-2}$ 和 $q'=\frac{p}{2}$ 的 H¨older 不等式，对 $p\gtrsim 2$（因此 $1-2/p>0$）可得

$$\|P_R\mu\|_{L^2(M)}^2 = \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \, \|E_\lambda \mu\|_{L^2(M)}^2$$
$$\leq \left( \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^{\frac{2}{1-\frac{2}{p}}} \right)^{1-\frac{2}{p}} \left( \sum_\lambda \|E_\lambda \mu\|_{L^2(M)}^p \right)^{2/p}.$$

由韦尔定律（A.1）以及 $\psi$ 的快速衰减，第一个因子为 $\lesssim R^{d(1-\frac{2}{p})}$（利用计数函数 $N(\Lambda) \lesssim \Lambda^d$ 并将该和与 $\int \psi(t)^q dN(Rt)$ 进行比较），因此

$$\|P_R\mu\|_{L^2(M)} \lesssim R^{\frac{d}{2}-\frac{d}{p}} \|\mu\|_{\widehat{\ell^p}}. \tag{2.1}$$

现在固定 $\chi \in C^\infty(M)$。利用 $\|\chi\|_{L^2(\operatorname{supp} P_R\mu)} \leq \|\chi\|_\infty |\operatorname{supp}(P_R\mu)|^{1/2}$，我们得到

$$|\langle P_R\mu, \chi\rangle| \leq \|P_R\mu\|_{L^2(M)} \, \|\chi\|_{L^2(\operatorname{supp} P_R\mu)} \leq \|P_R\mu\|_2 \, \|\chi\|_\infty \, |\operatorname{supp}(P_R\mu)|^{1/2}.$$

由 (1.1) 以及 $\operatorname{supp}(P_R\mu) \subset E^{C/R}$，可得

$$|\operatorname{supp}(P_R\mu)| \leq |E^{C/R}| \leq C_E \, (C/R)^{d-k} \lesssim R^{k-d}.$$

将此与 (2.1) 结合，得到

$$|\langle P_R\mu, \chi\rangle| \lesssim \|\mu\|_{\widehat{\ell^p}} \, \|\chi\|_\infty \, R^{\frac{d}{2}-\frac{d}{p}} \cdot R^{\frac{k-d}{2}} = \|\mu\|_{\widehat{\ell^p}} \, \|\chi\|_\infty \, R^{\frac{k}{2}-\frac{d}{p}}.$$

这正是 (1.2)。 □

2.2. **定理 1.1 的证明**。 我们首先在 $2 < p < \frac{2d}{k}$ 范围内证明定理 1.1 ，并假设满足邻域体积假设 (1.1)。端点情形随后单独处理。

**命题 2.1**。 设 $u$ 是定义在 $M$ 上且支撑集包含于某个紧集$E \subset M$ 中的（复 *Radon*）测度，满足 (1.1) 对某个 $k < d$成立，并假设

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^p < \infty$$

对于某个 $p$，有 $2 < p < \frac{2d}{k}$。于是 $u = 0$。

证明。固定 $\psi$ 如定理 1.3中所述，并定义 $P_R = \psi(\sqrt{-\Delta_g}/R)$。对于任意测试函数$\chi \in C^\infty(M)$，定理 1.3 给出

$$|\langle P_R u, \chi\rangle| \leq C \, \|u\|_{\widehat{\ell^p}} \, \|\chi\|_{L^\infty(M)} \, R^{\frac{k}{2}-\frac{d}{p}}.$$

Sin由于 $p \prec \frac{2d}{k}$，我们有 $\frac{k}{2} - \frac{d}{p} < 0$，因此右端在 $R \to \infty$ 时趋于 0 .

另一方面，由于 $\psi(0) = 1$ 且 $\psi$ 是施瓦茨函数，$P_R u \to u$ 弱收敛于 $R \to \infty$。因此 $\langle u, \chi\rangle = \lim_{R\to\infty} \langle P_R u, \chi\rangle = 0$ 对于每个光滑的 $\chi$ 都成立，故 $u = 0$。 □

**命题 2.2**。 设 $u$是定义在 $M$ 上的一个（复值、拉东）测度，其支撑集包含于满足（1.1）的集合中，其中 $k < d$，并且假设

$$\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^p < \infty$$

对于某个 $p$，满足 $2 < p \leq \frac{2d}{k}$。于是， $u = 0$。

这个命题与命题 2.1共同推出定理 1.1 ，如在范围 $2 \le p \le \frac{2d}{k}$ 中所述。

证明。令 $p_0 = \frac{2d}{k}$ 为端点。令 $\psi$ 如定理 1.3中所述，并定义

$$P_R u = \sum_{\lambda} \psi(\lambda/R)\, E_\lambda u.$$

与定理 1.3的证明中一样，$\mathrm{supp}(P_R u) \subset E^{C/R}$ 对某个 $C = C(M,g,\psi) > 0$成立，并且$P_R u \to u$ 弱收敛于 $R \to \infty$。

我们进行二进分解：

$$\begin{aligned}\|P_R u\|^2_{L^2(M)} &= \sum_{\lambda} |\psi(\lambda/R)|^2 \|E_\lambda u\|^2_{L^2(M)} \\ &= |\psi(0)|^2 \left|\int_M u\right|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} |\psi(\lambda/R)|^2 \|E_\lambda u\|^2_{L^2(M)},\end{aligned}$$

其中 $\lambda$ 对 $\sqrt{-\Delta_g}$的谱求和，并且我们将 $\overline{\lambda = 0}$ 项显式地提出。由于 $\sqrt{-\Delta_g}$ 的谱是离散的，关于 $j$ 的求和支撑在一个有下界的整数集合上。对于二进部分，记

$$\begin{aligned}&\sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} (2^j R)^{d-k} |\psi(\lambda/R)|^2 (2^j R)^{k-d} \|E_\lambda u\|^2_{L^2(M)} \\ &\qquad \le \left(\sup_{\tau\in(2^j,2^{j+1}]} (2^j R)^{d-k} |\psi(\tau)|^2\right) \sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} (2^j R)^{k-d} \|E_\lambda u\|^2_{L^2(M)} \\ &\qquad = R^k a_j b_j(R),\end{aligned}$$

其中

$$a_j = \sup_{\tau\in(2^j,2^{j+1}]} 2^{j(d-k)} |\psi(\tau)|^2 \qquad \text{and} \qquad b_j(R) = \sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} (2^j R)^{k-d} \|E_\lambda u\|^2_{L^2(M)}.$$

由 H¨older 不等式可得，

$$\begin{aligned}b_j(R) &\le (2^j R)^{k-d} \left(\sum_{R2^j < \lambda \le R2^{j+1}} 1\right)^{1-\frac{2}{p_0}} \left(\sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} \|E_\lambda u\|^{p_0}_{L^2(M)}\right)^{\frac{2}{p_0}} \\ &= (2^j R)^{k-d} (N(2^{j+1}R) - N(2^j R))^{1-\frac{2}{p_0}} \left(\sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} \|E_\lambda u\|^{p_0}_{L^2(M)}\right)^{\frac{2}{p_0}},\end{aligned}$$

其中 $N(\lambda)$ 是韦尔计数函数。根据韦尔定律（A.1），$N(2^{j+1}R) \lesssim (2^j R)^d$，因此

$$b_j(R) \lesssim (2^j R)^{d\left(1-\frac{2}{p_0}\right)-(d-k)} \left(\sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} \|E_\lambda u\|^{p_0}_{L^2(M)}\right)^{\frac{2}{p_0}}.$$

由于 $p_0 = \frac{2d}{k}$，我们有 $d(1-2/p_0) - (d-k) = 0$，所以

$$b_j(R) \lesssim \left( \sum_{2^j < \lambda/R \le 2^{j+1}} \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^{p_0} \right)^{\frac{2}{p_0}}.$$

由于 $\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_{L^2(M)}^{p_0} < \infty$，可知对于每个固定的 $j$，当 $R \to \infty$ 时，$b_j(R) \to 0$；并且 $|b_j(R)|$在 $R$ 和 $j$上均一致有界。由于 $\psi$ 是施瓦茨函数，$a_j$ 在 $j$ 和$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j < \infty$中快速衰减。根据控制收敛定理，并且由于 $d-k>0$,

$$R^{k-d}\|P_R u\|_{L^2(M)}^2 = R^{k-d}|\psi(0)|^2 \left| \int_M u \right|^2 + \sum_j a_j b_j(R) \to 0.$$

若 $\chi$ 是 $M$上的任意光滑测试函数,

$$|\langle P_R u, \chi\rangle|^2 \le \|P_R u\|_{L^2(M)}^2 \, |\operatorname{supp}(P_R u)| \lesssim \|P_R u\|_{L^2(M)}^2 \, R^{k-d} \to 0,$$

其中我们用到了 $|\operatorname{supp}(P_R u)| \le |E^{C/R}| \lesssim R^{k-d}$ 来自（1.1）。最后，由于 $P_R u \to u$ 弱收敛于 $R \to \infty$，我们得到 $\langle u,\ \chi\rangle = 0$ 对所有光滑的 $\chi$均成立，因此 $u = 0$。□

这里我们处理 p=2 的情形：若 $\sum_\lambda \|E_\lambda u\|_2^2 < \infty$，则谱系数属于 $\ell^2$。因此，$u$ 通过特征函数基定义了一个 $L^2$ 函数。由于任何支撑于维数为 $k<d$ 的子流形上的 $L^2$ 函数都必须为零，而该子流形的 $d$-体积为零，所以得到 $u=0$。这就完成了 $p=2$ 情形的证明。

## 2.3. **命题的证明1.6**。

证明。令 $u = f\delta_S$，其中 $f$ 是光滑函数，$\delta_S$ 是$S$上的诱导体积测度。那么,

$$\|E_\lambda u\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda_j = \lambda} \left| \int_S f\overline{e_j} \right|^2,$$

其中 $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ 是拉普拉斯–贝尔特拉米特征函数的标准正交基，且

$$\Delta_g e_j = -\lambda_j^2 e_j, \qquad \lambda_j \ge 0.$$

Zelditch [12], 的一个非常一般的结果给出了渐近公式

$$\sum_{\lambda_j \le \lambda} \left| \int_S f\overline{e_j} \right|^2 = C\lambda^{d-k} + O(\lambda^{d-k-1}), \tag{2.2}$$

其中首项常数 $C>0$由 $S$、$f$和 $M$确定。

前面的设定适用于一般流形；现在我们将讨论范围限定在球面 $S^d$ 上。球面上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱，更确切地说是 $\sqrt{-\Delta_g}$，为

$$\left\{ \sqrt{n(n+d-1)} : n \in \mathbb{Z},\ n \ge 0 \right\}.$$

固定 $T$ 为充分大的值，并注意，对于充分大的 $\lambda$,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_j\in(\lambda,\lambda+T]}\left|\int_S f\overline{e}_j\right|^2 &= C((\lambda+T)^{d-k}-\lambda^{d-k})+O(\lambda^{d-k-1})\\ &= CT\lambda^{d-k-1}+O(\lambda^{d-k-1})\\ &\gtrsim \lambda^{d-k-1}.\end{aligned}$$

谱中至多有 $T$ 个点落在区间 $(nT,(n+1)T]$ 内。因此，根据鸽巢原理，存在 $\lambda'\in(nT,(n+1)T]$，使得

$$\|E_{\lambda'}u\|_{L^2}^2=\sum_{\lambda_j=\lambda'}\left|\int_S f\overline{e}_j\right|^2\gtrsim\frac{1}{T}\lambda^{d-k-1}.$$

这立即得出命题的第一个结论。注意到以下事实即可得出第二个结论

$$\sum_{\lambda_j\le\lambda}\left|\int_S f\overline{e}_j\right|^2=\sum_{\lambda'\le\lambda}\|E_{\lambda'}u\|_{L^2}^2\le\left(\sup_{\lambda'\le\lambda}\|E_{\lambda'}u\|_{L^2}^2\right)\#\{\lambda'\in\operatorname{spec}(\sqrt{-\Delta_g}):\lambda'\le\lambda\},$$

而在球面上，$\#\{\lambda'\in\operatorname{spec}(\sqrt{-\Delta_g}):\lambda'\le\lambda\}\simeq\lambda$ （不同的谱参数线性增长），从而得到

$$\sum_{\lambda_j\le\lambda}\left|\int_S f\overline{e}_j\right|^2\lesssim\left(\sup_{\lambda'}\|E_{\lambda'}u\|_{L^2}^2\right)\lambda,\qquad\lambda\gg1.$$

与（2.2）比较可知 $d-k\le1$，即 $k\ge d-1$，因此 $S$是一个超曲面。这证明了必要性；注意到在 $d-k=1$ 的情形下，由（2.2）可知，充分性成立：

$$\|E_\lambda u\|_{L^2}^2\le\sum_{\lambda_j\in(\lambda-1,\lambda]}\left|\int_S f\overline{e}_j\right|^2=O(1).$$

□

2.4. **定理1.9的证明。**

证明。 考虑一个随机特征函数

$$Z(x)=\frac{\|f\|_{\widehat{\ell}^1}}{\|E_\lambda f\|_{L^2}}E_\lambda f(x)$$

其中， $\lambda$ 以概率 $\|E_\lambda f\|_{L^2}/\|f\|_{\widehat{\ell}^1}$从$\sqrt{-\Delta_g}$ 的谱中随机抽取。注意

$$\mathbb{E}\,Z(x)=f(x)$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|Z(x)|^2&=\sum_\lambda\frac{\|E_\lambda f\|_2}{\|f\|_{\widehat{\ell}^1}}\left|\frac{\|f\|_{\widehat{\ell}^1}}{\|E_\lambda f\|_{L^2}}E_\lambda f(x)\right|^2\\ &=\sum_\lambda\frac{\|f\|_{\widehat{\ell}^1}}{\|E_\lambda f\|_2}|E_\lambda f(x)|^2.\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{Var}(Z(x)) = \mathbb{E}\,|Z(x)|^2 - |\,\mathbb{E}\,Z(x)|^2 = \sum_{\lambda} \frac{\|f\|_{\widehat{\ell^1}}}{\|E_\lambda f\|_2} |E_\lambda f(x)|^2 - |f(x)|^2.$$

设 $Z_1, \dots, Z_k$ 为与 $Z$ 同分布的独立同分布随机变量，并令

$$P = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Z_i.$$

注意，对每个 $x \in M$， $\mathbb{E}\,P(x) = f(x)$，此外，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|P - f\|_2^2 &= \int_M \mathbb{E}\,|P(x) - f(x)|^2 \, dV_g(x) \\
&= \int_M \operatorname{Var}(P(x)) \, dV_g(x) \\
&= \frac{1}{k} \int_M \operatorname{Var}(Z(x)) \, dV_g(x) \\
&= \frac{1}{k} \int_M \left( \sum_{\lambda} \frac{\|f\|_{\widehat{\ell^1}}}{\|E_\lambda f\|_2} |E_\lambda f(x)|^2 - |f(x)|^2 \right) dV_g(x) \\
&= \frac{1}{k} \left( \|f\|_{\widehat{\ell^1}} \sum_{\lambda} \|E_\lambda f\|_2 - \|f\|_2^2 \right) \\
&= \frac{1}{k} (\|f\|_{\widehat{\ell^1}}^2 - \|f\|_2^2) \\
&= \frac{1}{k} \|f\|_2^2 (\mathrm{FR}(f)^2 - 1).
\end{aligned}$$

因此，存在一个确定性线性组合 $P$，使得

$$\|P - f\|_2^2 \le \frac{1}{k} \|f\|_2^2 \cdot (\mathrm{FR}(f)^2 - 1).$$

取定理陈述中的 $k$，我们有

$$\|P - f\|_2 < \eta \|f\|_2$$

正如所需。 □

2.5. **定理1.11的证明**。

证明。 设 $r = f - P$。由于 $f$ 是 $\Lambda$带限的，而 $P$ 是特征函数的有限线性组合，因此 $P$ 和 $r$ 也都是 $\Lambda$带限的（将 $P$ 替换为其在由 $\{\lambda_j \le \Lambda\}$张成空间上的投影后，误差不会增大）。

首先，根据 对参与 $P$ 的 $k$ 正交归一特征函数应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\|P\|_{\widehat{\ell^1}} = \sum_{\lambda} \|E_\lambda P\|_2 \le \sqrt{k} \left( \sum_{\lambda} \|E_\lambda P\|_2^2 \right)^{1/2} = \sqrt{k}\, \|P\|_2.$$

接下来，由于 $r$ 是 $\Lambda$-带限的，指标集合 $\{j:\ \lambda_j \le \Lambda\}$ 的大小为 $N(\Lambda)$（按重数计算），因此我们得到

$$\|r\|_{\widehat{\ell}^1} = \sum_{\lambda\le\Lambda} \|E_\lambda r\|_2 \le \sqrt{N(\Lambda)} \left(\sum_{\lambda\le\Lambda} \|E_\lambda r\|_2^2\right)^{1/2} = \sqrt{N(\Lambda)}\,\|r\|_2.$$

因此，

$$\|f\|_{\widehat{\ell}^1} \le \|P\|_{\widehat{\ell}^1} + \|r\|_{\widehat{\ell}^1} \le \sqrt{k}\,\|P\|_2 + \sqrt{N(\Lambda)}\,\|r\|_2.$$

利用 $\|r\|_2 \le \eta\|f\|_2$和 $\|P\|_2 \le \|f\|_2 + \|r\|_2 \le (1+\eta)\|f\|_2$，我们得到

$$\|f\|_{\widehat{\ell}^1} \le \left((1+\eta)\sqrt{k} + \eta\sqrt{N(\Lambda)}\right)\|f\|_2,$$

这正是（1.3）。 □

2.6. **定理1.13的证明。**

^证明。 由于 $\psi$ 是偶函数且 $\psi$ 具有紧支撑集，函数演算给出如下表示

$$P_R = \psi\left(\frac{\sqrt{-\Delta_g}}{R}\right) = \frac{R}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(Rt)\cos\left(t\sqrt{-\Delta_g}\right)\,dt.$$

波动方程在 $(M,g)$ 上的有限传播速度意味着，存在一个常数 $C_0 > 0$，它仅依赖于 $(M,g)$ 和 $\operatorname{supp}\psi$；若 $\operatorname{supp} f \subset E$，则对每个 $t$，都有 $\operatorname{supp}(\cos(t\sqrt{-\Delta_g})f) \subset E^{C_0|t|}$。由于 $\widehat{\psi}(Rt)$ 除非 $|t| \le T_0/R$ 才不为零，其中的常数 $T_0$ 仅依赖于 $\psi$，因此由积分表示可得

$$\operatorname{supp}(P_R f) \subset E^{C_0/R}.$$

现在我们利用 $f$ 的谱分量来估计 $\|P_R f\|_{L^\infty(M)}$。写出谱分解，

$$P_R f(x) = \sum_{\lambda} \psi(\lambda/R) E_\lambda f(x),$$

并将 $E_\lambda f$ 按 $\lambda$–特征子空间的一组正交归一特征基 $\{e_j\}$ 展开，可得

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_j=\lambda} \langle f, e_j\rangle_{L^2(M)} e_j(x).$$

由柯西–施瓦茨不等式可得

$$|E_\lambda f(x)| \le \left(\sum_{\lambda_j=\lambda} |\langle f, e_j\rangle_{L^2(M)}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\lambda_j=\lambda} |e_j(x)|^2\right)^{1/2}.$$

由特征子空间的正交性，第一个因子等于 $\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}$，而根据假设（1.4），第二个因子有界于 $A(\lambda)$。因此

$$|E_\lambda f(x)| \le A(\lambda)\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

代入 $P_R f$ 的谱展开，得到

$$|P_R f(x)| \le \sum_{\lambda} |\psi(\lambda/R)|\,A(\lambda)\,\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

根据带限假设，当 $|\lambda| > C_\psi R$ 时 $E_\lambda f = 0$；而在剩余窗口 $A(\lambda)$ 上，根据 $A_R$ 的定义，$\leq A_R$。因此

$$|P_R f(x)| \leq A_R \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)| \, \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

Set

$$\mathrm{Num}_R(f) := \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)| \, \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

Then

$$\|P_R f\|_{L^\infty(M)} \leq A_R \cdot \mathrm{Num}_R \, .$$

接下来，我们记录由魏尔定律得到的关于 $\mathrm{Num}_R(f)$ 的尺度相关估计。由柯西–施瓦茨不等式，

$$\mathrm{Num}_R(f) \leq \left( \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_\lambda \|E_\lambda f\|^2_{L^2(M)} \right)^{1/2} .$$

由谱投影的正交性，第二个因子等于 $\|f\|_{L^2(M)}$。对于第一个因子，由于 $\psi$ 是施瓦茨函数，存在一个仅依赖于 $\psi$ 的常数 $C_1 > 0$，使得 $|\psi(t)| \leq 1$ 对所有 $t$ 都成立，由此可得

$$\sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \leq \#\{\lambda \in \mathrm{spec}(\sqrt{-\Delta_g}) : |\lambda| \leq C_1 R\}.$$

由魏尔界，存在一个仅依赖于 $(M, g)$ 的常数 $C_2 > 0$，使得

$$\#\{\lambda \in \mathrm{spec}(\sqrt{-\Delta_g}) : |\lambda| \leq T\} \leq C_2 T^d$$

对所有 $T \geq 1$ 都成立。将此应用于 $T = C_1 R$，得到

$$\sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \leq C_2 (C_1 R)^d.$$

因此，存在一个仅依赖于 $(M, g)$ 和 $\psi$ 的常数 $C_3 > 0$，使得

$$\left( \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \right)^{1/2} \leq C_3 R^{d/2},$$

因此

$$\mathrm{Num}_R(f) \leq C_3 R^{d/2} \|f\|_{L^2(M)}.$$

现在，我们结合带限假设与有效窗口上 $|\psi|$ 的下界，从下方比较 $\|f\|_{L^2(M)}$ 和 $\mathrm{Num}_R$。由于 $E_\lambda f = 0$ 对于 $|\lambda| > C_\psi R$ 成立，且 $|\psi(t)| \geq c_\psi$ 对于 $|t| \leq C_\psi$ 成立，因此我们有

$$\mathrm{Num}_R(f) = \sum_{|\lambda| \leq C_\psi R} \left| \psi\left( \frac{\lambda}{R} \right) \right| \, \|E_\lambda f\|_{L^2(M)} \geq c_\psi \sum_{|\lambda| \leq C_\psi R} \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

由于 $\ell^1$ 范数支配 $\ell^2$ 范数，

$$\sum_{|\lambda| \leq C_\psi R} \|E_\lambda f\|_{L^2(M)} \geq \left( \sum_{|\lambda| \leq C_\psi R} \|E_\lambda f\|^2_{L^2(M)} \right)^{1/2} .$$

由投影的正交性和带限性，右侧等于 $\|f\|_{L^2(M)}$，因此

$$\mathrm{Num}_R(f) \geq c_\psi \|f\|_{L^2(M)}, \qquad \|f\|_{L^2(M)} \leq c_\psi^{-1} \mathrm{Num}_R(f)$$

将 这一点与 $\mathrm{Num}_R \leq C_3 R^{d/2} \|f\|_{L^2(M)}$ 以及 $\|P_R f\|_{L^\infty(M)} \leq A_R \mathrm{Num}_R(f)$ 结合起来，得到

$$\|P_R f\|_{L^\infty(M)} \leq C_3 A_R R^{d/2} \mathrm{Num}_R(f).$$

最后，我们利用 $P_R f$ 的支撑性质来关联 $\|P_R f\|_{L^2(M)}$ 和 $\|P_R f\|_{L^\infty(M)}$。由于 $\mathrm{supp}(P_R f) \subset E^{C_0/R}$，我们有

$$\|P_R f\|_{L^2(M)}^2 = \int_{E^{C_0/R}} |P_R f(x)|^2 \, dV_g(x) \leq |E^{C_0/R}| \|P_R f\|_{L^\infty(M)}^2,$$

因此

$$\|P_R f\|_{L^2(M)} \leq \sqrt{|E^{C_0/R}|}\, \|P_R f\|_{L^\infty(M)} \leq C_3 A_R R^{d/2} \sqrt{|E^{C_0/R}|}\, \mathrm{Num}_R(f)$$

另一方面，谱投影的正交性给出

$$\|P_R f\|_{L^2(M)}^2 = \sum_\lambda |\psi(\lambda/R)|^2 \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}^2,$$

因此，$\mathrm{FR}_R(f)$ 定义中的分母恰好是 $\|P_R f\|_{L^2(M)}$。将前一个不等式除以 $\|P_R f\|_{L^2(M)}$，得到

$$\mathrm{FR}_R(f) = \frac{\mathrm{Num}_R(f)}{\|P_R f\|_{L^2(M)}} \geq \frac{1}{C_3 A_R R^{d/2} \sqrt{|E^{C_0/R}|}}.$$

令 $c_0 = 1/C_3$，证明即告完成。 □

2.7. **定理1.18的证明。**

证明。 与前面一样，令

$$\mathrm{Num}_R(f) = \sum_\lambda \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}, \qquad D_R(f) = \left(\sum_\lambda \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|^2 \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}^2\right)^{1/2},$$

使得

$$\mathrm{FR}_R(f) = \frac{\mathrm{Num}_R(f)}{D_R(f)}.$$

为证明 (i)，假设满足 $L^1$ 谱集中假设。这意味着存在 $\eta \in (0,1)$，使得

$$\sum_{\substack{\lambda : \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \neq 0 \\ \lambda \notin \Sigma_R}} \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \|E_\lambda f\|_{L^2(M)} \leq \eta \sum_\lambda \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \|E_\lambda f\|_{L^2(M)}.$$

等价地，

$$\sum_{\lambda \in \Sigma_R} \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \|E_\lambda f\|_{L^2(M)} \geq (1-\eta)\, \mathrm{Num}_R(f).$$

另一方面，根据有限集合上的柯西–施瓦茨不等式

$$\left\{\lambda \in \Sigma_R : \left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right| \neq 0\right\},$$

我们有

$$\sum_{\lambda\in\Sigma_R}\left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}\le\left(\sum_{\lambda\in\Sigma_R}1\right)^{1/2}\left(\sum_{\lambda\in\Sigma_R}\left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|^2\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}^2\right)^{1/2}.$$

根据定义,

$$\sum_{\lambda\in\Sigma_R}1=M_R(\Sigma_R),$$

and

$$\sum_{\lambda\in\Sigma_R}\left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|^2\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}^2\le\sum_{\lambda}\left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|^2\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}^2=D_R(f)^2.$$

因此

$$\sum_{\lambda\in\Sigma_R}\left|\psi\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right|\|E_\lambda f\|_{L^2(M)}\le\sqrt{M_R(\Sigma_R)}\,D_R(f).$$

结合这 与集中假设给出的下界，我们得到

$$(1-\eta)\,\mathrm{Num}_R(f)\le\sqrt{M_R(\Sigma_R)}\,D_R(f).$$

如果 $\mathrm{Num}_R(f)=0$，那么 $P_Rf\equiv0$，所声称的不等式显然成立。否则，我们将两边分别除以 $D_R(f)$ 和 $(1-\eta)$，得到

$$\mathrm{FR}_R(f)=\frac{\mathrm{Num}_R(f)}{D_R(f)}\le\frac{\sqrt{M_R(\Sigma_R)}}{1-\eta},$$

这正是第 (i) 部分所断言的上界。

为证明 (ii)，我们将其与定理 1.13给出的下界结合起来。根据定理1.13，我们已经知道存在一个常数 $c_0>0$ 使得

$$\mathrm{FR}_R(f)\ge\frac{c_0}{A_RR^{d/2}\sqrt{|E^{C_0/R}|}}.$$

由 (i)，我们有

$$\mathrm{FR}_R(f)\le\frac{\sqrt{M_R(\Sigma_R)}}{1-\eta}.$$

将这两个不等式合并可得

$$\frac{c_0}{A_RR^{d/2}\sqrt{|E^{C_0/R}|}}\le\frac{\sqrt{M_R(\Sigma_R)}}{1-\eta}.$$

重新整理得,

$$M_R(\Sigma_R)\,|E^{C_0/R}|\ge\frac{c_0^2}{A_R^2R^d}(1-\eta)^2,$$

which 正是第 (ii) 部分所述的下界。证明至此完成。 □

## 3. Open problems and further directions

本文所呈现的结果引出了若干值得未来研究的自然问题：

(1) 用弗罗斯特曼型测度／豪斯多夫维数取代闵可夫斯基控制。定理 1.1 中结果的证明用到了邻域体积增长。一个自然的推广是：假设 $u$ 满足弗罗斯特曼条件 $|u|(B(x,r)) \lesssim r^k$，并探讨类似的谱 $\ell^p$ 合成阈值。(2) 锐阈值之外的最优性。虽然我们已经确定了环面上的谱合成和球面上的极大刚性的锐阈值，但一般紧流形上的最优可积指数 $p$ 仍不明确。在什么几何条件下，$(M,g)$存在有限的临界指数？它与特征函数的增长或测地线结构有何关系？(3) 正则性假设。注 1.8 指出，我们对球面的证明用到了测度 $u$的光滑性。推论 1.7 能否推广到 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(S^d)$，甚至推广到正则性更低的分布？库兹涅佐夫求和公式方法对导数的依赖表明，这可能需要新的技术。光滑性假设是通过使用库兹涅佐夫公式引入的，而该公式的证明依赖于驻相展开。具体而言，定量控制要求测试函数的有限阶导数满足有界性，所得常数也取决于这些导数。(4) 更精细的稳定性估计。定理 1.3 给出了低频重建的定量衰减。这些估计能否在流形族上保持一致，或者能否在附加曲率条件下进一步强化？更精确地理解常数 $C(M,g,\psi,C_E,p)$将有助于应用。(5) 非带限函数的傅里叶比与逼近。定理 1.9 表明，较小的 FR($f$)意味着可以用短谱和进行良好逼近；定理 1.11 则在带限条件下给出了部分逆命题。不带限性假设时，是否存在有意义的逆命题？能否根据空间集中性质刻画 $M$ 上满足 FR($f$) $\lesssim \sqrt{k}$ 的函数类？(6) 特定流形上的不确定性原理。定理 1.18 给出了一个一般的尺度相关不确定性原理。对于特定流形（例如球面、环面、双曲曲面），常数 $c_0, C_0$ 和增长参数 $A_R$ 能否显式计算？这类计算将得出具体且可通过数值检验的不确定性关系。(7) 信号恢复与压缩感知中的应用。正如注 1.5 所述，稳定性估计显示了其在流形上反问题中的应用潜力。本文发展的综合原理能否用于设计高效的采样方案或恢复算法，以处理支撑集较薄的流形上信号？(8) 推广到非紧或奇异情形。紧致性假设在谱理论和韦尔定律中起着关键作用。对于某些非紧流形（例如双曲空间）或带边界流形，能否建立类似的合成现象？对于配备拉普拉斯算子的图或分形集等奇异空间，又会怎样？

我们计划在后续工作中研究其中一些问题。

## Appendix A. Geometric and spectral preliminaries

**A.1. 关于黎曼流形的基本事实。** 设 $M$ 是一个光滑、紧致且无边界的 $d$维流形，并设 $g$ 是定义在 $M$上的黎曼度量张量。度量张量 $g$在局部表示为一个实对称正定的 $d \times d$矩阵，其元素是关于 $x$的光滑函数，

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1d}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2d}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{d1}(x) & g_{d2}(x) & \cdots & g_{dd}(x) \end{bmatrix}$$

其中，如果 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$，则有

$$g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_{g(x)}.$$

黎曼流形 $(M,\ g)$ 上的自然体积密度在局部表示为

$$dV_g(x) = |g(x)|^{1/2}\, dx,$$

其中 $|g(x)|$表示 $g(x)$的行列式。

欧几里得拉普拉斯算子在 $(M,\ g)$ 上有一个自然的推广，称为拉普拉斯–贝尔特拉米算子，在局部坐标中表示为

$$\Delta_g f = |g|^{-1/2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \big( |g|^{1/2} g^{ij} \partial_j f \big).$$

这里，$g^{ij}$ 是 $g^{-1}$的矩阵元素。等价地，$\Delta_g$ 由以下恒等式刻画

$$\int_M (\Delta_g f)\, h\, dV_g = -\int_M \langle \nabla_g f, \nabla_g h \rangle_g\, dV_g,$$

其中

$$\nabla_g f(x) = \sum_{i,j=1}^{d} g^{ij}(x)\, \partial_i f(x)\, \partial_j$$

表示 $f$的梯度。由此可知，$\Delta_g$ 是自伴且负半定的。

A.2. **拉普拉斯–贝尔特拉米特征函数与特征值。** 现在我们总结关于 $\Delta_g$ 的谱的一些事实。这些内容是标准结果，例如可见 [8]。存在一个 $L^2(M, dV_g)$ 的标准正交基，由特征函数 $e_1$, $e_2, \ldots$ 组成，它们满足

$$\Delta_g e_j = -\lambda_j^2 e_j, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

其中 $\lambda_j \geq 0$。我们对特征函数编号，使得

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty.$$

这些事实大多可通过将紧自伴算子的谱理论应用于预解式 $(I - \Delta_g)^{-1}$ 得出。

**注记 A.1.** 将 $-\lambda_j^2$ 选作 $e_j$ 的特征值只是一种约定。这样我们便可以将 $\lambda_j$ 视为 $e_j$ 的“频率”，或者更确切地说，是驻波解的频率

$$u(t, x) = \cos(t\lambda_j)\, e_j(x)$$

对应波动方程（$\Delta_g - \partial_t^2$）$u = 0$。

给定函数 $f \in L^2(M, dV_g)$，$f$ 的傅里叶系数为 $\widehat{f}(j) = \langle f, e_j \rangle$，其中

$$\langle f, e_j \rangle = \int_M f(x)\, \overline{e_j(x)}\, dV_g(x).$$

若 $f \in L^2(M, dV_g)$，则

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{f}(j)\, e_j$$

在 $L^2(M, dV_g)$ 中收敛；若 $f$ 足够光滑，则级数一致收敛，并且逐点成立。

流形上的调和分析中的一个基本问题是估计低于某一阈值的特征值（计入重数）的数量，即求出韦尔计数函数的渐近公式

$$N(\lambda) = \#\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \le \lambda\}.$$

韦尔定律给出

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-d}\, |M|\, |B|\, \lambda^d + O(\lambda^{d-1}), \tag{A.1}$$

其中 $|M|$ 表示 $M$ 的黎曼体积，而 $|B|$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的单位球体积。对于球面$S^d$，该余项在无法进一步改进的意义下是尖锐的。许多流形都具有改进的魏尔余项估计 [5]。

## References

[1] S. Agmon 和 L. H¨ormander，《具有简单特征的微分方程解的渐近性质》，J. Analyse Math., 30, 1–38, (1976).[2] M. L. Agranovsky 和 E. K. Narayanan，$L^p$-可积性、傅里叶变换的支撑集及卷积方程的唯一性，J. Fourier Anal. Appl. 10 (2004), no. 3, 315–324.[3] E. J. Cand`es、J. Romberg 和 T. Tao，《稳健不确定性原理：从高度不完整的频率信息中精确重建信号》，IEEE Trans. Inform. Theory **52**(2006), no. 2, 489–509.[4] D. L. Donoho，《压缩感知》，IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2006), no. 4, 1289–1306.[5] J. Duistermaat 和 V. Guillemin，《正椭圆算子的谱与周期双特征》，Invent. Math.**29** (1975), no. 1, 39–79.[6] S. Guo、A. Iosevich、P. Zorin-Kranich 和 R. Zhang，$L^p$ 傅里叶支撑集位于光滑空间曲线上的函数的可积性，arXiv:2412.19956, (2025).[7] L. H¨ormander，《线性偏微分算子分析》，第 I 卷。Springer-Verlag，柏林，(1983).[8] J. Jost，《黎曼几何与几何分析》，柏林: Springer-Verlag，(2002).[9] K.S. Senthil-Raani，$L^p$-可积性、傅里叶变换支撑集的维数及其应用，J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), no. 4, 801–815.[10] K.T. Smith，《群上的不确定性原理》，SIAM J. Appl. Math. 50 (1990), 876–882.[11] S. Thangavelu，《海森堡群上的球面平均与*CR*函数》，J. Analyse Math., 63, 255–286, (1994).[12] Steven Zelditch，《*Kuznecov*求和公式与*Szeg*¨流形上的极限公式》，Commun. Partial Differ. Equ. 17(1–2), 221–260. (1992)

Department of Mathematics, University of Rochester, Rochester, NY电子
邮箱：iosevich@gmail.com

Department of PhD Program Mathematics, City University of New York, NY电子
邮件地址：amayeli@gc.cuny.edu

Department of Mathematics, University of Binghamton, Binghamton, NY电子
邮件地址：emmett.Wyman@gmail.com