与朗道-金兹堡模型相关的平坦 F-流形微扰算法

Jeehoon Park 和 JAEWON YOO

Abstract. 我们提出一种微扰算法，用于在与朗道-金兹堡模型相关的 dGBV（微分 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky）代数的上同调上构造形式平坦的 F-流形结构。作为应用，该方法为两个重要对象上的形式平坦F-流形结构提供了微扰构造：具有原点处孤立奇点的齐次多项式的雅可比代数，以及光滑射影卡拉比-丘完全交的原始上同调。

arXiv:2603.21462v1 [math.AG] 23 Mar 2026

Contents

1. 引言 1
2. DGBV 代数与平坦 F-流形 3
3. 平坦 F-流形与微分方程 4
4. 一种使用平坦坐标的显式算法 5
5. 算法有效性的证明 6
6. 与 Li-Li-Saito 算法的比较 7
参考文献 9
10

1. Introduction

设 M 是一个复流形，其结构层为 $\mathcal{O}_M$。在 M 上，Frobenius 流形结构是定义在全纯切丛 $\mathcal{T}_M$ 上的一种交换代数结构，并带有满足特定相容条件的度量：见定义 2.4。Dubrovin 首先在 [4] 中为这种结构建立了公理体系；其首个例子（孤立超曲面奇点的万有展开）由 K. Saito 于 [12], 中给出，并由 M. Saito 在 [13]中进一步研究。它在提出镜像对称猜想时也发挥着重要作用：例如，参见 [1] 和 [2]。Hertling 和 Manin 引入了较弱但仍非常有用的概念：一种 F-流形（[7], [6, 第 2]章），它本质上是不带度量的 Frobenius 流形结构；以及平坦 F-流形（[11]），即具有平坦结构的 F-流形。

我们也可以考虑 Frobenius 流形结构和平坦 F-流形结构的形式版本。本文将为与 LG（Landau-Ginzburg）模型相关的 dGBV（微分 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky）代数的上同调构造一种新的形式平坦 F-流形结构。我们的构造明确采用微扰方法和算法，因此可以利用多项式环的 Gr¨obner 基实现为计算机程序。

让我们

$$A := \mathbb{C}[\underline{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

是一个多项式环，且 $S = S(x) \in A$ 是任意多项式。那么三元组（$\mathbb{C}^n$，Ω S），其中 $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 是非紧复流形 $\mathbb{C}^n$（非紧 Calabi-Yau 流形）上的全纯体积形式，称为（代数）Landau-Ginzburg B模型。与（2.1）定义相关联的自然 dGBV（微分 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky）代数为（$\mathbb{C}^n$，Ω S）：

$$(\mathcal{A}, \delta_S, \Delta)$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14J32, 32S25, 14F25（主要），14J81,14J33,81T70（次要）。*Key words and phrases.* 微分分次 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky 代数，平坦 F-流形，超曲面奇点，朗道-金兹堡模型，射影光滑完全交。

其中 $\mathcal{A}:=\mathrm{PV}^{alg}(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上代数多向量场的空间， δ_S 是由全纯 1-形式 dS 扭曲得到的， Δ 是关于 Ω 的散度算子：

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}=\mathbb{C}[\underline{x}][\underline{\eta}]=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n][\eta_1,\ldots,\eta_n],\quad \eta_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &\delta_S=\{S,-\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\underline{x})}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \eta_i}:\mathcal{A}\to\mathcal{A},\\ &\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \eta_i}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

$\mathbb{Z}$ 的加性上同调分次由以下规则给出（$|f|=m$ 表示 $f\in\mathcal{A}^m$）

$$|x_i|=0,|\eta_i|=-1,\quad i=1,\ldots,n;$$

并且我们有以下上链复形[1]

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{k=-n}^{0}\mathcal{A}^k,\quad 0\to\mathcal{A}^{-n}\xrightarrow{\delta_S}\mathcal{A}^{-n+1}\xrightarrow{\delta_S}\cdots\xrightarrow{\delta_S}\mathcal{A}^0=A\to 0.$$

注意，$(\mathcal{A},\ \delta_S)$ 的上同调 $H(\mathcal{A},\delta_S)$ 从$\mathcal{A}$诱导出超交换代数结构，因为 δ_S 是一个导子。令 J_S 为 $H^0(\mathcal{A},\delta_S)$ 的任意有限维（作为 $\mathbb{C}$-向量空间）子代数，并假设

$$J_S=\mathcal{B}^0/\delta_S(\mathcal{B}^{-1}),\quad \mathcal{B}=\bigoplus_i\mathcal{B}^i\tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的超交换子代数，并且 $(\mathcal{B},\delta_S,\ \Delta)$ 仍然是一个微分分次 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky 代数。我们希望为 J_S上的形式平坦 F-流形结构提供一种微扰算法。

例 1.1. 我们给出两个关键例子：

(1) 假设 $S(x)$ 仅在零点处有一个孤立奇点（这称为孤立超曲面奇点）。那么我们令

$$J_S:=H^0(\mathcal{A},\delta_S),\tag{1.3}$$

其 由于奇点是孤立的这一性质，它是有限维的。此外，众所周知，
已知 （例如，参见 [9]）有 H^0（$\mathcal{A}$，δ_S）$=H$（$\mathcal{A}$，δ_S）。换言之，我们有

$$J_S=A/\mathrm{Jac}(S)=H(\mathcal{A},\delta_S)$$

其中 $\mathrm{Jac}(S)$ 是 S 的雅可比理想。

(2) 设$\mathbf{P}^N$ 是 $\mathbb{C}$ 上 $N\geq 1$的 N维射影空间。记$\mathbb{C}[z]$ 为$\mathbf{P}^N$的通常齐次坐标环，其中 $\underline{z}=(z_0,z_1,\ldots,z_n)$。对于 $N\geq k\geq 1$，设 $G_1(z)\ldots,G_k(z)$分别为次数为 $d_1,\ldots,d_k$ 的齐次多项式。我们考虑嵌入$\mathbf{P}^N$中的光滑射影簇X_G，它由 $G_1(z)\ldots,G_k(z)$定义，并满足完全交性质，即 $\dim X_G=N-k$。我们进一步假设 X 是卡拉比-丘：

$$N+1=\sum_{i=1}^{k}d_k.$$

设 $X=X_G(\mathbb{C})$是与 X_G 相关联的复解析流形，并考虑 Dwork 势 1

$$S(\underline{y},\underline{z}):=\sum_{\ell=1}^{k}y_\ell\cdot G_\ell(\underline{z}),\tag{1.4}$$

其中我们引入与 $G_1,\ldots,G_k$对应的形式变量 $y_1,\ldots,y_k$。设 $n=N+k+1$,$x_1=y_1,\ldots,x_k=y_k$, $x_{k+1}=z_0,\ldots,x_n=z_N$。对于每个$x_\mu$，指定一个非零整数$ch(x_\mu)$，称为$x_\mu$ 的荷，如下：

$$ch(x_i)=ch(y_i)=-d_i,\quad \text{for } i=1,\ldots,k,\quad ch(x_i)=ch(z_{i-k-1})=1,\quad \text{for } i=k+1,\ldots,n.$$

同时令 $ch(\eta_\mu):=-ch(x_\mu)$。那么 $\mathcal{A}_0$，即 $\mathcal{A}$ 中荷为零的部分，是 $\mathcal{A}$ 的超交换子代数，并且 $(\mathcal{A}_0,\delta_S,\Delta)$ 是一个微分分次 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky 代数。令

$$J_S:=H^0(\mathcal{A}_0,\delta_S)\subset H^0(\mathcal{A},\delta_S).\tag{1.5}$$

[1]注意，超交换性意味着 $a\cdot b=(-1)^{|a||b|}b\cdot a$ 对于齐次元素 a，b。因此，我们看到 $\eta_i\cdot\eta_j=-\eta_j\cdot\eta_i$，这意味着 $\eta_i^2=0$ 和 $\mathcal{A}^{-n-1}=\mathcal{A}^{-n-2}=\cdots=0$。

那么众所周知（[5], [8], 和 [3]），J_S 与 X 的本原（中维）上同调同构。特别地，J_S 在 $\mathbb{C}$ 上是有限维的。

致谢： Jeehoon Park 的工作得到了韩国国家研究基金会（NRF-2021R1A2C1006696）以及由韩国政府（科学技术信息通信部）（编号：2020R1A5A1016126）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目的支持。

第一作者感谢 Jae-Suk Park 帮助他启动该项目，并提供有益的意见和热情支持。他还感谢 Younggi Lee 和 Jaehyun Yim 就这一主题展开的有益讨论。

2. DGBV algebras and flat F-manifolds

我们简要回顾 dGBV 代数的定义。

定义 2.1。设 k 为一个域。设 $(\mathcal{C}, \cdot)$ 是一个带单位的 $\mathbb{Z}$-分次超交换结合 k 代数。设 $[\cdot,\cdot]: \mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一个次数为 1 的双线性映射。

(a) 若满足以下条件，则称 $(\mathcal{C}, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是 k 上的 G-代数（Gerstenhaber 代数）：

$$\begin{aligned}[a,b] &= (-1)^{|a||b|}[b,a],\\ [a,[b,c]] &= (-1)^{|a|+1}[[a,b],c] + (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)}[b,[a,c]],\\ [a,b\cdot c] &= [a,b]\cdot c + (-1)^{(|a|+1)\cdot|b|} b\cdot[a,c],\end{aligned}$$

对于任意齐次元素 $a,b,c\in\mathcal{C}$.

(b) 若 $(\mathcal{C},\Delta,\ell_2^\Delta)$ 是移位 DGLA（微分分次李代数），则称 $(\mathcal{C},\cdot,\Delta)$ 是 BV 代数，其中

$$\ell_2^\Delta(a,b) := \Delta(a\cdot b) - \Delta(a)\cdot b - (-1)^{|a|}a\cdot\Delta(b), \quad a,b\in\mathcal{C}, \tag{2.1}$$

且 $(\mathcal{C},\cdot,\ell_2^\Delta)$ 是 G-代数，

(c) 若 $(\mathcal{C},\cdot,\Delta,\delta)$ 满足以下条件，其中 $\delta:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一个次数为 1 的线性映射，则称其为 dGBV（微分 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky）代数：$(\mathcal{C},\cdot,\Delta,\ell_2^\Delta)$ 是 GBV 代数，且 $(\mathcal{C},\cdot,\delta)$ 是交换微分分次代数（cdga），即

$$\delta^2 = 0, \quad \delta(a\cdot b) = \delta(a)\cdot b + (-1)^{|a|}a\cdot\delta(b), \quad a,b\in\mathcal{C},$$

且 $(\delta+\Delta)^2 = 0$。

现在我们回顾平坦 F-流形和 Frobenius 流形的概念。设 M 是一个连通复流形，其全纯结构层为 $\mathcal{O}_M$。设 $\mathcal{T}_M$ 为全纯切层。(k,l)-张量是一个 $\mathcal{O}_M$-线性映射 $T: \mathcal{T}_M^{\otimes k}\to\mathcal{T}_M^{\otimes l}$。沿向量场 X 的李导数 Lie_X 是 (k,l)-张量层上的一个导子；相对于 M上的联络 ∇的协变导数 $\nabla_X T$也是如此：

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}_X(Y_1\otimes\ldots\otimes Y_l) &= \sum_i Y_1\otimes\ldots\mathrm{Lie}_X(Y_i)\ldots\otimes Y_l,\\ \nabla_X(Y_1\otimes\ldots\otimes Y_l) &= \sum_i Y_1\otimes\ldots\nabla_X(Y_i)\ldots\otimes Y_l\end{aligned}$$

对于局部向量场 $Y_1,\ldots,Y_l$，以及

$$(\mathrm{Lie}_X T)(Y) = \mathrm{Lie}_X(T(Y)) - T(\mathrm{Lie}_X(Y)), \quad (\nabla_X T)(Y) = \nabla_X(T(Y)) - T(\nabla_X(Y))$$

对于 (k,l)-张量 T。注意，对于函数 f，$\mathrm{Lie}_X(f) = X(f)$；对于向量场 X,Y，$\mathrm{Lie}_X Y = [X,Y]$。因此，沿向量场 X 的 (k,l)-张量 T的李导数 $\mathrm{Lie}_X T$仍然是一个 (k,l)-张量；相对于 M上的联络 ∇的协变导数 $\nabla_X T$也是如此。于是，∇T可以视为一个 $(k+1,l)$-张量。

定义 2.2（F-流形）。F-流形是一个三元组（M，$\circ$，e），其中 $\circ$是一个交换且结合的$\mathcal{O}_M$-双线性乘法 $\mathcal{T}_M\times\mathcal{T}_M\to\mathcal{T}_M$，$e$是关于 $\circ$的全局单位向量场，并且该乘法满足

$$\mathrm{Lie}_{X\circ Y}(\circ) = X\circ\mathrm{Lie}_Y(\circ) + Y\circ\mathrm{Lie}_X(\circ) \tag{2.2}$$

对于任意局部向量场 X,Y。

条件（2.2）等价于

$$[X\circ Y,Z\circ W]-[X\circ Y,Z]\circ W-Z\circ[X\circ Y,W]-X\circ[Y,Z\circ W]+X\circ[Y,Z]\circ W \\ +X\circ Z\circ[Y,W]-Y\circ[X,Z\circ W]+Y\circ[X,Z]\circ W+Y\circ Z\circ[X,W]=0 \tag{2.3}$$

对于任意局部向量场 X， Y， Z， W。

定义 2.3（平坦 F-流形）。 平坦 F-流形是一个四元组 $(M,\circ,e,\nabla)$，其中 $\circ$是一个交换且结合的 $\mathcal{O}_M$-双线性乘法 $\mathcal{T}_M\times\mathcal{T}_M\to\mathcal{T}_M$， e 是关于 $\circ$， ∇ 是 $\mathcal{T}_M$ 上的平坦联络，满足 $\nabla e=0$，且 $\circ$ 与 ∇相容，即由 $\nabla^z_X(Y)=\nabla_XY+zX\circ Y$定义的铅笔 $(\nabla^z)_{z\in\mathbb{C}}$中的每个元素都是无挠且平坦的：

$$\nabla^z_XY-\nabla^z_YX=[X,Y]\quad\text{(torsion-free)},$$
$$\nabla^z_X\nabla^z_Y-\nabla^z_Y\nabla^z_X=\nabla^z_{[X,Y]}\quad\text{(flat)}.$$

这些公理蕴含着在 ∇-平坦坐标下存在一个向量势：在 M 上的 ∇-平坦局部坐标$t_M=\{t^0,\dots,t^{\mu-1}\}$中，若 $\mu=$维数为 M，则存在一个向量势 $(F^0,\ \dots\dots,\ F^{\mu-1})$，使得

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\frac{\partial}{\partial t^\beta}=\sum_\gamma\frac{\partial^2F^\gamma}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\frac{\partial}{\partial t^\gamma},\quad \alpha,\beta=0,\dots,\mu-1.$$

定义 2.4（Frobenius 流形）。 Frobenius 流形是一个元组 $(M,\circ,e,g)$，其中 g是M上的度量， $\circ$是一个交换且结合的 $\mathcal{O}_M$-双线性乘法 $\mathcal{T}_M\times\mathcal{T}_M\to\mathcal{T}_M$，而 e是关于 $\circ$的全局单位向量场，并满足以下条件：

(1)（不变性） $g(X\circ Y,Z)=g(X,Y\circ Z)$；(2)（势性）(3,1) 型张量 $\nabla^g\circ$ 是对称的，其中 ∇^g 是 g的列维-奇维塔联络；(3) 度量 g 是平坦的，即 ∇^g 是平坦联络， $[\nabla^g_X,\nabla^g_Y]=\nabla^g_{[X,Y]}$；(4) $\nabla^g e=0$。

对于任意局部向量场 X,Y,Z， 势性条件 (2) 展开后为

$$\nabla^g_X(Y\circ Z)-Y\circ\nabla^g_X(Z)-\nabla^g_Y(X\circ Z)+X\circ\nabla^g_Y(Z)-[X,Y]\circ Z=0.$$

如果 $t=\{t^\alpha\}$ 是 M 上的 ∇^g-平坦坐标，那么存在一个势函数 $F(\underline{t})$，使得

$$\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma F(\underline{t})=g(\partial_\alpha\circ\partial_\beta,\partial_\gamma),\qquad \text{where } \partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

以下命题是众所周知的（[6]）。

命题2.5。 如果 $(M,\circ,e,g)$ 是一个 *Frobenius* 流形，那么 $(M,\circ,e,\nabla^g)$ 是一个平坦的 F-流形。如果 $(M,\circ,e,\nabla)$是一个平坦的 F-流形，那么 $(M,\circ,e)$ 是一个 F-流形。

类似地，也可以定义 F-流形、平坦 F-流形和 Frobenius 流形的形式版本：我们可以考虑形式结构层和形式切丛，而非全纯结构层和全纯切丛。

3. Flat F-manifolds and differential equations

在 [14], 中，Saito-Takahashi 解释了如何从原始形式导出 Frobenius 流形结构。回顾（1.2），并设 $t=\{t^\alpha:\alpha\in I\}$ 是仿射流形 $J_S=\mathcal{B}^0/\delta_S(\mathcal{B}^{-1})\subset H^0(\mathcal{A},\delta_S)$ 的坐标系。这里 I是一个有限指标集。我们选取一个 $\mathbb{C}$-基 $\{[u_\alpha]=u_\alpha+\delta_S(\mathcal{B}^{-1}):\ u_\alpha\in\mathcal{B}^0,\ \alpha\in I\}$属于 J_S，并赋予一个加性上同调分次

$$|t^\alpha|=0,\quad \alpha\in I;\quad \mathcal{B}[[\underline{t}]]=\bigoplus_i(\mathcal{B}[[\underline{t}]])^i=\bigoplus_i\mathcal{B}^i[[\underline{t}]]. \tag{3.1}$$

那么，对于任意 $\Gamma\in\mathcal{B}^0[\![t]\!]$，三元组（$\mathcal{B}[[t]]$，$\delta_{S+\Gamma}$，$\Delta$）仍然是定义在 $\mathbb{C}[[t]]$ 上的微分分次 Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky 代数，其中

$$\delta_{S+\Gamma}=\{S+\Gamma,-\}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial(S+\Gamma)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\eta_i}:\mathcal{B}[[\underline{t}]]\to\mathcal{B}[[\underline{t}]]$$

从现在起，我们假设 $\Gamma\in\mathcal{B}^0[\![t]\!]$ 对所有 $\alpha\in I$ 都满足 $\partial_\alpha\Gamma|_{t=0}=u_\alpha$。

定义 3.1。 对于 $\Gamma\in\mathcal{B}^0[\![t]\!]$ 和满足 $|\hbar|=0$ 的形式变量 $\hbar$，我们定义

$$\mathcal{H}_{S+\Gamma}:=\frac{\mathcal{B}^0[\![\underline{t}]\!](\!(\hbar)\!)}{(\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\mathcal{B}^{-1}[\![\underline{t}]\!](\!(\hbar)\!))},\quad \mathcal{H}^{(m)}_{S+\Gamma}:=\frac{\mathcal{B}^0[\![\underline{t}]\!][\![\hbar]\!]\hbar^{-m}}{(\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\mathcal{B}^{-1}[\![\underline{t}]\!][\![\hbar]\!]\hbar^{-m})}$$

对于 $m \in \mathbb{Z}$。

我们在 $\mathcal{H}_{S+\Gamma}$ 以下 [14, 定义 4。4]中定义高斯-马宁联络。我们使用记号 $[\cdot]$ 表示上同调类。对于每个 $\alpha \in I$，我们定义一个联络 $\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}$ ： $\mathcal{H}_{S+\Gamma} \to \mathcal{H}_{S+\Gamma}$ 如下

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}([w]) &:= \left[e^{\frac{-(S+\Gamma)}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(e^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} w\right)\right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t^\alpha} w + \frac{1}{\hbar}\frac{\partial(S+\Gamma)}{\partial t^\alpha} w\right]\end{aligned}$$

对于 $w \in \mathcal{B}^0[\![t]\!]((\hbar))$。在原始形式理论中，以下微分方程（参见 [14, 方程 (S2)]）发挥着重要作用：

$$\hbar\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} \hbar\nabla_\beta^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} \boldsymbol{\zeta} = \sum_\rho \mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot \hbar\nabla_\rho^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} \boldsymbol{\zeta} + \big(\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta\big)(\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}) \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{B}^0[\![t]\!][\![\hbar]\!]$、$\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho = {}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho + {}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho\hbar \in \mathbb{C}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$ 和 $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta} \in \mathcal{B}^{-1}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$。注意，$\boldsymbol{\zeta}$ 充当原始形式。我们有时将记号 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial t_\alpha}$， $\alpha \in I$ 简写。

命题 3.2. *微分系统 (3.2) 的解 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{B}^0[\![t]\!][\![\hbar]\!]$、$\Gamma \in \mathcal{B}[\![t]\!]$ 和 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho = {}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho + {}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho\hbar \in \mathbb{C}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$ 导出形式平坦 F-流形 $(M, \circ, e, \nabla)$ 的结构，其中 $M = H(\mathcal{B}, \delta_S)$，$\circ$ 是由 $\mathcal{B}$ 诱导的乘法（即 $\partial_\alpha \circ \partial_\beta = \sum_\rho {}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot \partial_\rho$），$e = [1]$，且联络 ∇ 定义为 $\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = \sum_\rho {}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho \partial_\rho$。*

证明。 由于 $\hbar\nabla_\alpha{}^\hbar \ \hbar\nabla_\beta{}^\hbar = \hbar\nabla_\beta{}^\hbar \ \hbar\nabla_\alpha{}^\hbar$，乘法 $\circ$ 是交换的，且 ∇ 是无挠的。考虑以下方程（使用简化记号 $\nabla_\alpha = \nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}$）：

$$\begin{aligned}\hbar\nabla_\gamma \hbar\nabla_\beta \hbar\nabla_\alpha \boldsymbol{\zeta} =& \hbar\nabla_\gamma\left[\sum_{\rho\in I}(\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho)\,\hbar\nabla_\rho \boldsymbol{\zeta}\right] + (\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta)(\hbar\nabla_\gamma \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}) \\ =& \sum_{\rho\in I}\left[\hbar\partial_\gamma(\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho)\hbar\nabla_\rho \boldsymbol{\zeta} + (\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho)\hbar\nabla_\gamma \hbar\nabla_\rho \boldsymbol{\zeta}\right] + (\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta)(\hbar\nabla_\gamma \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}) \\ =& \sum_{\delta\in I}\left[\hbar\mathbf{A}_{\alpha\beta,\gamma}{}^\delta + \sum_{\rho\in I}\left(\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \mathbf{A}_{\gamma\rho}{}^\delta\right)\right]\hbar\nabla_\delta \boldsymbol{\zeta} \\ &+ (\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta)\Big(\hbar\nabla_\gamma \mathbf{\Lambda} + \sum_{\rho\in I}\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \mathbf{\Lambda}_{\gamma\rho}\Big).\end{aligned}$$

因此，对于所有 δ，以下各量在 α、β、γ 的置换下保持不变：

$$\begin{aligned}&\hbar\mathbf{A}_{\alpha\beta,\gamma}{}^\delta + \sum_{\rho\in I}\left(\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \mathbf{A}_{\gamma\rho}{}^\delta\right) \\ &= \sum_{\rho\in I}{}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^0A_{\gamma\rho}{}^\delta + \hbar\Big[{}^0A_{\alpha\beta,\gamma}{}^\delta + \sum_{\rho\in I}{}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^1A_{\gamma\rho}{}^\delta + {}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^0A_{\gamma\rho}{}^\delta\Big] \\ &\quad + \hbar^2\Big[{}^1A_{\alpha\beta,\gamma}{}^\delta + \sum_{\rho\in I}{}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^1A_{\gamma\rho}{}^\delta\Big].\end{aligned} \tag{3.3}$$

在 $\sum_{\rho\in I}{}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^0A_{\gamma\rho}{}^\delta$ 指标置换下的不变性表明，$\circ$ 是结合的。的不变性 ${}^0A_{\alpha\beta,\gamma}{}^\delta + \sum_{\rho\in I}{}^0A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^1A_{\gamma\rho}{}^\delta + {}^1A_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot {}^0A_{\gamma\rho}{}^\delta$ 意味着 (3,1) 张量 $\nabla\circ$ 对三个自变量完全对称。因此，利用2.2式和 [6, 定理 214]，可得式 $(\nabla^z)_{z\in\mathbb{C}}$成立。此外，指标的不变性还表明，由 $\nabla_X^z(Y) = \nabla_X Y + zX \circ Y$定义的铅笔中，每个元素都是无挠且平坦的：

$$\begin{aligned}&\nabla_X^z Y - \nabla_Y^z X = [X, Y] \quad \text{(torsion-free)}, \\ &\nabla_X^z \nabla_Y^z - \nabla_Y^z \nabla_X^z = \nabla_{[X,Y]}^z \quad \text{(flat)}.\end{aligned}$$

□

我们分析（3.2），其中 $\boldsymbol{\zeta} = 1 \in \mathcal{B}$。由于 $\partial_\alpha\Gamma = \hbar\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1$ 是 $\mathbb{C}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$ 的一个基 $\mathcal{H}^{(0)}_{S+\Gamma}$，因此相对于基 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \in \mathbb{C}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$，存在一个联络矩阵 $\{\hbar\nabla_\rho^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1 : \rho \in I\}$ 使得

$$\hbar\nabla_\beta^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}(\hbar\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1) = \sum_{\rho\in I}\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^\rho \cdot (\hbar\nabla_\rho^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1) + (\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta)(\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta})$$

对某个 $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta} \in \mathcal{B}^{-1}[\![t]\!][\![\hbar]\!]$ 以及所有 $\alpha,\ \beta \in I$。假设存在 $\Gamma \in \mathcal{B}^0[[t]]$，使得 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ 和 $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}$ 不含 $\hbar$ 次幂项，即 $t = \{t^\alpha\}$ 是一个 ∇-平坦坐标（${}^1A_{\alpha\beta}{}^{\rho} = 0$），并且存在一个联络矩阵$A_{\alpha\beta}{}^{\rho} = {}^0A_{\alpha\beta}{}^{\rho} \in \mathbb{C}[\![t]\!]$，使得

$$\hbar\nabla_\beta^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}(\hbar\nabla_\alpha^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1) = \sum_{\rho\in I} A_{\alpha\beta}{}^{\rho}\cdot(\hbar\nabla_\rho^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}} 1) + (\delta_{S+\Gamma} + \hbar\Delta)(\Lambda_{\alpha\beta}), \tag{3.4}$$

对某些 $\Lambda_{\alpha\beta} \in \mathcal{B}^{-1}[\![t]\!]$ 以及所有 $\alpha,\ \beta \in I$。于是，通过比较 $\hbar$-次幂项，方程（3.4）进一步化为：

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\Gamma\cdot\partial_\beta\Gamma &= \sum_{\rho\in I} A_{\alpha\beta}{}^{\rho}\cdot\partial_\rho\Gamma + \delta_{S+\Gamma}(\Lambda_{\alpha\beta}),\\ \partial_\beta\partial_\alpha\Gamma &= \Delta(\Lambda_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

对所有 $\alpha,\ \beta \in I$。根据命题 3.2，方程（3.5）的解给出 F-流形 J_S上的形式平坦 F $\Gamma_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell}$-流形结构 $= \partial_{\alpha_\ell}\cdots\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\Gamma$。为简便起见，我们使用记号 。注意，方程（3.5）与 1]引理 7 证明最后部分中出现的方程相似。

4. An explicit algorithm with flat coordinates

本节是本文的关键所在。现在我们给出求解微分方程（3.5）的算法。回顾一下，$\partial_\alpha\Gamma|_{t=0} = u_\alpha$ 对所有 $\alpha \in I$，其中 $\{[u_\alpha]:\ \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{C}$-基 J_S。我们使用以下记号：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{\alpha\in I} u_\alpha\cdot t^\alpha + \sum_{m\geq 2}\sum_{\underline{\alpha}\in I^m}\frac{1}{m!}u_{\underline{\alpha}}t^{\underline{\alpha}} \in \mathcal{B}^0[\![\underline{t}]\!],\\ A_{\alpha\beta}{}^{\rho} &= a_{\alpha\beta}{}^{\rho} + \sum_{m\geq 1}\sum_{\underline{\alpha}\in I^m}\frac{1}{m!}a_{\alpha\beta\underline{\alpha}}{}^{\rho}t^{\underline{\alpha}} \in \mathbb{C}[\![\underline{t}]\!],\\ \Lambda_{\alpha\beta} &= \lambda_{\alpha\beta} + \sum_{m\geq 1}\sum_{\underline{\alpha}\in I^m}\frac{1}{m!}\lambda_{\alpha\beta\underline{\alpha}}t^{\underline{\alpha}} \in \mathcal{B}^{-1}[\![\underline{t}]\!], \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $u_\alpha \in \mathcal{B}^0$、$a_{\alpha\beta}{}^{\rho}$，$a_{\alpha\beta\underline{\alpha}}{}^{\rho} \in \mathbb{C}$、$\lambda_{\alpha\beta}$，$\lambda_{\alpha\beta\underline{\alpha}} \in \mathcal{B}^{-1}$ 和 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m} := t^{\alpha_1}\cdots t^{\alpha_m}$。

我们假设 u_α、$a_{\alpha\beta\alpha}{}^{\rho}$、$\lambda_{\alpha\beta\alpha}$ 在我们的记号下，对于 α 的指标置换是不变的。此假设对于我们的算法很重要（见注 4.4）。我们将给出一种摄动式显式算法，用于计算 Γ、$A_{\alpha\beta}{}^{\rho}$，使其满足方程（3.5）；也就是说，我们必须确定 u_α、$a_{\alpha\beta}{}^{\rho}$，以及 $a_{\alpha\beta\alpha}{}^{\rho}$，使它们满足（3.5）。

对于 $[u] \in J_S$，其中 $u \in \mathcal{B}$,

$$\text{we assume that } \delta_S(u) = 0 \text{ implies that } \Delta(u) \text{ belongs to the image of } \Delta\circ\delta_S. \tag{4.2}$$

此假设是紧致 K ∂∂ähler 流形的 ¨-引理的一个弱类比。我们的算法不依赖此假设也能运行，但此假设能保证解的唯一性（见推论 4.2）。

De定义 4.1. 设 $|\alpha| = m$，这意味着 $\alpha \in I^m$。我们定义记号 $u_\alpha^{(i)}$如下：

$$u_{\underline{\alpha}}^{(i)} = \sum_{\substack{\underline{\alpha}_1\sqcup\cdots\sqcup\underline{\alpha}_{m-i}=\underline{\alpha}\\ \underline{\alpha}_j\neq\emptyset}}\frac{1}{(m-i)!}u_{\underline{\alpha}_1}\cdots u_{\underline{\alpha}_{m-i}},\quad (0\leq i\leq m-1),$$

其中，记号 $\alpha_1\sqcup\cdots\sqcup\alpha_{m-i} = \alpha$ 表示 $\underline{\alpha}_1\cup\cdots\cup\underline{\alpha}_{m-i} = \underline{\alpha}$，而 $\underline{\alpha}_k\cap\underline{\alpha}_\ell = \emptyset$ 表示 $\ell \neq k$。

注意，$u_{\underline{\alpha}}^{(i)}$在对 α的指标置换下保持不变。例如，

$$\begin{aligned} u^{(0)}_{\alpha\beta\gamma} &= u_\alpha u_\beta u_\gamma,\\ u^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} &= u_\alpha u_{\beta\gamma} + u_\beta u_{\alpha\gamma} + u_\gamma u_{\alpha\beta},\\ u^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} &= u_{\alpha\beta\gamma}, \end{aligned} \quad \text{and} \quad \begin{aligned} u^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} =& u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta,\\ u^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} =& u_{\alpha\beta}u_\gamma u_\delta + u_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta + u_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma\\ &+ u_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta + u_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma + u_{\gamma\delta}u_\alpha u_\beta,\\ u^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} =& u_{\alpha\beta}u_{\gamma\delta} + u_{\alpha\gamma}u_{\beta\delta} + u_{\alpha\delta}u_{\beta\gamma}\\ &+ u_\alpha u_{\beta\gamma\delta} + u_\beta u_{\alpha\gamma\delta} + u_\gamma u_{\alpha\beta\delta} + u_\delta u_{\alpha\beta\gamma},\\ u^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} =& u_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned}$$

该算法的结构如下。

- **算法输入**：选取 $\mathbb{C}$ 的一组基 $\{[u_\alpha] = u_\alpha + \delta_S(\mathcal{B}^{-1}):\ \alpha \in I\}$，其属于 $J_S = H^0(\mathcal{B},\delta_S)$。

- **算法输出**：我们得到 Γ 和 $A_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ 的代数微扰展开，它给出了 J_S 上的乘法 $\circ$，即形式平坦的 F-流形 $(J_S, \circ, [1], \nabla)$，其中我们使用一个 ∇-平坦坐标 t，使得 $\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = 0$。

现在我们如下给出 Γ 和 $A_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ 的算法：

步骤 1： 使用 J_S 的基 $\{[u_\alpha] : \alpha \in I\}$，如下确定 $a^{(0)}_{\alpha\beta}$ 和 $\lambda^{(0)}_{\alpha\beta}$：

$$u_\alpha u_\beta = \sum_{\rho\in I} a^{(0)}_{\alpha\beta}{}^{\rho} u_\rho + \delta_S(\lambda^{(0)}_{\alpha\beta}).$$

注意，$a^{(0)}_{\alpha\beta}{}^{\rho} \in \mathbb{C}$ 是唯一的，而 $\lambda^{(0)}_{\alpha\beta}$ 在模 $\ker \delta_S$ 意义下唯一。在假设（4.2）下，$\Delta(\lambda^{(0)}_{\alpha\beta})$ 在模 $\mathrm{Im}(\delta_S)$ 意义下唯一。

然后，定义 $u_{\alpha\beta} := \Delta(\lambda^{(0)}_{\alpha\beta})$ 和 $a_{\alpha\beta}{}^{\rho} := a^{(0)}_{\alpha\beta}{}^{\rho}$。

步骤 ℓ ($\ell \geq 2$)： 假设 $|\alpha| = \ell + 1$。依次如下确定 $a^{(i)}_{\alpha}{}^{\rho}$ 和 $\lambda^{(i)}_{\alpha}$ $(0 \leq i \leq \ell - 1)$：

$$\begin{aligned}
u^{(0)}_{\alpha} &= \sum_{\rho\in I} a^{(0)}_{\alpha}{}^{\rho} u_\rho + \delta_S(\lambda^{(0)}_{\alpha}),\\
u^{(1)}_{\alpha} - \Delta(\lambda^{(0)}_{\alpha}) &= \sum_{\rho\in I} a^{(1)}_{\alpha}{}^{\rho} u_\rho + \delta_S(\lambda^{(1)}_{\alpha}),\\
&\vdots\\
u^{(\ell-1)}_{\alpha} - \Delta(\lambda^{(\ell-2)}_{\alpha}) &= \sum_{\rho\in I} a^{(\ell-1)}_{\alpha}{}^{\rho} u_\rho + \delta_S(\lambda^{(\ell-1)}_{\alpha}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $\lambda^{(i)}_{\alpha}$ 在模 δ_S 的核意义下对 $0 \leq i \leq \ell - 2$ 唯一，假设（4.2）意味着 $\Delta(\lambda^{(i)}_{\alpha})$ 在模 $\mathrm{Im}(\delta_S)$ 意义下唯一。因此，$a^{(\ell-1)}_{\alpha}{}^{\rho}$ 与 $\lambda^{(i)}_{\alpha}$ 的选取无关。于是，定义 $a_\alpha{}^{\rho} := a^{(\ell-1)}_{\alpha}{}^{\rho}$ 以及 $u_\alpha := \Delta(\lambda^{(\ell-1)}_{\alpha})$。

通过这一归纳算法，我们可以完全确定 Γ、$A_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ 和 $\Lambda_{\alpha\beta}$，它们最终满足方程（3.5）。由该算法可直接得到以下推论。

推论 4.2。 在假设（4.2）下，上述算法的结果 $A_{\alpha\beta}{}^{\rho}(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ 仅取决于 $\mathbb{C}$-基 $\{[u_\alpha] : \alpha \in I\}$，即 J_S。

注 4.3。 由于 $J_S = H^0(\mathcal{B}, \delta_S)$ 在模 $\mathcal{B}^0 \subset \mathbb{C}[x]$ 下，关于 $\delta_S(\mathcal{B}^{-1})$，基于理想 $(\cdot, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial x_n})$ 的格罗布纳基的除法算法 $= \delta_S(\mathcal{B}^{-1})$ 可以在多项式子环 $\mathcal{B}^0$ 中实现，从而能够通过计算机程序实现（4.3）中描述的归纳过程。

注 4.4（求解微分方程（3.5）的非平凡性）。以下各式中指标之间的对称性 α 在 $u_\alpha, a_{\alpha\beta\alpha}{}^{\rho}, \lambda_{\alpha\beta\alpha}$ 中起着重要作用。若试图通过比较 t 次幂的系数，以一种简单直接的方式求解这些方程，就会遇到麻烦，因为无法保证指标之间的对称性。但我们的算法保证了相关的量（例如 $u_\alpha, a_{\alpha\beta\alpha}{}^{\rho}, \lambda_{\alpha\beta\alpha}$）在 α 的置换下保持不变，正如方程（4.3）所示。假设没有类似 $u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha}$ 这样的条件，也就是说，我们不对指标记法施加对称性限制。那么，方程

$$\partial_\beta \partial_\alpha \Gamma = \Delta(\Lambda_{\alpha\beta})$$

方程（3.5）给出以下方程

$$u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha} = 2\Delta(\lambda_{\alpha\beta}),$$

但这样就无法根据前一步的数据 $u_{\alpha\beta}, u_{\beta\alpha}$ 单独确定 $2\Delta(\lambda_{\alpha\beta})$ 的值。这意味着，用非对称记法归纳求解（3.5）的简单方法同样行不通。

5. A proof why the algorithm works

这里我们给出第4节中算法的证明。

定义 5.1。 我们如下定义量 **U**、**B**、**C**，它们是算法证明中的关键对象：

$$\mathbf{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_m} := \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_m} \cdots \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_1} 1,$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\rho} := A_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\rho}, \\ \mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{}^{\rho} := \sum_{\delta\in I} \mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\delta}\mathbf{B}_{\delta\alpha_3}{}^{\rho} + \hbar\cdot\partial_{\alpha_3}(\mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\rho}), \\ \quad\vdots \\ \mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}^{\rho} := \sum_{\delta\in I} \mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}{}^{\delta}\mathbf{B}_{\delta\alpha_m}{}^{\rho} + \hbar\cdot\partial_{\alpha_m}(\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}{}^{\rho}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{\alpha_1\alpha_2} := \Lambda_{\alpha_1\alpha_2}, \\ \mathbf{C}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} := \sum_{\delta\in I} \mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\delta}\mathbf{C}_{\delta\alpha_3} + \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_3}\mathbf{C}_{\alpha_1\alpha_2}, \\ \quad\vdots \\ \mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_m} := \sum_{\delta\in I} \mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}{}^{\delta}\mathbf{C}_{\delta\alpha_m} + \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_m}\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}. \end{cases}$$

定理5.2。 方程 （3.5） 对所有 α、$\beta\in I$ 成立，当且仅当以下归纳方程对所有 $m\geq 2$ 以及所有 $\alpha\in I^m$成立：

$$\mathbf{U}_{\underline{\alpha}} = \sum_{\rho\in I}\mathbf{B}_{\underline{\alpha}}{}^{\rho}\Gamma_\rho + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\mathbf{C}_{\underline{\alpha}}). \tag{5.1}$$

证明。 显然，上述归纳方程蕴含方程（3.5），因为 $m=2$ （5.1）的情形与（3.5）相同。

假设方程（3.5）对所有 α，$\beta\in I$均成立。因此，归纳方程对所有$\alpha\in I^2$均成立。假设归纳方程对所有 $\alpha\in I^\ell$均成立，即

$$\mathbf{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell} = \sum_{\rho\in I}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\Gamma_\rho + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}), \tag{5.2}$$

对所有（α_1，……，α_ℓ）$\in I^\ell$。将$\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}$代入方程（5.2）。于是得到以下方程：

$$\begin{aligned} \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell} &= \sum_{\rho\in I}\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}(\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\Gamma_\rho) + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}), \\ \mathbf{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}} &= \sum_{\rho\in I}\Big[\hbar\partial_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\Gamma_\rho + \mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\rho}1\Big] \\ &\qquad + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}) \\ &= \sum_{\rho\in I}\Big[\hbar\partial_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\Gamma_\rho + \mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho}\Big[\sum_{\delta\in I}A_{\alpha_{\ell+1}\rho}{}^{\delta}\Gamma_\delta + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\Lambda_{\alpha_{\ell+1}\rho})\Big]\Big] \\ &\qquad + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}) \\ &= \sum_{\rho\in I}\Big[\hbar\partial_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\rho} + \sum_{\delta\in I}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\delta}A_{\alpha_{\ell+1}\delta}{}^{\rho}\Big]\Gamma_\rho \\ &\qquad + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\sum_{\delta\in I}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^{\delta}\Lambda_{\alpha_{\ell+1}\delta} + \hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha_{\ell+1}}\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}). \end{aligned}$$

回顾一下，$\hbar\nabla^{\frac{S+\Gamma}{\hbar}}_{\alpha}$ 和 $\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta$ 可交换。最后一个方程蕴含

$$\mathbf{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}} = \sum_{\rho\in I}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}}{}^{\rho}\Gamma_\rho + (\delta_{S+\Gamma}+\hbar\Delta)(\mathbf{C}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}})$$

根据**U**、**B**和**C**的定义。由数学归纳法，结论得证。 □

通过直接计算，我们得到以下引理：

引理5.3. 对于 $\alpha\in \underline{I}^m$，我们有以下公式：

$$\mathbf{U}_{\underline{\alpha}} = \sum_{i=0}^{m-1}{}^{i}U_{\underline{\alpha}}\hbar^i, \quad where \quad {}^{i}U_{\underline{\alpha}} = \sum_{\substack{\underline{\alpha}_1\sqcup\cdots\sqcup\underline{\alpha}_{m-i}=\underline{\alpha} \\ \underline{\alpha}_j\neq\emptyset}}\frac{1}{(m-i)!}\Gamma_{\underline{\alpha}_1}\cdots\Gamma_{\underline{\alpha}_{m-i}},$$

其中，$\underline{\alpha}_1\sqcup\cdots\sqcup\underline{\alpha}_{m-i}=\underline{\alpha}$ 表示 $\underline{\alpha}_1\cup\cdots\cup\underline{\alpha}_{m-i}=\underline{\alpha}$，而 $\underline{\alpha}_k\cap\underline{\alpha}_\ell=\emptyset$ 表示 $\ell\neq k$。

例如，

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\alpha\beta\gamma} =&\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma+\hbar(\Gamma_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}+\Gamma_\beta\Gamma_{\alpha\gamma}+\Gamma_\gamma\Gamma_{\alpha\beta})+\hbar^2\Gamma_{\alpha\beta\gamma},\\ \mathbf{U}_{\alpha\beta\gamma\delta} =&\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma\Gamma_\delta\\ &+\hbar(\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_\gamma\Gamma_\delta+\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_\beta\Gamma_\delta+\Gamma_{\alpha\delta}\Gamma_\beta\Gamma_\gamma+\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_\alpha\Gamma_\delta+\Gamma_{\beta\delta}\Gamma_\alpha\Gamma_\gamma+\Gamma_{\gamma\delta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)\\ &+\hbar^2(\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma\delta}+\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\delta}+\Gamma_{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma}+\Gamma_\alpha\Gamma_{\beta\gamma\delta}+\Gamma_\beta\Gamma_{\alpha\gamma\delta}+\Gamma_\gamma\Gamma_{\alpha\beta\delta}+\Gamma_\delta\Gamma_{\alpha\beta\gamma})\\ &+\hbar^3\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}.\end{aligned}$$

因此，我们得到以下结果：

$$ {}^iU_{\underline{\alpha}}|_{\underline{t}=0}=u_{\underline{\alpha}}^{(i)}=\sum_{\substack{\underline{\alpha}_1\sqcup\cdots\sqcup\underline{\alpha}_{m-i}=\underline{\alpha}\\ \underline{\alpha}_j\neq\emptyset}}\frac{1}{(m-i)!}u_{\underline{\alpha}_1}\cdots u_{\underline{\alpha}_{m-i}}, \tag{5.3}$$

其中 $u_{\underline{\alpha}}^{(i)}$出现在定义 4.1中。

根据$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$的定义，当时，$\mathbf{B}_\alpha{}^\rho$ 和$\mathbf{C}_\alpha$ 的 $\hbar$ 次度为 $m-2$，也就是说，我们可以写成

$$\mathbf{B}_{\underline{\alpha}}{}^\rho=\sum_{i=0}^{m-2}{}^iB_{\underline{\alpha}}{}^\rho\hbar^i,\quad \mathbf{C}_{\underline{\alpha}}=\sum_{i=0}^{m-2}{}^iC_{\underline{\alpha}}\hbar^i,$$

对于某些 ${}^iB_{\underline{\alpha}}{}^\rho\in\mathbb{C}[\![t]\!]$，以及 ${}^iC_{\underline{\alpha}}\in\mathcal{B}^{-1}[\![t]\!]$。因此，通过比较式（5.1）中的 $\hbar$ 次幂项，我们得到以下方程组：

$$\begin{aligned}{}^0U_{\underline{\alpha}}&=\sum_{\rho\in I}{}^0B_{\underline{\alpha}}{}^\rho\Gamma_\rho+\delta_{S+\Gamma}({}^0C_{\underline{\alpha}}),\\ {}^1U_{\underline{\alpha}}&=\sum_{\rho\in I}{}^1B_{\underline{\alpha}}{}^\rho\Gamma_\rho+\delta_{S+\Gamma}({}^1C_{\underline{\alpha}})+\Delta({}^0C_{\underline{\alpha}}),\\ &\vdots\\ {}^{m-2}U_{\underline{\alpha}}&=\sum_{\rho\in I}{}^{m-2}B_{\underline{\alpha}}{}^\rho\Gamma_\rho+\delta_{S+\Gamma}({}^{m-2}C_{\underline{\alpha}})+\Delta({}^{m-3}C_{\underline{\alpha}}),\\ {}^{m-1}U_{\underline{\alpha}}&=\Delta({}^{m-2}C_{\underline{\alpha}}).\end{aligned} \tag{5.4}$$

引理 5.4。展开的常数项 ${}^{m-2}B_\alpha{}^\rho$ 为 $a_\alpha{}^\rho$，它出现在(4.1)中，即

$${}^{m-2}B_{\underline{\alpha}}{}^\rho|_{\underline{t}=0}=a_{\underline{\alpha}}{}^\rho.$$

证明。只需证明

$${}^{m-2}B_{\underline{\alpha}}{}^\rho=\partial_{\alpha_m}\partial_{\alpha_{m-1}}\cdots\partial_{\alpha_3}A_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho, \tag{5.5}$$

其中 $\underline{\alpha}=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\in I^m$ 对于 $m\geq 2$。使用数学归纳法。当 $m=2$，$\mathbf{B}_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho=A_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho$根据定义 5.1，这意味着 ${}^0B_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho=A_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho$。

假设方程（5.5）对 $|\alpha|=\ell$成立。根据定义 5.1，

$$\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}}{}^\rho=\sum_{\delta\in I}\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^\delta\mathbf{B}_{\delta\alpha_{\ell+1}}{}^\rho+\hbar\cdot\partial_{\alpha_{\ell+1}}(\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^\rho).$$

因此，$\mathbf{B}_{\alpha_1\cdots\alpha_{\ell+1}}{}^\rho$ 的 $\hbar^{\ell-1}$ 项为 $\partial_{\alpha_{\ell+1}}({}^{\ell-2}B_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell}{}^\rho)=\partial_{\alpha_{\ell+1}}\cdots\partial_{\alpha_3}A_{\alpha_1\alpha_2}{}^\rho$。 □

根据引理 5.4 和方程（5.3），通过将 $t=0$ 代入方程（5.4，可得到方程（4.3）。这表明第 4 节中的算法可用于求得（3.5）的解。

6. Comparison with Li-Li-Saito's algorithm

容易看出，方程 (3.2) 和 (3.5) 蕴含以下命题。

命题 6.1。**若第** F 节构造的平坦 F-流形 $(J_S,A_{\alpha\beta}{}^\gamma(\underline{t}))$ 可以扩张为一个形式*Frobenius*流形 $(J_S,A_{\alpha\beta}{}^\gamma(t)\ g_{\alpha\beta})$，那么 $(J_S,A_{\alpha\beta}{}^\gamma(t)\ g_{\alpha\beta})$ 与一个原始形式 $[1]\in J_S$ 相关（如 [14] 中所述）。

我们考虑一个简单椭圆奇点。设

$$S(\underline{x})=\frac{1}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3). \tag{6.1}$$

注意到 $S(x)$ 是一个加权齐次多项式，称为 $E_6^{(1,1)}$ 型简单椭圆奇点。根据[9, 命题 6，3], 原始形式不可能是 [1]，因此，忘掉度量后，由 F（与原始形式 [1]相关联的）形式 Frobenius 流形构造而来的形式平坦 [9, -流形，与3], 本文构造的形式 F-流形不同。这表明我们的算法不同于 Li-Li-Saito 的算法（[9] 和 [10]）。我们发现，似乎很难将我们的算法扩展到构造形式 Frobenius 流形。

References

[1] Barannikov, S.; Kontsevich, M.: *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices **4** （1998）201–215。[2] Cox, David A.; Katz, Sheldon: *Mirror symmetry and algebraic geometry.* 数学调查与专著丛书, 第 68 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999 年。xxii+469 页。[3] Dimca, A.: *Residues and cohomology of complete intersections*, Duke Math. J.，78（1995）第 1 期，89–100。[4] Dubrovin, B. A.: *Geometry of* 2*D topological field theories*，载于《可积系统与量子群》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1993），数学讲义第 1620 卷，120–348。Springer-Verlag，柏林（1996）。[5] Griffiths, Phillip A.: *On the periods of certain rational integrals. I, II*, Ann. of Math.（2）90（1969），460–495；同上（2）90（1969），496–541。[6] Hertling, Claus: *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities.* 剑桥数学专著丛书，第 151 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。x+270 页。[7] Hertling, C.; Manin, Y.: *Weak Frobenius Manifolds*, Internat. Math. Res. Notices **6**（1999）277–286。[8] K. Konno: *On the variational Torelli problem for complete intersections*, Comp. Math.，78（1991），271–296。

[9] *Primitive forms via polyvector fields* 1311 1659 Li,

[10] *Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities* Changzheng; Li, Si; Saito, Kyoji: ，可见于 https://arxiv.org/abs/ 。Li, Changzheng; Li, Si; Saito, Kyoji; Shen, Yefeng: ， J. Eur. Math. Soc. 9，1189–1229。[11] Manin, Y.: *F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality.* Adv. Math. 198（2005），第 1 期，5–26。[12] Saito, K.: *Primitive forms for an universal unfolding of a functions with isolated critical point*, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **28** 第 3 期（1981）777–792。[13] Saito, M.: *On the structure of Brieskorn lattice*, Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）**39** （1989），第 1 期，27–72。[14] Saito, K.; Takahashi, A.: *From primitive forms to Frobenius manifolds,* 从 Hodge 理论到可积性与拓扑量子场论几何，31–48，纯数学研讨会论文集，第 78 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。

Jeehoon Park: QSMS, Seoul National University, 1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826, South Korea
Email address: jpark.math@gmail.com

Department of Mathematics, POSTECH (Pohang University of Science and Technology), San 31, Hyoja-Dong, Nam-Gu Pohang Gyeongbuk 790-784 ,,„
South Korea.*Email address*: yooj1215@postech.ac.kr