arXiv:2603.21587v1 [math.AC] 23 Mar 2026

一般化戈伦斯坦环上的 Cohen–Macaulay 逼近

RICHARD F. BARTELS

Abstract. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个带有典范模且一般化戈伦斯坦的 Cohen-Macaulay 局部环。本文证明了若干同构关系，它们联系了由典范理想 $\omega \subset R$ 构造的模的最小极大 Cohen–Macaulay 逼近与有限内射维数包，包括 ω/xR，其中 $x \in \omega$ 为非零因子，$(\omega/xR)^\vee := \mathrm{Ext}^1_R(\omega/xR,\omega)$，$R/\omega^2$，以及 ω/ω^2。我还证明，若 R 不是 Gorenstein，则 $\delta_R(\omega/xR) = \delta_R\left((\omega/xR)^\vee\right) = 0$，且 $\gamma_R\left(\Omega^1_R(\omega/xR)\right) = \gamma_R\left(\Omega^1_R\left((\omega/xR)^\vee\right)\right) = 0$，其中 δ_R 是 Auslander 的 δ-不变量，而 γ_R 是对偶的 γ-不变量。本文的结果以 [1, 第 2]节为基础。

1. Introduction

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个带典范模 ω 的 Cohen-Macaulay 局部环。下文中，我用 $M^{(n)}$ 表示模 M 的 n 个副本的直和。对于每个有限生成的 R-模 M，存在一个正合列

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\iota} X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 Y 是一个具有有限内射维数的 R-模，X 是一个极大科恩-麦考利（MCM）R-模，称为 M 的 ***MCM 逼近***。如果 Y 和 X 没有通过 ι 共有的直和项，则该 MCM 逼近是最小的，记作如下形式。

$$0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

对偶地，存在一个 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y' \xrightarrow{\pi} X' \longrightarrow 0$$

其中 Y' 是一个具有有限内射维数的 R-模，X' 是一个 MCM R-模或零，称为 M 的有限内射维数包（FID 包）。如果 Y' 和 X' 没有通过 π 共有的直和项，则该 FID 包是最小的，记作如下形式。

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y^M \longrightarrow X^M \longrightarrow 0$$

每个有限生成的 R-模都有一个最小 MCM 逼近和一个最小 FID 包。这些正合列在诱导 M[5, 上恒等映射的正合列同构意义下唯一。定义 11.8 和 11.10、命题 11.13、定理 11.17]。对于一个 MCM 逼近

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\iota} X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13B30, 13C13, 13C14, 13C15, 13D02, 13D07, 13E05, 13E15, 13H05, 13H1 0.
Key words and phrases. 科恩-麦考利、一般化戈伦斯坦、典范理想、MCM 逼近、有限内射维数包络。

若 Y 和 X 通过 ι有一个非零直和项 N 相同，则 N 是最大 Cohen–Macaulay 模，且具有有限内射维数。由此可得，对于某个正整数 m， $N \cong \omega^{(m)}$ 。对于有限内射维数包络，同样如此

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y' \xrightarrow{\pi} X' \longrightarrow 0$$

若 Y'和 X'通过 π有一个非零直和项 N'相同，则对某个正整数 n [5, ，有 $N' \cong \omega^{(n)}$（命题 11.7]）。因此，每个有限生成 R-模的 MCM 逼近和有限内射维数包络均可写成如下形式。

命题 1.1。 [3, 命题 1.5 和 1.6] 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个带有典范模 ω的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 M 是一个有限生成的 R-模。对于某个非负整数 m， M 的每个 *MCM* 逼近均可写成如下形式。

$$0 \longrightarrow \omega^{(m)} \oplus Y_M \longrightarrow \omega^{(m)} \oplus X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

同样，对于某个非负整数 n， M 的每个有限内射维数包络均可写成如下形式。

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \omega^{(n)} \oplus Y^M \longrightarrow \omega^{(n)} \oplus X^M \longrightarrow 0$$

带典范模 ω 的 Cohen-Macaulay 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 称为一般化戈伦斯坦 ，若对 R的每个极小素理想 $\mathfrak{p}$， $R_{\mathfrak{p}}$ 都是戈伦斯坦局部环。当 R 不是 Gorenstein 时，这一条件等价于 ω 同构于 R 的一个高度一理想（见 [2, 命题 3.3.18]和[5, 命题 11.6]）。这样的理想称为典范理想 ，也记作 ω。

下文将证明由典范理想构造的模的 MCM 逼近与有限内射维数包络之间的同构关系。这些结果建立在 [1, section 2]之上。我利用其中一个关系，计算 $(\omega/xR)^\vee := \operatorname{Ext}^1_R(\omega/xR, \omega)$ 的*Auslander* 的 δ不变量，以及 $\Omega^1_R(\omega/xR)$ 的 γ不变量；$\Omega^1_R(\omega/xR)$ 是 ω/xR的第一 syzygy。这里， $x \in \omega$ 是一个 R-正则元。

定义 1.2。 [5, 定义 11.24] 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个具有典范模 ω 的 Cohen-Macaulay 局部环。对于有限生成的 R-模 Z，我们将 Z 的自由秩（记作 f-rank Z）定义为 Z的极大自由直和项的秩。换言之，

$$Z \cong \underline{Z} \oplus R^{(\text{f-rank } Z)},$$

其中 $\underline{Z}$没有非平凡的自由直和项。对偶地， Z的典范秩（记作 ω-rank Z）是满足 $\omega^{(n)}$ 为 Z的直和项的最大整数 n 。对于有限生成的R-模 M，我们定义 $\delta_R(M) :=$f-rank X_M，以及 $\gamma_R(M) := \omega$-rank X_M。

在推论 2.5 中，我证明对于典范理想 $\omega \subset R$ 以及 R-正则元 $x \in \omega$ ，有

$$\delta_R(\omega/xR) = \delta_R\left((\omega/xR)^\vee\right) = 0$$

and

$$\gamma_R\left(\Omega_R^1(\omega/xR)\right) = \gamma_R\left(\Omega_R^1\left((\omega/xR)^\vee\right)\right) = 0.$$

以下引理在整个第 2 节中都会用到。

引理 1.3. [1, 引理 2.7] 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个 *Cohen-Macaulay* 局部环。若

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

是一个正合列， X 是一个最大 *Cohen–Macaulay* R-模，而 Y 是一个内射维数有限的 R-模，则该正合列分裂，且$M \cong Y \oplus X$。

2. Results

定义 2.1. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个带有典范模 ω的 Cohen-Macaulay 局部环。若两个 R-模 M 和 N 是 ω-稳定同构的，记作 $M \cong_\omega N$，则称它们为 ω-稳定同构；其中存在非负整数 s和 t，使得

$$M \oplus \omega^{(s)} \cong N \oplus \omega^{(t)}.$$

注 2.2. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个带有典范模 ω 且一般化 Gorenstein 的 Cohen-Macaulay 局部环。若两个 R-模 M 和 N 是 ω-稳定同构的，则对于 R的每个极小素理想 $\mathfrak{p}$， $M_\mathfrak{p}$ 和 $N_\mathfrak{p}$ 是稳定同构的 $R_\mathfrak{p}$-模。

在 [1], 中，我证明了以下结论。

命题 2.3. [1, 命题 2.10] 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个泛 *Gorenstein* 且非 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 是 R 的典范理想， $x \in \omega$ 是一个 R-正则元素。设$(\omega/xR)^\vee := \operatorname{Ext}_R^1(\omega/xR,\omega)$。那么有以下结论。

(a) ω/xR 是一个余维1的 *Cohen-Macaulay* R-模

(b) $(\omega/xR)^\vee :=\operatorname{Ext}_R^1(\omega/xR,\omega)$ 是一个余维为 1 的科恩-麦考利 R-模。*(c)* $X_{\omega/xR} \cong_\omega X_{(\omega/xR)^\vee} \cong_\omega X^{R/\omega}$

(d) 存在一个正合列

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \omega^{(n)} \longrightarrow X^{R/\omega} \longrightarrow 0$$

与 $n = \mu_R(\omega)$。

在下述命题中，我进一步描述模 ω/xR、$(\omega/xR)^\vee$ 和 R/ω 的极小极大 Cohen–Macaulay 逼近及有限内射维数包。

命题 2.4。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个具有典范模、在一般点处为 *Gorenstein* 且非 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 是 R 的典范理想，$x \in \omega$ 是一个 R-正则元。那么以下情况恰有一种成立。

(1) $X_{\omega/xR} \cong X^{R/\omega} \cong X^R$ *(2)*
$X_{\omega/xR} \cong X^{R/\omega} \cong \omega \oplus X^R$ *(3)*
$X_{\omega/xR} \cong \omega \oplus X^{R/\omega} \cong \omega \oplus X^R$

此外，对于 $(\omega/xR)^\vee := \mathrm{Ext}^1_R(\omega/xR, \omega)$，以下情况恰有一种成立。

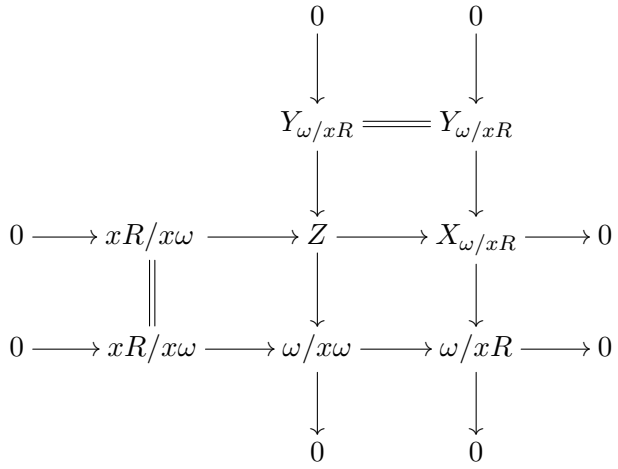
(4) $R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong X_{R/xR}$
(5) $R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong \omega \oplus X_{R/xR}$

证明。考虑该正合列的拉回图

$$0 \longrightarrow xR/x\omega \longrightarrow \omega/x\omega \longrightarrow \omega/xR \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

以及 ω/xR的最小极大 Cohen-Macaulay 逼近。

(2.2)



由图2.2的中间列可知， Z 具有有限内射维数。因此，对于某个 $s \geq 0$，中间行是 R/ω 和 $X_{\omega/xR} \cong \omega^{(s)} \oplus X^{R/\omega}$ 的有限内射维数包络。根据命题 2.3 (d)中的正合列，对于某个 $t \geq 0$，我们有 $X^{R/\omega} \cong \omega^{(t)} \oplus X^R$ 。最后，根据 [1, 命题 2.9 (c)], ，我们有$X_{\omega/xR} \cong \omega^{(r)} \oplus X^R$，其中 $r = 0$ 或 $r = 1$。首先假设 $r = 0$。那么我们有

$$X_{\omega/xR} \cong \omega^{(s+t)} \oplus X_{\omega/xR}.$$

因此 $s = t = 0$ 且

$$X_{\omega/xR} \cong X^{R/\omega} \cong X^R.$$

现在假设 $r = 1$。那么我们有

$$\omega \oplus X^R \cong \omega^{(s+t)} \oplus X^R.$$

因此 $s = 0$ 且 $t = 1$ 或 $s = 1$ 且 $t = 0$。若 $s = 0$ 且 $t = 1$，那么我们有

$$X_{\omega/xR} \cong X^{R/\omega} \cong \omega \oplus X^R.$$

若 $s = 1$ 且 $t = 0$，那么我们有

$$X_{\omega/xR} \cong \omega \oplus X^{R/\omega} \cong \omega \oplus X^R.$$

再次考虑正合列

$$0 \longrightarrow xR/x\omega \longrightarrow \omega/x\omega \longrightarrow \omega/xR \longrightarrow 0.$$

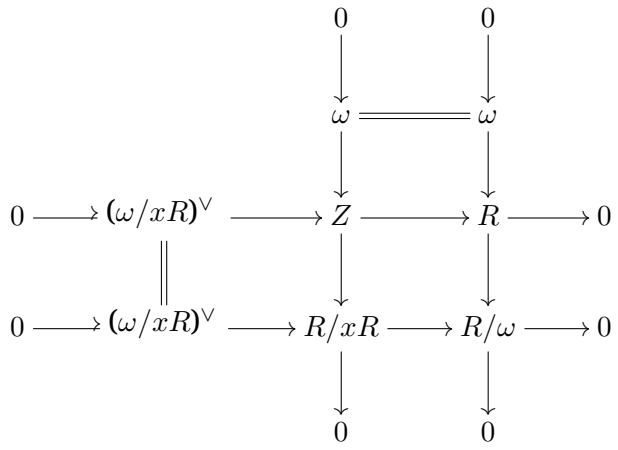
根据命题 2.3 (a) 和 [2, 命题 3.3.18]，此正合列中的每个模都是余维 1 的科恩-麦考利 R-模。应用 $\mathrm{Hom}_R(-, \omega)$，我们得到正合列

(2.3)
$$0 \longrightarrow (\omega/xR)^\vee \longrightarrow R/xR \longrightarrow R/\omega \longrightarrow 0.$$

考虑序列 2.3 的拉回图以及正合列

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow R \longrightarrow R/\omega \longrightarrow 0.$$

(2.4)



中间　行 图 2.4 可以分裂，因此中间列给出了正合 e

(2.5)
$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow R \oplus (\omega/xR)^\vee \longrightarrow R/xR \longrightarrow 0.$$

现在考虑序列 2.5 的拉回图以及 R/xR 的最小极大 Cohen-Macaulay 逼近。

(2.6)

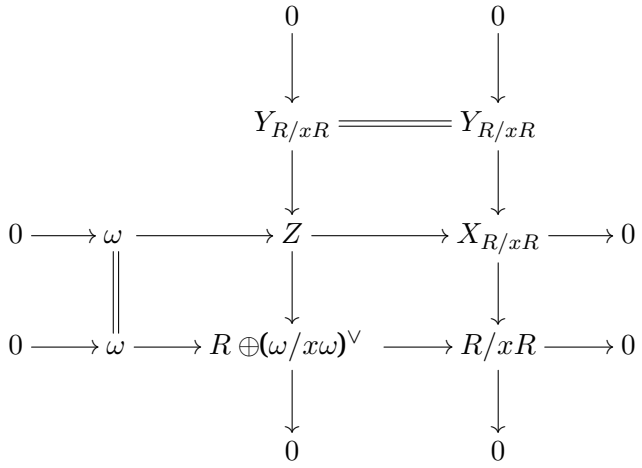


图 2.6 的中间行由引理 1.3 分裂，因此中间列给出了正合列

(2.7)
$$0 \longrightarrow Y_{R/xR} \longrightarrow \omega \oplus X_{R/xR} \longrightarrow R \oplus (\omega/x\omega)^\vee \longrightarrow 0.$$

正合列 2.7 是 $R \oplus (\omega/x\omega)^\vee$ 的 MCM 逼近，因此我们有

$$\omega \oplus X_{R/xR} \cong_\omega X_{R\oplus(\omega/xR)^\vee} \cong R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee}$$

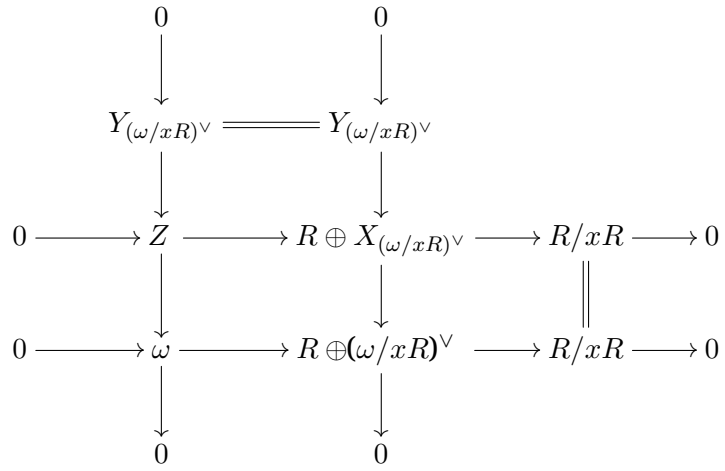
并且对于某个 $a \geq 0$，我们有

$$\omega \oplus X_{R/xR} \cong \omega^{(a)} \oplus R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee}. \tag{2.8}$$

现在考虑序列 2.5 的拉回图以及正合列

$$0 \longrightarrow Y_{(\omega/xR)^\vee} \longrightarrow R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \longrightarrow R \oplus (\omega/xR)^\vee \longrightarrow 0.$$

(2.9)



由第一列可知，Z 具有有限内射维数。因此，中间行是 R/xR 的 MCM 逼近，并且对于某个 $b \geq 0$，我们有

$$R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong \omega^{(b)} \oplus X_{R/xR}.$$

结合同构 2.8，我们得到

$$\omega \oplus X_{R/xR} \cong \omega^{(a+b)} \oplus X_{R/xR}.$$

因此 , we 有 $a = 0$ 和 $b = 1$ 或 $a = 1$ 和 $b = 0$。如果 $a = 0$ 和 $b = 1$，那么我们有

$$R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong \omega \oplus X_{R/xR}. \tag{2.10}$$

如果 $a = 1$ 和 $b = 0$，那么

$$R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong X_{R/xR}.$$

□

推论 2.5。设 $(R, \mathfrak{m})$ 为一个带有典范模的一般化戈伦斯坦但非 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 为 R 的一个典范理想，且 $x \in \omega$ 为一个 R-正则元。设 $(\omega/xR)^\vee := \mathrm{Ext}^1_R(\omega/xR, \omega)$。则有如下结论。

(1) $\delta_R(\omega/xR) = \delta_R((\omega/xR)^\vee) = 0$

(2) $\gamma_R\left(\Omega^1_R(\omega/xR)\right) = \gamma_R\left(\Omega^1_R\left((\omega/xR)^\vee\right)\right) = 0$

证明。由于 $x \in \omega$，我们有满射 $R/xR \longrightarrow R/\omega$。由 [5, 推论 11.28 (ii) 和 (iii)]，我们有

$$\delta_R(R/\omega) \leq \delta_R(R/xR) \leq \mu_R(R/xR).$$

由于正合列

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow R \longrightarrow R/\omega \longrightarrow 0$$

是 R/ω的最小极大 Cohen-Macaulay 逼近，因此有 $\delta_R(R/xR) = 1$。由上述命题，我们有

$$R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong X_{R/xR}$$

or

$$R \oplus X_{(\omega/xR)^\vee} \cong \omega \oplus X_{R/xR}.$$

由于 R 不是 Gorenstein，ω 没有非平凡的自由直和项。若 $\delta_R((\omega/xR)^\vee) > 0$，则 $X_{R/xR}$ 有一个秩为二的自由直和项，因此得到 $\delta_R(R/xR) > 1$。命题（1）中的另一个等式由满射 $\omega \longrightarrow \omega/xR$ 和 [5, 推论 11.28 (ii)] 得出。命题（2）由命题（1）、命题 2.3 (a) 和 (b)，以及 [5, 定理 11.5 和命题 11.35] 得出。□

命题 2.6。 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个带有典范模的 *Cohen-Macaulay* 局部环，该环在一般点处是 *Gorenstein*，但本身不是 *Gorenstein*。设 ω 是 R 的典范理想，且 $x \in \omega$ 是一个 R-正则元。设$(-)^{\vee} := \operatorname{Ext}^1_R(-,\omega)$。则

(1) $X^{\omega/x^mR} \cong_{\omega} X^{\omega/x^nR}$

对所有 m、$n \geq 1$。此外，当 $N \geq 1$ 充分大时，我们有

$$X^{\omega/x^mR} \cong X^{\omega/x^nR}$$

对所有 m、$n \geq N$。

(2) $X^{(\omega/x^mR)^{\vee}} \cong_{\omega} X^{(\omega/x^nR)^{\vee}}$

对所有 m、$n \geq 1$。此外，当 $N \geq 1$ 充分大时，我们有

$$X^{(\omega/x^mR)^{\vee}} \cong X^{(\omega/x^nR)^{\vee}}$$

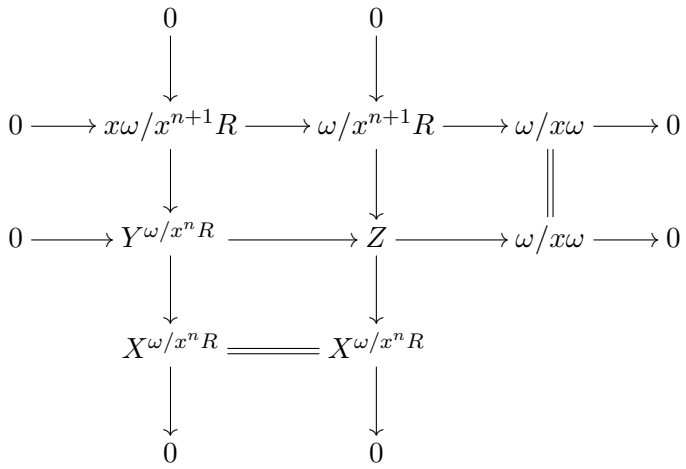
对所有 m、$n \geq N$。

证明。 令 $n \geq 1$。考虑该正合列的推出图

$$0 \longrightarrow x\omega/x^{n+1}R \longrightarrow \omega/x^{n+1}R \longrightarrow \omega/x\omega \longrightarrow 0. \tag{2.11}$$

以及 ω/x^nR的最小 FID 包。

(2.12)



由于 Y^{ω/x^nR} 和 $\omega/x\omega$ 具有有限内射维数，因此 Z 也具有有限内射维数。所以，图 2.12 的中间列是 $\omega/x^{n+1}R$ 的有限内射维数包络，并且

$$X^{\omega/x^nR} \cong \omega^{(s)} \oplus X^{\omega/x^{n+1}R}$$

对于某个 $s \geq 0$。

假设并非存在一个正整数 N 使得

$$X^{\omega/x^mR} \cong X^{\omega/x^nR}$$

对所有 $m,\ n \geq N$。那么存在一个由正整数组成的无限严格递增序列 $n_1 < n_2 < \cdots$，使得

$$X^{\omega/x^{n_i}R} \cong \omega^{(s_i)} \oplus X^{\omega/x^{n_i+1}R}$$

其中 $s_i > 0$ 对所有 $i \geq 1$成立。因此，对于每个正整数 κ，我们有

$$X^{\omega/x^{n_1}R} \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{\kappa} \omega^{(s_i)}\right) \oplus X^{\omega/x^{n_\kappa+1}R}$$

从而 $\mu_R\left(X^{\omega/x^{n_1}R}\right) \geq \kappa$。这与 $X^{\omega/x^{n_1}R}$ 是有限生成的相矛盾。

现在对该正合列取对偶

$$0 \longrightarrow x^nR/x^{n+1}R \longrightarrow \omega/x^{n+1}R \longrightarrow \omega/x^nR \longrightarrow 0$$

从而得到正合列

$$0 \longrightarrow (\omega/x^nR)^\vee \longrightarrow (\omega/x^{n+1}R)^\vee \longrightarrow \omega/x\omega \longrightarrow 0. \tag{2.13}$$

如图 2.12 所示，我们为序列 2.13 构造推出图，并为 $(\omega/x^nR)^\vee$ 构造最小 FID 包，从而得到同构

$$X^{(\omega/x^nR)^\vee} \cong \omega^{(t)} \oplus X^{(\omega/x^{n+1}R)^\vee}$$

对于某个 $t \geq 0$。应用上述论证可知，对于某个正整数 N，有

$$X^{(\omega/x^mR)^\vee} \cong X^{(\omega/x^nR)^\vee}$$

对所有 $m,\ n \geq N$。 □

命题 2.7。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个具有典范模且一般化 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 是 R 的一个典范理想，且 $x \in \omega$ 是一个 R- 正则元。则以下情形恰有一种成立。

(1) $X_{\omega/\omega^2} \cong X^{\omega^2/x\omega}$

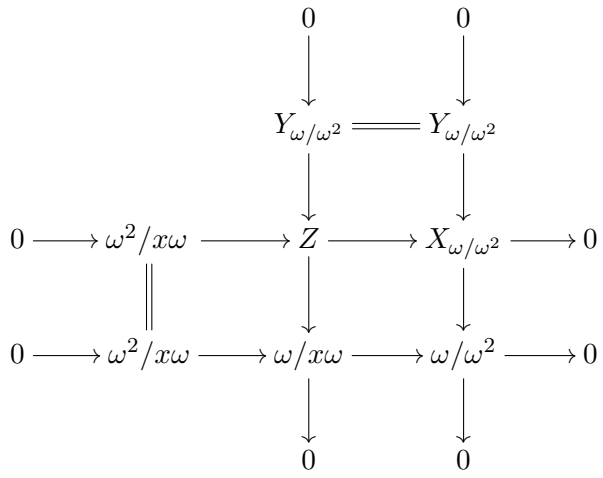
(2) $X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X^{\omega^2/x\omega}$

证明。 考虑下列正合列对应的拉回图

$$0 \longrightarrow \omega^2/x\omega \longrightarrow \omega/x\omega \longrightarrow \omega/\omega^2 \longrightarrow 0 \tag{2.14}$$

以及 ω/ω^2 的最小极大 Cohen-Macaulay 逼近。

(2.15)

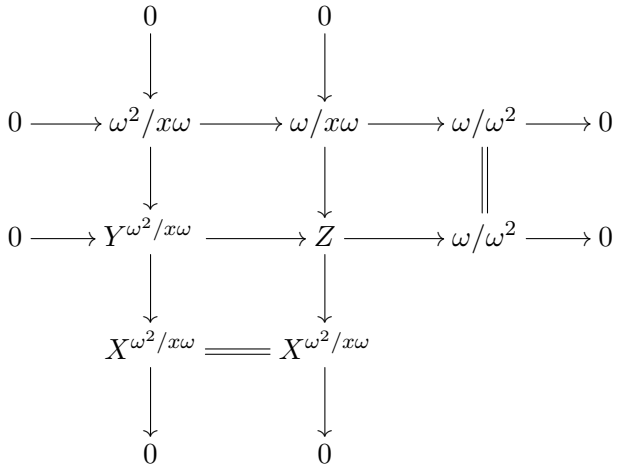


由于 Y_{ω/ω^2} 和 $\omega/x\omega$ 具有有限内射维数， Z 也具有有限内射维数。因此，中间行是 $\omega^2/x\omega$ 的有限内射维数包络，并且

(2.16)
$$X_{\omega/\omega^2} \cong \omega^{(s)} \oplus X^{\omega^2/x\omega}.$$

对于某个 $s \geq 0$。现在考虑正合列 2.14 的推出图以及$\omega^2/x\omega$的最小 FID 包。

(2.17)



由于 $\omega/x\omega$ 具有有限内射维数，且 $X^{\omega^2/x\omega}$ 是一个 MCM R-模，中间列

图 2.17 分裂，从而得到正合列

$$0 \longrightarrow Y^{\omega^2/x\omega} \longrightarrow X^{\omega^2/x\omega} \oplus \omega/x\omega \longrightarrow \omega/\omega^2 \longrightarrow 0. \tag{2.18}$$

考虑正合列 2.18 的拉回图以及正合列

$$0 \longrightarrow x\omega \longrightarrow X^{\omega^2/x\omega} \oplus \omega \longrightarrow X^{\omega^2/x\omega} \oplus \omega/x\omega \longrightarrow 0.$$

(2.19)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & x\omega & = & x\omega & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X^{\omega^2/x\omega} \oplus \omega & \longrightarrow & \omega/\omega^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & Y^{\omega^2/x\omega} & \longrightarrow & X^{\omega^2/x\omega} \oplus \omega/x\omega & \longrightarrow & \omega/\omega^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

由于 $x\omega$ 和 $Y^{\omega^2/x\omega}$ 具有有限内射维数， Z 也具有有限内射维数。因此，图 2.19 的中间行是 ω/ω^2 的一个 MCM 逼近，并且

$$\omega \oplus X^{\omega^2/x\omega} \cong \omega^{(t)} \oplus X_{\omega/\omega^2} \tag{2.20}$$

对某个 $t \geq 0$成立。由同构 2.16，我们有

$$\omega \oplus X^{\omega^2/x\omega} \cong \omega^{(s+t)} \oplus X^{\omega^2/x\omega} \tag{2.21}$$

由此可得 $s+t=1$。因此 $s=0$ 和 $t=1$，或者 $s=1$ 和 $t=0$。

若 $s=0$ 和 $t=1$，则

$$X_{\omega/\omega^2} \cong X^{\omega^2/x\omega}.$$

如果 $s=1$ 和 $t=0$，那么

$$X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X^{\omega^2/x\omega}.$$

□

推论 2.8. 以下两者恰有一个成立。

(1) $X_{\omega/\omega^2} \cong X^{\omega^2/x\omega} \cong X^{\omega^2}$

(2) $X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X^{\omega^2/x\omega} \cong X^{\omega^2}$

(3) $X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X^{\omega^2/x\omega} \cong \omega \oplus X^{\omega^2}$

证明。 这由命题 2.7, [1, 命题 2.9 (c)], 以及该正合列的推出图可得

$$0 \longrightarrow x\omega \longrightarrow \omega^2 \longrightarrow \omega^2/x\omega \longrightarrow 0$$

以及 ω^2的最小 FID 包。 □

命题 2.9。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个带有典范模且在一般点处为 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 是 R 的典范理想，且 $x \in \omega$ 是一个 R-正则元。以下两种情况恰有一种成立。

(1) $X_{\omega^2} \cong X_{\omega^2/x\omega} \quad and \quad \omega \oplus Y_{\omega^2} \cong Y_{\omega^2/x\omega}$

(2) $X_{\omega^2} \cong \omega \oplus X_{\omega^2/x\omega} \quad and \quad Y_{\omega^2} \cong Y_{\omega^2/x\omega}$

证明。 由 [1, 命题 2.8 (c)]可得。 □

命题 2.10。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个带有典范模且在一般点处为 *Gorenstein* 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。设 ω 是 R的典范理想。以下两种情况恰有一种成立。

(1) $R \oplus X_{\omega/\omega^2} \cong X_{R/\omega^2}$ 和 $\omega \oplus Y_{\omega/\omega^2} \cong Y_{R/\omega^2}$***(2)***
$R \oplus X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X_{R/\omega^2}$ 和 $Y_{\omega/\omega^2} \cong Y_{R/\omega^2}$

证明。 考虑这些正合列的拉回图

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow R \longrightarrow R/\omega \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow \omega/\omega^2 \longrightarrow R/\omega^2 \longrightarrow R/\omega \longrightarrow 0.$$

(2.22)

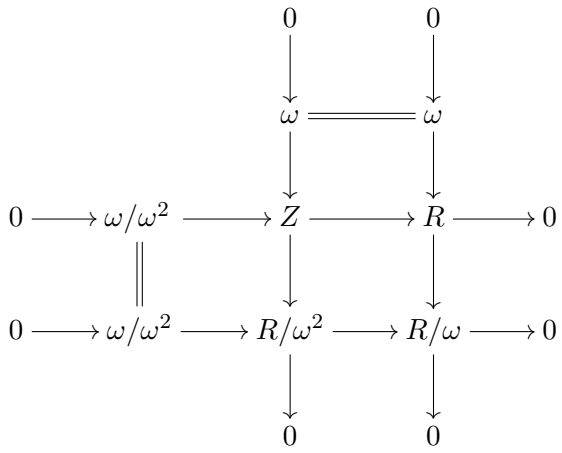


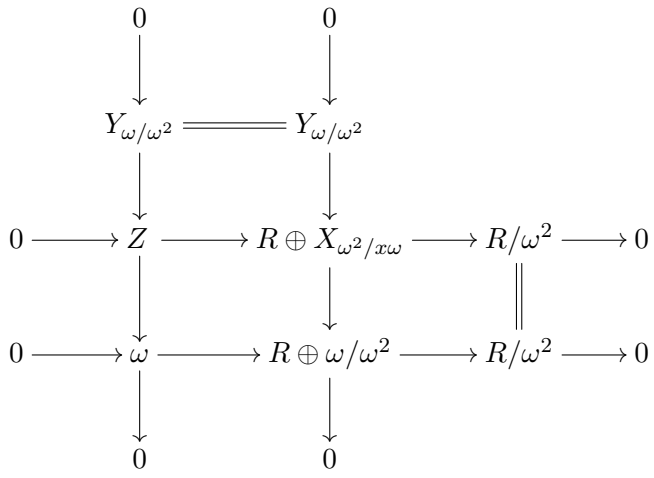
图 2.25 的中间行分裂，因此我们得到正合列

(2.23) $$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow R \oplus \omega/\omega^2 \longrightarrow R/\omega^2 \longrightarrow 0.$$

考虑序列 2.23 的拉回图以及正合列

$$0 \longrightarrow Y_{\omega/\omega^2} \longrightarrow R \oplus X_{\omega/\omega^2} \longrightarrow R \oplus \omega/\omega^2 \longrightarrow 0.$$

(2.24)



由于 Y_{ω/ω^2} 具有有限内射维数，且 ω 是一个 MCM R-模，图表 2.24 的第一列分裂，而中间行是 R/ω^2的 MCM 逼近。因此，我们有

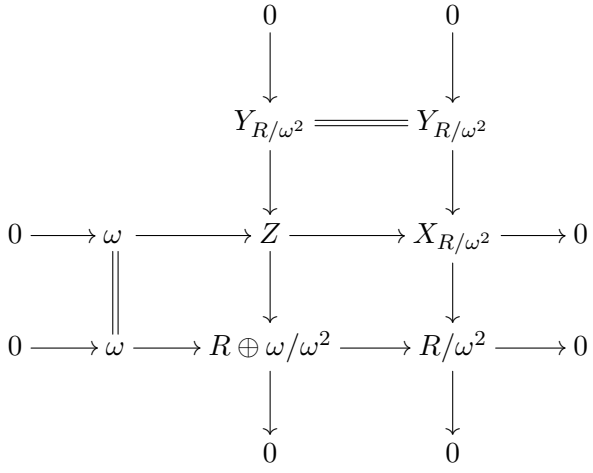
$$\omega \oplus Y_{\omega/\omega^2} \cong \omega^{(s)} \oplus Y_{R/\omega^2}$$

and

$$R \oplus X_{\omega/\omega^2} \cong \omega^{(s)} \oplus X_{R/\omega^2}$$

对于某个 $s \geq 0$。现在考虑序列 2.23 的拉回图以及 R/ω^2 的最小极大 Cohen-Macaulay 逼近。

(2.25)



由于 ω 具有有限内射维数且 X_{R/ω^2} 是最大 Cohen–Macaulay 的，中间行分裂，而中间列给出正合列

$$0 \longrightarrow Y_{R/\omega^2} \longrightarrow \omega \oplus X_{R/\omega^2} \longrightarrow R \oplus \omega/\omega^2 \longrightarrow 0. \tag{2.26}$$

正合列 2.26 是 $R \oplus \omega/\omega^2$ 的 MCM 逼近。因此，我们有

$$Y_{R/\omega^2} \cong \omega^{(t)} \oplus Y_{R \oplus \omega/\omega^2} \cong \omega^{(t)} \oplus Y_{\omega/\omega^2}$$

and

$$\omega \oplus X_{R/\omega^2} \cong \omega^{(t)} \oplus X_{\omega/\omega^2 \oplus R} \cong \omega^{(t)} \oplus R \oplus X_{\omega/\omega^2}.$$

对于某个 $t \geq 0$。因此,

$$\omega \oplus X_{R/\omega^2} \cong \omega^{(s+t)} \oplus X_{R/\omega^2}$$

并且 $s + t = 1$。所以 $s = 0$ 和 $t = 1$ 或 $s = 1$ 和 $t = 0$。

如果 $s = 0$ 和 $t = 1$，那么

$$R \oplus X_{\omega/\omega^2} \cong X_{R/\omega^2} \quad \text{and} \quad \omega \oplus Y_{\omega/\omega^2} \cong Y_{R/\omega^2}.$$

如果 $s = 1$ 和 $t = 0$，那么

$$R \oplus X_{\omega/\omega^2} \cong \omega \oplus X_{R/\omega^2} \quad \text{and} \quad Y_{\omega/\omega^2} \cong Y_{R/\omega^2}.$$

□

References

[1] Richard F. Bartels, *Cohen-Macaulay approximations and the SC_r-condition* 2026 https://arxiv.org/abs/2507.14424。arXiv：。[2] Winfred Bruns 和 J¨urgen Herzog, *Cohen-Macaulay rings*，《剑桥高等数学研究丛书》第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[3] Songqing Ding, *Cohen-Macaulay approximations over a Gorenstein local ring*，布兰代斯大学，1990年。[4] Kiriko Kato, *Syzygies of modules with positive codimension*，《代数学杂志》**318**（2007），第1期，25-36，DOI https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.11.030。[5] Graham J. Leuschke 和 Roger Wiegand, *Cohen-Macaulay representations*，《数学调查与专著》第181卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年。xviii+367页。ISBN：978-0-8218-7581-0。[6] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*，第二版，《剑桥高等数学研究丛书》第8卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989年。由 M. Reid 从日文译出。

Department of Mathematics, Trinity College, 300 Summit St, Hartford, CT, 06106
Email address: rbartels@trincoll.edu*URL*:
https://sites.google.com/view/richard-bartels-math/home