arXiv:2603.21707v1 [math.RT] 23 Mar 2026

临界上同调、顶点余代数与变形 Drinfeld 余乘法

SHIVANG JINDAL、ŠAR ¯UNAS KAUBRYS 和 ALEXEI LATYNTSEV

摘要：我们沿用 Joyce [Joy18] 的方法，在 Kontsevich–Soibelman 带势箭图的上同调 Hall 代数（CoHA）上构造了一个顶点余乘法。我们证明它构成一个顶点双代数。通过应用 Majid–Radford 玻色化的顶点代数类比，我们构造了带势箭图 CoHA 的一个扩张，其中包含 Cartan 部分。对于 ADE 箭图，我们的顶点余乘法恢复了杨代数上的 Drinfeld 变形余乘法。我们将此顶点余乘法与 Davison 定义的局部化余乘积，以及势为平凡时 Dotsenko–Mozgovoy 的构造进行了比较。我们的构造为势平凡的对称箭图给出了上同调可积性定理的新证明。

目录

0. 引言.1 1. 预备知识.11 2. 带势箭图的 Joyce–Liu顶点余代数.18 3. 局部化余乘积.24 4. 临界上同调 Hall 代数是一个双代数.30 5. 扩展 CoHA 及其玻色化.43 6. 在杨代数上得到 Drinfeld 余乘.51 7. 无势对称箭图的顶点双代数.60 附录 A. 层叠的上同调及完美复形的特征类.65 参考文献.70

0. 引言

利用对象模空间 $\mathcal{M}_{\mathscr{C}}$（阿贝尔范畴或导出范畴$\mathscr{C}$）上的自然几何结构，Joyce [Joy21；Joy18] 在同调 $\mathrm{H}_*(\mathcal{M}_{\mathscr{C}})$ 上构造了顶点代数结构，或者

日期：2026年3月24日。

等价地，在上同调上构造了顶点余代数结构。这种结构已经在计数几何中有了若干应用，例如 [BLM24；GJT22；Bu23]，以及在 K 理论框架下的 [Liu25a]。然而，大多数计数几何研究关注的却是这类代数栈的消失循环上同调或 Borel–Moore同调。本文弥补了这一空白，在带势箭图的临界上同调Hall代数上定义了顶点余代数结构。这为这些顶点余乘法提供了一种新的几何表示论解释，并将其与量子群上已知的（Drinfeld）余乘法联系起来。

设 Q 为一个带势箭图 W。我们研究以下向量空间上的两种结构

$$\mathcal{A}_{Q,W} \;=\; \bigoplus_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}, \varphi_{\mathrm{Tr}W_d}\mathbf{Q}_{\mathcal{M}_{Q,d}}[\dim \mathcal{M}_{Q,d}]), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{M}_Q$ 是箭图表示的模栈，而 $\varphi_{\mathrm{Tr}W,\ d}\mathbf{Q}^{\mathcal{M}_{Q,\ d}}[\dim\mathcal{M}_{Q,\ d}]$ 是消失循环层。第一种代数结构是 Kontsevich-Soibelman 上同调Hall代数（CoHA）[KS11]。第二种是新的顶点余乘法，这是一种代数结构，将 Joyce [Joy18] 在 $W = 0$情形下的工作推广开来，并且类似于 Liu 针对三重箭图在临界 K 理论 [Liu25b] 上定义的顶点余乘法。

我们证明这些结构彼此相容：它们在一个环境（亚纯）编织模范畴中构成一个（顶点）双代数，该范畴的底层是上同调的典范子环。这类结果可追溯至 Ringel 和 Green [Gre95; Rin90]，他们还证明了Hall代数是量子群。类似地，我们证明，对于与单李代数 $\mathfrak{g}$ 相关联的 Dynkin箭图三元组，存在一个（顶点）双代数同构，它将我们的顶点余乘法与 Yangian 上的 Drinfeld 余乘法互换：[1]

$$\mathcal{A}^{T_\hbar,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}} \;\simeq\; Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\geqslant 0}. \tag{2}$$

作为代数的同构归功于 Yang–Zhao [YZ18a],；作者还构造了一个余乘法，并证明它等价于 Drinfeld 余乘法。

作为顶点双代数，我们可以运用顶点 *Majid–Radford* 玻色化 来统一扩展 CoHA，即添加一个 Cartan 部分；在 Dynkin 情形下，其余乘法的这一公式会导出（2）。若 $W = 0$，我们证明 Joyce 顶点代数是一个普适手征包络，并证明它与 [DM25] 的构造同构。

0.1. 上同调 Hall 乘积与 Joyce–Liu 顶点余乘法。现在，我们将更详细地介绍本文所研究的代数结构。

[1]上标分别表示在关于一维环面的等变情形下进行处理、使用 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T_\hbar) = \mathbf{C}[\hbar]$、对 CoHA 乘积进行符号修正 χ以及玻色化。

0.1.1. $\mathcal{A}_{Q,\ W}$所有代数结构都将由箭图 Q 表示的模栈 $\mathcal{M}_Q$ 上的几何结构反映并构造而成。

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{SES}_Q & \\ {\scriptstyle q}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p} \\ \mathcal{M}_Q\times\mathcal{M}_Q & & \mathcal{M}_Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \mathrm{SES}_Q & \\ {\scriptstyle p}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle q} \\ \mathcal{M}_Q & \xleftarrow{\ \oplus\ } & \mathcal{M}_Q\times\mathcal{M}_Q \end{array} \tag{3}$$

左侧是以 Q的表示的短正合列为参数的层叠，其中映射 p 和 q 分别忘掉除中间项和两端项以外的所有项。右侧则是映射 $\oplus$，它将表示取直和；只有将 q 替换为其截面 s （该截面将一对表示映射到平凡的直和扩张）后，交换图才成立。

事实上，上述交换图对于环面 T 的一类特定作用是等变的，该作用保持箭图的势不变。我们通常考虑式 (1) 中消失循环上同调的 T-等变版本 $\mathcal{A}^T_{Q,\ W}$ 以及关于 T的栈商 $\mathcal{M}^T_Q$。

临界上同调上的 Kontsevich–Soibelman CoHA乘积 [KS11] ，通过沿 q 拉回，再沿 p推前来定义。Joyce-Liu顶点余积则是使用映射 $\oplus$来定义的：

(1) 我们可以利用消失循环函子与各种层运算的相容性，定义直和拉回 $\oplus^*:\mathcal{A}^T_{Q,\ W}\to\mathcal{A}^T_{Q,\ W}\otimes\mathcal{A}^T_{Q,\ W}$。

(2) 我们可以通过作用 $\mathrm{act}:\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}^T_Q\to\mathcal{M}^T_Q$下的拉回来定义平移，该作用会缩放自同构，

$$\mathrm{act}^*:\mathcal{A}^T_{Q,W}\ \to\ \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m)\ \simeq\ \mathcal{A}^T_{Q,W}[z] \tag{4}$$

(3) 我们将所得结构乘以所谓的*Joyce-Borcherds* 双特征

$$\Psi(\mathrm{Ext},-z)\ =\ \sum_{k\geqslant 0}(-z)^{\mathrm{rkExt}-k}c_k(\mathrm{Ext}) \tag{5}$$

向量丛二项复形 $\mathrm{Ext}\ =\mathrm{RHom}(-,\ -)\in\mathrm{Perf}(\mathcal{M}^T_Q\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_Q)$.的

下面的结果将这种结构视为一种（编织余局部）顶点余乘法，这是 Borcherds 和 Hubbard [Bor86; Hub09]提出的定义；参见第 1.6 节。粗略地说，它旨在刻画这样一种概念：一个向量“位于”$\mathbf{C}$ 中的某一点，并分裂成两个分别位于 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$中的向量，而且这一对应关于 $z=z_1-z_2$呈亚纯变化；参见 [BD25]。

定理 A (定理 2.3.1)。 设 Q 是任意带势箭图 W，且具有使势保持不变的环面作用，并假设它满足 T-等变 ***Künneth*** 性质(31)[2]。那么

$$\begin{aligned}\Delta(z) \ : \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \ &\to \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})) \\ \alpha \ &\mapsto \ \ \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \mathrm{act}_1^* \oplus^* (\alpha)\end{aligned} \tag{6}$$

定义了一个余结合（亦称非局部余或弱余结合）顶点余代数。此外， $\Delta(z)$是余交换的（亦称局部余），其意义是我们有

$$\Delta(z) = \sigma \cdot S(z)\Delta(-z)\mathrm{act}^* \tag{7}$$

其中 $S(z) = (-1)^{\mathrm{rkExt}}{}^{\Psi(\sigma^*_{\underline{\mathrm{Ext}}^\vee z)}}{}_{,\mathrm{Ext}}$，且 σ 是交换各因子的对合，并遵循 ***Koszul*** 符号规则。

如果环面是平凡的且箭图是对称的，这说明顶点余乘法除一个符号 $S(z) = (-1)^{\mathrm{rkExt}}$外是局部余的。

0.2. **局部化余乘积与顶点余乘法**。

0.2.1. 我们还将与另一种处理式 (5) 中奇点的方法进行比较，该方法使用局部化余乘积。这两种方法都试图沿着右侧交换图 (3) 定义拉回-推前“q_*p^*”，但由于 q 并非适当的，这在先验上并未定义良好。

Davison [Dav17] 的方法是形式化定义 q_* ： 取 q^* 的逆映射，并与其移位切复形的欧拉类所给出的乘法复合；该对象是上同调类 $e(Q_0)/e(Q_1)$的商。所得的余乘法

$$\Delta_{\mathrm{loc}} \ : \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \ \to \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathcal{A}^T_{Q,W}[S^{-1}]$$

因此只有在局部化一组 S 上同调类之后才是良定义的。

局部化余乘积与 Joyce-Liu 余乘之间的联系，来自这样一个观察：类 $e(Q_0)/e(Q_1)$ 恰好是复形 e(Ext)的欧拉类。此外，我们有

$$\mathrm{act}_1^* e(\mathrm{Ext}) \ = \ \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \tag{8}$$

其中，左侧通过第一个因子上的 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 作用进行拉回，然后在 z^{-1}中展开为 Laurent 级数。这使我们能够绕过求逆的需要，代价是处理 z中的级数，并得到如下比较结果。

定理 B （定理 3.3.2）。 存在一个映射

$$\mathrm{act}_1^* : \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes \mathcal{A}^T_{Q,W}[S^{-1}] \ \to \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})) \tag{9}$$

i交织 ***Joyce–Liu*** 顶点与 ***Davison*** 局部化余乘积：作用$_1^* \cdot \Delta_{\mathrm{loc}} = \Delta(z \qquad)$.

[2]Th已知当 $T = 1$ 或在典范三重情形下，该结论成立；更多讨论请参见第 2.1.2 节。

我们认为，这应被视为关于 $\mathcal{M}_Q^T$ 的上同调环构形空间上代数结构的比较结果。

0.3. **相容性与玻色化**。

0.3.1. 本文的第一个主要结果是证明这两种结构相容。我们针对符号扭曲版本的乘法陈述该定理（参见第4.4.16节），不过对于通常的 CoHA，我们也得到了类似的定理。

定理C（定理 4.5.2 对称情形，定理 4.5.5 一般情形）。 （ψ 符号扭曲的）*CoHA* 乘积 $\star$ 与 *Joyce–Liu* 顶点余乘法 $\Delta(z)$ 共同构成一个作用于 $\mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 上的顶点双代数；特别是，

$$\Delta(b \star b', z) \;=\; \Delta(b, z) \star_{R(z)} \Delta(b', z)$$

其中右侧的运算是先通过谱 R 矩阵进行编织

$$R(z) \;=\; \frac{\Psi(\sigma^{*}\mathrm{Ext}^{\vee}, z)}{\Psi(\mathrm{Ext}, z)} \tag{10}$$

再将第一/第三个因子与第二/第四个因子相乘。[3]

定理 C 的形式表明，CoHA $\mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 是某个“亚纯函数”编织幺半范畴内部的双代数对象，其编织由谱参数 R-矩阵 $R(z)$给出。事实上，为了陈述双代数公理，我们不得不在至少具有编织幺半结构的范畴中进行工作。

我们将考虑模栈上同调的模范畴，其上的 典范子环 $\mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \subseteq \mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_Q^T)$ 由典范丛的陈类生成。Joyce 的 R-矩阵分解为

$$R_{d_1,d_2}(z) \;=\; z^{\chi(d_1,d_2)-\chi(d_2,d_1)} R_{\mathrm{taut},d_1,d_2}(z)$$

由一个在对称情形下为平凡的有理函数组成，并且分支 $R_{\mathrm{taut}}(z)$取典范值：

$$R_{\mathrm{taut}}(z) \;\in\; \mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \otimes_{\mathrm{H}^{*}(BT)} \mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}[[z^{-1}]].$$

Thus $B = \mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 以及 $H = \mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 满足下述定理 D 的条件。

在非对称情形下，我们不作这样的解释，因为此时典范环模范畴不是编织的。更多讨论请参见第 4.5.4 小节。

[3]注意，这个 R-矩阵与定理 A 中的算子 $S(z)$ 相差一个符号。

0.3.2. 玻色化。

定理 D (定理 5.2.2)。 设 B 是 H-模中的一个顶点双代数，且 H 是一个具有交换乘法和谱拟三角元 $R(z)$ 的全纯[4] 顶点双代数。那么向量空间

$$B \rtimes H \;=\; B \otimes H$$

具有典范的顶点双代数结构，其显式公式为 (72) 和 (73)。

这应被视为对某个代数的 Tannakian 重构，其模范畴为 B-Mod(H-Mod)。顶点余乘法源自该范畴上的结构。对于普通双代数，从 H-Mod 中的双代数 B 构造 $B \rtimes H$ 的过程称为玻色化，由 Majid 和 Radford 发现 [Maj94; Rad85]。

推论 E(定理 5.0.1)。 设 Q 为带势对称箭图。那么扩展 *CoHA*

$$\mathcal{A}^{T,\psi,\mathrm{ext}}_{Q,W} \;=\; \mathcal{A}^{T,\psi}_{Q,W} \rtimes \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q)_{\mathrm{taut}}, \tag{11}$$

其底层向量空间为 $\mathcal{A}^{T,Q^{\psi},W} \otimes_{\mathrm{H}^*_T(\mathrm{pt})} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q)_{\mathrm{taut}}$，具有典范定义的顶点双代数结构，其“扩展 *CoHA*”乘积(66) 以及“扩展 *Joyce–Liu*”顶点余乘法 (67)，例如。

$$\Delta^{\mathrm{ext}}(b \otimes h, z) \;=\; \big(\Delta(b,z)_{(1)} \otimes R^{(2)}(z)\Delta(h,z)_{(1)}\big) \otimes \big(R^{(1)}(z) \cup \Delta(b,z)_{(2)} \otimes \Delta(h,z)_{(2)}\big)\,.$$

0.4. 在 ADE 杨氏量子群上获得 Drinfeld 余乘

0.4.1. 对于半单有限维李代数 $\mathfrak{g}$，Drinfeld [Dri87] 定义了环路代数泛包络代数的一种形变

$$\mathrm{gr}_\hbar Y_\hbar(\mathfrak{g}) \;\simeq\; \mathrm{U}(\mathfrak{g}[u])$$

称为*Yangian* $Y_\hbar(\mathfrak{g})$。它具有三种代数结构：结合乘积、普通的标准 余乘法，以及变形 *Drinfeld* 余乘法

$$\Delta_{\mathrm{Dr}}(z) \;:\; Y_\hbar(\mathfrak{g}) \;\to\; Y_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes_\hbar Y_\hbar(\mathfrak{g})((z^{-1}))$$

其定义 最终由 [GT17; GLW21] 完整给出。我们将在第 6.2.6 节回顾这一内容。

作为向量空间，Yangian 具有三角分解

$$Y_\hbar(\mathfrak{g}) \;=\; Y_\hbar^{<0}(\mathfrak{g}) \otimes Y_\hbar^{0}(\mathfrak{g}) \otimes Y_\hbar^{>0}(\mathfrak{g})$$

其中每个张量因子都是一个子代数，而 $\Delta_{\mathrm{Dr}}(z)$保持正、负 Borel 部分$Y_\hbar^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}), Y_\hbar^{\leqslant 0}(\mathfrak{g})$：它们是子顶点双代数。

[4]定义见第 1.6.3 节和引理 1.6.4。

0.4.2. 结合 Yang–Zhao [YZ18b], Schiffmann-Vasserot [SV22]的工作以及一个代数维数约化定理 [RS17; YZ20],，存在一个 $\mathbf{C}[\hbar]$-代数同构

$$Y_\hbar^{>0}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{T,\chi}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}} \tag{12}$$

其中 $\mathcal{A}^{T,\chi}_{\tilde{Q},\tilde{W}}$ 是带有典范三次势的三倍 Dynkin 箭图 $\widetilde{Q}$ 的上同调 Hall 代数，以及一个适当选取的环面。

在此设定下，我们在命题 6.1.9 中计算了三倍箭图球形元素上的 Joyce–Liu 扩张余乘法。其结果十分简单：它们都是顶点本原的，因此在同构 (12) 下对应于“未玻色化的 Drinfeld”顶点余乘法

$$\Delta_{\mathrm{uDr}}(x_i^+(u), z) \;=\; x_i^+(u-z)\otimes 1 + 1\otimes x_i^+(u).$$

然后，将 $Y^0(\mathfrak{g})$ 与典范上同调环相识别，我们便得到变形 Drinfeld 余乘法的玻色化：

定理 F (定理 6.2.7)。对于 Q *ADE* 箭图，存在一个同构

$$f \;:\; Y_\hbar^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{T,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}} \tag{13}$$

将 *Drinfeld* 余乘法 $\Delta_{\mathrm{Dr}}(z)$ 与 *Joyce–Liu* 余乘法 $\Delta(z)$相识别。

类似的结果最早见于 [YZ18a, Thm.B]。

0.4.3. 展望：*Maulik-Okounkov* 杨氏代数。得益于 Cao、Maulik、Okounkov、Zhou 和 Zhou[MO19; COZZ26] 的工作，人们可以为任意带势对称箭图定义杨代数 $Y_\hbar(\mathfrak{g}_{Q,\ W})$ 并预期它同时具有标准余乘法和 Drinfeld 余乘法

$$\Delta_{\mathrm{Dr}}(z) \;:\; Y_\hbar(\mathfrak{g}_{Q,W}) \;\to\; Y_\hbar(\mathfrak{g}_{Q,W}) \otimes_\hbar Y_\hbar(\mathfrak{g}_{Q,W})((z^{-1})),$$

以及使这两种余乘法及其反向余乘法彼此交织的 R-矩阵。Botta–Davison 和 Schiffmann–Vasserot 已为带势三重箭图证明了（12）的类似结论 [BD23; SV24]，而一般带势箭图的情形也被寄予同样的预期。R-矩阵的对角部分对于 $Y_\hbar(\mathfrak{g}_{Q,\ W})$ 预期与本文的 $R(z)$相吻合。

我们预期，只要满足 T-等变 Künneth 假设，我们显式计算球形元素上的玻色化顶点余乘法的方法就可以推广到带势对称箭图。因此，对于任何如（12）所示的等价，都应当能够在球形生成子代数上将 Drinfeld 余乘法与 Joyce顶点余代数对应起来。例如，通过 [Dav25], [SV13], [Jin26]和 [DPSSV26], ，这给出了仿射杨氏代数的 Drinfeld 型余乘法。

0.5. 为什么这种结构会存在?

0.5.1. 我们简要阐述推动本研究的两个指导性观点。

[5]这里 $\hbar$表示作用环面的等变参数。

0.5.2. 量子群。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^+$ 的有限维单李代数。我们考虑量子群

$$U_q(\mathfrak{n}^+) \in \mathrm{BiAlg}(\mathrm{Rep}_q T)$$

它是一个满足以下条件的双代数： $\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$ 对每个生成元 $e_i \in \mathfrak{n}^+$均成立；参见 [Gai21]。此外，它还具有 Nichols 代数的结构 [AS02]。这里，$\mathrm{Rep}_q T$ 是按权格 Λ_G 分级的向量空间范畴，并将其视为带有如下编织的辫单oidal范畴

$$\sigma q^{\kappa(\lambda,\mu)} : \mathbf{C}_\lambda \otimes \mathbf{C}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_\mu \otimes \mathbf{C}_\lambda.$$

我们将一个对象视为群代数 $\mathbf{C}[\Lambda_G]$上的模，其中生成元 k_ν 的作用是乘以 $q^{\kappa(\nu, -)}$。

特别地， $U_q(\mathfrak{n}^+)$ 不是 $U_q(\mathfrak{b}) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$的子双代数；相反，我们通过*boson-isation*构造 $U_q(\mathfrak{b})$: 它是一个代数，其模范畴为 $U_q(\mathfrak{n}^+)$-Mod($\mathbf{C}[\Lambda_G]$-Mod)，对于一般的q，这恢复了通常的定义

$$U_q(\mathfrak{b}) \simeq U_q(\mathfrak{n}^+) \rtimes \mathbf{C}[\Lambda_G],$$

见 [Lus10，第 33.1 页。5] 或见 [AS02，定理 4.2]。余乘法于是为 $\Delta^{\mathrm{ext}}(e_i) = e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i$，现在与 $U_q(\mathfrak{g})$ 中的余乘法一致。随后可以对其取 Drinfeld 双，从而得到全部 $U_q(\mathfrak{g})$。

0.5.3. *Hall* 代数。 根据 Ringeland Green 的一个结果 [Sch06，定理 3.16]，，ADE 箭图 Q 的 $\mathbf{F}_q$-表示的 Hall 代数，在扩展 Grothendieck 群后同构于 Borel量子群

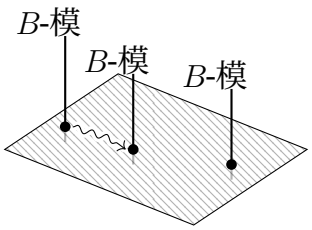
$$\mathbf{H}_Q \rtimes \mathrm{K}_0(\mathrm{Rep}_{\mathbf{F}_q} Q) \simeq U_q(\mathfrak{b}).$$

$\mathbf{H}_Q$ 上的余乘法归功于 Green [Sch06， §1，4]。

将我们的论文与上述两个故事进行比较，其类比如下：

finite quantum groups	$U_q(\mathfrak{n}^+)$	Δ	$\mathrm{Rep}_q T$	q^κ	κ	Λ_G	$\cdots$
Hall algebras	$\mathbf{H}_Q$	Δ_{Green}	$\mathrm{K}_0(\mathrm{Rep}_{\mathbf{F}_q} Q)$-Mod	q^χ	$\chi = \#\mathrm{Ext}_{\mathbf{F}_q}$	$\pi_0(\mathcal{M}_Q)$	$\cdots$
CoHAs - this paper	$\mathcal{A}^T_{Q,W}$	$\Delta(z)$	$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\mathrm{taut}}$-$\mathrm{Mod}_{\pi_0(\mathcal{M}_Q)\times\mathbf{Z}}$	$R(z)$	$\chi = \mathrm{rkExt}$	$\pi_0(\mathcal{M}_Q)$	$\cdots$

0.5.4. 物理学。 在物理学中，CoHA 上的模范畴 $B = \mathcal{A}^T_{Q,\,W}$ 预计可被识别为某个 $3d$ 全纯-拓扑量子场论 $\partial\mathcal{T}$ 在 $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$上的线算子 范畴，见 [CWY17；DN24；DNP25]，；从上述点开始碰撞这些线z_i， $z_j \in \mathbf{C}$ 旨在对应于由 Joyce–Liu 顶点余乘法 $\Delta(z_i - z_j)$诱导的亚纯张量结构。



更准确地说，它在任意一对 B-模 M， N上诱导出一个 B-模结构 $M \otimes N\left(\left((z_i - z_j)^{-1}\right)\right)$。特别地，这为我们为何应当期待 CoHA 上存在顶点余乘法（而不应有更多结构）提供了物理学上的解释。

这正是预期的边界（或界面）：一个定义在$\mathbf{C} \times \mathbf{R}^2$, 上的 $4d$全纯拓扑量子场论。该理论通过对沿 Calabi–Yau三维簇 X紧化的弦理论进行扭曲而得到；其凝聚层范畴在局部由 (Q, W)建模。这是 Calabi–Yau三维范畴与（双重）CoHA 之间关系的物理学启发式解释。

例如，在本文即将完成之际，Tudor Dimofte 和 Loïc Bramley 告知我们，他们正在开展与 CoHA 和顶点余代数相关的工作。具体而言，他们对 $4d$ 全纯拓扑扭曲 QFT 的红外极限中的线算子范畴采用 Tannakian重构方法，从而构造出配备标准余乘法和顶点余乘法的杨代数类代数。在这种情况下，线算子范畴预计与 BPS态相关，而所构造的代数被猜想为 CoHA 的双重。相应的顶点余乘法预计与非负半部上的扩展Joyce-Liu余乘法相吻合。

0.6. 与 Dotsenko–Mozgovoy 工作的关系。

0.6.1. 取一个对称箭图 Q 并令势 $W = 0$，则 CoHA $\mathcal{A}_{Q,\,0}$成为超交换代数。接着，我们可以将代数结构对偶化，得到一个余交换余代数，并将 Joyce顶点余代数对偶化，从而得到 $(\mathcal{A}_{Q,\,0})^\vee$ 是一个余交换余代数，且带有相容的顶点代数结构。在这种情况下，我们可以应用 Milnor-Moore型定理 [HLX22]，得出

定理G(定理 7.2.2)。 *CoHA* 的对偶是一个普适手征包络

$$(\mathcal{A}_{Q,0})^\vee \simeq \mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_Q) \tag{14}$$

其中 P_Q 是一个顶点李代数，定义为 *CoHA* 乘法的对偶的原始元 .

在 [DM25], 中，作者给出了向量空间$(\mathcal{A}_{Q,\,0})^\vee$ 上的顶点代数的生成元与关系的显式定义，并证明它是相容的。

定理 H (定理 7.3.1)。 $\mathcal{A}_Q^*$上的 *Joyce*顶点代数结构与 *[DM25]*中的顶点代数同构。

因此，对于没有势的对称箭图，我们可以完全明确地计算 Joyce顶点代数的生成元与关系。最后，作为定理G的推论，我们得到了上同调整性的另一种证明；该性质最初由 [Efi12]证明。

0.7. **致谢**。

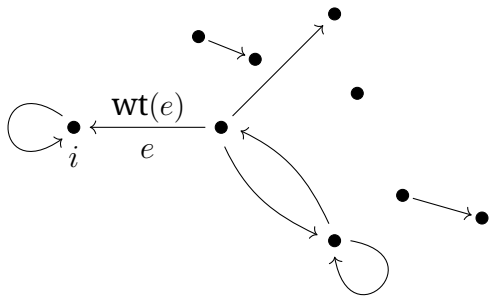
0.7.1. 我们谨此感谢 Loïc Bramley、Ben Davison、Tudor Dimofte、Woonam Lim、Henry Liu、Olivier Schiffmann、Yaping Yang 和 Gufang Zhao 提供的宝贵讨论。我们还要感谢 2023年“计数几何中的顶点代数与 Hall代数”研讨会的组织者 Ben Davison 和 Lucien Hennecart，本项目最初便是在该研讨会上启动的。第二作者的工作得到了世界顶尖国际研究中心倡议（WPI）、日本文部科学省（MEXT）和日本的支持；在本项目的大部分时间里，第三作者的工作则得到了丹麦国家研究基金会（DNRF157）和 Villum基金会（37814）的支持。

1. 预备知识

本节介绍箭图表示的模叠。

1.1. **带势箭图**。

1.1.1. 箭图。

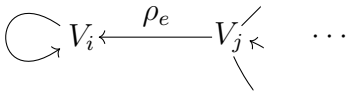


一个**箭图** 是一个有向图 $Q=(Q_0,\ Q_1)$ 其顶点集 Q_0，Q_1 和边集 i 均为有限集。如果存在一个权函数 wt：$Q_1\to N$，将格中的一个元素 $\mathsf{wt}(e)\in N$ 赋给每条边，则称其关于格 $N\simeq \mathbf{Z}^r$ 是**分次的**。记 $s(e),\ t(e)$ 为该边的源点和目标点。

相反箭图 Q^{op} 由反转所有箭头的方向并将所有分次取负得到：$\mathsf{wt}^{\mathrm{op}}(e^*)\ =\ -\mathsf{wt}(e)$，其中 e^* 是 e的反向版本。若$Q=Q^{\mathrm{op}}$，我们称箭图**对称**；若 $(Q,\mathsf{wt})\simeq(Q^{\mathrm{op}},\mathsf{wt}^{\mathrm{op}})$，则称分次箭图**分次对称** 。

1.1.2. 表示。

Q 的**表示** 是指为每个顶点指定一个有限维向量空间V_i，并为每条边指定一个线性映射 ρ_e



这等价于一个有限维左模，它是 Q的路径代数 $\mathbf{C}Q$ 上的左模；该代数的基由 Q 中的路径构成，乘法由路径的拼接给出。表示的维数 向量是元素 $d\ =\ (\dim V_i)_{i\in Q_0}\in \mathbf{N}^{Q_0}$，其中 d_i 表示第 i 个顶点处的维数。我们用 δ_i 表示在顶点 i处取值为 1、在其他顶点处取值为 0 的维数向量。

Q 的表示范畴是一个阿贝尔范畴，而导出Hom空间的秩

$$\chi(\rho,\rho')\ =\ \dim(\mathrm{Hom}(\rho,\rho'))-\dim(\mathrm{Ext}^1(\rho,\rho')),$$

称为 欧拉形式，它仅取决于 d， d' 的维数向量 ρ， ρ'，以及 i s

$$\chi(d,d') \;=\; \sum_i d_i d'_i \;-\; \sum_{e:i\to j} d_i d'_j.$$

1.1.3. 势。 Q 的一个**势** 是一个元素 $W \in \mathbf{C}Q/[\mathbf{C}Q,\mathbf{C}Q]$。

势由 Q 中循环词的线性组合给出，其中，如果一个循环词可以通过循环置换变成另一个循环词，则认为这两个循环词相同。若 W 是单个循环词且 $e \in Q_1$，则定义

$$\frac{\partial W}{\partial e} \;=\; \sum_{W=cec'} c'c$$

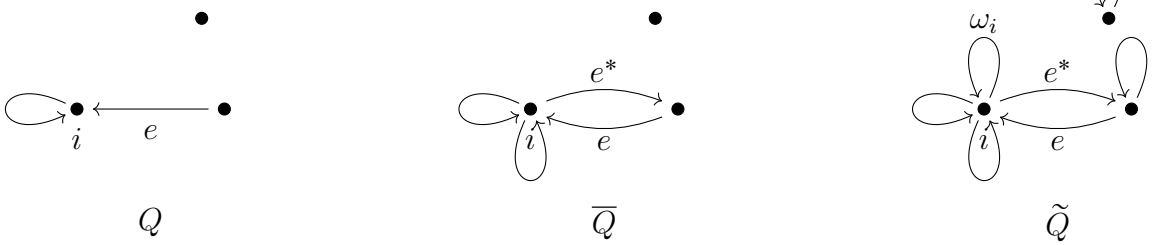
并将此定义线性扩展到一般的 W。与 (Q,W) 相关联的雅可比代数 定义为

$$\mathrm{Jac}(Q,W) \;:=\; \mathbf{C}Q/\left\langle \frac{\partial W}{\partial e} \;:\; e\in Q_1 \right\rangle.$$

表示的直和与张量积按顶点逐一进行定义。

1.2. 双重箭图与三重箭图。

1.2.1. 预投射代数与雅可比代数。 箭图 $\overline{Q}$ 的双重 Q 与三重 $Q^{(3)}$ 分别是通过添加每条边 $e\colon i\to j$ 的一份副本 $e^*\colon j\to i$（方向相反），以及再向每个顶点添加一个环 ω_i 而构成的箭图。



Q $\overline{Q}$ $\widetilde{Q}$

预投射代数是对以下双边理想取商所得的代数

$$\Pi_Q \;=\; \mathbf{C}\overline{Q}/\langle \textstyle\sum_e [e,e^*]\rangle\,.$$

˜典范三倍势 在 Q 上为

$$\widetilde{W} \;=\; \left(\sum_i \omega_i\right)\left(\sum_e [e,e^*]\right).$$

我们有一个同构

$$\Pi_Q[\omega] \;\simeq\; \mathrm{Jac}(\widetilde{Q},\widetilde{W})$$

对于多项式环 $\Pi_Q[\omega]$，其将 $\omega \mapsto \sum \omega_i$ 送至。

1.3. 箭图表示的模叠。

1.3.1. Q 维的表示的**模栈** 是商栈

$$\mathcal{M}_{Q,d} := \mathrm{Rep}_d(Q)/\mathrm{GL}_d$$

以下向量空间按以下群作用：

$$\mathrm{Rep}_d(Q) := \prod_{e:i\to j} \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{d_i}, \mathbf{C}^{d_j})$$

$$\mathrm{GL}_d := \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}_{d_i}$$

其中，群 GL_d 通过共轭作用作用于 $\mathrm{Rep}_d(Q)$。对所有维数向量取并，得到阿贝尔范畴 $\mathrm{Rep}Q$ 中对象的模栈，意义见 [TV07]。例如，其 $\mathbf{C}$-点恰好是 Q的有限维表示所构成的群胚。

1.3.2. 环面等变性。设 Q 是一个由环面 $T = \mathrm{Hom}(N,\mathbf{G}_m)$的格 N 分次的箭图，其分次如前记为 $\mathrm{wt}: Q_1 \to N$。因此，环面作用于表示空间：

$$T \times \mathrm{Rep}_d(Q) \to \mathrm{Rep}_d(Q), \qquad t\cdot\rho_e = t^{\mathrm{wt}(e)}\rho_e$$

其中，$t^{\mathrm{wt}(e)} \in \mathbf{G}_m$ 是环面中某个元素在与 $\mathrm{wt}(e) \in N$对应的特征 $\lambda_e: T \to \mathbf{G}_m$ 下的像，该特征通过乘法作用于向量空间 $\rho_e \in\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{d_i}, \mathbf{C}^{d_j})$中的元素。

同态 λ_e 给出一个层叠态射 $\lambda_e : \mathrm{B}T \to \mathrm{B}\mathbf{G}_m$。这定义了一个上同调类

$$\mathbf{t}(e) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{B}T, \mathbf{Q}) \simeq N$$

由 λ_e 沿着 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 上典范丛的第一陈类的拉回定义。注意，每个权 $\mathrm{wt}(e)$ 也定义了 $\mathrm{B}T$ 上的一个线丛 $\mathcal{L}_e$。我们有时会滥用记号，写作

$$\mathrm{wt}(e) = c_1(\mathcal{L}_e) = \mathbf{t}(e) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{B}T, \mathbf{Q}). \tag{15}$$

1.3.3. 典范丛与 T-等变模空间。接下来我们定义

$$\mathcal{M}^T_{Q,d} = \mathrm{Rep}_d(Q)/(\mathrm{GL}_d \times T).$$

顶点 i 对应的**典范丛** $\mathcal{E}_{i,d}$ 是沿着以下映射对普适向量丛作拉回所得

$$\mathcal{M}^T_{Q,d} \to \mathrm{BGL}_d \times \mathrm{B}T \to \mathrm{BGL}_{d_i} \times \mathrm{B}T \to \mathrm{BGL}_{d_i}.$$

其在对应于表示 ρ 的点上的纤维是向量空间 V_i。附属于任意边 e 的向量丛典范映射 ρ_e：$\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_j$ 由以下映射诱导

$$\mathcal{M}^T_{Q,d} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^{d_i}, \mathbf{C}^{d_j})/\mathrm{GL}_{d_i} \times \mathrm{GL}_{d_j}.$$

它在一点上的纤维是线性映射 $\rho_e: V_i \to V_j$。

1.3.4. *Ext* 复形。 **Ext 复形** 是 $\mathcal{M}^T_{Q,d}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d'}$ 上的向量丛二项复形，定义为

$$\mathrm{Ext}_{d,d'} \;=\; \left(\bigoplus_i \mathcal{E}^\vee_{i,d}\boxtimes\mathcal{E}_{i,d'} \;\to\; \bigoplus_{e\,:\,i\to j}\mathcal{E}^\vee_{i,d}\boxtimes\mathcal{E}_{j,d'}\otimes\mathcal{L}_e\right). \tag{16}$$

我们将第零个和第一个因子分别记为 Ext_0 和 Ext_1。微分的定义是：将左侧各直和项视为从 $\mathcal{E}_i\boxtimes 1$ 到 $1\boxtimes\mathcal{E}_i$的映射所成的向量丛，并对每条边与典范映射 ρ_e 复合。

我们常常需要取对偶，还需要通过交换映射 $\sigma:\mathcal{M}^T_{Q,d}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d'}\to\mathcal{M}^T_{Q,d'}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d}$拉回 Ext 复形；为此我们注意到 $\mathcal{L}_e^\vee$ 对应于特征 $-\mathbf{wt}(e)$，并且 $\sigma^*\mathcal{L}_e=\mathcal{L}_{e^\circ}$。

1.3.5. 与势的关系。权函数在 $\mathbf{C}Q$上诱导一个 N-分次，将一条路径映射为其各边权重之和。如果势在 T作用下满足 W在此分次下权重为零：$\mathbf{wt}(W)=0$，则称该势是不变的。

1.4. **表示叠的上同调**。

1.4.1. 箭图表示层叠的上同调是各连通分支上乘积

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q) \;=\; \prod_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d}), \tag{17}$$

其中每个因子由其典范丛的陈类生成：

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d}) &\simeq \mathrm{H}^*_T(\mathrm{BGL}_d)\\ &\simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)[c_r(\mathcal{E}_i)\;:\;i\in Q_0,\,1\leqslant r\leqslant d_i]\\ &\simeq \mathrm{Sym}_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)}\{x_{i,\alpha}\;:\;i\in Q_0,\,1\leqslant\alpha\leqslant d_i\}\end{aligned}$$

其中 $x_{i,\alpha}$ 是典范丛 $\mathcal{E}_i$的一个陈根。

1.4.2. 典范丛的欧拉类。 典范丛 $\mathcal{E}_i$ 的欧拉类为 $e(\mathcal{E}_{i,d})=\prod_{n=1}^{d_i}x_{i,n}$。此外，我们有与 [BD23 第 4 节中的欧拉类公式一致的公式。1]

命题 1.4.3。 欧拉类 $e(\mathrm{Ext}_0)_{d,d'}$ 和 $e(\mathrm{Ext}_1)_{d,d'}$ 等于[6]

$$e_{d,d'}(Q_1)\;:=\;\prod_{e\,:\,i\to j}\;\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_i,d'_j)}(1\otimes x_{j,m}-x_{i,n}\otimes 1+\mathbf{wt}(e))\;\in\;\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d})\otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d'})$$

and

$$e_{d,d'}(Q_0)\;:=\;\prod_{i\in Q_0}\;\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_i,d'_i)}(1\otimes x_{i,m}-x_{i,n}\otimes 1)\;\in\;\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d})\otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d'})$$

[6]注 这里，在 $e(Q_1)$ 的定义中，我们有 $+\mathbf{t}(e)=+\mathbf{wt}(e)$，而 BD23 中则是 $-\mathbf{t}(e)$].

分别。

证明。 这很容易由张量积下陈根的可加性推出。例如，

$$e\left(\bigoplus_{i\in Q_0}\mathcal{E}_{i,d}^{\vee}\boxtimes\mathcal{E}_{i,d'}\right) \;=\; \prod_{i\in Q_0} e(\mathcal{E}_{i,d}^{\vee}\boxtimes\mathcal{E}_{i,d'}) \;=\; \prod_{i\in Q_0}\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_i,d_i')} (1\otimes x_{i,m}-x_{i,n}\otimes 1)$$

其中，最 后一个等式成立，是因为取对偶时陈根会变号。类似地，

$$\begin{aligned} e\left(\bigoplus_{e\in i\to j\in Q_1}\mathcal{E}_{i,d}^{\vee}\boxtimes\mathcal{E}_{j,d'}\;\otimes\;\mathcal{L}_e\right) \;&=\; \prod_{e\,:\,i\to j} e(\mathcal{E}_{i,d}^{\vee}\boxtimes\mathcal{E}_{j,d'}\;\otimes\;\mathcal{L}_e) \\ &=\; \prod_{e\,:\,i\to j}\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_i,d_j')} (1\otimes x_{j,m}-x_{i,n}\otimes 1+\mathbf{wt}(e) \end{aligned}$$

□

1.4.4. 底层幺半结构。 我们将 $\mathrm{Vect}_{\Lambda}^{T}$ 记作具有“上同调”$\mathbf{Z}$-分次的向量空间范畴，其分次由锥给出

$$\Lambda \;=\; \pi_0(\mathcal{M}_Q) \;=\; \mathbf{N}^{Q_0},$$

并带有 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 的作用，其中 Λ-分次是平凡的，而上同调分次采用通常的分次方式。

对于任意一对这样的对象

$$V \;=\; \bigoplus_{(d_1,n_1)\in\Lambda\times\mathbf{Z}} V_{(d_1,n_1)}, \qquad\qquad W \;=\; \bigoplus_{(d_2,n_2)\in\Lambda\times\mathbf{Z}} W_{(d_2,n_2)}$$

我们将它们的扭曲张量积定义为

$$V\otimes_T W \;=\; \bigoplus_{(d,n)\in\Lambda\times\mathbf{Z}}\;\bigoplus_{(d,n)=(d_1+d_2,n_1+n_2)} V_{(d_1,n_1)}\otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} W_{(d_2,n_2)}[\chi_Q(d_1,d_2)-\chi_Q(d_2,d_1)] \tag{18}$$

其中，χ_Q 是箭图的欧拉形式，而移位是按上同调$\mathbf{Z}$ 次数进行的。一般而言，它既非对称，也不是辫子幺半结构，参见第4.4节。若箭图 Q 是对称的，则上同调移位是平凡的，幺半结构也是对称的。

1.5. **上同调Hall代数结构**。

1.5.1. 考虑 T-等变代数栈的对应关系

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{SES}_{Q,d_1,d_2}^{T} & \\ & \overset{q}{\swarrow}\qquad\quad\overset{p}{\searrow} & \\ \mathcal{M}_{Q,d_1}^{T}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_{Q,d_2}^{T} & & \mathcal{M}_{Q,d_1+d_2}^{T} \end{array} \tag{19}$$

那么，其上的上同调Hall代数结构

$$\mathcal{A}_{Q,W}^{T} \;=\; \bigoplus_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^{T},\varphi_{W,d}\mathbf{Q}_{\mathcal{M}_{Q,d}}[\dim\mathcal{M}_{Q,d}]) \tag{20}$$

按 [B中的定义给出 D23；KS11；RSYZ23] 沿上述交换图归纳，使用公式 a

$$m = p_* q^*$$

由附录 A.1 中消失循环的函子性所诱导。此处在记号中省略 Thom–Sebastiani 同构。这诱导出一个映射 $m : \mathcal{A}^T_{Q,\ W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,\ W} \to \mathcal{A}^T_{Q,\ W}$。

1.5.2. 注。 CoHA $\mathcal{A}^T_{Q,\ W}$ 将按连通分支分次，而上同调 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)$ 或典范环 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\mathrm{taut}}$（定义见第 4.1 节）则定义在平凡的分次次数 $0 \in \Lambda$中。

1.6. 顶点余代数。

1.6.1. 现在我们定义一种余结合余代数，其余乘法依赖于复平面上的一点 z，并且关于该点呈“亚纯”变化；此概念源自 Borcherdsand Hubbard [Hub09，定义 2.1]。

一个**非局部（又称余结合）顶点余代数**是一个向量空间 V，它配备了一个平移自同态、一个余真空余向量和一个余场映射

$$T : V \to V, \qquad \epsilon : V \to k, \qquad \Delta(z) : V \to V \otimes V((z^{-1})) \tag{21}$$

满足：

- 与平移相容，

$$\Delta(z) \cdot T = \frac{d}{dz}\Delta(z) + (1 \otimes T) \cdot \Delta(z). \tag{22}$$

- 顶点余结合性（亦称弱余结合性），

$$(\Delta(z) \otimes \mathrm{id})\Delta(w) = (\mathrm{id} \otimes \Delta(w))\Delta(z+w) \tag{23}$$

- 与余真空相容：我们有 $(\epsilon \otimes \mathrm{id}) \cdot \Delta(z) = \mathrm{id}$，且 $(\mathrm{id} \otimes \epsilon) \cdot \Delta(z) = \mathrm{id} + \mathcal{O}(z)$取值于 $V[z]$。

设 Λ 是配备双线性形式 χ 的交换幺半群，且 R 是带增广的Z分次交换环。一个 Λ**分次非局部（又称余结合）顶点余代数**是一个$\Lambda \times \mathbf{Z}$分次 R-模

$$V = \bigoplus_{(\lambda,n) \in \Lambda \times \mathbf{Z}} V_{(\lambda,n)}$$

具有上述非局部顶点代数结构，其中将 $\otimes$ 替换为

$$\otimes_R [\chi(\lambda,\mu) - \chi(\mu,\lambda)]$$

如（18）中所述。我们为 z 赋予 $\Lambda \times \mathbf{Z}$-次数 $|z| = (0,\ 2)$ 使得映射（21）分别为 R-线性的，次数为$(0,\ -2),\ (0,\ 0),\ (0,\ 0)$。我们将 $\mathbf{Z}$-次数称为上同调次数。记

$$\Delta_{\lambda_1,\lambda_2}(z) : V_{\lambda_1+\lambda_2} \to V_{\lambda_1} \otimes_R V_{\lambda_2}((z^{-1})) \tag{24}$$

为在分次分量上的关联 R-模映射，其上同调次数为 $\chi(\lambda_2,\ \lambda_1)-\chi(\lambda_1,\ \lambda_2)$，而（23）等价于

$$(\Delta_{\lambda_1,\lambda_2}(z)\otimes \mathrm{id})\Delta_{\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3}(w)\ =\ (\mathrm{id}\otimes \Delta_{\lambda_2,\lambda_3}(w))\Delta_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3}(z+w). \tag{25}$$

在我们的设定中，我们将使用 $\Lambda=(\mathbf{N}^{Q_0},\ +)$ 即箭图 Q 的维数格，其中 $+$ 是维数向量上的求和运算。我们的交换环为 $R=\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$，配备与小节 1.4.4 中相同的扭曲幺半结构。

1.6.2. 注记。 顶点余代数中与余交换性相对应的概念是余局部性（也称为雅可比恒等式）；例如，参见定理 4.5.2 的第 (6) 部分。

1.6.3. 全纯性。 若余结合顶点余代数的余场映射可分解为

$$\Delta(z)\ :\ V\ \to\ V\otimes_R V[z]\ \subseteq\ V\otimes_R V((z^{-1})),$$

也就是说，它“没有极点”。正如在 [FB04, §1.4], 中，我们有

引理 1.6.4。 若 V 是一个带有局部幂零余导子 T 的余代数，也就是说，

$$(T\otimes \mathrm{id})\cdot\Delta+(\mathrm{id}\otimes T)\cdot\Delta\ =\ \Delta\cdot T \tag{26}$$

并且对于 $n\gg 0$ 为 $T^nv=0$ 时，$\Delta(z)\ =\ (e^{zT}\otimes \mathrm{id})\Delta$ 定义了一个全纯顶点余代数，而每个全纯顶点余代数都具有这种形式。

证明。 我们证明该对应关系

$$\begin{aligned}\Delta\ &\mapsto\ \Delta(z)\ =\ (e^{zT}\otimes \mathrm{id})\Delta\\ \Delta(0)\ &\leftarrow\!\shortmid\ \Delta(z)\end{aligned}$$

在这类数据与全纯顶点余代数之间建立了一个双射。为此，只需证明对于任意全纯顶点余代数，都有

$$\Delta(z)\ =\ (e^{zT}\otimes \mathrm{id})\cdot\Delta(0)$$

这由（22）推出，因为它们的 z^n 系数相同，而这是由于

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n\Delta(z)|_{z=0}\ =\ \mathrm{ad}_T^n\Delta(0)\ =\ \left(\frac{d}{dz}\right)^n(e^{zT}\otimes \mathrm{id})\cdot\Delta(0)|_{z=0}$$

其中 $\mathrm{ad}_T(-)\ =\ (-)\cdot T-(\mathrm{id}\ \otimes T)\cdot(-)$，第二个等式用到了余导子性质 (26)。

□

2. 箭图势下的 Joyce–Liu 顶点余代数

设 Q 是任意一个带有任意势 W 的箭图，并允许其按环面 T 的特征格 N 分次。本节将为上同调Hall代数构造非局部顶点余代数结构

$$\mathcal{A}^T_{Q,W} = \bigoplus_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d}, \varphi_{W,d}\mathbf{Q}_{\mathcal{M}_{Q,d}}[\dim \mathcal{M}_{Q,d}]), \tag{27}$$

在相对Künneth假设下。

2.1. 箭图模叠上的几何结构。

2.1.1. 顶点余乘法结构将由模叠上的以下几何结构以及一个函数 $\mathrm{tr}W\colon \mathcal{M}^T_Q \to \mathbf{A}^1$（该函数来自势）所诱导：

（1）箭图表示的直和给出一个映射

$$\mathcal{M}^T_Q \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}^T_Q \xrightarrow{\oplus} \mathcal{M}^T_Q$$

它满足交换性和结合性，并且 0 表示 $\mathrm{pt} \xrightarrow{0} \mathcal{M}^T_Q$ 定义了一个单位元。

(2) 直和与势相容，具体而言

$$\oplus\cdot \mathrm{tr}W \;=\; \mathrm{tr}W \boxplus \mathrm{tr}W, \qquad\qquad 0\cdot \mathrm{tr}W \;=\; 0. \tag{28}$$

(3) 存在一个作用

$$\mathrm{act} \;:\; \mathrm{B}\mathbf{G}_m \times \mathcal{M}^T_Q \;\to\; \mathcal{M}^T_Q \tag{29}$$

群叠 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 的作用与上述结构相容：上述映射均为 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$-等变，且作用 $\cdot \mathrm{tr}W = 0 \boxplus \mathrm{tr}W$。

(4) 我们有一个完美复形

$$\mathrm{Ext} \;\in\; \mathrm{Perf}(\mathcal{M}^T_Q \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}^T_Q) \tag{30}$$

满足

$$(\oplus\times \mathrm{id})^*\mathrm{Ext} \simeq \mathrm{Ext}_{13}\oplus \mathrm{Ext}_{23} \qquad (\mathrm{id}\times\oplus)^*\mathrm{Ext} \simeq \mathrm{Ext}_{12}\oplus \mathrm{Ext}_{13}$$
$$\mathrm{act}_1^*\mathrm{Ext} \simeq \gamma^{-1}\boxtimes \mathrm{Ext} \qquad \mathrm{act}_2^*\mathrm{Ext} \simeq \gamma\boxtimes \mathrm{Ext}$$

其中 $\mathrm{Ext}_{ij} = \pi_{ij}^*\mathrm{Ext}$。

对于箭图情形中的平凡环面 T，直和映射 (1) 可视为源自 [TV07] 的对象模空间函子的反变性。事实上，$\mathcal{M}_Q$ 是箭图表示的微分分次范畴 $\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)$ 的对象模空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)}$ 中的一个开子层叠。$\mathcal{M}_{\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)}$ 上的直和映射由对角映射 $\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q) \to \mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)\times \mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q) \simeq \mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)\sqcup\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)$诱导，而 $\mathcal{M}_Q$ 上的直和则由限制给出。

对于 (2)，函数 $\mathrm{tr}W$ 由 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)}$ 上一个函数的限制给出，该函数由范畴 $\mathrm{D}(\mathrm{Rep}Q)$ 的 Hochschild 同调类诱导。接着，(2) 中与直和拉回的相容性再次由限制得出，参见 [KPS24, 命题 8.43]。

粗略地说，(3) 和 (4) 成立，是因为 $\mathcal{M}_Q$ 的每个点的稳定子群中都包含一个 $\mathbf{G}_m$，并且将 Ext 定义为 $\mathrm{RHom}(-,-)$。更确切地说，它是沿着 q 对 (19) 中映射 p 的切复形作拉回，其明确描述见方程 (16)。

2.1.2. *Künneth* 同构假设。我们需要假设

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1]} \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}^T_{Q,d_2}, \varphi_{\mathrm{tr}W_{d_1}} \boxtimes \varphi_{\mathrm{tr}W_{d_2}}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}, \varphi_{\mathrm{tr}W_{d_1}}) \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_2}, \varphi_{\mathrm{tr}W_{d_2}}). \quad (31)$$

根据整体 Künneth 同构，当 $T=1$ 时这显然成立；但正如附录 A.1.1 中所讨论的，相对 Künneth 公式一般并不成立。

不过，对于带有典范三重势的三重箭图，已知 (31) 成立；对于适当的环面作用，这一假设也已由 [Dav23, Thm. 9.6] 给出。此外，对于 $W=0$ 的情形，以及更一般地，依据 [Dav25, Thm. 3.4], 中的论证，只要 $\mathcal{A}_{Q,W}$ 具有纯混合霍奇结构，该结论便成立。

2.2. **临界上同调上的结构**。我们利用 $\mathcal{M}^T_Q$ 上的几何结构，在消失循环上同调上诱导出相应的结构。这些结构将通过附录 A.1 中的消失循环工具包诱导得到。

2.2.1. 直和。模栈上的直和映射诱导出一个映射

$$\oplus^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q \times \mathcal{M}_Q).$$

由于 $\mathcal{M}_Q$ 有无限多个连通分支，Künneth 同构在此处并不适用；但将其限制到由一对维数向量 d_1, d_2 标记的分支后，同构便适用，因此我们得到一个映射

$$\oplus^*_{d_1,d_2} : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_1+d_2}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_1}) \otimes \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_2}).$$

现在我们将类似的论证应用于等变临界上同调。

引理 2.2.2。假设我们有一个满足假设 2.1.2 的带势分次箭图。存在一个余交换余乘法，其余导子为

$$\oplus^* : \mathcal{A}^T_{Q,W} \to \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathcal{A}^T_{Q,W}[\Delta], \qquad T : \mathcal{A}^T_{Q,W} \to \mathcal{A}^T_{Q,W}[2],$$

其中我们按上同调次数 $\Delta = \chi(d_1) + \chi(d_2) - \chi(d_1+d_2)$进行移位。

证明。为简化记号，我们将$\mathbf{Q}_d$ 记作$\mathbf{Q}^{\mathcal{M}^T_{Q,\,d}}[\chi(d)]$。我们有如下映射链

$$\begin{aligned}\varphi_{W_{d_1+d_2}}\mathbf{Q}_{d_1+d_2} &\to \oplus_* \oplus^* \varphi_{W_{d_1+d_2}}\mathbf{Q}_{d_1+d_2} \\ &\to \oplus_* \varphi_{\oplus^* W_{d_1+d_2}}\mathbf{Q}_{d_1+d_2} \\ &= \oplus_* \varphi_{W_{d_1} \boxplus W_{d_2}}\mathbf{Q}_{d_1+d_2}\end{aligned}$$

$$\simeq \oplus^*(\varphi_{W_{d_1}}\mathbf{Q}_{d_1}\boxtimes\varphi_{W_{d_2}}\mathbf{Q}_{d_2}).$$

在 $\mathcal{M}^T_{Q,\ d_1+d_2}$ 上的层之间。第一个是 $(\oplus^*,\ \oplus_*)$ 伴随的单位，第二个是消失循环在拉回下的函子性，第三个是 W 与直和映射之间的相容性，最后一个是消失循环的 Thom-Sebastiani 同构。取导出整体截面得到

$$\oplus^*_{d_1,d_2}:\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1+d_2},\varphi_{W_{d_1+d_2}})\to\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1},\varphi_{W_{d_1}})\otimes_T\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_2},\varphi_{W_{d_2}})[\chi(d_1)+\chi(d_2)-\chi(d_1+d_2)]$$

由 Künneth 同构假设可知。余结合性和余交换性分别继承自 $\oplus$ 的结合律和交换性。例如，它是余结合的，因为层叠的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}^T_{Q,d_1}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_2}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_3} & \xrightarrow{\oplus\times\mathrm{id}} & \mathcal{M}^T_{Q,d_1+d_2}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_3}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\oplus} & & \downarrow{\scriptstyle\oplus}\\ \mathcal{M}^T_{Q,d_1}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_2+d_3} & \xrightarrow{\oplus} & \mathcal{M}^T_{Q,d_1+d_2+d_3}\end{array}$$

是交换的。类似地，利用映射 $0:\mathrm{pt}\to\mathcal{M}^T_Q$，我们构造余单位。

我们对 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 的作用应用相同的论证，得到下面这个 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}^T_{Q,\ d}$ 上的层的映射；唯一的区别在于，我们使用 W 与作用映射 act 之间的相容性。

$$\varphi_{W_d}\ \to\ \mathrm{act}_*\mathrm{act}^*\varphi_{W_d}\ \to\ \mathrm{act}_*\varphi_{\mathrm{act}^*W_d}\ =\ \mathrm{act}_*\varphi_{0\boxplus W_d}\ \simeq\ \mathrm{act}_*(\mathbf{Q}_{\mathcal{M}^T_Q}\boxtimes\varphi_{W_d}).$$

这诱导出一个映射

$$\mathrm{act}^*\ :\ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d},\varphi_{W_d})\ \to\ \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m)\otimes\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d},\varphi_{W,d})\ =\ \mathbf{C}[z]\otimes\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d},\varphi_{W,d})$$

其中，z 是 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 上典范线丛的第一陈类。由于 act 是群叠作用，这定义了余代数$\mathbf{C}[z]$的一个作用。此外，由交换图可知，$\oplus^*$ 关于此余作用是线性的

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{M}^T_{d_1}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{d_2}\times\mathrm{B}\mathbf{G}_m & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\Delta} & \mathcal{M}^T_{Q,d_1}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_2}\times\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathrm{B}\mathbf{G}_m & \xrightarrow{\mathrm{act}\times\mathrm{act}} & \mathcal{M}^T_{Q,d_1}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,d_2}\\ \downarrow{\scriptstyle\oplus\times\mathrm{id}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\oplus}\\ \mathcal{M}^T_{d_1+d_2}\times\mathrm{B}\mathbf{G}_m & & \xrightarrow{\qquad\qquad\mathrm{act}\qquad\qquad} & & \mathcal{M}^T_{d_1+d_2}\end{array}$$

因此，$\mathcal{A}^T_{Q,W}$ 在 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m)$-CoMod 中定义了一个余代数。因此，我们将自同态 T 定义为作用映射 $\mathrm{act}^*=\exp(Tz)$中 z 的系数；由于 z 是本原的，它是一个余导子。□

2.2.3. $W = 0$ 情形。 特别地，取 $W = 0$可得到普通上同调上的一个 $\mathbf{C}[z]$-余作用和余乘法

$$\mathcal{A}_Q^T \;=\; \bigoplus_{d\in\Lambda} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^T)[\dim \mathcal{M}_{Q,d}]$$

我们也将其记作 act* 和 $\oplus^*$。注意， $\mathcal{A}_Q^T$ 通过杯积作用于$\mathcal{A}_{Q,\ W}^T$，且此代数与模结构和余乘法及 $\mathbf{C}[z]$-余作用相容，如下所示。

引理 2.2.4. 分别用下标 0 和W表示$\mathcal{A}_{Q,0}^T$和 $\mathcal{A}_{Q,W}^T$上的余乘法和平移。它们满足以下相容关系

$$\begin{aligned}\mathrm{act}_W^*(h\cdot b) \;&=\; \mathrm{act}^*(h)_0\cdot \mathrm{act}_W^*(b)\\ \oplus_W^*(h\cdot b) \;&=\; \oplus_0^*(h)\cdot \oplus_W^*(b)\end{aligned}$$

对每个上同调类 $h\in\mathcal{A}_{Q,0}^T$和临界上同调类 $b\in\mathcal{A}_{Q,W}^T$，均成立。

证明。 直和与杯积的相容性由下列交换图得出

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T & \xrightarrow{\Delta\times\Delta} & \mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T\\ \downarrow{\scriptstyle\oplus} & & \downarrow{\scriptstyle\oplus\times\oplus}\\ \mathcal{M}_Q^T & \xrightarrow{\qquad\Delta\qquad} & \mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T\end{array}$$

而 act 映射的相容性则由以下内容得出

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T & \xrightarrow{\Delta\times\Delta} & (\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T)^{\times_{\mathrm{B}T}2}\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{act}_1} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{act}_1\times\mathrm{act}_1}\\ \mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T & \xrightarrow{\qquad\Delta\qquad} & (\mathcal{M}_Q^T\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}_Q^T)^{\times_{\mathrm{B}T}2}\end{array}$$

□

我们通常省略余乘法和平移中的下标 0 和 W。

2.2.5. *Joyce–Borcherds* 扭曲。接下来我们引入*Joyce–Borcherds* 扭曲

$$\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2},z) \;=\; \sum_{k\geqslant 0} z^{\mathrm{rk}\theta-k}c_k(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2})\in \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_1}^T)\otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)}(\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_2}^T)((z^{-1})), \qquad (32)$$

有时也写作 $\Psi(\mathrm{Ext}\ z)$，以强调完美复形 Ext 的作用。以下代数性质将由复形 Ext 与模栈 $\mathcal{M}_Q^T$ 上不同运算之间的相容性推出。我们还将使用附录 A 中关于完美复形的陈类级数的性质。

命题 2.2.6。 Joyce–Borcherds 扭曲满足

$$(\oplus^*_{d_1,d_2} \times \mathrm{id})\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1+d_2,d_3}, z) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_3}, z)\Psi(\mathrm{Ext}_{d_2,d_3}, z)$$
$$(\mathrm{id} \times \oplus^*_{d_2,d_3})\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2+d_3}, z) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z)\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_3}, z)$$

and

$$\mathrm{act}^*_{1,w}\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z-w), \qquad \mathrm{act}^*_{2,w}\Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z+w).$$

证明。 这些性质均可由以下恒等式推出

$$(\oplus^*_{d_1,d_2} \times \mathrm{id})\mathrm{Ext}_{d_1+d_2,d_3} \;=\; \mathrm{Ext}_{d_1,d_3} \oplus \mathrm{Ext}_{d_2,d_3}$$
$$(\mathrm{id} \times \oplus^*_{d_2,d_3})\mathrm{Ext}_{d_1,d_2+d_3} \;=\; \mathrm{Ext}_{d_1,d_2} \oplus \mathrm{Ext}_{d_1,d_3}$$

and

$$\mathrm{act}^*_1\mathrm{Ext}_{d_1,d_2} \;=\; \gamma^{-1} \boxtimes \mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, \qquad \mathrm{act}^*_2\mathrm{Ext}_{d_1,d_2} \;=\; \gamma \boxtimes \mathrm{Ext}_{d_1,d_2},$$

其中我们应用引理 A.2.8，考察 $\Psi(-,z)$ 与直和及线丛张量化之间的相互作用。□

2.3. **主要构造**。

定理 2.3.1. 设 Q 是一个带有不变势 W 的 N-分次箭图，并满足 Künneth 假设 (31)。那么

$$\begin{aligned}\Delta(z) \;:\; \mathcal{A}^T_{Q,W} &\to \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})) \\ \alpha &\mapsto \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \mathrm{act}^*_1 \oplus^* (\alpha)\end{aligned}$$

定义了一个关于 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 线性的余结合顶点余乘法。

事实上， $\Delta(z)$ 也具有编织余局部性——这是编织余交换性的顶点类比——见定理 4.5.2 的最后一部分。请注意，我们扭曲的是环境光滑叠 $\mathcal{M}_Q$ 的 Ext 复形，而不是其中的 Calabi–Yau 三维模叠 $\mathcal{M}_{Q,\ W} = \mathrm{Crit}(\mathrm{Tr}W)$，这或许是人们最初会猜测的。

证明。 *</style}*余单位将由沿嵌入 *pt* 的消失循环拉回诱导。与平移的相容性将由 *2.2.6*、*2.2.3* 以及 *act* 得出，因此 *act*，$_1 = (T \otimes 1)\mathrm{act}^*_{z,}$ 1</style}。 —

在此证明中，我们将自由使用引理 2.2.4 中的相容性。现在我们给出顶点余结合性的直接证明

$$(\Delta_{d_1,d_2}(z) \otimes \mathrm{id})\Delta_{d_1+d_2,d_3}(w) = (\mathrm{id} \otimes \Delta_{d_2,d_3}(w))\Delta_{d_1,d_2+d_3}(z+w) \tag{33}$$

参照 Liu [Liu25b，第 3.2 节13]，，并使用简写 $\Psi(z) = \Psi(\mathrm{Ext}\ z)$。我们先展开等式左边

$$(\Psi(-z)_{d_1,d_2} \otimes \mathrm{id})\mathrm{act}^*_{z,1}(\oplus^*_{d_1,d_2} \otimes \mathrm{id})\ \left(\Psi(-w)_{d_1+d_2,d_3}\mathrm{act}^*_{w,1}\oplus^*_{d_1+d_2,d_3}\right)$$

$$= (\Psi(-z)_{d_1,d_2}\otimes \mathrm{id})\mathrm{act}^*_{z,1}\Psi(-w)_{d_1,d_3}\Psi(-w)_{d_2,d_3}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes \mathrm{id})\left(\mathrm{act}^*_{w,1}\oplus^*_{d_1+d_2,d_3}\right)$$
$$= \Psi(-z)_{d_1,d_2}\Psi(-z-w)_{d_1,d_3}\Psi(-w)_{d_2,d_3}\ \mathrm{act}^*_{z,1}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes \mathrm{id})\mathrm{act}^*_{w,1}\oplus^*_{d_1+d_2,d_3}$$

其中，第一个等号和第二个等号分别用到了命题 2.2.6 的第一部分和第二部分。类似地，我们可以将右边展开为

$$(\mathrm{id}\otimes\Psi(-w)_{d_2,d_3})\mathrm{act}^*_{w,1}(\mathrm{id}\otimes\oplus^*_{d_2,d_3})\ \left(\Psi(-z-w)_{d_1,d_2+d_3}\mathrm{act}^*_{z+w,1}\oplus^*_{d_1,d_2+d_3}\right)$$
$$= (\mathrm{id}\otimes\Psi(-w)_{d_2,d_3})\mathrm{act}^*_{w,1}\Psi(-z-w)_{d_1,d_3}\Psi(-z-w)_{d_1,d_2}(\mathrm{id}\otimes\oplus^*_{d_2,d_3})\left(\mathrm{act}^*_{z+w,1}\oplus^*_{d_1,d_2+d_3}\right)$$
$$= \Psi(-w)_{d_2,d_3}\Psi(-z-w)_{d_1,d_3}\Psi(-z)_{d_1,d_2}\ \mathrm{act}^*_{w,1}(\mathrm{id}\otimes\oplus^*_{d_2,d_3})\mathrm{act}^*_{z+w,1}\ \oplus^*_{d_1,d_2+d_3}.$$

左右两边的 Ψ 因子相同，因此只需证明

$$\mathrm{act}^*_{z,1}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes\mathrm{id})\mathrm{act}^*_{w,1} = \mathrm{act}^*_{z+w,1}\mathrm{act}^*_{w,2}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes\mathrm{id}).$$

但这很容易由.....的交换性得出

$$\begin{array}{ccccc}
B\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}\times\mathcal{M} & \xrightarrow{\Delta\times\mathrm{id}} & B\mathbf{G}_m\times\mathcal{M}\times B\mathbf{G}_m\times\mathcal{M} & \xrightarrow{\mathrm{act}\times\mathrm{act}} & \mathcal{M}\times\mathcal{M} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\oplus} & & & & \downarrow{\scriptstyle\oplus} \\
B\mathbf{G}_m\times\mathcal{M} & & \xrightarrow{\qquad\qquad\mathrm{act}\qquad\qquad} & & \mathcal{M}
\end{array}$$

这意味着.....中的第一个等式

$$\text{作用}^*_{z,\ 1}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes\mathrm{id})\mathrm{act}^*_{w,1} = \mathrm{act}^*_{z,1}\mathrm{act}^*_{w,1}\mathrm{act}^*_{w,2}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes\mathrm{id}) = \mathrm{act}^*_{z+w,1}\mathrm{act}^*_{w,2}(\oplus^*_{d_1,d_2}\otimes\mathrm{id}),$$

第二个等式由 $\mathrm{act}^*_z\mathrm{act}^*_w = \mathrm{act}^*_{z+w}$ 得出。至此，我们证明了 $\Delta(z)$ 是一个余结合顶点余代数。 □

3. 局部化余乘积

在第 2 节中，我们在 $\mathcal{A}^T_{Q,W}$ 上定义了一个分次顶点余乘法，其主要数据是一个向量空间之间的映射

$$\Delta(z) \,:\, \mathcal{A}^T_{Q,W} \,\to\, \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})).$$

本节将说明，这些数据可以重新组织成一种或多或少等价的形式，即局部化余乘法

$$\Delta_{\mathrm{loc}} \,:\, \mathcal{A}^T_{Q,W} \,\to\, \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}\left[S^{-1}\right]$$

该概念最初由 Davison [Dav17] 定义，但经常出现在 CoHA 文献中 [YZ18a]。首先给出局部化余乘积的定义，并说明它们与顶点余乘法之间的关系。在定理 3.3.2 中，我们将证明，把这一构造应用于 Davisons 的 Δ_{loc}，会得到 Joyce–Liu 顶点余乘积 $\Delta(z)$。

现在，我们给出一个改编自 [Dav17] 的局部化余乘积定义。如果读者不想了解这个抽象定义，可以直接跳到第 3.2 节；在那里，我们将回顾 [Dav17], 中的构造，这是我们将要用到的唯一一种局部化余乘积。

3.1. 从局部化余乘积到顶点余乘法。

3.1.1. 我们在一个底空间为 $\mathbf{Z}$ 分次的交换环 R 上工作。所有张量积均默认为在 R 上进行。令 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族带有余交换分次余乘积的分次交换环

$$\delta_{\alpha,\beta} \,:\, \mathcal{O}_{\alpha+\beta} \,\to\, \mathcal{O}_\alpha \otimes \mathcal{O}_\beta$$

以及 $S_{\alpha,\ \beta} \subseteq \mathcal{O}_\alpha \otimes \mathcal{O}_\beta$ 一族满足以下条件的乘法子集

$$(\delta_{\alpha,\beta} \otimes \mathrm{id}) S_{\alpha+\beta,\gamma} \;\sim\; S_{\alpha,\gamma,13} \cdot S_{\beta,\gamma,23}, \qquad\qquad (\mathrm{id} \otimes \delta_{\beta,\gamma}) S_{\alpha,\beta+\gamma} \;\sim\; S_{\alpha,\beta,12} \cdot S_{\alpha,\gamma,13} \tag{34}$$

其中，等价是指 $\mathcal{O}_\alpha \otimes \mathcal{O}_\beta \otimes \mathcal{O}_\gamma$ 的相应局部化相等。

一个局部化余代数是 $\mathcal{O}_\alpha$-模的直和 $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$，满足

$$\Delta_{\alpha,\beta} \,:\, A_{\alpha+\beta} \,\to\, A_\alpha \otimes A_\beta[S^{-1}_{\alpha,\beta}]$$

$\mathcal{O}_\alpha$-模的映射，即 $\Delta_{\alpha,\ \beta}(ba) = \delta_{\alpha,\ \beta}(b)\Delta_{\alpha,\ \beta}(a)$，其满足余结合性，

$$\begin{array}{ccccc} & & A_\alpha \otimes A_{\beta+\gamma}[S^{-1}_{\alpha,\beta+\gamma}] & \longrightarrow & A_\alpha \otimes (A_\beta \otimes A_\gamma)[S^{-1}_{\beta,\gamma,23}, (\mathrm{id}\otimes\delta_{\beta,\gamma})S^{-1}_{\alpha,\beta+\gamma}] \\ A_{\alpha+\beta+\gamma} & \nearrow\searrow & & & \| \wr \\ & & A_{\alpha+\beta} \otimes A_\gamma[S^{-1}_{\alpha+\beta,\gamma}] & \longrightarrow & (A_\alpha \otimes A_\beta) \otimes A_\gamma[S^{-1}_{\alpha,\beta,12}, (\delta_{\alpha,\beta}\otimes\mathrm{id})S^{-1}_{\alpha+\beta,\gamma}] \end{array} \tag{35}$$

并且相对于映射 $\epsilon\colon\ A_0 \to k$ 满足余单位公理。(35)中的垂直识别由(34)推出。

3.1.2. 注。 我们将滥用记法，称其为

$$\Delta \,:\, A \,\to\, A\otimes A[S^{-1}] \,:=\, \bigoplus_{\alpha,\beta} A_\alpha \otimes A_\beta[S_{\alpha,\beta}^{-1}] \tag{36}$$

作为局部化余乘积。

3.1.3. 现在假设上述所有结构均关于$\mathbf{G}_a$的作用是等变的。也就是说，我们有$\mathbf{C}[z]$的余作用

$$\mathrm{act}_{\mathcal{O}} \,=\, \exp(zT_{\mathcal{O}}) \,:\, \mathcal{O}_\alpha \,\to\, \mathcal{O}_\alpha[z], \qquad \mathrm{act}_A \,=\, \exp(zT_A) \,:\, A_\alpha \,\to\, A_\alpha[z]$$

由代数映射和模映射给出：

$$\mathrm{act}_{\mathcal{O}}(bb') \,=\, \mathrm{act}_{\mathcal{O}}(b)\mathrm{act}_{\mathcal{O}}(b'), \qquad \mathrm{act}_A(ba) \,=\, \mathrm{act}_{\mathcal{O}}(b)\mathrm{act}_A(a), \tag{37}$$

使得$S_{\alpha,\beta}$是平移不变的：[7]

$$(\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{act}_{\mathcal{O}})S_{\alpha,\beta} \,\sim\, S_{\alpha,\beta}, \tag{38}$$

并满足

$$\delta_{\alpha,\beta}\cdot \mathrm{act}_{\mathcal{O}} \,=\, (\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{act}_{\mathcal{O}})\cdot \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \Delta_{\alpha,\beta}\cdot \mathrm{act}_A \,=\, (\mathrm{act}_A\otimes \mathrm{act}_A)\cdot \Delta_{\alpha,\beta} \tag{39}$$

其中，最后一个等式的值落在同一个局部化中，这是由 S 的平移不变性所致。

我们称上述结构为**平移等变局部化余代数**。

3.1.4. 构造顶点余乘法。考虑一个平移等变局部化余代数，使得每个

$$(\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{id})S_{\alpha,\beta} \,\in\, \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta((z^{-1}))$$

是一个可逆元素。

定义 3.1.5。映射

$$\delta_{\mathcal{O}}(z) \,:\, \mathcal{O}_{\alpha+\beta} \,\to\, \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta((z^{-1})), \qquad \Delta_A(z) \,:\, A_{\alpha+\beta} \,\to\, A_\alpha\otimes A_\beta((z^{-1}))$$

由 $\delta_{\mathcal{O}}(z)=\delta_{\mathcal{O}}\cdot$ 作用和 $\Delta_A(z)=\Delta_A\cdot$ 作用通过以下映射定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{act} \,:\, \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta[S_{\alpha,\beta}^{-1}] &\xrightarrow{\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta[z]\left[(\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{id})S_{\alpha,\beta}^{-1}\right]\\ &\hookrightarrow\, \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta((z^{-1}))\left[(\mathrm{act}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{id})S_{\alpha,\beta}^{-1}\right]\\ &\simeq\, \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta((z^{-1}))\end{aligned}$$

同理

$$\mathrm{act} \,:\, A_\alpha\otimes A_\beta[S_{\alpha,\beta}^{-1}] \,\to\, A_\alpha\otimes A_\beta((z^{-1}))$$

将 $\overset{a\otimes a'}{s} \,\mapsto\, \underline{\text{作用}_A(a)\otimes a'} \;\; \underline{\text{作用}(s)}$。

3.2. Davisons 在 CoHA 上的局部化余乘积。

[7]更准确地说，这意味着通过乘法子集 $(\text{作用}_{\mathcal{O}}\otimes \text{作用}_{\mathcal{O}})S_{\alpha,\ \beta}$ 和$S_{\alpha,\ \beta}\subseteq \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta\subseteq \mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta[z]$对 $\mathcal{O}_\alpha\otimes \mathcal{O}_\beta[z]$ 进行局部化后，它们是同构的。

3.2.1. 现在我们考察带有其杯积、余乘法 $\delta_{d,\ e} = \oplus^*_{d,\ e}$ 以及乘法子集的 $R = \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 和 $\mathcal{O}_d = \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,\ d})$

$$S_{d_1,d_2} \ = \ \langle e(\mathrm{Ext}_0), e(\mathrm{Ext}_1)\rangle \ = \ \langle e(Q_0), e(Q_1)\rangle$$

由 Ext 复形（16）的各个分支的欧拉类生成。我们定义

$$\mathrm{act}_{\mathcal{O}} \ : \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q) \ \overset{\mathrm{act}^*}{\to} \ \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m \times \mathcal{M}^T_Q) \ \simeq \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)[z]$$

如引理 4.3.2 中所述，作用于陈根 $x_{i,\ n} \mapsto x_{i,\ n} + z$。这满足上述关于 $\mathcal{O}$的公理，其中在带有其乘积 $\otimes_T$（定义于（18））的线性幺半范畴 向量空间范畴$^T_\Lambda$ 内部进行。

3.2.2. 备注。 我们也可以等价地使用

$$S \ \sim \ \langle e(\mathcal{E}_i^\vee \boxtimes \mathcal{E}_i),\, e(\mathcal{E}_i^\vee \boxtimes \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{L}_e) \ : \ e : i \to j\rangle.$$

3.2.3. 现在，假设 Künneth 假设（31），我们在 $A = \mathcal{A}^T_{Q,\ W}$ 上定义一个局部化余乘积。来自 [Dav17] 和 [BD23 第 5 节的 **Davison局部化余乘积** 为

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{loc}} \ : \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \ &\to \ \mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}\left[S^{-1}\right] \\ \alpha \ &\mapsto \ \frac{e(Q_0)}{e(Q_1)} \cdot (q^*)^{-1} p^* \alpha \end{aligned}$$

根据交换图定义

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{SES}^T_{Q,d_1,d_2} & & \\ & \overset{q}{\swarrow}\overset{s}{\nearrow} & & \overset{p}{\searrow} & \\ \mathcal{M}^T_{Q,d_1} \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}^T_{Q,d_2} & & & & \mathcal{M}^T_{Q,d_1+d_2} \end{array}$$

以及命题 1.4.3 中定义的等变欧拉类 $e(Q_0),\ \ e(Q_1)$.

也就是说，我们取如式 (114) 中的临界上同调拉回 $p^*,\ \ q^*$；后者可逆，因为 q 是仿射纤维化[8]，，且 Thom–Sebastiani 和 Künneth 同构:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}, \varphi_W) \ &\overset{p^*}{\to} \ \mathrm{H}^*(\mathrm{SES}^T_{Q,d_1,d_2}, \varphi_{W_{\mathrm{SES}}}) \\ &\underset{\sim}{\overset{q^*}{\leftarrow}} \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1} \times_{BT} \mathcal{M}^T_{Q,d_2}, \varphi_{W \boxplus W}) \\ &\simeq \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}, \varphi_W) \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_2}, \varphi_W). \end{aligned}$$

在中间部分，我们将公共函数 $p^*W = q^*(W \boxplus W)$ 记为 W_{SES}。

引理3.2.4。我们有

$$\Delta_{\mathrm{loc}}(\alpha) \ = \ e(\mathrm{Ext}) \cdot \oplus^*(\alpha)$$

其中 $e(\mathrm{Ext})$ 是二项复形 Ext 的局部化欧拉类（定义见 A.2.6）。

[8]Note it is important to consider the map $q\colon \mathrm{SES}^T_{Q,d_1,d_2} \to \mathcal{M}^T_{Q,d_1} \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}^T_{Q,d_2}$ and not $\mathrm{SES}^T_Q \to \mathcal{M}^T_{Q,d_1} \times \mathcal{M}^T_{Q,d_2}$, since the latter is *not* an affine fibration.

证明。 我们首先注意到 $(q^*)^{-1} = s^*$，因为 s是 q的右逆，因此根据拉回映射的函子性，我们有

$$\oplus^* = (ps)^* = s^*p^* = (q^*)^{-1}p^*. \tag{40}$$

若我们已经得到

$$e(\mathrm{Ext}) = \frac{e(Q_0)}{e(Q_1)}, \tag{41}$$

这由命题 1.4.3 得出。 □

最后，我们令 act_A 为复合

$$\mathcal{A}^T_{Q,W} \xrightarrow{\mathrm{act}^*} \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m) \otimes \mathcal{A}^T_{Q,W} \simeq \mathcal{A}^T_{Q,W}[z],$$

利用引理 2.2.2 中的构造，则

命题 3.2.5。 $\mathcal{A}^T_{Q,\ W}$ 是一个平移等变局部化余乘法，满足第 3.1.4 小节中的性质。

证明。 局部化余乘积和 $\mathbf{C}[z]$-余作用关于 $\mathcal{O}_d = \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q\,d})$ 是线性的，这由引理 2.2.4 得出，从而证明了 (37) 和 (39)。根据 [Dav17]，它是余结合的。

剩下的工作是检查 S 满足相关公理。由于乘法子集，它满足第一个六边形关系 (34)，因为

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \left[(\oplus \times \mathrm{id})^* e(\mathrm{Ext}_i)^{-1} \,:\, i = 0, 1\right] \\ \simeq \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \left[e(\mathrm{Ext}_i)^{-1}_{13}, e(\mathrm{Ext}_i)^{-1}_{23} \,:\, i = 0, 1\right]\end{aligned}$$

由于 $(\oplus \times \mathrm{id})^* e(\mathrm{Ext}_i) = e(\mathrm{Ext}_i)_{13} e(\mathrm{Ext}_i)_{23}$，同样地我们也有第二个六边形方程 (34)。$S$ 中的每个元素都满足平移不变性 (38)，因为

$$(\mathrm{act}_z^* \otimes \mathrm{act}_z^*) e(\mathrm{Ext}_i) = e\left((\mathrm{act} \times \mathrm{act})^* \mathrm{Ext}_i\right) = e(\gamma \otimes \gamma^{-1} \boxtimes \mathrm{Ext}_i) = e(\mathrm{Ext}_i)$$

因为 Ext 复形 $\mathrm{Ext} = (\mathrm{Ext}_0 \to \mathrm{Ext}_1)$ 的 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$ 权重 $(-1\ 1)$ 之和为零。同样，由于

$$(\mathrm{act}_z^* \otimes \mathrm{id}) e(\mathrm{Ext}_i) = \Psi(\mathrm{Ext}_i, -z) = \pm z^{\mathrm{rkExt}_i} \mp c_1(\mathrm{Ext}_i) z^{\mathrm{rkExt}_i - 1} \pm \cdots$$

具有非零首项，因此它作为 z^{-1}中的 Laurent 级数是可逆的。 □

注意 (中元素的可逆性与 (作用$_z^* \otimes \mathrm{id})S$ 以及 [Dav17，命题 4.1]之间的关系。

3.3. 恢复 Joyce–Liu 顶点余乘法。

3.3.1. 本节的主要结果是，Davisons 的局部化余乘积与 Joyce–Liu 顶点余乘法一致，但需经过定义 3.1.5 中连接局部化余乘积与顶点余乘法的映射 act。

为明确起见，我们指出，在我们的情形中，act 作用于一个局部化类，其分母是边 $e\colon i \to j$ 上 $x_{i,\ n}\otimes 1 - 1\otimes x_{j,\ m} + \mathrm{wt}(e)$ 的乘积；它将分母和分子中第一个张量因子的任意陈根替换为其自身加上 z，然后在 z^{-1} 中作 Laurent 展开。

定理 3.3.2. 交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}[S^{-1}] \\ & \overset{\Delta_{\mathrm{loc}}}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{act}} \\ \mathcal{A}^T_{Q,W} & & \\ & \underset{\Delta(z)}{\searrow} & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})) \end{array}$$

交换。

证明。 上述交换图可分解为

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{(q^*)^{-1}p^*}{\nearrow} & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W} & \overset{e(Q_0)/e(Q_1)}{\longrightarrow} & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}[S^{-1}] \\ \mathcal{A}^T_{Q,W} & & \| & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{act}} \\ & \underset{\oplus^*}{\searrow} & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W} & \underset{\Psi(\mathrm{Ext},-z)\cdot \mathrm{act}_{z,1}}{\longrightarrow} & \mathcal{A}^T_{Q,W}\otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}((z^{-1})) \end{array}$$

其左侧方块由 (40) 可交换。因此，只需证明

$$\mathrm{act}\left(\frac{e(Q_1)}{e(Q_0)}\cdot \alpha_1\otimes\alpha_2\right) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext},-z)\cdot \mathrm{act}^*_{z,1}(\alpha_1\otimes\alpha_2).$$

利用方程 (41)，我们得到

$$\mathrm{act}\left(\frac{e(Q_1)}{e(Q_0)}\cdot \alpha_1\otimes\alpha_2\right) \;=\; \mathrm{act}^*_{z,1}\left(\frac{e(Q_1)}{e(Q_0)}\right)\cdot \alpha_1\otimes\alpha_2 \;=\; \mathrm{act}^*_{z,1}(e(\mathrm{Ext}))\cdot \alpha_1\otimes\alpha_2$$

因此，只要我们知道

$$\mathrm{act}^*_{z,1}(e(\mathrm{Ext})) \;= e(\mathrm{act}^*_1\mathrm{Ext}) \;=\; e(\gamma^{-1}\boxtimes \mathrm{Ext}) \;=\; \Psi(\mathrm{Ext},-z), \tag{42}$$

不过，中间的等式成立是因为 Ext 的第一个因子中含有 $\mathbf{BG}_m$ 权重 -1，而最后一个等式则由命题 A.2.10 得出。这就证明了该定理。□

推论 3.3.3. 设 $\alpha\in \mathcal{A}^T_{Q,W,d}$ 我们有 Joyce–Liu 顶点余乘法的如下显式公式：

$$\Delta(\alpha,z) \;=\; \sum_{d',d''} \frac{\prod_i \prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d'_i,d''_i)}(-z - x_{i,n}\otimes 1 + x_{j,m}\otimes 1)}{\prod_{e\colon i\to j}\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d'_i,d''_j)}(-z - x_{i,n}\otimes 1 + x_{j,m}\otimes 1 + \mathrm{wt}(e))}\;\cdot\; \mathrm{act}^*_{z,1}\oplus^*_{d',d''}(\alpha)$$

其中对所有满足 $d' + d'' = d$ 的维数向量 $d, d^{'}$ 求和。

证明。 这由以下事实可知:

$$\text{act} \ : \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d'}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d''})[S^{-1}] \ \to \ \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d'}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d''})((z^{-1}))$$

在陈根上的作用为 $x_{i \ \ ,n} \mapsto x_{i,n} + z$。 □

4. 临界上同调 Hall 代数是一个双代数

本节将证明 CoHA 的代数结构与 Joyce-Liu 顶点余代数相容。最终我们将在定理 4.5.2 中给出证明，并全面列出 CoHA 上的代数结构及其相容性。为表述这些相容性，我们现在先定义 $\mathcal{M}_Q^T$ 的奇异上同调中的一个特定子代数。

4.1. **典范环**。

4.1.1. 在接下来的两节中，我们定义上同调的一个典范子环

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}} \subseteq \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T) = \prod_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^T)$$

以及 R-矩阵的典范部分

$$R_{\text{taut}}(z) \in \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}}[[z^{-1}]],$$

并证明它是一个交换、余交换的全纯顶点双代数。

4.1.2. 典范环 是由 $\mathcal{M}_Q^T$ 的典范丛的陈特征生成的上同调中的 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$-子代数：

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}} = \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)\langle \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i) \,:\, r\geqslant 0, i\in Q_0\rangle \subseteq \prod_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^T) = \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T).$$

等价地，我们可以取由陈类 $c_k(\mathcal{E}_i)$ 生成的环。

命题 4.1.3. 典范环是以陈生成元 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 为生成元的自由多项式 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$-代数：

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}} \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)[\gamma_{i,r} \,:\, r\geqslant 0, i\in Q_0] \qquad \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i) \mapsto \gamma_{i,r}.$$

证明。 只需证明类 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 在 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 上代数独立。由于我们有 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)\otimes \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q)$，因此只需证明类 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 在 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q)$ 中代数独立。注意，对任意 $d\in\mathbf{Z}^r$，可以证明

$$\mathbf{C}[x_k \,:\, 0<k\leqslant d]^{\mathfrak{S}_d} \simeq \mathbf{C}[p_k \,:\, 0<k\leqslant d]$$

是关于对称幂和 $p_k = \sum_i x_i^k = \sum x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_r}^{k_r}$ 的多项式代数。因此，任何在典范环中消失的关于 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 的非零多项式，将其映射到 $\mathrm{H}_T^*(\mathcal{M}_{Q,\ d}) \simeq \mathbf{C}[x_k : 0<k\leqslant d]^{\mathfrak{S}_d}$ 后，对于任何大于该多项式中出现的 r 的 d，都会给出 p_k 之间的一个非平凡关系，这是不可能的，因为对称幂和是代数独立的。□

4.1.4. 警告。 典范丛 $\mathcal{E}_i$ 的欧拉类通常并不属于典范环。事实上，我们有

$$e(\mathcal{E}_i) \;=\; \big(c_{\mathrm{rk}\mathcal{E}_{i,d}}(\mathcal{E}_{i,d})\big) \;\in\; \prod_{d\in\Lambda} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d}),$$

其按分支计算的上同调次数 $\chi(d,\delta_i) \;=\; 2\mathbf{rk}\mathcal{E}_{i,d}$ 通常没有上界。这与典范环中的每个元素形成对比：后者都是有限个具有有限上同调次数的元素之和。

例如，若 $Q=\bullet$ 和 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{M}_Q=\mathrm{BGL}$ 上的典范向量丛，则

$$e(\mathcal{E}) \;=\; (1,\, x_1,\, x_1x_2,\, x_1x_2x_3,\, \dots)$$

显然不是对称幂和 p_k的多项式。

4.2. R**-矩阵的典范部分。**

4.2.1. R**-矩阵的典范部分**是

$$R_{\mathrm{taut}}(z) \;=\; \frac{c(\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee, z^{-1})}{c(\mathrm{Ext}, z^{-1})},$$

即$R_{\mathrm{taut}}(z) = (R_{\mathrm{taut}}(z)_{d_1,\ d_2})_{d_1,\ d_2\in\Lambda}$ 其中

$$R_{\mathrm{taut}}(z)_{d_1,d_2} \;=\; \frac{c(\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee_{d_2,d_1}, z^{-1})}{c(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z^{-1})} \;\in\; \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_1}) \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_2})[[z^{-1}]],$$

展开为关于 z^{-1} 的几何级数。

命题 4.2.2. 这定义了一个元素，属于

$$R_{\mathrm{taut}}(z) \;\in\; \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\mathrm{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\mathrm{taut}}[[z^{-1}]].$$

证明。 我们将分母展开为几何级数，得到 $R_{\mathrm{taut}}(z)$ ，它是关于 z^{-1} 的上同调值幂级数，其系数是 Ext 和$\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee$ 的非零陈类的多项式，因此也是非零陈特征。根据 Ext 复形的显式形式 (16) 以及陈特征在直和下的可加性，这些是 $z^{>0}$ 以下对象的系数的多项式

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}_i^\vee \boxtimes \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{L}, z) \;=\; \mathrm{ch}(\mathcal{E}_i^\vee, z) \otimes \mathrm{ch}(\mathcal{E}_j, z) \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{L}, z)$$

而这些本身是关于 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_k)$ 的 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 多项式（对 $r \geqslant 0$ 而言），因此属于典范环。

□

在 ADE 情形下，这与命题 6.1.7 给出的通常的典范环一致；对于一般带势箭图，这或许是更好的定义。

4.2.3. 我们还将考虑**完整的 Joyce** R**-矩阵**

$$R(z) \;=\; \frac{\Psi(\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee, z)}{\Psi(\mathrm{Ext}, z)} \;\in\; \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}_Q^T)((z^{-1})) \tag{43}$$

它不是平凡的；关于陈根的显式公式，见命题 4.4.15。我们可以看到

$$R(z)_{d_1,d_2} \;=\; \frac{z^{\chi(d_2,d_1)}}{z^{\chi(d_1,d_2)}} \frac{c(\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee_{d_2,d_1}, z^{-1})}{c(\mathrm{Ext}_{d_1,d_2}, z^{-1})} \;=\; \frac{z^{\chi(d_2,d_1)}}{z^{\chi(d_1,d_2)}} R_{\mathrm{taut}}(z)$$

因此，如果箭图是对称的，那么 $R(z)$ 等于 $R_{\mathrm{taut}}(z)$。

4.2.4. 经典极限。 如果 Ext 复形是对称的，即 $[\sigma^*\mathrm{Ext}] \simeq [\mathrm{Ext}]$ 作为 $\mathcal{M}_Q \times \mathcal{M}_Q$的Grothendieck群中的元素，而不一定是 T-等变的，那么 R-矩阵的首项是恒等矩阵。箭图对称时便是这种情况，例如三重箭图的情形：

命题 4.2.5。 如果箭图 Q 是对称的（例如三重箭图），那么我们有

$$R_{\mathrm{taut}}(z) \;=\; 1 \otimes 1 + \mathcal{O}(\hbar_1, \ldots, \hbar_r)$$

其中 $\mathcal{O}(\hbar_1, \ldots, \hbar_r)$ 是一个幂级数，其系数作为 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T) = \mathbf{C}[\hbar_1, \ldots, \hbar_r]$-多项式时常数项均为零。

4.3. **典范环上的结构**。

4.3.1. 我们证明，模叠上的几何结构（第 2.1 节）在典范环上诱导出代数结构。这大致可由第 2.2 节应用于势函数为零的情形得到；唯一尚需验证的是，这些运算保持典范环不变。

引理 4.3.2. 除了杯积之外，还存在一个余交换余乘法和一个自同态

$$\oplus^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}, \qquad T : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$$

使 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 成为一个带双导子的 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$-线性交换、余交换双代数。

证明。 由于 $\oplus^*\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i \boxtimes 1 + 1 \boxtimes \mathcal{E}_i$ 和 $\mathrm{act}^*\mathcal{E}_i = \gamma \boxtimes \mathcal{E}_i$，引理 2.2.2 中定义的上同调映射将

$$\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i) \overset{\oplus^*}{\mapsto} \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}) \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i),$$
$$\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i) \overset{\mathrm{act}_z^*}{\to} \mathrm{ch}_r(\gamma \boxtimes \mathcal{E}_i) \;=\; \sum \frac{1}{k!} z^k \mathrm{ch}_{r-k}(\mathcal{E}_i)$$

由 A.2 节可知，因此 $\mathrm{act}_z^* = \exp(Tz)$，其中 T 对正的 r 将 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i) \mapsto$ 映为 $\mathrm{ch}_{r-1}(\mathcal{E}_i)$。因此，这两个映射都保持典范类子空间。□

推论 4.3.3. $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 是一个全纯 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$-线性顶点双代数，其顶点余乘法作用为 $\mathrm{act}_{z,}^*$ $_1 \circ \oplus^*$

证明. 这由全纯顶点双代数与带有双导子的双代数之间的标准等价性得出，该等价性推广了引理 1.6.4。此等价性将余乘法 Δ 和余导子 T 映射为 $\Delta(z) = (e^{zT} \otimes \mathrm{id})\Delta$，在此情形下即为 $\oplus^*(z) = \mathrm{act}^*_{z,1}\oplus^*$。□

4.3.4. 作为余极限的描述。令 $\mathbf{C}^e$ 表示 Q 的平凡 表示，其维数为 $e \in \Lambda$，且所有边映射均为零。与该表示作直和会诱导一个层映射

$$\iota_{d,e} \,:\, \mathcal{M}^T_{Q,d} \;\to\; \mathcal{M}^T_{Q,d+e}, \tag{44}$$

由相应的表示向量空间映射所诱导

$$\mathrm{Rep}(Q,d) \;\hookrightarrow\; \mathrm{Rep}(Q,d+e), \qquad\qquad V \;\mapsto\; V \oplus \mathbf{C}^e$$

该映射与 $\mathrm{GL}_d \hookrightarrow \mathrm{GL}_{d+e}$ 的作用相交织。因此，我们有一个由偏序集索引的代数栈交换图

$$(\Lambda, \leqslant) \;\to\; \mathrm{Stk}, \qquad\qquad d \leqslant d' \;\mapsto\; \mathcal{M}^T_{Q,d} \xrightarrow{\iota_{d,d'-d}} \mathcal{M}^T_{Q,d'},$$

并可将典范环识别为上同调上的相应极限。记 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)^+_{\mathrm{taut}}$ 为由正秩陈类生成的子环，则有

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)^+_{\mathrm{taut}} \;\xrightarrow{\sim}\; \lim_{d\in\Lambda} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d}) \tag{45}$$

作为分次代数，它是上述交换图的极限。特别地，粗略地说，典范环应当被视为上述函子的极限的 T-等变上同调

$$\mathcal{M}_{Q,\infty} \;:=\; \mathrm{colim}_{d\in\Lambda}\mathcal{M}_{Q,d} \;\simeq\; \mathrm{Rep}(Q,\infty)/\mathrm{GL}_\infty$$

其中 $\mathrm{Rep}(Q,\ \infty) = \bigcup_d \mathrm{Rep}(Q,\ d)$ 和 $\mathrm{GL}_\infty = \bigcup_d \mathrm{GL}_d$ 是上述映射下表示空间和群的并；第二个同构成立，是因为商层叠定义为余极限，且任意两个余极限都可交换。

4.4. 编织与双代数。本节开篇将确切说明，我们所考虑的乘积和余乘法最终以何种意义相容。本节主定理 4.5.2 将用到这里的设定。

4.4.1. 双代数是一个向量空间 A，配备代数结构和余代数结构，使得

$$\Delta(a \cdot b) \;=\; \Delta(a) \cdot_\beta \Delta(b), \tag{46}$$

其中，右边表示在相乘之前，使用编织交换中间的两个因子：

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{\qquad\qquad m \qquad\qquad} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta\otimes\Delta} & & \\ (A\otimes A)\otimes(A\otimes A) & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \searrow^{\beta_{23}} & & \\ (A\otimes A)\otimes(A\otimes A) & \xrightarrow{m\otimes m} & A\otimes A \end{array}$$

为了定义代数或余代数，我们必须在幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes)$ 中进行。为了定义双代数，我们必须在辫单oidal范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \beta)$ 中进行。由于我们关注的对象是顶点和局部化双代数，因此需要在亚纯的和局部化的辫单oidal范畴中进行。

4.4.2. 文献中存在几种亚纯编织幺半范畴的概念，例如参见 [Lat23；Soi97]。然而，本文并不试图将我们的结果置于这一范畴框架中，而是用显式映射来定义所有内容

$$\beta_{M,N}(z) \,:\, M \otimes N((z^{-1})) \xrightarrow{\sim} N \otimes M((z^{-1})), \qquad \beta_{M,N,\mathrm{loc}} \,:\, M \otimes N[S^{-1}] \xrightarrow{\sim} N \otimes M[S^{-1}]$$

对任意一对对象 M， N，满足带谱参数的六边形关系：

$$\beta_{L\otimes M((w^{-1})),N}(z) \;=\; \beta_{L,N}(z-w)\beta_{M,N}(z), \qquad \beta_{L,M\otimes N((w^{-1}))}(z) \;=\; \beta_{L,M}(z+w)\beta_{L,N}(z), \tag{47}$$

从而满足亚纯辫关系：

$$\beta_{L,M}(z)\beta_{L,N}(z+w)\beta_{M,N}(w) \;=\; \beta_{M,N}(w)\beta_{L,N}(z+w)\beta_{L,M}(z). \tag{48}$$

对于在第 4.4.10 节中定义的 β_{loc}，也同样如此。

4.4.3. 典范环模。 我们将考察典范模范畴上的亚纯编织。首先，对于一般箭图，我们考察 R- 矩阵的典范部分的性质。

首先提醒一点： R-矩阵的本原部分不满足谱六边形关系。其偏差由欧拉形式的反对称化 $\widetilde{\chi}(d_1,\ d_2) = \chi(d_1,\ d_2) - \chi(d_2,\ d_1)$ 度量：

引理 4.4.4。 $R_{\mathrm{taut}}(z)$ 满足

$$(\oplus^*(w) \otimes \mathrm{id})R_{\mathrm{taut}}(z)_{d_1+d_2,d_3} \;=\; \frac{(z-w)^{\widetilde{\chi}(d_3,d_1)}}{z^{\widetilde{\chi}(d_3,d_1)}} R_{\mathrm{taut},13}(z-w)_{d_1,d_3} R_{\mathrm{taut},23}(z)_{d_2,d_3}, \tag{49}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \oplus^*(w))R_{\mathrm{taut}}(z)_{d_1,d_2+d_3} \;=\; \frac{(z+w)^{\widetilde{\chi}(d_2,d_1)}}{z^{\widetilde{\chi}(d_2,d_1)}} R_{\mathrm{taut},12}(z+w)_{d_1,d_2} R_{\mathrm{taut},13}(z)_{d_1,d_3}. \tag{50}$$

证明。 我们结合以下方法来证明

$$\begin{aligned} (\oplus^* \otimes \mathrm{id})R_{\mathrm{taut},d_1+d_2,d_3}(z) \;&=\; R_{\mathrm{taut},d_1,d_3}(z) R_{\mathrm{taut},23,d_2,d_3}(z) \\ (\mathrm{id} \otimes \oplus^*)R_{\mathrm{taut},d_1,d_2+d_3}(z) \;&=\; R_{\mathrm{taut},d_1,d_2}(z) R_{\mathrm{taut},13,d_1,d_3}(z) \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{act}^*_{w,1} R_{\mathrm{taut},d_1,d_2}(z) \;&=\; \left(\frac{z-w}{z}\right)^{\widetilde{\chi}(d_2,d_1)} R_{\mathrm{taut}}(z-w) \\ \mathrm{act}^*_{w,2} R_{\mathrm{taut},d_1,d_2}(z) \;&=\; \left(\frac{z+w}{z}\right)^{\widetilde{\chi}(d_2,d_1)} R_{\mathrm{taut}}(z+w) \end{aligned} \tag{52}$$

根据 $\oplus^*(w)$ 的定义。注意， $R_{\text{taut}}(z) = \prod c(\mathcal{E},\ z)^{\pm}$ 是在满足以下条件的 $\mathcal{M}_Q^T \times_{\mathrm{B}T} \mathcal{M}_Q^T$ 上的一组向量丛 $\mathcal{E}$ 的 $c(\mathcal{E},\ z)$ 的交替乘积

$$(\oplus^* \otimes \mathrm{id})\mathcal{E} \ =\ \mathcal{E}_{13} \oplus \mathcal{E}_{23}, \qquad \mathrm{act}_1^*\mathcal{E} \ =\ \gamma^{-1} \boxtimes \mathcal{E}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \oplus^*)\mathcal{E} \ =\ \mathcal{E}_{12} \oplus \mathcal{E}_{13}, \qquad \mathrm{act}_2^*\mathcal{E} \ =\ \gamma \boxtimes \mathcal{E}.$$

因此，由命题 A.2.5，结论对 $c(\mathcal{E},\ z)$ 成立，从而对 $R_{\text{taut}}(z)$也成立。 □

利用完整部分与典范部分之间的关系 4.2.3，我们立即得到

C推论 4.4.5。 完整的 Joyce R-矩阵满足谱六边形关系 s

$$(\oplus^*(w) \otimes \mathrm{id})R(z) \ =\ R(z-w)_{13}R(z)_{23}, \qquad (\mathrm{id} \otimes \oplus^*(w))R(z) \ =\ R(z)_{13}R(z+w)_{13}$$

而且 $\sigma(R(z))$ 也满足相同的关系，只需在两个等式右侧将 w 取负。

推论 4.4.6。 设 Q 为对称的，则 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}}$ 是一个拟三角顶点双代数：一种带有满足引理 4.4.4 的元素 $R_{\text{taut}}(z)$的顶点双代数，并且

$$\sigma(z) \cdot \oplus^*(\mathrm{act}_z^* h, -z) \ =\ R_{\text{taut}}(z)^{-1} \oplus^* (h, z)R_{\text{taut}}(z).$$

证明。 右侧的 $R_{\text{taut}}(z)$共轭作用是平凡的，因为偶次类上的杯积是交换的。最后注意到

$$\sigma\mathrm{act}_{-z,1}^* \oplus^* \mathrm{act}_z^* \ =\ \sigma \cdot \mathrm{act}_{z,2}^* \oplus^* \ =\ \mathrm{act}_{z,1}^* \oplus^*$$

这意味着 $\sigma \oplus^*$ (作用$_z^* h,\ -z) = \oplus^*(h,\ z)$ 如所需。 □

设 Q 是对称的，因此 $R(z) = R_{\text{taut}}(z)$ 既 取值于典范环，又满足谱六边形关系。我们将考虑亚纯编织的范畴是

$$\mathcal{C} \ =\ H\text{-Mod}(\mathrm{Vect}_\Lambda^T),$$

典范环 $H = \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\text{taut}}$ 上的模范畴。这里

$$\mathrm{Vect}_\Lambda^T \ =\ \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)\text{-Mod}_{\Lambda \times \mathbf{Z}}$$

是由 Λ 分次的向量空间范畴，并带有额外的“上同调” $\mathbf{Z}$ 分次，记作$|\ |$，以及 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$ 的作用。两个范畴都配备了式 (18) 中定义的幺半结构 $\otimes_T$。$(\mathcal{C},\ \otimes_T)$ 上的 **亚纯编织** 定义为

$$\begin{aligned} \beta(z)\ :\ V_\lambda \otimes_T W_\mu((z^{-1})) \ &\tilde{\to}\ W_\mu \otimes_T V_\lambda((z^{-1})) \\ v \otimes w \ &\mapsto\ \sigma \cdot (R(z) \cdot v \otimes w) \end{aligned} \tag{53}$$

其中 σ 是 Koszul 符号编织，且我们有集中于次数 λ的 $\mu \in \Lambda$的编织向量空间。这里我们将 (53) 视为典范环上的模之间的映射，其中典范类 h 通过全纯顶点余乘 $\oplus^*(h\, z) =$ 作用于两者$_{z1}^* \oplus^*(h)$。根据上述推论，这定义了一种亚纯编织。

4.4.7. 顶点双代数。给定上述这样的编织，我们定义

定义 4.4.8。 顶点双代数 是一个对象 B，具有结合乘积 m 和余结合顶点余乘法 $\Delta(z)$, 使得

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_T B & \xrightarrow{\qquad m\qquad} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta(z)\otimes_T\Delta(z)} & & \\ (B\otimes_T B)\otimes_T (B\otimes_T B)((z^{-1})) & & \downarrow{\scriptstyle \Delta(z)} \\ \searrow{\scriptstyle \beta_{23}(z)} & & \\ (B\otimes_T B)\otimes_T (B\otimes_T B)((z^{-1})) & \xrightarrow{m\otimes_T m} & B\otimes_T B((z^{-1})) \end{array} \tag{54}$$

可交换。

回顾第 3.1 节中局部化余乘积的定义,

定义 4.4.9。 局部化双代数 是一个分次对象 $B = (B_\alpha)$，具有平移等变局部化余乘法和结合分次乘积

$$m : B_\alpha \otimes B_\beta \to B_{\alpha+\beta}$$

在 $\mathcal{O}$ 上线性，使得

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_T B & \xrightarrow{\qquad m\qquad} & B \\ \downarrow{\scriptstyle u\cdot\Delta_{\mathrm{loc}}\otimes_T\Delta_{\mathrm{loc}}} & & \\ (B\otimes_T B)\otimes_T (B\otimes_T B)_{(12,14,32,34)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathrm{loc}}} \\ \searrow{\scriptstyle \beta_{\mathrm{loc},23}} & & \\ (B\otimes_T B)\otimes_T (B\otimes_T B)_{(13,14,23,24)} & \xrightarrow{m\otimes_T m} & (B\otimes_T B)_{(12)} \end{array} \tag{55}$$

可交换，其中 u 是通过 $(14,32)$-因子进行局部化的嵌入。

在上述内容中，我们已将 $m\otimes_T m$ 扩展为局部化上的一个映射

$$B^{\otimes_T 4}_{(13,23)} \simeq B^{\otimes_T 4}[(\delta\times\delta)^* S^{-1}] \xrightarrow{m\otimes_T m} B^{\otimes_T 2}[S^{-1}] = B^{\otimes_T 2}_{(12)}$$

其中，第一个同构是将 (34) 应用于局部化后得到的，这表明通过 $S_{13}S_{14}S_{23}S_{24}$和 $(\delta\times\delta)^*S$ 进行的局部化是同构的；中间的映射则由 $m\otimes_T m$通过 $m\otimes_T m$的 $\mathcal{O}$-线性诱导。

4.4.10. 局部化结构。 现在我们专门讨论第 3.2 小节中箭图模叠的上同调情形。给定上同调环$\mathbf{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d_i})$上的一族 **Z**-分次模 V_{α_i}，我们将它们的局部化幺半乘积 定义为

$$(V_{d_1}\otimes_T V_{d_2})_{(12)} = V_{d_1}\otimes_T V_{d_2}[S^{-1}_{d_1,d_2}]$$

迭代张量积同样定义为:

$$(V_{d_1} \otimes_T \cdots \otimes_T V_{d_n})_{(i_1 j_1, i_2 j_2, \dots)} \;=\; (V_{d_1} \otimes_T \cdots \otimes_T V_{d_n}) \left[S_{i_1 j_1}^{-1}, S_{i_2 j_2}^{-1}, \cdots \right]. \tag{56}$$

在 $\otimes_T$上的局部化编织

$$\begin{aligned} \beta_{\text{loc}} \;:\; (V_\alpha \otimes_T W_\beta)_{(12)} &\xrightarrow{\sim} (W_\beta \otimes_T V_\alpha)_{(21)} \\ v \otimes w &\mapsto \sigma \cdot (R_{\text{loc}} \cdot v \otimes w) \\ &= (-1)^{|v|\cdot|w|} \sigma(R_{\text{loc}}) \cdot w \otimes v \end{aligned} \tag{57}$$

其中

$$R_{\text{loc}} \;=\; \frac{e(\sigma^*\mathrm{Ext}^\vee)}{e(\mathrm{Ext})} \;\in\; \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_1}^T) \otimes_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d_2}^T)[S_{d_1,d_2}^{-1}]$$

是**局部化 Joyce** R**矩阵**。我们强调，无法将其组装成典范环局部化中的一个元素，参见警告 4.1.4。

引理 4.4.11。我们有 $R_{\text{loc}} = \frac{e(Q_1)}{e(Q_1^{\text{op}})}$。

证明。 我们计算

$$R_{\text{loc}} \;=\; \frac{e(\sigma^*\mathrm{Ext}_0^\vee) e(\mathrm{Ext}_1)}{e(\sigma^*\mathrm{Ext}_1^\vee) e(\mathrm{Ext}_0)} \;=\; \frac{e(\mathrm{Ext}_1)}{e(\sigma^*\mathrm{Ext}_1^\vee)} \;=\; \frac{e(Q_1)}{e(Q_1^{\text{op}})}$$

其中在 第二个等式中我们用到了 $\sigma^*\mathrm{Ext}_0^\vee \simeq \mathrm{Ext}_0$，而在第三个等式中用到了命题 1.4.3 . □

引理 4.4.12。 完整的 Joyce 矩阵和局部化 Joyce R-矩阵相容：$(\mathrm{id} \otimes \text{作用}_z^*)(R_{\text{loc}}) = R(z)$。

证明。 由命题 A.2.10 得出。 □

推论 4.4.13。 $\text{作用}_2 \cdot \beta_{\text{loc}} = \beta(z) \cdot \text{作用}_1$。

4.4.14. 完整 *Joyce* 的显式公式 R-矩阵。 现在我们可以用典范丛的陈根显式计算完整的 Joyce R-矩阵

命题 4.4.15。我们有

$$R(z)_{d,d'} \;=\; \prod_{e\,:\,i\to j} \frac{\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_i,d'_j)} (1 \otimes x_{j,m} - x_{i,n} \otimes 1 + z + \mathrm{wt}(e))}{\prod_{(n,m)=(1,1)}^{(d_j,d'_i)} (1 \otimes x_{i,m} - x_{j,n} \otimes 1 + z - \mathrm{wt}(e))} \tag{58}$$

视为.....的一个元素

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \left(x_{i,\alpha} \;:\; i \in Q_0,\, 0 \leqslant \alpha \leqslant d_{1,i}\right) \otimes_T \mathrm{Sym}_{\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)} \left(x_{i,\beta} \;:\; i \in Q_0,\, 0 \leqslant \beta \leqslant d_{2,i}\right) \left((z^{-1})\right)$$

证明。 这是引理 4.4.11、4.4.12、命题 1.4.3，以及作用*将典范丛的陈根 x映射为 $x + z$这一事实的综合结果。 □

4.4.16. 符号扭曲。 考虑符号扭曲映射

$$\begin{aligned}\tau \ : \ \mathbf{N}^{Q_0} \times \mathbf{N}^{Q_0} \ &\to \ \mathbf{Z}/2\\ (d_1, d_2) \ &\mapsto \ \chi(d_1, d_1)\chi(d_2, d_2) + \chi(d_1, d_2).\end{aligned}$$

我们定义扭曲的亚纯编织和局部化编织如下

$$\beta^\tau(z) \ = \ (-1)^\tau \beta(z), \qquad \beta^\tau_{\mathrm{loc}} = (-1)^\tau \beta_{\mathrm{loc}}. \tag{59}$$

因此，符号扭曲局部化编织 $\beta^\tau_{\mathrm{loc}}$ 与 $\widetilde{\mathrm{sw}}^\tau = \sigma \left((-1)^{\substack{e(Q_1^{\mathrm{op}}) \\ e(Q_1)}} \cdot (-) \right)$ 一致，采用的是 [BD23 第 4.1] 节中的记号。请注意，在 [BD23] 中，sw 的记号已包含 τ，但我们同时考虑带有和不带有 τ符号扭曲的情形。这一点将很有用，因为普通的 CoHA 乘积只有对于 τ-扭曲编织才构成双代数；不过，为了与杨代数相匹配，我们先对 CoHA 乘积复合另一个符号扭曲 ψ，从而得到关于未扭曲编织的双代数。

考虑任意一个

$$\psi \ : \ (\mathbf{Z}/2)^{Q_0} \times (\mathbf{Z}/2)^{Q_0} \ \to \ \mathbf{Z}/2$$

满足 $\psi(d_1、\ d_2) + \psi(d_2、\ d_1) = \tau(d_1、\ d_2)$。那么，根据 [Dav17 定理 5.13] 以及 [BD23 命题 5.5]，在 T等变情形下，交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W} & \xrightarrow{\qquad\qquad m^{(\psi)} \qquad\qquad} & \mathcal{A}^T_{Q,W} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle u\cdot \Delta_{\mathrm{loc}} \otimes_T \Delta_{\mathrm{loc}}} & & \\
(\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}) \otimes_T (\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W})_{(12,14,32,34)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathrm{loc}}} \\
\qquad\qquad \searrow^{\widetilde{\mathrm{sw}}^{(\tau)}_{23}} & & \\
(\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W}) \otimes_T (\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W})_{(13,14,23,24)} & \xrightarrow{m^{(\psi)} \otimes_T m^{(\psi)}} & (\mathcal{A}^T_{Q,W} \otimes_T \mathcal{A}^T_{Q,W})_{(12)}
\end{array} \tag{60}$$

可交换，其中 u 是通过 $(14、\ 32)$因子进行进一步局部化的映射；并且我们可以将符号因子移到编织或乘法上，也就是说，我们有

$$(\widetilde{\mathrm{sw}}^{(\tau)}, m^{(\psi)}) \ = \ (\widetilde{\mathrm{sw}}^\tau, m), \text{ or } (\widetilde{\mathrm{sw}}, m^\psi = m \cdot (-1)^\psi).$$

我们用 $\mathcal{A}^T_{Q、\ W}$ 表示向量空间$\mathcal{A}^{T}_{Q^{\psi}、\ W}$，但采用其扭曲版本

$$m^\psi \ = \ m \cdot (-1)^\psi \tag{61}$$

的CoHA乘积 m，该乘积在第1.5小节中定义。

4.5. CoHA是一个顶点双代数。

4.5.1. 现在我们来到了本文的第一个主要结果，它涉及任意带势的箭图 Q W，并按环面 T 的特征格分级。关于量子群理论和物理学如何启发我们预期这种结构的动机，请参见第 0.5.2 和 0.5.4 节。我们先讨论对称情形。

定理 4.5.2. 设 Q 是对称的。 $\mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 是 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$-Mod(向量空间范畴$_\Lambda^T$)中的一个顶点双代数。其 Joyce–Liu 顶点余乘法 $\Delta(z)$ 是编织余局部的。

展开顶点双代数的定义 4.4.8，这意味着：

(1) 首先 $B=\mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 是该范畴中的一个元素：它是一个带有 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$作用的 Λ-分次向量空间，具有上同调 $\mathbf{Z}$-分次，此外还有典范环通过杯积给出的作用，我们将其记为

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}\otimes_T\mathcal{A}_{Q,W}^T\ \dot{\to}\ \mathcal{A}_{Q,W}^T.$$

(2) **典范环**。$H=\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 是一个带有杯积和 $\oplus^*$ 余乘法的交换、余交换双代数。它具有一个 $\mathbf{C}[z]$-余作用 act^*：$H\to H[z]$，因而构成一个全纯顶点双代数，其顶点余乘法为 $\oplus^*(z)=\mathrm{act}_{z,\,1}^{*}\oplus^*$。存在一个元素

$$R(z)\ \in\ H\otimes H((z^{-1}))$$

满足引理 4.4.4 中针对 $\oplus^*(w)$的谱六边形关系。

因此，我们可以按照定义 4.4.8 在 H-Mod 中定义双代数。

(3) **CoHA 与杯积**。 $B=\mathcal{A}^{T,\,Q^{\psi},\,W}$ 具有结合乘积 $\star$： $B\otimes_T B\xrightarrow{m^\psi}B$，它关于 H的杯积作用是线性的：

$$m^\psi(\oplus^*(h)\cdot(b\otimes b'))\ =\ h\cdot m^\psi(b\otimes b'). \tag{62}$$

因此， B 是这一范畴中的一个内结合代数。

(4) $\Delta(z)$**与杯积**。存在一个余结合顶点余乘法 $\Delta(z)$： $B\ \to\ B\otimes_T B((z^{-1}))$，它关于 H的杯积作用是线性的：

$$\Delta(h\cdot b,z)\ =\ \oplus^*(h,z)\cdot\Delta(b,z). \tag{63}$$

因此， B 是这一范畴中的一个内余结合顶点余代数。

(5) **CoHA 与** $\Delta(z)$ **构成一个顶点双代数**，其亚纯编织为 $\beta(z)=\sigma(R(z)\,(-))$，如定义 4.4.8 所示：

$$\Delta(b\star b',z)\ =\ \Delta(b,z)\star_{R(z)}\Delta(b',z), \tag{64}$$

(6) **编织余局部性**。Joyce–Liu 余乘法在亚纯编织下是余交换的：

$$\Delta_{d_1,d_2}(z)=(-1)^{\mathrm{rkExt}_{d_1,d_2}}\sigma_{d_1,d_2}\cdot R_{d_2,d_1}(z)\Delta_{d_2,d_1}(-z)e^{zT} \tag{65}$$

同一定理对未扭曲的 CoHA $\mathcal{A}^{T}_{Q,W}$ 也成立，只是我们使用 τ-扭曲的亚纯编织 $\beta^{\tau}(z)$。关于性质（例如 (5)）的大多数证明都采用环面局部化论证，但我们通过使用 Davisons 对这一陈述在局部化情形下的版本 [Dav17]，绕开了这一做法。

推论 4.5.3. 若 Q 是分次对称的，则 $\mathcal{A}^{T,Q^{\psi},W}$ 是一个 $\Lambda \times \mathbf{Z}$-分次 $\mathrm{H}^{*}(\mathrm{B}T)$-线性顶点双代数，其中余局部性成立到一个依赖于 Q 的欧拉形式的符号为止。

证明。 当欧拉形式 χ 对称时，顶点余乘法变为

$$\Delta_{\alpha+\beta}(z) \,:\, B_{\alpha+\beta} \,\to\, B_{\alpha} \otimes_{\mathrm{H}^{*}(\mathrm{B}T)} B_{\beta}((z^{-1}))$$

根据 $\otimes_T$ 的定义 (18)，不作上同调移位；并且由于 $R(z) = 1 \otimes 1$，编织 $\beta(z) = \sigma$ 变为 Koszul 符号规则编织，因此余局部性

$$\Delta(\alpha, z) \;=\; (-1)^{\mathrm{rkExt}} \sigma(\Delta(\alpha, -z) e^{zT})$$

变为带符号的普通（超）余局部性。 □

定理 *4.5.2* 的证明。 典范环上的所有结构 (2) 已在第 4.3 节中证明。在 $B = \mathcal{A}^{T,Q^{\psi},W}$ 上，我们令 m^{ψ} 为符号扭曲的结合 CoHA 乘积 (61)，$\Delta(z)$ 为定理 2.3.1 中的 Joyce–Liu 余结合顶点余乘积。

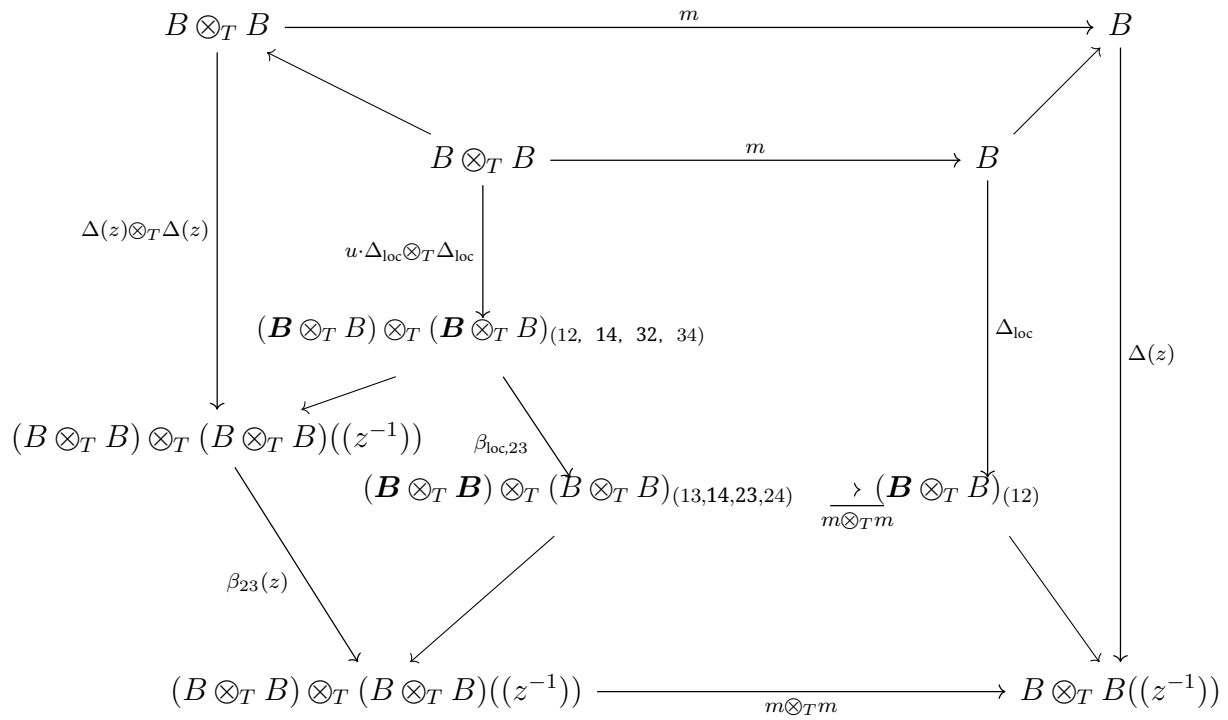
CoHA 与杯积的相容性(3). We compute

$$\begin{aligned}
p_{*}q^{*}(\oplus^{*}(h) \cup (b \otimes b')) &= p_{*}(q^{*} \oplus^{*} h \cup q^{*}(b \otimes b')) \\
&= p_{*}(q^{*}(p \cdot s)^{*}h \cup q^{*}(b \otimes b')) \\
&= p_{*}(q^{*}s^{*}p^{*}h \cup q^{*}(b \otimes b')) \\
&= p_{*}(p^{*}h \cup q^{*}(b \otimes b')) \quad \text{projection formula (117)} \\
&= h \cup p_{*}q^{*}(b \otimes b').
\end{aligned}$$

相容性 $\Delta(z)$ 与杯积(4). 我们使用引理 2.2.4（它对 tau-拓扑环同样成立）来计算

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \mathrm{act}_{1}^{*}(\oplus^{*}(\alpha \cdot \beta)) &= \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \mathrm{act}_{1}^{*}(\oplus^{*}(\alpha) \cdot \oplus^{*}(\beta)) \\
&= \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \mathrm{act}_{1}^{*}(\oplus^{*}(\alpha)) \cdot \mathrm{act}_{1}^{*}(\oplus^{*}(\beta)) \\
&= \mathrm{act}_{1}^{*}(\oplus^{*}(\alpha)) \Psi(\mathrm{Ext}, -z) \cdot \\
&= \oplus^{*}(\alpha, z) \cdot \Delta(\beta, z).
\end{aligned}$$

相容性 $\Delta(z)$ 与 CoHA (5)。我们使用 Davisons 的结果 (60)，即 $B = \mathcal{A}^{T,\, Q^{\psi},\, W}$ 构成一个局部化双代数，也就是说，



内面交换。这里，箭头是由作用于以粗体绘出的 B 副本上的 act* 诱导的、来自定义 3.1.5 的 loc 映射，下标 $(ij)=[S_{ij}^{-1}]$ 表示沿着作用于第 ij 个张量因子的 S 副本进行局部化，如第 4.4.10 节所述。

其余五个面因以下理由交换。顶面是恒等映射，底面则由杯积作用下 CoHA 乘积的线性性而交换。注意，我们可以交换映射 act^{1,3} 与局部化映射 u，因为映射 act^{1,3}, 作用于我们需要局部化的相应类后将是可逆的。其余各面交换，因为

$$\Delta(z)\cdot \mathrm{act} \;=\; \mathrm{act}\cdot\Delta_{\mathrm{loc}}, \qquad\qquad \beta(z)\cdot \mathrm{act} \;=\; \mathrm{act}\cdot\beta_{\mathrm{loc}}$$

根据定理 3.3.2 和推论 4.4.13。因此外侧面交换，且 B 构成一个顶点双代数。

编织余局部性 （6）。我们有

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha,z) \;&=\; \Psi(\mathrm{Ext},-z)\mathrm{act}^*_{z,1}\oplus^*(\alpha)\\
&=\; \sigma\left(\Psi(\sigma^*\mathrm{Ext},-z)\mathrm{act}^*_{z,2}\oplus^*(\alpha)\right)\\
&=\; \sigma\left(\frac{\Psi(\sigma^*\mathrm{Ext},-z)}{\Psi(\mathrm{Ext},z)}\cdot\Psi(\mathrm{Ext},z)\mathrm{act}^*_{-z,1}\oplus^*(\alpha)\mathrm{act}^*_{z,1}\right)\\
&=\; (-1)^{\mathrm{rk}\sigma^*\mathrm{Ext}}\sigma\left(R(z)\cdot\Delta(\alpha,-z)e^{zT}\right)\\
&=\; (-1)^{\mathrm{rkExt}}\beta(z)\cdot\Delta(\alpha,-z)e^{zT}
\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中我们用到了 $\oplus^*$ 是余交换的，而在第三个等式中我们用到了这一事实：

$$\mathrm{act}^*_{z,2}\oplus^* \;=\; \mathrm{act}^*_{-z,1}\mathrm{act}^*_{z,1}\mathrm{act}^*_{z,2}\oplus^* \;=\; \mathrm{act}^*_{-z,1}\oplus^* \mathrm{act}^*_{z}.$$

这表明了编织余局部性。

□

4.5.4. 非对称情形。 如果 Q 不是对称的，目前我们还没有一种良好的推广方式H'，能将典范环推广为带有一个满足谱六边形关系的元素 $R'(z) \in H \otimes H((z^{-1}))$的结构。事实上，如果我们直接取 $H' = \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 本身，那么 $R_{\mathrm{taut}}(z)$通常不满足谱六边形关系，且 $R(z) \notin H \otimes H((z^{-1}))$。

本文不讨论这个问题。

作为权宜之计，我们可以考虑范畴$\mathcal{C} = \prod_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d})$-模，其对象由一族 $V = (V_d)$ $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,d})$-模构成，每个维数向量 d对应一个模。这里有一个幺半结构

$$(V \otimes_T W)_d \;=\; \bigoplus_{d=d_1+d_2} V_{d_1} \otimes_T W_{d_2}$$

它在维数向量上是可加的，而 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,\ d_1+d_2})$ 通过直和拉回 $\oplus^*$作用于张量。幺半结构 $\otimes_T$ 具有自然的亚纯编织，其定义如下：

$$\begin{aligned}\beta(z)\ :\ V_d \otimes_T W_{d'}((z^{-1})) &\xrightarrow{\sim}\ W_{d'} \otimes_T V_d((z^{-1}))\\ v\otimes w \;&\mapsto\; \sigma(R(z)_{d,d'}\cdot v\otimes w).\end{aligned}$$

我们可以将 CoHA 视为该范畴中的一个元素 $B = (\mathcal{A}^{T,\ Q^{\psi},\ W,\ d})_{d\in\mathbf{N}^{Q_0}}$。

因此——在我们为非对称箭图找到典范环的良好对应物之前——定理 4.5.2 的最佳对应结果是

定理 4.5.5。 设 $(Q,\ W)$ 是任意一个带势箭图，环面 T作用于其上且保持势不变，并满足 Künneth 假设 (31)。CoHA $\mathcal{A}^{T,\ Q^{\psi},\ W}$ 是范畴 $\mathcal{C}$中的一个顶点双代数。

证明。 与 4.5.2 相同。 □

但请注意，由于 $\mathcal{C}$ 不是模范畴，我们无法按照下一节中的含义使用玻色化，给 $\mathcal{A}^T$、Q^{ψ}、W添加一个 Cartan 部分。关于这一点的更多讨论，请参见小节 5.3.3。

5. 扩展 CoHA 与玻色化

本节将系统地说明如何扩展 CoHA。对于任意带势 W 的对称 N- 分次箭图 Q，我们将定义扩展 *CoHA*

$$\mathcal{A}^{T,\psi,\mathrm{ext}}_{Q,W} \;=\; \mathcal{A}^{T,\psi}_{Q,W} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\mathrm{taut}}$$

并证明它在 从 $\mathcal{A}^T$、Q^{ψ}、W继承了代数结构。我们在第 5.3.1 节证明如下：

定理 5.0.1。 设 Q 为一个对称箭图。扩展 CoHA 具有结合乘积和非局域顶点余乘法

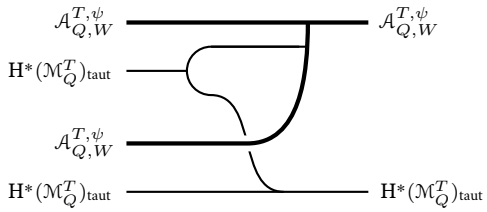
$$b\otimes h \,\cdot\, b'\otimes h' \;=\; \big[b\cdot((\oplus^* h)_{(1)} \cup b')\big] \otimes \big[(\oplus^* h)_{(2)} \cup h'\big] \tag{66}$$

$$\Delta^{\mathrm{ext}}(b\otimes h, z) \;=\; R_{\mathrm{taut}}(z)_{32} \cup \big(\Delta(b,z)_{13} \otimes (\mathrm{act}^*_{z,1} \oplus^* h)_{24}\big) \tag{67}$$

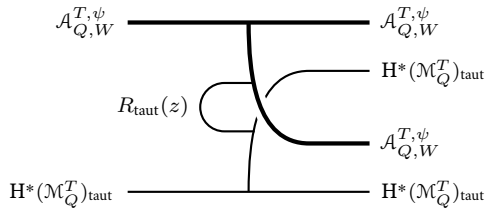
从而赋予其 Vect^T_Λ 中顶点双代数的结构。

这一结论及其证明，是一种更一般现象的应用，我们称之为顶点 Majid–Radford 玻色化（定理5.2.2）。用图示表示，扩展乘积和余乘

扩展乘积



扩展顶点余乘法



其中，合并线条对应于 CoHA 乘积或杯积，而分裂线条对应于 Joyce–Liu 顶点余乘法 $\Delta(z)$ 或 $\oplus^*$。关于量子群的弦图简介，参见 [ES02]。

5.0.2. 注。 上述定理对于未扭曲的 CoHA $\mathcal{A}^T_{Q,\,W}$ 以及 $(-1)^\tau R_{\mathrm{taut}}(z)$也成立 .

5.1. **Majid–Radford玻色化**。

5.1.1. Majid [Maj99] 和 Radford [Rad85]注意到，如果 B 是一个带有结合代数 H右作用的向量空间，那么来自 H， B 的额外代数结构会在**玻色化** $B\rtimes H = B\otimes H$上诱导出类似的结构：

定理 **m5.1.2.** [Maj94，定理 4.1] 若 H 是一个双代数，且 B 是一个 H-线性代数，则

$$(b\otimes h)\cdot(b'\otimes h') \;=\; b(h_{(1)}\cdot b')\otimes h_{(2)}h' \tag{68}$$

使 $B \rtimes H$ 成为一个结合代数。若进一步地， H 有一个准三角元 $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$，且 B 是关于诱导编织的 H-模中的一个双代数，则

$$\Delta(b \otimes h) \;=\; (b_{(1)} \otimes R^{(2)} h_{(1)}) \otimes (R^{(1)} \cdot b_{(2)} \otimes h_{(2)}) \tag{69}$$

使 $B \rtimes H$ 成为一个双代数。

从模范畴的角度来看，这是显而易见的。事实上，将 Barr–Beck 定理应用于遗忘函子 oblv : B-Mod(H-Mod) $\to$ Vect，可得一个等价

$$B\text{-Mod}(H\text{-Mod}) \;\simeq\; (B \rtimes H)\text{-Mod} \tag{70}$$

对于某个代数 $B \rtimes H = \mathrm{End}(\mathrm{oblv})$。式（70）中的对象是一个向量空间，并带有右 H-作用和 B-作用，这些作用满足由 H 在 B 上的作用所决定的某些交换关系。因此，作为向量空间，我们有 $B \rtimes H = B \otimes H$；其代数结构（68）由交换关系以及 B， H 是子代数这一事实确定。

注意到， A-模上的幺半结构若提升了向量空间范畴 Vect 的幺半结构，则恰好等价于 A 上的双代数结构；因此，要求等价（70）为幺半等价，即可确定 $B \rtimes H$ 上的余乘法（69）。

5.1.3. 总之， H 和 B 上的以下结构会在玻色化上诱导出以下结构：

if	H	B	*then*	$B \rtimes H$
has a	product	H-action	–	–
and	coproduct	product	*has a*	product
and	quasitriangular element R	coproduct	*and*	coproduct

我们可以选择其中任意一行（或多行）所对应的顶点代数类比。下文将需要最后一行：

if	H	B	*then*	$B \rtimes H$
具有一个	乘积	H-作用	–	–
and	余乘法	乘积	有一个	乘积
and	谱拟三角余乘元素 $R(z)$	顶点	*and*	顶点余乘法

此处所有向量空间还都配备了与上述结构相容的“平移”自同态。我们应将定理5.2.2理解为：我们有一个等价

$$B\text{-Mod}(H\text{-Mod}) \;\simeq\; B \rtimes H\text{-Mod}$$

此外，它还保持两侧的亚纯张量结构，不过如前所述，我们并未对此作出精确定义。

5.1.4. 注。若亚纯幺半范畴存在 Tannakian重构定理，我们便可将 $\mathcal{A}^T_{Q,\psi\text{ ext},,W}\in$ 向量空间范畴 Vect^T_Λ 视为遗忘函子的自同态代数

$$\mathcal{A}^{T,\psi}_{Q,W}\text{-Mod}\left(\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_Q)_{\text{taut}}\text{-Mod}(\mathrm{Vect}^T_\Lambda)\right)\ \to\ \mathrm{Vect}^T_\Lambda \tag{71}$$

从而， $\mathcal{A}^T_{Q,\psi\text{ ext},,W}$-Mod(向量空间范畴 Vect^T_Λ) 将与 (71) 的左侧等价，而顶点余乘法继承自该范畴上的结构。

5.2. **顶点玻色化**。

5.2.1. 设向量空间 H， B 和 $R(z)\in H\otimes H((z^{-1}))$ 满足定理 4.5.2 下方列出的公理 (1)-(5)。为简便起见，我们还假设 H 上的乘积是交换的。

下文使用 R-矩阵的记号

$$R(z)\ =\ R^{(1)}(z)\otimes R^{(2)}(z),$$

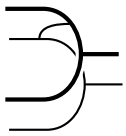
以及余乘法和顶点余乘法的斯威德勒记号

$$\Delta(a)\ =\ a_{(1)}\otimes a_{(2)},\qquad\qquad \Delta(a,z)\ =\ a_{(1,z)}\otimes a_{(2,z)},$$

其中两种情况下都省略了求和。与通常的斯威德勒记号一样，项 $a_{(1,\ z)}$ 不会单独出现，而总是与 $a_{(2,\ z)}$ 一起出现。

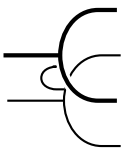
定理 5.2.2。 向量空间 $B\rtimes H=B\otimes H$ 配备乘积

$$(b\otimes h)\cdot(b'\otimes h')\ =\ b(h_{(1)}\cdot b')\otimes h_{(2)}h' \tag{72}$$



是一个结合代数，而（非局域）顶点余乘法

$$\Delta(b\otimes h,z)\ =\ (b_{(1,z)}\otimes R^{(2)}(z)h_{(1,z)})\otimes(R^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)}\otimes h_{(2,z)}) \tag{73}$$



使得 $B\rtimes H$ 成为一个非局域顶点双代数。

注 5.2.3。 对于这一事实，有三种可行的证明：第一种是如下所示的繁琐的直接计算，第二种是同样繁琐的弦图论证。最简洁的方法是从通常的 Majid–Radford玻色化形式地推导出它，注意到顶点双代数等价于某个 Ran空间上的层范畴中的双代数；上文出现的其他结构亦然，参见例如 [Lat23]。

定理 *5.2.2* 的证明。

结合律。

$$((b\otimes h)\cdot(b'\otimes h'))\cdot(b''\otimes h'')\ =\ \left(b(h_{(1)}\cdot b')\otimes h_{(2)}h'\right)\cdot(b''\otimes h'')$$

$$
\begin{aligned}
&= b(h_{(1)} \cdot b')((h_{(2)}h')_{(1)} \cdot b'') \otimes (h_2 h')_{(2)} h'' \\
&= b(h_{(1)} \cdot b')(h_{(2)(1)}h'_{(1)} \cdot b'') \otimes h_{(2)(2)}h'_{(2)}h'' \\
&\qquad\qquad H \text{ is a bialgebra} \\
&= b(h_{(1)(1)} \cdot b')(h_{(1)(2)}h'_{(1)} \cdot b'') \otimes h_{(2)}h'_{(2)}h'' \\
&\qquad\qquad \text{coassociativity of } H \\
&= b\left(h_{(1)} \cdot (b'(h'_{(1)} \cdot b''))\right) \cdot h_{(2)}h'_{(2)}h'' \\
&\qquad\qquad H\text{-linearity of } B\text{'s product} \\
&= (b \otimes h) \cdot \left(b'(h'_{(1)} \cdot b'') \otimes h'_{(2)}h''\right) \\
&= (b \otimes h) \cdot ((b' \otimes h') \cdot (b'' \otimes h''))
\end{aligned}
$$

余结合性。

我们证明顶点余结合性

$$(\Delta^{\text{ext}}(z) \otimes \text{id})\Delta^{\text{ext}}(w) \;=\; (\text{id} \otimes \Delta^{\text{ext}}(w))\Delta^{\text{ext}}(z+w)$$

通过计算两边：

$$
\begin{aligned}
&(\Delta^{\text{ext}}(z) \otimes \text{id})\, \Delta^{\text{ext}}(b \otimes h, w) \\
&\quad= (\Delta^{\text{ext}}(z) \otimes \text{id})\left(b_{(1,w)} \otimes R^{(2)}(w)h_{(1,w)}) \otimes (R^{(1)}(w) \cdot b_{(2,w)} \otimes h_{(2,w)})\right) \\
&\quad= \left[b_{(1,w)(1,z)} \otimes \underline{R}^{(2)}(z)(R^{(2)}(w)h_{(1,w)})_{(1,z)}\right] \\
&\qquad\otimes \left[\underline{R}^{(1)}(z) \cdot b_{(1,w)(2,z)} \otimes (R^{(2)}(w)h_{(1,w)})_{(2,z)}\right] \\
&\qquad\qquad\otimes \left[R^{(1)}(w) \cdot b_{(2,w)} \otimes h_{(2,w)}\right] \\
&\quad= \left[b_{(1,w)(1,z)} \otimes \underline{R}^{(2)}(z)R^{(2)}(w)_{(1,z)}h_{(1,w)(1,z)}\right] \\
&\qquad\otimes \left[\underline{R}^{(1)}(z) \cdot b_{(1,w)(2,z)} \otimes R^{(2)}(w)_{(2,z)}h_{(1,w)(2,z)}\right] \\
&\qquad\qquad\otimes \left[R^{(1)}(w) \cdot b_{(2,w)} \otimes h_{(2,w)}\right] \\
&\qquad\qquad\qquad H \text{ 是一个顶点双代数} \\
&\quad= \left[b_{(1,w)(1,z)} \otimes \underline{R}^{(2)}(z)\dot{R}^{(2)}(w+z)h_{(1,w)(1,z)}\right] \\
&\qquad\otimes \left[\underline{R}^{(1)}(z) \cdot b_{(1,w)(2,z)} \otimes \ddot{R}^{(2)}(w)h_{(1,w)(2,z)}\right] \\
&\qquad\qquad\otimes \left[\dot{R}^{(1)}(z+w)\ddot{R}^{(1)}(w) \cdot b_{(2,w)} \otimes h_{(2,w)}\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \ddot{} \; R(w)\text{的六边形恒等式，即 } (\Delta_H(z) \otimes \text{id})R(w)_{21} \;=\; R(z+w)_{31}R(w)_{32} \\
&\quad= \left[b_{(1,w)(1,z)} \otimes \underline{\dot{R}}^{(2)}(z+w)h_{(1,w)(1,z)}\right]
\end{aligned}
$$

$$\otimes\left[\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(1,w)}\cdot b_{(1,w)(2,z)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(w)h_{(1,w)(2,z)}\right]$$
$$\otimes\left[\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(2,w)}\ddot{R}^{(1)}(w)\cdot b_{(2,w)}\otimes h_{(2,w)}\right]$$

$\otimes\Delta_H(w))R(w+z)_{21} = R(z)_{21}R(z+w)_{31}$ $R(z+w)$的六边形恒等式，即 (id

$$= \left[b_{(1,z+w)}\otimes\underline{\dot{R}}^{(2)}(z+w)h_{(1,z+w)}\right]$$
$$\otimes\left[\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(1,w)}\cdot b_{(2,z+w)(1,w)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(w)h_{(2,z+w)(1,w)}\right]$$
$$\otimes\left[\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(2,w)}\ddot{R}^{(1)}(w)\cdot b_{(2,z+w)(2,w)}\otimes h_{(2,z+w)(2,w)}\right]$$

余结合性： H， B，即 $h_{(1,w)(1,z)}\otimes h_{(1,w)(2,z)}\otimes h_{(2,w)} = h_{(1,z+w)}\otimes h_{(2,z+w)(1,w)}\otimes h_{(2,z+w)(2,w)}$

$$= \left[b_{(1,z+w)}\otimes\underline{\dot{R}}^{(2)}(z+w)h_{(1,z+w)}\right]$$
$$\otimes\left[\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(1,w)}\cdot b_{(2,z+w)(1,w)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(w)h_{(2,z+w)(1,w)}\right]$$
$$\otimes\left[\ddot{R}^{(1)}(w)\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(2,w)}\cdot b_{(2,z+w)(2,w)}\otimes h_{(2,z+w)(2,w)}\right]$$

commutativity of H, i.e. $\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(2,w)}\ddot{R}^{(1)}(w) = \ddot{R}^{(1)}(w)\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)_{(2,w)}$

$$= \left[b_{(1,z+w)}\otimes\underline{\dot{R}}^{(2)}(z+w)h_{(1,z+w)}\right]$$
$$\otimes\left[(R^{(1)}(z+w)\cdot b_{(2,z+w)})_{(1,w)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(w)(h_{(2,z+w)})_{(1,w)}\right]$$
$$\otimes\left[\ddot{R}^{(1)}(w)\cdot(\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)\cdot b_{(2,z+w)})_{(2,w)}\otimes(h_{(2,z+w)})_{(2,w)}\right]$$

H is a vertex bialgebra

$$= (\mathrm{id}\otimes\Delta^{\mathrm{ext}}(w))\left((b_{(1,z+w)}\otimes\underline{\dot{R}}^{(2)}(z+w)h_{(1,z+w)})\otimes(\underline{\dot{R}}^{(1)}(z+w)\cdot b_{(2,z+w)}\otimes h_{(2,z+w)})\right)$$
$$= (\mathrm{id}\otimes\Delta^{\mathrm{ext}}(w))\,\Delta^{\mathrm{ext}}(b\otimes h, z+w).$$

双代数公理

最后，还需要证明 $B\otimes H$ 满足双代数公理，即

$$\Delta^{\mathrm{ext}}((b\otimes h)\cdot(b'\otimes h'),z) = \Delta^{\mathrm{ext}}(b\otimes h,z)\cdot\Delta^{\mathrm{ext}}(b'\otimes h',z).$$

再次，我们计算等式两边：

$$\Delta(b\otimes h\ \cdot\ b'\otimes h', z)$$
$$= \Delta(b(h_{(1)}\cdot b')\otimes h_{(2)}h', z)$$
$$= \left[(b(h_{(1)}\cdot b'))_{(1,z)}\otimes R^{(2)}(z)(h_{(2)}h')_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[R^{(1)}(z)\cdot(b(h_{(1)}\cdot b'))_{(2,z)}\otimes(h_{(2)}h')_{(2,z)}\right]$$

$$= \left[(b(h_{(1)}\cdot b'))_{(1,z)}\otimes R^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[R^{(1)}(z)\cdot(b(h_{(1)}\cdot b'))_{(2,z)}\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

H 是向量空间范畴中的顶点双代数

$$= \left[b_{(1,z)}(\underline{R}^{(2)}(z)(h_{(1)}\cdot b')_{(1,z)})\otimes R^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[R^{(1)}(z)\cdot(\underline{R}^{(1)}(z)b_{(2,z)})(h_{(1)}\cdot b')_{(2,z)}\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

B 是 (H-Mod $R(z)$) 中的顶点双代数

$$= \left[b_{(1,z)}(\underline{R}^{(2)}(z)h_{(1)(1,z)}\cdot b'_{(1,z)})\otimes R^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[R^{(1)}(z)\cdot(\underline{R}^{(1)}(z)b_{(2,z)})(h_{(1)(2,z)}\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

H 是向量空间范畴中的顶点双代数

$$= \left[b_{(1,z)}(\underline{R}^{(2)}(z)h_{(1)(1,z)}\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes R^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[R^{(1)}(z)\cdot(\underline{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)})(h_{(1)(2,z)}\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$
$$= \left[b_{(1,z)}(\underline{R}^{(2)}(z)h_{(1)(1,z)}\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes R^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[(R^{(1)}(z)_{(1)}\underline{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)})(R^{(1)}(z)_{(2)}h_{(1)(2,z)}\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

B 的乘积是 H-线性的，即
$R(z)\cdot(bb') = (R(z)_{(1)}\cdot b)(R(z)_{(2)}\cdot b')$

$$= \left[b_{(1,z)}(\underline{R}^{(2)}(z)h_{(1)(1,z)}\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes \dot{R}^{(2)}(z)\ddot{R}^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[(\dot{R}^{(1)}(z)\underline{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)})(\ddot{R}^{(1)}(z)h_{(1)(2,z)}\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

$R(z)$ 的六边形关系，即 $(\mathrm{id}\otimes\Delta_H(0))R(z) = R_{12}(z)R_{13}(z)$

$$= \left[b_{(1,z)}(\dot{R}^{(2)}(z)_{(1)}h_{(1)(1,z)}\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes \dot{R}^{(2)}(z)_{(2)}\ddot{R}^{(2)}(z)h_{(2)(1,z)}h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[(\dot{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)})(\ddot{R}^{(1)}(z)h_{(1)(2,z)}\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)}\right]$$

六边形关系，即 $(\Delta_H(0)\otimes\mathrm{id})R(z) = R_{13}(z)R_{23}(z)$

$$= \left[b_{(1,z)}((\dot{R}^{(2)}(z)_{(1)}h_{(1)(1,z)})\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes \dot{R}^{(2)}(z)_{(2)}h_{(2)(1,z)}\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)}\right]$$
$$\otimes\left[(\dot{R}^{(1)}(z)\cdot(b_{(2,z)}))(h_{(1)(2,z)}\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2)(2,z)}h'_{(2,z)})\right]$$

H 交换的

$$= \left[b_{(1,z)}((\dot{R}^{(2)}(z)_{(1)}h_{(1,z)(1)})\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes \dot{R}^{(2)}(z)_{(2)}h_{(1,z)(2)}\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)}\right]$$

$$\otimes\Big[(\dot{R}^{(1)}(z)\cdot(b_{(2,z)}))(h_{(2,z)(1)}\cdot\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2,z)(2)}h'_{(2,z)})\Big]$$

H 是余交换的，因此

$$h_{(1)(1,z)}\otimes h_{(2)(1,z)}\otimes h_{(1)(2,z)}\otimes h_{(2)(2,z)} = h_{(1,z)(1)}\otimes h_{(1,z)(1)}\otimes h_{(2,z)(1)}\otimes h_{(2,z)(2)}$$

$$= \Big[b_{(1,z)}((\dot{R}^{(2)}(z)h_{(1,z)})_{(1)}\cdot(b'_{(1,z)}))\otimes(\dot{R}^{(2)}(z)h_{(1,z)})_{(2)}\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)}\Big]$$
$$\otimes\Big[(\dot{R}^{(1)}(z)\cdot(b_{(2,z)}))(h_{(2,z)(1)}\cdot\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)})\otimes h_{(2,z)(2)}h'_{(2,z)})\Big]$$

H 是一个双代数

$$= \Big[(b_{(1,z)}\otimes\dot{R}^{(2)}(z)h_{(1,z)})\cdot((b'_{(1,z)})\otimes\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)})\Big]$$
$$\otimes\Big[(\dot{R}^{(1)}(z)\cdot(b_{(2,z)})\otimes h_{(2,z)})\cdot(\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)}\otimes h'_{(2,z)})\Big]$$
$$= \Big[(b_{(1,z)}\otimes\dot{R}^{(2)}(z)h_{(1,z)})\cdot((b'_{(1,z)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)}))\Big]$$
$$\otimes\Big[((\dot{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)}\otimes h_{(2,z)}))\cdot(\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)}\otimes h'_{(2,z)})\Big]$$
$$= \Big(b_{(1,z)}\otimes\dot{R}^{(2)}(z)h_{(1,z)}\otimes\dot{R}^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)}\otimes h_{(2,z)}\Big)$$
$$\cdot\Big(b'_{(1,z)}\otimes\ddot{R}^{(2)}(z)h'_{(1,z)}\otimes\ddot{R}^{(1)}(z)\cdot b'_{(2,z)}\otimes h'_{(2,z)}\Big)$$
$$= \Delta(b\otimes h,z)\cdot\Delta(b'\otimes h',z).$$

□

5.3. **箭图 CoHA 的玻色化**。

5.3.1. 定理 *5.0.1* 的证明。 我们将定理 5.2.2 的顶点玻色化应用于

$$B = \mathcal{A}^{T,\psi}_{Q,W},\qquad H = \mathrm{H}^*_T(\mathcal{M}_Q)_{\text{taut}}$$

向量空间范畴 Vect^T_Λ 中。注意，定理 4.5.2 恰好表明 $H=\mathbf{H}^*_T(\mathcal{M}_Q)_{\text{taut}}$ 和 $B = \mathcal{A}^{T,Q^\psi,W}$ 满足应用顶点玻色化所需的条件。因此，接下来只需计算 $\mathcal{A}^{T,Q^\psi,W}\otimes_T\mathbf{H}^*_T(\mathcal{M}_Q)_{\text{taut}}$ 上的玻色化乘积和顶点余乘法。首先，由方程 (72) 可得

$$(b\otimes h)\cdot(b'\otimes h') = b(h_{(1)}\cdot b')\otimes h_{(2)}h'$$
$$= (b\cdot((\oplus^*h)_{(1)}\cup b'))\otimes(\oplus^*h)_{(2)}\cup h'$$

并且由（69）可得

$$\Delta^{\text{ext}}(b\otimes h,z) = (b_{(1,z)}\otimes R^{(2)}(z)h_{(1,z)})\otimes(R^{(1)}(z)\cdot b_{(2,z)}\otimes h_{(2,z)})$$
$$= (\sigma R(z))_{23}\cup\left((e^{zT\otimes\mathrm{id}}\oplus^* h)_{13}\otimes\Delta(b,z)_{24}\right).$$

注意，在对称情形下 $R(z)=R_{\text{taut}}(z)$。因此，顶点玻色化定理5.2.2表明，这在向量空间范畴Vect^T_Λ中构成一个非局域顶点双代数。

5.3.2. 显式公式。 玻色化余乘法为

$$\Delta^{\mathrm{ext}}(b\otimes h,z) \;=\; \sigma\Big(\frac{c(\sigma^{*}\mathrm{Ext}^{\vee},z^{-1})}{c(\mathrm{Ext},z^{-1})}\Big)_{23}\Psi(\mathrm{Ext},-z)_{13}\cdot\big((\mathrm{act}_{z,1}^{*}\oplus^{*}b)_{13}\otimes(\mathrm{act}_{z,1}^{*}\oplus^{*}h)_{24}\big)$$

根据 $R_{\mathrm{taut}}(z)$ 的定义以及 $\mathcal{A}^{T}$、Q^{ψ}、W 和 $\mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_{Q}^{T})_{\mathrm{taut}}$ 上的顶点余乘法。我们将在下一节继续探讨这一余乘法的显式形式。

5.3.3. 非对称情形。 当 Q 是非对称的时， $R(z)$ 不再等于 $R_{\mathrm{taut}}(z)$。因此，后者不满足谱六边形关系（如引理 4.4.4 中的 $\tilde{\chi}\neq 0$），而证明 bosonised $\Delta^{\mathrm{ext}}(z)$ 的余结合性需要用到该关系，尽管双代数性质的证明仍然成立。另一方面，前者的取值不再属于典范环 $\mathrm{H}^{*}(\mathcal{M}_{Q}^{T})_{\mathrm{taut}}$。

我们预计，修正方法是将典范环重新定义为由完整 Joyce R-矩阵的系数生成的环。

6. 获得杨代数上的 Drinfeld 余乘

对于 Dynkin箭图 Q，我们有一个称为杨代数 $Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)$ 的结合代数，并带有兼容的*Drinfeld* 顶点余乘法 $\Delta_{\mathrm{Dr}}(z)$，如第 0.4 节所述。在这种情况下，Yang和Zhao [YZ18a]~将杨代数与三重箭图 Q的上同调Hall代数的双重代数识别为同一个代数，该同构限制为正部分和 Borel部分上的同构：

$$\begin{array}{ccc} Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^+ & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{A}^{T,\psi}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^{\geqslant 0} & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{A}^{T,\psi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}}) \end{array} \tag{74}$$

本节的主要结果（定理 6.2.7）是，识别（74）将 Drinfeld 余乘法与扩展的 Joyce–Liu 顶点余乘法互换：

$$\Delta_{\mathrm{Dr}}(z) \;=\; \Delta^{\mathrm{ext}}(z),$$

左侧和右侧分别在第 6.2.6 节和定理 2.3.1 中定义。[YZ18a] 中证明了这一结果关于局部化型余乘法的一个类似结论。

为证明这一点，我们必须显式计算三重箭图的球形元素上的玻色化 Joyce–Liu 顶点余乘法，这一工作将在命题 6.1.9 中完成。对于这一一般情形，[BD23;~SV24] 借助 MO 杨代数，将识别（74）推广到了任意三重箭图 Q。因此，这些计算也给出了 MO 杨代数正半部上 Drinfeld 型余乘法作用于球形元素的计算。

6.1. 带有典范三次势的三重箭图 CoHA。

6.1.1. 现在，我们计算箭图~为三重 Q 且带有其典范三次势 W（定义见第 1.1 节）时，作用在边上的秩一权函数为

$$\mathrm{wt}(e) \;=\; 1, \quad \mathrm{wt}(e^*) \;=\; -1, \quad \mathrm{wt}(\omega_i) \;=\; -2$$

并令 T 为相应的秩一环面，其中 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T) \simeq \mathbf{C}[\hbar/2]$。注意，该箭图显然是对称的。此外，我们有

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,\delta_i}, \varphi_W) \;\simeq\; \mathrm{H}^*_T(\mathrm{B}\mathbf{G}_m)[-2] \tag{75}$$

~因为$W|_{\delta_i} = 0$。

我们将考虑关于扭曲 $\psi(d_1,d_2) = \chi_{\widetilde{Q}}(d_1,d_2)$ 的扭曲上同调Hall代数 $\mathcal{A}^{T_\hbar,\widetilde{Q}}\overset{\chi}{\widetilde{W}}$，它满足 $\psi(d_1,d_2)+\psi(d_2,d_1) = \tau_{\widetilde{Q}}(d_1,d_2)$；关于符号扭曲的更多内容，见第4.4.16节。对于三重箭图，Künneth 假设 (31) 已知。请注意，一般来说，对于没有环的箭图，在 ADE 情形之外，三重箭图的 CoHA 并非由球形元素生成。参见 [Dav25, 命题 5.7]

6.1.2. 定义球形元素。令

$$R_i(z) \in \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}[x]((z^{-1}))$$

表示交换后的 R-矩阵 $\sigma(R_{\mathrm{taut}}(z))$ 在映射下的像

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}((z^{-1})) &\to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,\delta_i}^T)((z^{-1})) \\ &\simeq \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}[x]((z^{-1}))\end{aligned}$$

其中我们识别 为 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,\ \delta_i}) \simeq \mathbf{C}[x]$ 对于 $x = 1 \otimes x_{i,\ 1}$ 线丛的第一陈类$\mathcal{E}_{i,\ \delta_i}$.

引理 6.1.3. 对于任意 $i \in Q_0$， $R_i(z)$ 是幂级数的展开

$$\Phi_i(x-z) \in \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}\left[\left[(x-z)^{-1}\right]\right],$$

wh在此写作 $u = x - z$， $\Phi_i(u)$ 在第 d 个维数向量[9]中的分支为

$$\Phi_{i,d}(u) = \prod_{1 \leqslant n \leqslant d_i} \left(\frac{u - x_{i,n} + \hbar}{u - x_{i,n} - \hbar}\right) \cdot \prod_{e \in Q_1} \frac{\prod_{\substack{s(e)=i \\ 1 \leqslant n \leqslant d_{t(e)}}} (u - x_{t(e),n} - \hbar/2) \prod_{\substack{t(e)=i \\ 1 \leqslant n \leqslant d_{s(e)}}} (u - x_{s(e),n} - \hbar/2)}{\prod_{\substack{s(e)=i \\ 1 \leqslant n \leqslant d_{t(e)}}} (u - x_{t(e),n} + \hbar/2) \prod_{\substack{t(e)=i \\ 1 \leqslant n \leqslant d_{s(e)}}} (u - x_{s(e),n} + \hbar/2)} \tag{76}$$

作为 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^T)[[u^{-1}]]$ 中的一个元素。

证明。 这由命题 4.4.15 得出。具体来说，我们使用命题 1.4.3 中的公式计算 $\sigma(R_{\delta_i,d}(z))$ ，并将三重箭图的边分组为 $Q_1 = Q_1 \sqcup Q_1^{\mathrm{op}} \sqcup Q_0$，应用作用$*_1$，并令 $u = x - z$ 满足 $x = 1 \otimes x_{i,1}$。 □

我们将幂级数的系数称为

$$\Phi_i(u) = 1 + \hbar \sum_{r \geqslant 0} \Phi_{i,r} u^{-r-1} \in \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}\left[\left[u^{-1}\right]\right]$$

典范球形元素。我们将球形 CoHA 元素定义为系数$x_{i\ 1}^{(r)}$,:

$$x_i(u) = \sum_{r \geqslant 0} x_{i,1}^{(r)} u^{-r-1} \in \mathcal{A}_{Q,\widetilde{W}}^T[[u^{-1}]],$$

定义为在识别（75）下对应于 $x^r \in \mathbf{C}[x] \simeq \mathrm{H}^*(\mathbf{BG}_m)$ 的元素。我们强调 $x_{i,1}^r$（上同调环中的元素）与 $x_{i\ 1}^{(r)}$,（临界上同调中的元素）之间的记号差异。

6.1.4. 关于与 *Yang-Zhao* 工作关系的备注。我们注意到，方程（76）中的公式与 [YZ18a 第 1 节3]中的公式相吻合。因此，我们认为，我们扩展的顶点余乘法与 [YZ18a 第 2] 节以及 [RSYZ23 第 2 节1]中定义的余积密切相关。

[9]即其在映射 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}[[u^{-1}]] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,d}^T)[[u^{-1}]]$ 下的像。

6.1.5. 在引理 4.3.2 中，我们在典范环上构造了一个余乘法。将这一余乘法写在元素 $\Phi_{i,r}$ 上也会很方便。

引理 6.1.6。 余乘法和余作用

$$\oplus^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \otimes_T \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}, \qquad \mathrm{act}_z^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}[z]$$

由引理 4.3.2 定义，分别映射到

$$\Phi_i(u) \mapsto \Phi_i(u) \otimes \Phi_i(u), \qquad \Phi_i(u) \mapsto \Phi_i(u-z) \tag{77}$$

更准确地说，在直和拉回下有

$$\Phi_{i,0} \mapsto 1 \otimes \Phi_{i,0} + \Phi_{i,0} \otimes 1$$

and

$$\Phi_{i,r} \mapsto 1 \otimes \Phi_{i,r} + \Phi_{i,r} \otimes 1 + \hbar \left(\sum_{r_1+r_2=r-1} \Phi_{i,r_1} \otimes \Phi_{i,r_2} \right)$$

当 $r \geqslant 1$ 时；在作用映射拉回下有

$$\Phi_{i,r} \mapsto \sum_{r_1+r_2=r} \binom{r}{r_1} \Phi_{i,r_1} z^{r_2}.$$

证明。 由引理 4.4.4 可知，特别是由方程 51 和 52 可知，

$$(\oplus^* \otimes \mathrm{id})\sigma(R_{\mathrm{taut}}(z)) = \sigma(R_{\mathrm{taut},13}(z))\sigma(R_{\mathrm{taut},23}(z)), \quad \mathrm{act}_{w,1}^*\sigma(R_{\mathrm{taut}}(z)) = \sigma(R_{\mathrm{taut}}(z+w)).$$

将该等式通过作用于第三个张量因子的映射 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_{Q,\ \delta_i}^T)$ 取像，由引理 6.1.3 可得 (77)。□

此外，这些元素构成了典范环的一组新生成元：

命题 6.1.7。 存在一个代数同构

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)[\xi_{i,r} : i \in Q_0,\, r \geqslant 0] &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}} \\ \xi_{i,r} &\mapsto \Phi_{i,r}. \end{aligned} \tag{78}$$

证明。 由于两个向量空间具有相同的分次维数，只需证明该映射是单射，也就是说，$\Phi_{i,\ r}$ 代数独立。

由于 (78) 两边都是自由的 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}T)$-模，只需证明将 $\hbar = 0$ 设为后，$\Phi_{i,\ r}$ 代数独立。注意，这可由下式推出

$$\Phi_{i,d}(u) = 1 + \hbar \sum_{r \geqslant 0} r! \left(2\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_{i,d}) - \sum_{e:i\to j} \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_{j,d}) - \sum_{e:j\to i} \mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_{j,d}) \right) u^{-r-1} + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{79}$$

因为固定 r 时的括号表达式构成 $\mathbf{C}\{\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 的一组基：$i \in Q_0\}$ 这是由 Q 的 Cartan 矩阵的非退化性得出的；因此，当遍历所有 i, r 时，它们继承了 $\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 的代数独立性，而根据命题 4.1.3 的证明，$\mathrm{ch}_r(\mathcal{E}_i)$ 是代数独立的。

为证明 (79)，我们使用 $f'(u) = f(u)(\log\ f(u))'$ 计算出一阶 $\hbar$ 项为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{i,d}(u)}{\partial\hbar}|_{\hbar=0} &= \Phi_i(u)\frac{\partial\log(\Phi_{i,d}(u))}{\partial\hbar}|_{\hbar=0}\\ &= \Phi_{i,d}(u)\left(\sum_{n=1}^{d_i}\frac{\partial_\hbar V_n(u)}{V_n(u)} + \sum_{e\,:\,i\to j}\sum_{n=1}^{d_j}\frac{\partial_\hbar E_n^e(u)}{E_n^e(u)} + \sum_{e\,:\,j\to i}\sum_{n=1}^{d_j}\frac{\partial_\hbar E_n^e(u)}{E_n^e(u)}\right)|_{\hbar=0}\\ &= \sum_{n=1}^{d_i}\frac{\partial V_n(u)}{\partial\hbar} + \sum_{e\,:\,i\to j}\sum_{n=1}^{d_j}\frac{\partial E_n^e(u)}{\partial\hbar} + \sum_{e\,:\,j\to i}\sum_{n=1}^{d_j}\frac{\partial E_n^e(u)}{\partial\hbar}|_{\hbar=0}\end{aligned}$$

~其中，$V_n(u)$，$E_n^e(u)$ 是表达式 (76) 中由 Q 的一条特定边和第 n 个陈根标记的 $\Phi_{i,d}(u)$ 的因子；在第三个等式中，我们用到了当 $\hbar = 0$ 时它们都等于 1。

注意到若 $f(u) = \frac{u-x+\hbar}{u-x-\hbar}$，则有

$$\frac{\partial f(u)}{\partial\hbar}|_{\hbar=0} = 2\frac{1}{u-x} = 2\sum_{r\geqslant 0}x^r u^{-r-1},$$

并且 $r!\mathsf{ch}_r(\mathcal{E}_j)$ 是对 $\mathcal{E}_j$ 的所有陈根的第 r 次幂求和。

□

6.1.8. 注记。从上述引理的角度来看，Cartan 部分还可以通过取 R-矩阵的系数来定义。这种方法有望推广到箭图情形以外的 Joyce 余乘法研究。

在本小节余下部分，我们计算带典范三次势的三重箭图的扩展 CoHA 上的扩展 Joyce–Liu 顶点余乘法。

~**命题 6.1.9.** 设 Q 是任意箭图 Q 的三倍箭图。那么，扩张的 Joyce-Liu 顶点余乘法 $\overset{\text{ext}}{\Delta}$ 在 $\mathcal{A}^{T,\tilde{Q}}_{\widetilde{W},}$ 上的作用为

$$\Delta^{\text{ext}}(\Phi_i(u)) = \Phi_i(u-z)\otimes\Phi_i(u) \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\text{ext}}(x_{i,1}^{(n)},z) &= (\tau_z(x_{i,1}^{(n)})\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{(n)})\\ &\quad + \hbar\sum_{N\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{N}(-1)^{p+1}\binom{N}{p}\Phi_{i,p}\otimes x_{i,1}^{(n+N-p)}\right)z^{-N-1}\end{aligned} \tag{81}$$

证明。我们展开定理 5.0.1 中扩张余乘法 (67) 的定义。我们将反复用到这样一个事实：$\mathcal{M}_Q^T$ 的 0-分支和 δ_i-分支中，R-矩阵的分量是上同调类

$$R(z)_{(d,0)} = 1\otimes 1, \qquad R(z)_{(0,d)} = 1\otimes 1, \qquad \sigma R(z)_{(\delta_i,d)} = \Phi_{i,d}(1\otimes x_{i,1} - z), \tag{82}$$

因为 Ext 在 $(0,d)$ 和 $(d,0)$ 连通分支上的限制为零，而第三个等式是 $\Phi_i(z)$ 的定义。

将 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}$ 写成向量空间 $\mathcal{A}^{T,\mathrm{ext}}_{\tilde{Q},\widetilde{W}} = \mathcal{A}^T_{\tilde{Q},\widetilde{W}} \otimes_T$，由方程 (67) 首先可得

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{ext}}(1\otimes\Phi_i(u)) &= (\sigma R(z))_{23}\cdot(1\otimes \mathrm{act}_z^*\Phi_i(u)_{(1)})\otimes(1\otimes\Phi_i(u)_{(2)})\\ &= (1\otimes \mathrm{act}_z^*\Phi_i(u))\otimes(1\otimes\Phi_i(u))\\ &= (1\otimes\Phi_i(u-z))\otimes(1\otimes\Phi_i(u))\end{aligned}$$

由于根据 (82) 以及引理 6.1.6 中关于余乘法和 $\Phi_i(u)$ 上余作用的公式，R-矩阵的作用为平凡。

在证明 (81) 并完成证明之前，我们先计算未扩张的 Joyce–Liu 余乘法：

$$\begin{aligned}\Delta(x_{i,1}^{(n)},z) &= \Psi(\mathrm{Ext},z)\cdot \mathrm{act}^*_{z,1}(\oplus^* x_{i,1}^{(n)})\\ &= \Psi(\mathrm{Ext},z)\cdot\left(\mathrm{act}_z^* x_{i,1}^{(n)}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{(n)}\right)\\ &= \tau_z x_{i,1}^{(n)}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{(n)}\end{aligned}$$

其中第二个等号成立，是因为此处的直和映射为

$$\oplus_{\delta_i,0}\sqcup\oplus_{0,\delta_i}\ :\ (\mathcal{M}^T_{Q,\delta_i}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,0})\ \sqcup\ (\mathcal{M}^T_{Q,0}\times_{\mathrm{B}T}\mathcal{M}^T_{Q,\delta_i})\ \to\ \mathcal{M}^T_{Q,\delta_i}$$

在将 $\mathcal{M}_{Q,\ 0}\simeq\mathrm{pt}$ 识别为各个分支上的恒等映射后，第三个等号成立，是因为 $\mathrm{Ext}_{(0,\ d)}=\mathrm{Ext}_{(d,\ 0)}$ 为零。

作为第二项准备工作，我们利用幂级数展开计算 R-矩阵的限制：

$$\begin{aligned}\sigma R(z)_{(\delta_i,-)} &= \Phi_i(1\otimes x_{i,1}-z)\\ &= 1+\hbar\sum_{r\geqslant 0}\Phi_{i,r}(1\otimes x_{i,1}-z)^{-r-1}\\ &= 1+\hbar\sum_{r\geqslant 0}\Phi_{i,r}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{r+1}\binom{r+k}{r}(1\otimes x_{i,1})^k z^{-(k+r+1)}\\ &= 1+\hbar\sum_{N\geqslant 0}\left(\sum_{p\geqslant 0}(-1)^{-(p+1)}\binom{N}{p}\Phi_{i,p}\otimes x_{i,1}^{N-p}\right)z^{-(N+1)}\end{aligned}$$

作为 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q^T)_{\mathrm{taut}}\otimes_T\mathrm{H}^*(\mathcal{M}^T_{Q,\delta_i})[[z^{-1}]]$ 的元素，即

$$R^{(2)}(z)\otimes R^{(1)}(z)_{\delta_i} = 1\otimes 1+\hbar\left(\sum_{N\geqslant 0}\sum_{p\geqslant 0}(-1)^{-(p+1)}\binom{N}{p}\Phi_{i,p}\otimes x_{i,1}^{N-p}\right)z^{-(N+1)}. \tag{83}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{ext}}(x_{i,1}^{(n)}\otimes 1,z) = &\left((1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)+\hbar\left(\sum_{N\geqslant 0}\sum_{p\geqslant 0}(-1)^{-(p+1)}\binom{N}{p}(1\otimes\Phi_{i,p})\otimes(x_{i,1}^{(N-p)}\otimes 1)\right)z^{-(N+1)}\right)\\ &\cdot\left((\tau_z x_{i,1}^{(n)}\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)+(1\otimes 1)\otimes(x_{i,1}^{(n)}\otimes 1)\right)\end{aligned}$$

$$= \Big((\tau_z x_{i,1}^{(n)} \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) \otimes (x_{i,1}^{(n)} \otimes 1)\Big) + \hbar \left(\sum_{N \geqslant 0} \sum_{p \geqslant 0} (-1)^{-(p+1)} \binom{N}{p} (1 \otimes \Phi_{i,p}) \otimes (x_{i,1}^{(n+N-p)} \otimes 1) \otimes \right) z^{-(N+1)}.$$

其中在最后一行，我们使用了球形元素的定义，即

$$x_{i,1}^{k} \cdot x_{i,1}^{(n)} \;=\; x_{i,1}^{(n+k)}.$$

这证明了 (81)，并完成了证明。 □

6.2. 与 Drinfeld 余乘的比较。

6.2.1. 现在，我们将所构造的对象与 ADE 箭图情形下的 ADE 杨氏量子群进行比较。我们从 Drinfeld [Dri87] 提出的生成元与关系定义开始。

6.2.2. *ADE* 杨氏量子群。 设 Q 是任意 ADE 箭图。设 $c_{ij} = 2\delta_{ij} - a_{ij} - a_{ji}$ 为箭图 Q 的对称化卡坦矩阵，其中 a_{ij} 表示从顶点 i 到顶点 j 的箭头数量。

定义 6.2.3. 杨代数 $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ 是一个由元素 $\{x_{i\,r}^{\pm}$、、$\xi_{i、\,r}\}_{i\in Q_0、\,r\in\mathbf{N}}$ 生成的$\mathbf{C}[\hbar]$ 线性代数，并满足以下关系：对每个 i、$j \in Q_0$ 以及 r、$s \in \mathbf{N}$：

(R1) $[\xi_{i,r}, \xi_{j,s}] = 0$

(R2) $[\xi_{i,0}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm c_{ij} x_{j,s}^{\pm}$

(R3) $[\xi_{i,r+1}, x_{j,s}^{\pm}] - [\xi_{i,r}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm\hbar\frac{c_{ij}}{2}(\xi_{i,r}x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm}\xi_{i,r})$

(R4) $[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm\hbar\frac{c_{ij}}{2}(x_{i,r}^{\pm}x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm}x_{i,r}^{\pm})$

(R5) $[x_{i,r}^{+}, x_{j,s}^{-}] = \delta_{ij}\xi_{i,r+s}$

(R6) 假设 $i \neq j$ 并令 $m = 1 - c_{ij}$。对于任意 r_1，$\cdots$，$r_m \in \mathbf{N}$ 和 $s \in \mathbf{N}$，我们有 ve

$$\sum_{\pi\in \mathrm{Sym}_m} \Big[x_{i,r_{\pi(1)}}^{\pm}, \Big[x_{i,r_{\pi(2)}}^{\pm}, \Big[\cdots, \Big[x_{i,r_{\pi(m)}}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}\Big]\cdots\Big]\Big] = 0$$

与第 6.1.2 小节类似，我们定义生成级数

$$\xi_i(u) \;=\; 1 + \hbar\sum_{r\geqslant 0}\xi_{i,r}u^{-r-1} \;\in\; Y_\hbar(\mathfrak{g})[[u^{-1}]], \qquad x_i^{\pm}(u) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} x_{i,r}^{\pm}u^{-r-1} \;\in\; Y_\hbar(\mathfrak{g})[[u^{-1}]].$$

6.2.4. 与作为代数的 *CoHA* 比较。 我们将考察杨代数的 Borel部分。令$Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\geqslant 0} \subseteq Y_\hbar(\mathfrak{g})$ 为由 $\{x_{i\,1,\ ,\ \xi_{i,\ r}}^{+}\}_{i\in Q_0,\ r\in\mathbf{N}}$生成的子代数。于是有如下定理，其实质上是 [YZ18b，定理 D] 在我们表述下的版本。

命题 6.2.5。该态射

$$f : Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\geqslant 0} \;\to\; \mathcal{A}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}}^{T,\chi,\mathrm{ext}}$$

$$x_{i,r}^{+} \mapsto x_{i,1}^{(r)}$$
$$\xi_{i,r} \mapsto \Phi_{i,r}$$

是代数同构。

证明。 在 [YZ18a] 中已经证明，将此态射限制到 $Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^{>0}$ 时是一个同构；而我们已在命题 6.1.7 中证明，将该态射限制到嘉当 $Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^0$ 时是一个同构。因此，只需证明此态射 f 是良定义的：我们需要检验关系 (R2) 和 (R3)，因为其他所有关系都可由 f 在 >0 和 0 部分上良定义推出。将典范环中的一个元素 h 视为扩张代数中的元素时，我们记作 $1\otimes h$；类似地，对于 CoHA 中的 b，记作 $b\otimes 1$。

为证明 (R2)，我们首先注意到

$$f([\xi_{i,0}, x_{j,s}^{+}]) = [1\otimes\Phi_{i,0}, x_{j,1}^{(s)}\otimes 1].$$

因此，根据 (68) 中乘积 $\star$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}(1\otimes\Phi_{i,0})\star(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1) &= (\Phi_{i,0})_{(1)}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes(\Phi_{i,0})_{(2)}\\ &= x_{i,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,0}+\Phi_{i,0}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes 1\\ &= x_{i,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,0}+c_{ij}(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1)\end{aligned}$$

其中，我们在引理 6.1.6 中计算了 $\Phi_{i,\,0}$ 的余乘法。此外，根据定义 $\Phi_{i,\,0}\cdot x_{j}^{(s)}{}_{,\,1} = \Phi_{i,\,0,\,\delta_j}\cup x_{j\,1}^{(s)}{}_{,}$，由方程 (79) 可知，实际上 $\Phi_{i,\,0,\,\delta_j}=c_{ij}$。类似地，根据 $\star$ 的定义，我们有

$$(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1)\star(1\otimes\Phi_{i,0}) = x_{j,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,0}$$

因此

$$[1\otimes\Phi_{i,0}, x_{j,1}^{(s)}\otimes 1] = c_{ij}x_{j,1}^{(s)}\otimes 1 = f(c_{ij}x_{i,s}^{+})$$

因此关系（R²）成立。

现在验证（R3）。我们有

$$[1\otimes\Phi_{i,r+1}, x_{j,1}^{(s)}\otimes 1] = \Phi_{i,r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes 1+\hbar\left(\sum_{k_1+k_2=r}\Phi_{i,k_1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,k_2}\right)$$

采用与上文相同的策略，因为

$$(1\otimes\Phi_{i,r+1})\star(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1) = x_{j,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,r+1}+\Phi_{i,r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes 1+\hbar\left(\sum_{k_1+k_2=r}\Phi_{i,k_1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\otimes\Phi_{i,k_2}\right),$$

因此，将这一点与 $(x_{j}^{(s)}{}_{、1}\otimes 1)*(1\otimes\Phi_{i、\,r+1}) = x_{j}^{(s)}{}_{、1}\otimes\Phi_{i、\,r+1}$ 结合可得

$$[1\otimes\Phi_{i,r}, x_{j,1}^{(s+1)}\otimes 1] = \Phi_{i,r}\cdot x_{j,1}^{(s+1)}\otimes 1+\hbar\left(\sum_{k_1+k_2=r-1}\Phi_{i,k_1}\cdot x_{j,1}^{(s+1)}\otimes\Phi_{i,k_2}\right)$$

因此，剩下的工作就是计算这些级数的系数。注意，根据定义，$\Phi_{i,r}\cdot x_j^{(s)}$ 、1 =$\Phi_{i,r}$、$\delta_j\cdot x_{j\,1}^{(s)}$ 。如果在 中不存在从 到 的箭头，、r，因此交换子满足：

$$[1\otimes\Phi_{i,r+1},x_{j,1}^{(s)}\otimes 1]-[1\otimes\Phi_{i,r},x_{j,1}^{(s+1)}\otimes 1]\;=\;0$$

此时关系 (R3) 恰好成立。否则，

$$\Phi_{i,\delta_j}(u)=\delta_{i,j}\frac{u-x_{j,1}+\hbar}{u-x_{j,1}-\hbar}+\delta_{i\to j}\frac{u-x_{j,1}-\hbar/2}{u-x_{j,1}+\hbar/2}+\delta_{j\to i}\frac{u-x_{j,1}-\hbar/2}{u-x_{j,1}+\hbar/2}$$

其中，若箭图 Q 中存在一条从 i指向 j 的箭，则 $\delta_{i\to j}$ 为 1；否则为 0。由此可得

$$\Phi_{i,r,\delta_j}=2\delta_{ij}(x_{j,1}+\hbar)^r-\delta_{i\to j}(x_{j,1}-\hbar/2)^r-\delta_{j\to i}(x_{j,1}-\hbar/2)^r$$

因此

$$\begin{aligned}\Phi_{i,r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\;&=\;2\delta_{ij}(x_{j,1}+\hbar)^{r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}-\delta_{i\to j}(x_{j,1}-\hbar/2)^{r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}-\delta_{j\to i}(x_{j,1}-\hbar/2)^{r+1}\cdot x_{j,1}^{(s)}\\&=\;\Phi_{i,r}\cdot x_{j,1}^{(s+1)}-\hbar/2(2\delta_{ij}-\delta_{i\to j}-\delta_{j\to i})\Phi_{i,r}\cdot x_{j,1}^{(s)}=\Phi_{i,r}\cdot x_{j,1}^{(s+1)}-\hbar/2(c_{ij})\Phi_{i,r}\cdot x_{j,1}^{(s)}.\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}&[1\otimes\Phi_{i,r+1},x_{j,1}^{(s)}\otimes 1]-[1\otimes\Phi_{i,r},x_{j,1}^{(s+1)}\otimes 1]\\&\qquad=\;c_{ij}\hbar/2\left(1\otimes\Phi_{i,r})*(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1)+(x_{j,1}^{(s)}\otimes 1)*(1\otimes\Phi_{i,r})\right)\end{aligned}$$

因此 (R3) 得证。 □

右侧的上同调Hall代数具有我们在前几节中定义的余乘法。杨代数也具有余乘法，这是 Drinfeld 提出的，下面我们将对此作回顾。

6.2.6. *Drinfeld* 的余乘。我们现在定义由 Drinfeld [Dri87] 和 Gautam–Toledano-Laredo [GLW21], 提出的顶点余乘法；他们阐明了如何将其表示为关于 z^{-1} 的 Laurent 幂级数。首先，令 $\tau_z\colon Y_\hbar(\mathfrak{g})\to Y_\hbar(\mathfrak{g})[z]$ 为由其对生成级数的作用定义的映射：

$$x_i^{\pm}(u)\mapsto x_i^{\pm}(u-z)\quad\text{and}\quad\xi_i(u)\mapsto\xi_i(u-z),$$

于是，根据 [GLW21，命题 3.3、定理 3.4]，以下所谓的变形 *Drinfeld* 余乘法定义了一个代数态射

$$\Delta_{\mathrm{Dr}}(z)\;:\;Y_\hbar^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}_Q)\to Y_\hbar^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}_Q)\otimes_\hbar Y_\hbar^{\geqslant 0}(\mathfrak{g}_Q)((z^{-1})).\tag{84}$$

若我们设

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{Dr}}(\xi_i(u),z)\;&=\;\xi_i(u-z)\otimes\xi_i(z)\\\Delta_{\mathrm{Dr}}(x_{i,n}^+,z)\;&=\;\tau_z(x_{i,n}^+)\otimes 1\;+\;1\otimes x_{i,n}^+\;+\;\hbar\sum_{N\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{N}(-1)^{p+1}\binom{N}{p}\xi_{i,p}\otimes x_{i,n+N-p}\right)z^{-N-1}.\end{aligned}$$

因此，本节的主要定理如下：

定理 6.2.7。 [Drinfeld 与 Joyce–Liu 余乘法一致] 设 Q 为任意 ADE 箭图，则命题 6.2.5 中的映射f

$$f : Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\geqslant 0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{T,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}}$$

是顶点双代数的一个同构，它将 $Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\geqslant 0}$上的亚纯 Drinfeld 余乘法与 $\mathcal{A}^{T}$、$\tilde{Q}^{\chi\ \mathrm{ext}}_{\widetilde{W}}$ 、上的扩展Joyce-Liu余乘法相互交织。更准确地说， f 是一个代数映射，且下图交换

$$\begin{array}{ccc} Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^{\geqslant 0} & \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{Dr}}(z)} & Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^{\geqslant 0} \otimes_\hbar Y_\hbar(\mathfrak{g}_Q)^{\geqslant 0}((z^{-1})) \\ \downarrow{\scriptstyle f}\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle f\otimes f} \\ \mathcal{A}^{T,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}} & \xrightarrow{\Delta^{\mathrm{ext}}(z)} & \mathcal{A}^{T,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}} \otimes_T \mathcal{A}^{T,\chi,\mathrm{ext}}_{\widetilde{Q},\widetilde{W}}((z^{-1})) \end{array} \tag{85}$$

证明。 根据命题 6.2.5，映射 f 是一个代数同构。根据命题 6.1.9，Drinfeld 余乘法与扩张的 Joyce–Liu 余乘法的公式经由态射 f 相互对应。□

7. 无势对称箭图的顶点双代数

本节将考虑在 $W = 0$ 且箭图对称这一特殊情形下的构造。在这种情况下，[Lat21] 和 [DM25]中已经研究过上同调Hall代数上的顶点代数结构。我们的目标是为这一情形下的顶点代数结构给出另一种刻画，并将我们的构造与 [DM25]进行比较。在此过程中，我们还将为无势的对称箭图给出上同调整性的另一种证明。

7.0.1. 关于符号扭曲的警告。在此处，我们不再遵循本文其余部分所采用的约定，而是在 τ-扭曲的对称幺半范畴 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^{Q_0}}$ 中工作，并研究对称箭图的未扭曲的 CoHA $\mathcal{A}_Q$。于是根据定理 4.5.2，Joyce 余乘法在交换态射意义下是局部余的

$$\beta^\tau : v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|+\tau} w \otimes v.$$

对于元素 v、$w \in \mathcal{A}_Q$。设对于某些维数向量 d、e，有 $v \in \mathcal{A}_Q$、$_d$ 和 $w \in \mathcal{A}_Q$、$_e$。由于 $\mathcal{A}_Q$、$_d$ 被定义为 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q$、$_d$，$\mathrm{Q}[-\chi(d$、$d)])$，如果 $v \in \mathcal{A}_Q$、$_d$，那么 $(-1)^{|v|} = (-1)^{\chi(d}$、$_d)$，因为上同调 $\mathrm{H}^*(\mathcal{M}_Q$、$_d)$ 集中于偶数上同调次数。由于 $\tau(d$、$e) = \chi(d$、$d)\chi(e$、$e) + \chi(d$、$e)$、$(-1)^{\tau+|v||w|} = (-1)^{\chi(d}$、$^{e)}$。因此在此情形下，$\beta^\tau$ 与

$$\beta_0^\chi : v \otimes w \mapsto (-1)^\chi w \otimes v.$$

因此，我们在由 β_0^χ 导出的对称幺半结构中得到一个真正的余局部顶点余代数。这与 [DM25] 中采用的约定相同（见注 4.2）。

本节将考虑 $\mathcal{A}_Q^*$ 的 $\mathbf{N}^{Q_0}\times\mathbf{Z}$ 分次对偶，并使用以下定理

定理 7.0.2. [Hub09，定理 6.1] 存在一个函子，它将余局部余结合顶点余代数映为顶点代数。

$$F : \mathrm{CoVertex}_{\mathbf{N}^{Q_0}\times\mathbf{Z}} \to \mathrm{Vertex}_{\mathbf{N}^{Q_0}\times\mathbf{Z}} \tag{86}$$

$$V = \bigoplus_{(d,k)\in\mathbf{N}^{Q_0}\times\mathbf{Z}} V_{d,k} \mapsto F(V) = \bigoplus_{(d,k)\in\mathbf{N}^{Q_0}\times\mathbf{Z}} V_{d,-k}^\vee. \tag{87}$$

因此，$\mathcal{A}_{Q,\ 0}^*$ 现在具有顶点代数结构和余交换余代数结构。根据定理 4.5.2 $\mathcal{A}_Q^*$ 的零势版本，它是由交换 CoHA 乘积的对偶导出的余交换余代数，也是由顶点余乘法的对偶导出的顶点代数。

7.1. 余交换顶点双代数的结构性结果。 余交换顶点双代数具有与余交换双代数相似的结构理论。我们首先定义泛包络代数的类比。我们按以下方式定义普适手征包络。设 L 是一个顶点李代数，如 [HLX22，定义 3.6] 中所述。然后定义 $\mathfrak{g}_L$ 为李代数

$$L \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]/\mathrm{im}\partial \tag{88}$$

其中，∂ 是平移算子

$$D \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \frac{d}{dt} \tag{89}$$

由平移算子 D 在 L上诱导的 $L\otimes\mathbf{C}[t,t^{-1}]$。我们有一个分解

$$\mathfrak{g}_L=\mathfrak{g}_L^+\oplus\mathfrak{g}_L^- \tag{90}$$

其中 $\mathfrak{g}_L^-=\mathrm{span}\{a\otimes t^i\mid i<0,\quad a\in L\}$和 $\mathfrak{g}_L^+=\mathrm{span}\{a\otimes t^i\mid i\geqslant 0,\quad a\in L\}$。

在$\mathbf{C}$ 上取平凡的 $\mathfrak{g}_L^+$ 模结构，并定义

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(L)=\mathrm{U}\mathfrak{g}_L\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{g}_L^+}\otimes\mathbf{C} \tag{91}$$

那么 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(L)$ 是一个顶点代数，并且我们有 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(L)\simeq\mathrm{U}\mathfrak{g}_L^-$ 作为 $\mathrm{U}\mathfrak{g}_L^-$ -模的一个同构。现在我们总结一些来自 [HLX22] 的关于余交换顶点双代数的结构性结果。

定理 7.1.1（余交换顶点双代数的结构）。

(1) 设 V是一个带有相容余交换余乘法 Δ的顶点代数。记 $P(V)$为相对于 Δ的本原元集合，则 $P(V)$ 具有由 V诱导的顶点李代数结构，并且 $P(V)$ 是 V的顶点李子代数。[HLX22，命题 4.8]

(2)（Milnor-Moore）设 V 是一个连通余交换顶点双代数，则我们有一个顶点代数同构 [HLX22，定理 4.13]

$$V\simeq\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(V)). \tag{92}$$

以及一个余代数同构 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(V))\simeq\mathrm{U}^{\mathfrak{g}_{P(V)}^-}$。

(3)（PBW 定理）我们有如下向量空间同构

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(V))\simeq\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_{P(V)}^-). \tag{93}$$

7.2. **通过顶点代数实现上同调整性**。注意，由于 $\mathcal{A}_Q$ 是连通的，我们现在可以使用上文回顾的定理来得到上同调整性，并计算 $\mathcal{A}_Q$ 的代数结构。

我们先回顾对称代数的两种不同构造。设 V 是一个各分量有限维的分次向量空间。在每个 $V^{\otimes n}$ 上都有 S_n 的自然作用，这进而诱导出所有对称群在张量代数 $T(V)$ 上的作用。然后定义

(1) 将对称代数 $\mathrm{Sym}(V)$ 定义为一个双代数，其乘积由商映射$T(V)\to\mathrm{Sym}(V)$ 诱导，余乘法 Δ 则由 $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$ 诱导。

(2) 将不变代数 $\Gamma(V)\hookrightarrow T(V)$ 视为不变张量的子空间。$\Gamma(V)$ 是一个带有洗牌代数乘积的代数

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)*(w_1\otimes\cdots\otimes w_m)\mapsto\frac{1}{n!m!}\sum_{\sigma\in S_{n+m}}\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_m). \tag{94}$$

引理7.2.1. 设 V是一个分次分量有限维的分次向量空间。则有以下同构：

(1) 有一个代数同构 $(\mathrm{Sym}V)^\vee \simeq \Gamma(V^*)$，其中$(\mathrm{Sym}V)^\vee$ 上的代数结构由 $\mathrm{Sym}(V)$上的余乘法 Δ 诱导

(2) 我们有代数同构 $\mathrm{Sym}(V) \simeq \Gamma(V)$。

证明。 </style}第 (1) 部分由 [LV12，练习 1.8.7] 给出。对于第 (2) 部分，我们可以考虑映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(V) &\to \Gamma(V) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned} \tag{95}$$

它是一个同构。显然这是一个代数态射，因为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \sigma \left(\sum_{\sigma' \in S_n, \sigma'' \in S_m} \sigma'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \sigma''(w_1 \otimes \cdots w_m) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \cdots \otimes w_m) \end{aligned}$$

因为我们在左边的求和中重复了 $n!m!$ 个置换。

设 $f \in \Gamma^n(V)$，其中 $\Gamma^n(V) \subset \Gamma(V)$ 是 $V^{\otimes n}$ 中不变张量的子空间。我们将其逆定义为 $1/n!f$，其中 $\overline{f}$是复合$\overline{\Gamma}(V) \subset T(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ 的像。我们将此线性延拓为一个态射，以定义逆 $\Gamma(V) \to \mathrm{Sym}(V)$。显然，复合是恒等映射，因为 $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \otimes \cdots v_n$ 属于商 $\mathrm{Sym}(V)$。□

上同调Hall代数 $\mathcal{A}_Q^*$ 的对偶是一个连通顶点双代数。因此我们有如下定理

定理 7.2.2. 我们有以下结论

(1) 我们有一个顶点双代数的同构

$$\mathcal{A}_Q^* \simeq \mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(\mathcal{A}_Q^*)). \tag{96}$$

这里，CoHA 余乘法与$\mathcal{A}_Q^* \simeq \mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(\mathcal{A}_Q^*))$ 上的余乘法相对应，而Joyce顶点代数与普适手征包络相对应。

(2) $\mathcal{A}_Q$ 同构于某个分次向量空间的对称代数。

证明. </style}第 (1) 部分直接由CoHA结构与Joyce顶点代数的相容性得出。根据连通顶点双代数的定理 7.1.1，我们便可立即得到结果。

使用第 (2) 部分 由定理 7.1.1 可得，我们有一个余代数同构

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(\mathcal{A}_Q^*)) \simeq \mathrm{U}\mathfrak{g}^-_{P(\mathcal{A}_Q^*)} \simeq \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^-_{P(\mathcal{A}_Q^*)}),$$

利用 [LV12，定理 1.3.6]可知，PBW 同构 $\mathrm{U}\mathfrak{g} \simeq \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$是余代数同构，对任意 g均成立。此外，[DM25，定理 5.7，注 5.9] 指出

$$\mathfrak{g}^{-}_{P(\mathcal{A}_Q^*)} \simeq W[u] \tag{97}$$

对于某个分次向量空间 W。然后利用引理 7.2.1，我们得到一个代数同构

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_Q \simeq (\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P(\mathcal{A}_Q^*)))^\vee &\simeq (\mathrm{Sym}(W[u]))^\vee \\ &\simeq \Gamma(W^*[u]) \qquad \text{(by part 1 of Lemma 7.2.1)} \\ &\simeq \mathrm{Sym}(W^*[u]) \qquad \text{(by part 2 of Lemma 7.2.1)}\end{aligned}$$

这证明了 $\mathcal{A}_Q$ 是一个对称代数。 □

我们注意到，上述定理既证明了无势箭图的 DT 不变量的整性猜想，也证明了 Efimov 定理：无势对称箭图的上同调 Hall 代数是对称代数。

7.3. 与 Dotsenko-Mozgovoy 的比较。在 [DM25], 中，作者也研究了 $\mathcal{A}_Q^*$ 上的顶点代数结构。特别地，他们定义了一个顶点李代数 P_{DM} [DM25，第 4.4 节。4], 在这种情况下，普适手征包络 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM})$ 是某个自由顶点代数。在 [DM25，定理 5。6]作者给出了一个余代数同构

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM}) \simeq \mathcal{A}_Q^*. \tag{98}$$

于是，这个同构通过 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM})$赋予 $\mathcal{A}_Q^*$ 顶点代数结构。现在我们希望比较这两种顶点代数结构。关键在于，这两个顶点代数都嵌入到一个格顶点代数中，该格顶点代数由箭图表示导出范畴中对象的模栈之同调的 Joyce顶点代数给出。证明这两个子代数相同后，我们便得到以下定理

定理 7.3.1. 存在一个顶点双代数的同构

$$\mathcal{A}_Q^* \simeq \mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM}) \tag{99}$$

其中 $\mathcal{A}_Q^*$ 配备了对偶CoHA余交换余乘法和 Joyce顶点代数结构。于是，该同构诱导出本原顶点李代数的一个同构

$$P(\mathcal{A}_Q^*) \xrightarrow{\simeq} P_{DM} \tag{100}$$

利用 Dotsenko-Mozgovoy 的结果，我们可以将上述定理视为对任意对称箭图 Q的 Joyce顶点双代数进行的生成元与关系计算。

引理7.3.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。考虑从该阿贝尔范畴的对象模空间到导出范畴的嵌入 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}}$。那么我们有一个顶点代数的单射

$$\mathrm{H}_*(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}) \to \mathrm{H}_*(\mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}}). \tag{101}$$

证明。 首先，该映射是单射，因为 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}}$ 是一个分支的嵌入。顶点代数结构的相容性由交换图得出

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}} \times \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}} \\ {\scriptstyle\oplus}\downarrow & & {\scriptstyle\oplus}\downarrow \\ \mathcal{M}_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{B}\mathbf{G}_m \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & \mathrm{B}\mathbf{G}_m \times \mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}} \\ {\scriptstyle\mathrm{act}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{act}} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & M_{\mathrm{D}^b\mathcal{C}} \end{array} \tag{102}$$

以及 Ext 复形限制到开分支这一事实。 □

我们现在有如下定理，它证明了导出范畴的 Joyce顶点代数与格顶点代数之间的关系。我们指出，原定理适用于任意箭图，但要求使用对称化欧拉形式；然而，在我们的情形中，箭图是对称的，因此无须对欧拉形式进行对称化，原命题的证明可以逐字照搬。

定理 7.3.3. [Joy18, 定理 5.19] 存在一个分次顶点代数同构

$$\mathrm{H}_*(\mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathrm{Rep}Q}) \simeq L_{\mathbf{Q}^0} \tag{103}$$

对于格$\mathbf{Z}^{Q_0}$和欧拉形式 χ_Q。

定理 *7.3.1* 的证明。 根据 [DM25, 第 4.5 节， 3] 我们可以将 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM})$ 视为由元素 e^i生成的$L_{Q^0} \simeq \mathrm{H}_*(\mathcal{M}_{\mathrm{D}^b\mathrm{Rep}_Q})$ 的顶点子代数。注意，根据定理 7.3.3，子顶点代数

$$\mathrm{H}_*(\mathcal{M}_Q) \hookrightarrow L_{Q^0} \tag{104}$$

包含元素 e^i。因此，这定义了一个分次顶点代数的单射

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM}) \to \mathrm{H}_*(\mathcal{M}_Q) \tag{105}$$

在 [DM25 的命题 5.3] 中，已证明我们有一个分次向量空间之间的同构

$$\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM}) \simeq \mathrm{H}_*(\mathcal{M}_Q) \tag{106}$$

注意，我们的两个空间都具有有限维的分次分量。 [DM25，命题 5.3] 的陈述是方程（106）的对偶；但由于分次分量是有限维的，这两个陈述等价。方程（106）意味着 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM})$ 和 $\mathrm{H}_*(\mathcal{M}_Q)$ 具有相同的分次维数。由于映射 $\mathrm{U}^{\mathrm{ch}}(P_{DM}) \to \mathrm{H}_*(\mathcal{M}_Q)$ 是单射，因此我们可以得出结论：它是一个同构。□

附录 A. 层叠的上同调与完美复形的特征类

本文中，我们将使用层叠 X 上的可构造层导出范畴 $\mathrm{D}(X)$，其具有通常的六函子，且所有函子均默认取导出函子。我们回顾一下，如何定义系数取为层 $\mathcal{F}$ 的层叠的上同调

$$\mathrm{H}^*(X,\mathcal{F}) \;=\; (X\to \mathrm{pt})_*\mathcal{F} \tag{107}$$

取 $\mathcal{F}=\mathbf{Q}_X$（即常值层），即可恢复 X 的通常上同调。

A.1. 上同调。

A.1.1. ***Künneth*** **公式。** Künneth 映射

$$\mathrm{H}^*(X_1,\mathcal{F}_1)\otimes \mathrm{H}^*(X_2,\mathcal{F}_2) \;\to\; \mathrm{H}^*(X_1\times X_2,\mathcal{F}_1\boxtimes\mathcal{F}_2) \tag{108}$$

是一个同构，只要 X_i 是局部有限型的 Artin 层叠，且 $\mathrm{H}^*(X_i,\ \mathcal{F}_i)$ 是分次有限维的。事实上，对于这样的 X_i，由 [LZ12，定理 0.1.1]，我们得到同调群的 Künneth 同构

$$\mathrm{H}_*(X_1,\mathcal{F}_1)\otimes \mathrm{H}_*(X_2,\mathcal{F}_2) \;\simeq\; \mathrm{H}_*(X_1\times X_2,\mathcal{F}_1\boxtimes\mathcal{F}_2)$$

对其取 Verdier 对偶，如果 $\mathcal{F}_i$ 的上同调是分次有限维的，就得到 (108)。

如果 X_i 有无穷多个连通分支，(108) 通常不是同构，因此必须逐个分支处理。如果我们在一般的底空间 B 上工作，那么相对 Künneth 映射

$$\mathrm{H}^*(X_1,\mathcal{F}_1)\otimes_{\mathrm{H}^*(B)} \mathrm{H}^*(X_2,\mathcal{F}_2) \;\to\; \mathrm{H}^*(X_1\times_B X_2,\mathcal{F}_1\boxtimes\mathcal{F}_2)$$

通常不是同构；[LZ12] 只给出 B 上层的一个同构。

A.1.2. 杯积。两个层上的杯积映射是如下映射

$$\cup\ :\ \mathrm{H}^*(X,\mathcal{F})\otimes \mathrm{H}^*(X,\mathcal{G}) \;\to\; \mathrm{H}^*(X\times X,\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}) \;\to\; \mathrm{H}^*(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$$

将 Künneth 映射与沿对角映射 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}\to\Delta_*\Delta^*(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})=\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ 的拉回复合而成。我们常将其记作 $\cdot$。如果 $f\colon Y\to X$ 是 Artin 层叠之间的映射，则容易证明

$$f^*(\alpha\cup\beta) \;=\; f^*(\alpha)\cup f^*(\beta) \tag{109}$$

对于任意上同调类 $\alpha,\ \beta$ 的 $\mathcal{F},\ \mathcal{G}$。

由于 $\mathbf{Q}_X$ 是 $\otimes$的单位元，因此 $\mathrm{H}^*(X)$是一个超交换代数，并作用于每个层的上同调。如果 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是层的任意映射，则其诱导映射

$$\mathrm{H}^*(X,\mathcal{F}) \;\to\; \mathrm{H}^*(X,\mathcal{G}) \tag{110}$$

是 $\mathrm{H}^*(X)$-线性的，并且

引理 A.1.3. 设 $f\colon X \to Y$是一个层叠映射。因此，我们有一个 $\mathrm{H}^*(Y)$-模的同构 es

$$\mathrm{H}^*(X,\mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^*(Y, f_*\mathcal{F}) \tag{111}$$

其中左侧的作用通过 $\mathrm{H}^*(Y) \to \mathrm{H}^*(X)$ 给出。

证明。 注意，层论投影公式给出了一个自然同构

$$- \otimes f_*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*(f^* - \otimes \mathcal{G}) \tag{112}$$

我们将其应用于态射 $\alpha : \mathbf{Q}_Y \to \mathbf{Q}_Y$，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Q}_Y \otimes f_*\mathcal{G} & \longrightarrow & f_*(f^*\mathbf{Q}_Y \otimes \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathbf{Q}_X \otimes \mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \alpha\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\alpha\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f^*\alpha\otimes\mathrm{id}} \\ \mathbf{Q}_Y \otimes f_*\mathcal{G} & \longrightarrow & f_*(f^*\mathbf{Q}_Y \otimes \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathbf{Q}_X \otimes \mathcal{G}) \end{array}$$

由此可知，存在一个 $\mathrm{H}^*(Y, f_*\mathcal{G}) = \mathrm{H}^*(X,\mathcal{G})$ 的 $\mathrm{H}^*(Y)$-模同构。 □

A.1.4. 消失循环。 若有函数 $f\colon X \to \mathbf{A}^1,$，则可定义消失循环 函子

$$\varphi_f \,:\, \mathrm{D}(X) \,\to\, \mathrm{D}(X).$$

它满足以下性质：

(1) (Thom–Sebastiani)。若 X_i 是带有函数 f_i 的光滑对象，则存在一个同构

$$\mathrm{TS} \,:\, \mathrm{H}^*(X_1, \varphi_{f_1}\mathcal{F}_1) \otimes \mathrm{H}^*(X_2, \varphi_{f_2}\mathcal{F}_2) \,\simeq\, \mathrm{H}^*(X_1 \times X_2, \varphi_{f_1 \boxplus f_2}\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \tag{113}$$

(2)（推与拉）。若 $g\colon X \to Y$ 是光滑代数栈之间的映射，且 f 是 Y 上的函数，则存在自然变换

$$\varphi_f \,\to\, g_*\varphi_{g^*f}g^*$$
$$g_!\varphi_{fg}g^!\mathbf{D} \,\to\, \varphi_f\mathbf{D}$$

它们在上同调上诱导映射（对于第二个变换，假设 g 适当）):

$$g^* \,:\, \mathrm{H}^*(Y, \varphi_f\mathcal{F}) \,\to\, \mathrm{H}^*(X, \varphi_{g^*f}\mathcal{F}). \tag{114}$$

$$g_* \,:\, \mathrm{H}^*(X, \varphi_{g^*f}\mathbf{Q}_X) \,\to\, \mathrm{H}^*(Y, \varphi_f\mathbf{Q}_Y)[\delta] \tag{115}$$

其中 $\delta = 2\dim Y - 2\dim\, X$，且推前映射是以下复合

$$\mathrm{H}^*(X, \varphi_{gf}\mathbf{Q}_X) \,=\, \mathrm{H}^*(Y, g_*\varphi_{gf}g^*\mathbf{Q}_Y) \,=\, \mathrm{H}^*(Y, g_!\varphi_{gf}g^!\mathbf{Q}_Y)[\delta] \,\to\, \mathrm{H}^*(Y, \varphi_f\mathbf{Q}_X)[\delta]. \tag{116}$$

这里，第二个等价是利用 g 的真性推得 $g_! = g_*$，并利用空间的光滑性得到 $g^!\mathbf{Q}_Y[\delta] = g^*\mathbf{Q}_Y$。

(3)（投影公式）若上述 g 是适当的，则有

$$g_*(g^*(\alpha) \cup \beta) \,=\, \alpha \cup g_*(\beta) \tag{117}$$

对于一个 上同调类 $\alpha \in \mathrm{H}^*(Y)$ 和临界上同调类 $\beta \in \mathrm{H}^*(X,\ \varphi_{fg}\mathbf{Q}_X)$.

为证明投影公式，我们注意到，式 (116) 中的第一个等式根据引理 A.1.3 保持了 $f^*(\alpha)$ 和 α 的作用。第二个和第三个映射由层之间的映射诱导

$$g_*\varphi_{gf}g^*\mathbf{Q}_Y \;\simeq\; g_!\varphi_{gf}g^!\mathbf{Q}_Y[\delta] \;\to\; \varphi_f\mathbf{Q}_X[\delta]$$

由于映射 (110) 关于上同调的杯积作用具有线性，该映射交织了两侧的 α 作用。

A.2. 完美复形的陈类。

A.2.1. 典范丛。 我们有如下代数栈

$$\mathrm{BGL} \;=\; \bigsqcup_{n\geqslant 0}\mathrm{BGL}_n, \qquad\qquad \mathrm{Perf} \;=\; \bigsqcup_{n\in\mathbf{Z}}\mathrm{Perf}_n$$

其 S 点分别是 S 上秩为 n 的向量丛和秩为 n 的完美复形。特别地，两者分别带有典范向量丛 $\mathcal{E}$ 和完美复形 $\mathcal{F}$，它们在第 n 个分支上的秩为 n。

A.2.2. 在 BGL 或 Perf 上定义局部常值函数 rk，使其在给定分支 BGL_n 或 Perf_n 上为常值函数 n。向量丛或完美复形 V 的秩 $\mathrm{rk}(V)$，是 X 上的局部常值函数，由分类映射 $X\to\mathrm{BGL}$ 或 $X\to\mathrm{Perf}$ 拉回 rk 得到。

A.2.3. 我们将 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m=\mathrm{BGL}_1$ 上的典范线丛记为 γ。我们定义张量积映射和直和映射

$$\otimes\,:\,\mathrm{BGL}\times\mathrm{BGL}\;\to\;\mathrm{BGL}, \qquad\qquad \otimes\,:\,\mathrm{Perf}\times\mathrm{Perf}\;\to\;\mathrm{Perf}$$
$$\oplus\,:\,\mathrm{BGL}\times\mathrm{BGL}\;\to\;\mathrm{BGL}, \qquad\qquad \oplus\,:\,\mathrm{Perf}\times\mathrm{Perf}\;\to\;\mathrm{Perf}$$

其定义为 $\otimes^*\mathcal{E}=\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$ 和 $\oplus^*\mathcal{E}=\mathcal{E}\boxplus\mathcal{E}$，对 $\mathcal{F}$ 也类似。特别地，我们有映射

$$\mathrm{act}\,:\,\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathrm{BGL}\;\to\;\mathrm{BGL}, \qquad\qquad \mathrm{act}\,:\,\mathrm{B}\mathbf{G}_m\times\mathrm{Perf}\;\to\;\mathrm{Perf}$$

其定义为 $\mathrm{act}^*\mathcal{E}=\gamma\boxtimes\mathcal{E}$，对 $\mathcal{F}$ 也类似。我们还有映射

$$\vee\,:\,\mathrm{BGL}\;\to\;\mathrm{BGL}, \qquad\qquad \vee\,:\,\mathrm{Perf}\;\to\;\mathrm{Perf}$$

其定义为 $\vee^*\mathcal{E}=\mathcal{E}^\vee$，对 $\mathcal{F}$ 也类似。

A.2.4. 陈类。 我们有同构

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{BGL}_n)\;\simeq\;\mathbf{Q}[c_1,\dots,c_n], \qquad\qquad \mathrm{H}^*(\mathrm{Perf}_n)\;\simeq\;\mathbf{Q}[c_1,c_2,\dots]$$

其中 c_i 的上同调次数为 $2i$，并且满足

$$\oplus^*c_n \;=\; c_n\otimes 1+c_{n-1}\otimes c_1+\cdots+1\otimes c_n. \tag{118}$$

格罗滕迪克在向量丛的情形中证明了，这一性质唯一刻画了 c_i，但将 c_1 乘以一个非零标量除外。

对于任意向量丛或完美复形 V，我们通过沿分类映射 $X \to \mathrm{BGL}$ 或 $X \to \mathrm{Perf}$ 拉回生成元 c_i，来定义陈类 $c_i(V)$，并将陈类级数定义为

$$c(V,z) \;=\; \sum_{r\geqslant 0} c_r(V,z) z^r$$

其中 $c_0 = 1$。此外，

命题 A.2.5. 陈类级数满足

(1) $f^*c(V,z) = c(f^*V,z)$ 对任意映射 $f\colon X \to Y$ 以及其上的向量丛或完美复形 VY。

(2) $c(V_1 \oplus V_2, z) \;=\; c(V_1,z)\cdot c(V_2,z)$ 对向量丛或完美复形 V_1, V_2。

(3) $c(V\otimes \mathcal{L}, z^{-1}) = \left(\frac{z+c_1(\mathcal{L})}{z}\right)^{\mathrm{rk}\mathcal{V}} c(V,(z+c_1(\mathcal{L}))^{-1})$ 对于线丛 $\mathcal{L}$，即左侧是右侧关于 z^{-1} 的幂级数展开。

(4) $c(V^\vee,\ z) = c(V,\ -z)$。

第 (3) 部分可通过将陈类级数展开为陈特征的指数形式来证明，参见[Lat22，Lem. 2.6.19]。

A.2.6. 欧拉类。若 V 是秩为 n 的向量丛，其欧拉类 即为其最高陈类 $e(V) = c_n(V)$。同样，给定一个由向量丛复形构成的完美复形

$$V \;=\; (V_{-n} \to V_{-n+1} \to \cdots \to V_{m-1} \to V_m)$$

我们将其欧拉类 定义为

$$e(V) \;=\; e(V_n)^{\pm}\cdots\frac{1}{e(V_{-1})}\cdot e(V_0)\cdot\frac{1}{e(V_1)}\cdots e(V_m)^{\pm} \;\in\; \mathrm{H}^*(X)[e(V_i)^{-1} \;:\; i \text{ odd}].$$

A.2.7. 生成级数 Ψ。对于任意完美复形或向量丛 V，我们定义幂级数

$$\Psi(V,z) = z^{\mathrm{rk}V} c(V, z^{-1}) \tag{119}$$

由命题 A.2.5 中陈类级数的性质可得

引理 A.2.8. 我们有

(1) $f^*\Psi(V,\ z) = \Psi(f^*V,\ z)$ 对于任意映射 $f\colon X \to Y$ 以及其上的向量丛或完美复形 V Y。

(2) $\Psi(V_1 \oplus V_2,\ z) = \Psi(V_1,\ z)\cdot\Psi(V_2,\ z)$。

(3) $\Psi(V\otimes\mathcal{L},\ z) = \Psi(V,\ z + c_1(\mathcal{L}))$ 对于线丛 $\mathcal{L}$，即左侧是右侧关于 z 的 Laurent 级数展开。

(4) $\Psi(V^\vee, z) = (-1)^{\mathrm{rk}V}\Psi(V,-z)$。

A.2.9. 陈根。 设向量丛 V 由 $X \to \mathrm{BGL}_n$ 诱导，并定义在 X 上，其陈根是 $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}T)$ 的生成元在 $\mathrm{H}^*(X \times_{\mathrm{BGL}_n} \mathrm{B}T)$ 中的像 $x_{V,\,1}$，$\ldots$，$x_{V,\,n} \in$

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathrm{BGL}_n} \mathrm{B}T_n & \longrightarrow & \mathrm{B}T_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\;V\;} & \mathrm{BGL}_n \end{array}$$

其中 T_n 是 GL_n中对角元素构成的极大环面。在论文正文的设定中，$X = \mathcal{M}^{T}_{Q,\,d}$ 且拉回 $\mathrm{H}^*(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^*(X \times_{\mathrm{BGL}_n} \mathrm{B}T_n)$ 是单射，因此在 X 中进行计算时，只需用陈根来表示，例如我们有

$$c(V,z) \;=\; (1+zx_{V,1})\cdots(1+zx_{V,n})$$

因此

$$\Psi(V,z) \;=\; (z+x_{V,1})\cdots(z+x_{V,n}), \qquad\qquad e(V) \;=\; x_{V,1}\cdots x_{V,n}.$$

命题A.2.10. 对于 Y和 $n \neq 0$上的向量丛或有界向量丛复形 V，我们有

$$\Psi(V,nz) \;=\; e(\gamma^n \boxtimes V)$$

其中 γ 是 $\mathrm{B}\mathbf{G}_m$上的典范线丛，并将右侧——先验而言，它是 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbf{G}_m \times Y)$中的一个局部化上同调类——展开为关于 $z^{-1} = c_1(\gamma)^{-1}$的 Laurent 级数。

证明。 由欧拉类的乘法性，以及引理 A.2.8 所述的 $\Psi(-,\;z)$ 对完美复形直和的性质，只需对 V的每个因子证明此结论，即可假设 V是一个向量丛。 $\gamma^n \boxtimes V$的陈根为 $x_i + c_1(\gamma^n) = x_i + nz$，其中 x_i 是 V的陈根，因此我们有

$$e(\gamma^n \boxtimes V) \;=\; \prod_i (x_i + nz) \;=\; \Psi(V,nz),$$

证明该命题。 □

A.2.11. 例子。 例如，一个两项完美复形的陈类级数、欧拉类和 Ψ 级数 $V = (V_0 \to V_1)$为

$$c(V,z) = \frac{c(V_0,z)}{c(V_1,z)}, \qquad e(V) \;=\; \frac{e(V_0)}{e(V_1)}, \qquad \Psi(V,z) \;=\; \frac{\Psi(V_0,z)}{\Psi(V_1,z)}. \tag{120}$$

若将 V_0 和 V_1 的陈根分别记为 x_i 和 y_j，则它们为

$$c(V,z) = \frac{\prod(1+zx_i)}{\prod(1+zy_j)}, \qquad e(V) \;=\; \frac{\prod x_i}{\prod y_j}, \qquad \Psi(V,z) \;=\; \frac{\prod(z+x_i)}{\prod(z+y_j)}. \tag{121}$$

参考文献

[AS02] Nicolás Andruskiewitsch 和 Hans-Jürgen Schneider. “尖 Hopf 代数”。载于：《Hopf 代数的新方向》43（2002），第 1–68 页。[BD23] Tommaso Maria Botta 和 Ben Davison. “通过 BPS 李代数研究 Okounkov 猜想”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2312.14008（2023）。[BD25] Alexander Beilinson 和 Vladimir Drinfeld.《手征代数》。第 51 卷。美国数学会，2025。[BLM24] Arkadij Bojko、Woonam Lim 和 Miguel Moreira. “层的模空间与顶点代数的 Virasoro 约束”。载于：《数学发明》236.1（2024），第 387–476 页。[Bor86] Richard E Borcherds. “顶点代数、Kac-Moody 代数与怪兽”。载于：《美国国家科学院院刊》83.10（1986），第 3068–3071 页。[Bu23] Chenjing Bu. “曲线上的层计数”。载于：《数学进展》434（2023），论文编号 109334，共 87 页。[COZZ26] Yalong Cao、Andrei Okounkov、Yehao Zhou 和 Zijun Zhou. “通过临界稳定包络研究移位量子群”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2601.01518（2026）。[CWY17] Kevin Costello、Edward Witten 和 Masahito Yamazaki. “规范理论与可积性，I”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1709.09993（2017）。[Dav17] Ben Davison. “带势箭图的临界 CoHA”。载于：《数学季刊》68.2（2017），第 635–703 页。[Dav23] Ben Davison. “整性猜想与预投射栈的上同调”。载于：《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal）2023.804（2023），第 105–154 页。[Dav25] Ben Davison. 仿射 BPS 代数、W 代数与 $\mathbb{A}^2$的上同调 Hall 代数。2025。arXiv: 2209.05971 [math.RT]。[DM25] Vladimir Dotsenko 和 Sergey Mozgovoy. “来自顶点代数的 DT 不变量”。载于：J. Inst. Math. Jussieu 24.1（2025），第 291–339 页。[DN24] Tudor Dimofte 和 Wenjun Niu. “Tannakian 量子场论：从 spark 代数到量子群”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2411.04194（2024）。[DNP25] Tudor Dimofte、Wenjun Niu 和 Victor Py. “三维全纯量子场论中的线算子：亚纯张量范畴与 dg 移位 Yangian”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2508.11749（2025）。[DPSSV26] Duiliu-Emanuel Diaconescu、Mauro Porta、Francesco Sala、Olivier Schiffmann 和 Eric Vasserot. 曲面上一维层的上同调 Hall 代数与 Yangian。2026。arXiv: 2603 . 03386[math.AG]。[Dri87] Vladimir G Drinfeld. “Yangian 与量子仿射代数的新实现”。载于：《苏联科学院通报》。第 296 卷。1987，第 13–17 页。[Efi12] Alexander I Efimov. “对称箭图的上同调 Hall 代数”。载于：《组合数学》148.4（2012），第 1133–1146 页。[ES02] P.I. Etingof 和 O. Schiffmann.《量子群讲义》。数学物理讲义。International Press，2002。[ES19] Chris Elliott 和 Pavel Safronov. “可观测量超对称代数的拓扑扭曲”。载于：《数学物理通讯》371.2（2019），第 727–786 页。[FB04] Edward Frenkel 和 David Ben-Zvi.《顶点代数与代数曲线》。第 88 卷。美国数学会，2004。[Gai21] Dennis Gaitsgory. “关于量子几何朗兰兹理论中出现的因子化代数”。载于：《数学进展》391（2021），第 107962 页。

[GJT22] Jacob Gross、Dominic Joyce 和 Yuuji Tanaka。“ℂ线性枚举不变量理论中的普适结构”。载于：*SIGMA*《对称性、可积性与几何方法及其应用》18（2022），第 068 号论文，61 页。[GLW21] Sachin Gautam、Valerio Toledano Laredo 和 Curtis Wendlandt。“杨代数的亚纯 R 矩阵”。载于：《表示论、数学物理与可积系统：献给 *Nicolai Reshetikhin*》 .

Springer，2021，第 201–269 页。[Gre95] James A Green。《Hall 代数、遗传代数与量子群》。载于：《数学创刊》120.1（1995），第 361–377 页。[GT17] Sachin Gautam 和 Valerio Toledano Laredo。《杨代数与量子环代数的亚纯张量等价》。载于：高等科学研究所数学出版物 125.1（2017），第 267–337 页。[HLX22] Jianzhi Han、Haisheng Li 和 Yukun Xiao。《余交换顶点双代数》。载于：《代数杂志》598（2022），第 536–569 页。[Hub09] Keith Hubbard。《顶点余代数、余模、余交换性与余结合性》。载于：《纯粹与应用代数杂志》213.1（2009），第 109–126 页。[Jin26] Shivang Jindal。《循环箭图的上同调 Hall 代数与仿射杨代数的整形式》。2026。arXiv：2408.02618[math.RT]。[Joy18] Dominic Joyce。《模空间同调上的 Ringel–Hall 型顶点代数与李代数结构》。载于：预印本（2018）。[Joy21] Dominic Joyce。《阿贝尔范畴中的计数不变量与墙穿越公式》。2021。arXiv：2111.04694 [math.AG]。[KPS24] Tasuki Kinjo、Hyeonjun Park 和 Pavel Safronov。《3-Calabi-Yau 范畴的上同调 Hall 代数》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2406.12838（2024）。[KS11] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。《上同调 Hall 代数、指数型霍奇结构与动机 Donaldson–Thomas 不变量》。载于：《数论与物理通讯》5.2（2011），第 231–352 页。[Lat21] Alexei Latyntsev。《上同调 Hall 代数与顶点代数》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2110.14356（2021）。[Lat22] Alexei Latyntsev。《顶点代数、代数栈、上同调 Hall 代数与量子群》。2022。[Lat23] Alexei Latyntsev。《因子化量子群》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2312.07274（2023）。[Liu25a] Henry Liu。《阿贝尔范畴中的等变 K 理论计数不变量与墙穿越公式》。2025。arXiv：2207.13546 [math.AG]。[Liu25b] Henry Liu。《乘法顶点代数与量子环代数》。载于：《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）112.2（2025），论文编号 e70270，共 48 页。[Lus10] George Lusztig。《量子群导论》。Springer Science & Business Media，2010。[LV12] Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette。《代数歌剧》。第 346 卷。Springer Science and Business Media，2012。[LZ12] Yifeng Liu 和 Weizhe Zheng。《高阶阿廷栈的增强六操作与基变换定理》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1211.5948（2012）。[Maj94] Shahn Majid。《编织群的交叉积与玻色化》。载于：《代数杂志》163.1（1994），第 165–190 页。[Maj99] Shahn Majid。《编织群的双重玻色化及 $U_q(\mathfrak{g})$的构造》。载于：《剑桥哲学学会数学会刊》第 125 卷，第 1 期。剑桥大学出版社，1999，第 151–192 页。[MO19] Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov。《量子群与量子上同调》。载于：《Astérisque》408（2019），第 ix+209页。

[Rad85] David E Radford。《带投影的霍普夫代数的结构》。载于：《代数杂志》92.2（1985），第 322–347 页。[Rin90] Claus Michael Ringel。《Hall 代数与量子群》。载于：《数学创刊》101.1（1990）。[RS17] Jie Ren 和 Yan Soibelman。《二维 Calabi-Yau 范畴的上同调 Hall 代数、半典范基与 Donaldson-Thomas 不变量（附 Ben Davison 的附录）》。载于：《21世纪的代数、几何与物理》第 324 卷。Progr.Math.。Birkhäuser/Springer，Cham，2017，第 261–293 页。[RSYZ23] Miroslav Rapčák、Yan Soibelman、Yaping Yang 和 Gufang Zhao。《环面 Calabi-Yau 三维簇上的上同调 Hall 代数与反常相干层》。载于：《数论与物理通讯》17.4（2023），第 847–939 页。[Sch06] Olivier Schiffmann。《霍尔代数讲义》。2006。arXiv：math/0611617。[Soi97] Yan Soibelman。《亚纯张量范畴》。载于：arXiv 预印本 q-alg/9709030（1997）。[SV13] O. Schiffmann 和 E. Vasserot。《Cherednik 代数、 W-代数与 $\mathbb{A}^2$上瞬子模空间的等变上同调》。英文。载于：《高等科学研究所数学出版物》118（2013），第 213–342 页。[SV22] Olivier Schiffmann 和 Eric Vasserot。《关于箭图的上同调 Hall 代数：生成元》。2022。arXiv：1705.07488 [math.RT]。[SV24] Olivier Schiffmann 和 Eric Vasserot。《箭图的上同调 Hall 代数与杨代数》。2024。arXiv：2312.15803 [math.RT]。[TV07] Bertrand Toën 和 Michel Vaquié。《dg-范畴中对象的模空间》。载于：《高等师范学院科学年刊》第 40 卷，第 3 期（2007），第 387–444 页。[YZ18a] Yaping Yang 和 Gufang Zhao。《上同调 Hall 代数与仿射量子群》。载于：《数学精选》24.2（2018），第 1093–1119 页。[YZ18b] Yaping Yang 和 Gufang Zhao。《预投射代数的上同调 Hall 代数》。载于：伦敦数学会会刊 116.5（2018），第 1029–1074 页。[YZ20] Yaping Yang 和 Gufang Zhao。《论两个上同调 Hall 代数》。载于：《爱丁堡皇家学会会刊 A辑》150.3（2020），第 1581–1607 页。洛桑联邦理工学院（EPFL），CH-1015 瑞士洛桑。电子邮箱：shivang.jindal@epfl.ch

卡夫利宇宙物理与数学研究所（WPI）、东京大学高等研究院
东京大学，柏市，千叶县 277-8583，日本

电子邮箱地址：sarunas.kaubrys@ipmu.jp

北京数学与应用数学研究院（BIMSA），北京怀柔区，101408，中国

电子邮箱地址：alyoshalatyntsev@gmail.com