arXiv:2603.21711v1 [math.DS] 23 Mar 2026

周期演化系统的特征算子与谱性质

Bram Lentjes * Babette A. J. de Wolff†

2026年3月24日

摘要：本文提出了可闭线性算子的特征算子这一概念，并通过等价关系探讨其相关谱性质。此外，我们为周期演化方程中常见的一大类可闭线性算子，构建特征算子的显式方案。我们通过经典时滞微分方程、无限时滞微分方程以及混合型泛函微分方程的实例展示了研究结果。值得注意的是，我们解决了关于后一类微分方程的弗洛凯指数离散谱结构的一个开放问题。本研究可视为对 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 所建立的强大理论框架的自然且重要的扩展 [40]；该框架涉及特征矩阵以及由自治演化方程导出的谱性质。

关键词：特征算子、可闭线性算子、谱理论、等价关系、周期演化方程。

数学学科分类：34K20, 47A10, 47A56.

1 引言

确定不变集的稳定性是动力系统领域的一项基础任务。如今，人们已有多种方法来解决这一问题，而谱理论则提供了一种尤为有力的方法。例如，考虑自治常微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{ODE}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{C}^n$ 和 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 表示一个足够光滑的向量场。设 $x \in \mathbb{C}^n$ 是常微分方程的一个平衡点。根据经典的李雅普诺夫稳定性定理 [52]，（亦称线性化稳定性原理），回顾可知，x 的稳定性在很大程度上取决于矩阵 $A = Df(x)$ 在 $\mathbb{C}$中的谱 $\sigma(A)$ 的位置。现在，设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ 是常微分方程的一个周期为 $T > 0$（最小周期）的 T-周期解，并考虑 $\mathbb{C}^n$中的（极限）周期轨道 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$。乍看之下，人们可能会认为，$\Gamma$ 的稳定性如今在某种程度上由以下谱族决定：$\{\sigma(A(t))\colon t \in \mathbb{R}\}$，其中 $A(t) = Df(\gamma(t))$。然而，简单的反例 [9, 70]表明，一般而言，不存在基于 $\sigma(A(t))$ 的线性化稳定性原理。相反，可以计算单值矩阵 $U(T, 0)$ 的谱 $\sigma(U(T, 0))$，其中 U表示常微分方程在 Γ附近线性化所得的基矩阵解。弗洛凯乘子 $\lambda \in \sigma(U(T, 0))$ 的形式为 $\lambda = e^{\sigma T}$，其中 σ 称为弗洛凯指数。众所周知，其位置

*哈瑟尔特大学数学系，比利时迪彭贝克校区，邮编3590，迪彭贝克(bram.lentjes@uhasselt.be)

†汉堡大学数学系，德国汉堡，邮编20146 (babette.de.wolff@uni-hamburg.de)

弗洛凯指数 $\mathbb{C}$ 在很大程度上决定了 Γ的稳定性，这与平衡点的线性化稳定性原理 [27]类似。尽管这种方法从谱的角度为稳定性问题提供了令人满意的答案，但仍需计算解算子 U，而它通常无法显式求得。相比之下，平衡点 x 的稳定性可直接根据已知矩阵 A来确定。为解决这一问题，近期研究 [50], 通过将 Iooss（及 Adelmeyer）的一个结果改写到泛函分析框架中，提出了闭线性算子$\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 定义如下：

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \qquad (\mathcal{A}\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t).$$

这里，$C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 表示由 $\mathbb{C}^n$ 取值的、定义在 $\mathbb{R}$ 上的 T-周期函数所构成的巴拿赫空间，并配备上确界范数；点表示对 t 求导。采用这一表述，可以得到以下重要刻画

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \{\sigma \in \mathbb{C} : \sigma \text{ is a Floquet exponent}\}, \tag{1}$$

其中，$\sigma_p(\mathcal{A})$ 表示$\mathcal{A}$的点谱。此外，$\mathcal{A}$ 的谱性质在研究常微分方程中极限环的余维一 [45] 和余维二 [11, 10] 分岔时发挥了根本作用。例如，与中心子空间相关的$\mathcal{A}$ 的（广义）特征函数沿 Γ 构成一个 T-周期基，进而为邻近的周期中心流形提供了自然的坐标系统；更多信息请参见 [36, 37, 51, 44] 。临界正规形系数的显式计算公式用这些 T-周期（广义）特征函数表示，并决定这些分岔的性质和方向（退化、亚临界或超临界）。这些公式已在若干数值分岔分析软件包中实现，例如 `MatCont` [13, 14] 和`BifurcationKit` [67]，并被众多不同科学领域的研究人员广泛使用。

对于无限维动力系统，由于其具有无限维的性质，确定不变集的稳定性通常更具挑战性。对于某些子类，可以进行降维，从而更容易确定不变集的稳定性。例如，考虑自治时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = F(x_t), \quad t \geq 0, \tag{DDE}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{C}^n$ 和 $x_t \in X := C([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ 表示未知量 x 在时刻 t的历史函数，其定义为 $x_t(\theta) := x(t + \theta)$，对所有 $\theta \in [-h, 0]$均成立。这里，$0 < h < \infty$ 表示（有限）时滞的上界，而无限维状态空间 X 在赋予上确界范数后成为一个巴拿赫空间。为了研究（时滞微分方程）平衡点 $x \in X$ 的稳定性，我们关注线性时滞微分方程平凡解的稳定性

$$\dot{y}(t) = Ly_t, \quad t \geq 0, \tag{LDDE}$$

其中 $L = DF(x) : X \to \mathbb{C}^n$ 是一个有界线性算子。（时滞微分方程）的解由作用于 X 上的强连续半群生成，其（无穷小）生成元 A: $\mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ 为

$$\mathcal{D}(A) = \{\varphi \in X : \varphi' \in X,\ \varphi'(0) = L\varphi\}, \quad A\varphi = \varphi',$$

参见 [16, 29, 17]以获取更多信息。根据相同的参考文献可知，A 是一个闭线性算子，其谱 $\sigma(A)$ 在很大程度上决定了 x的稳定性，从而保证线性化稳定性原理对（时滞微分方程）成立。计算 $\sigma(A)$ 起初看起来可能很繁琐，但 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 在 [40]中提出了一个强大的框架，将无限维状态空间 $C([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ 上相当困难的谱问题转化为其有限维陪域 $\mathbb{C}^n$上的简单得多的问题。特别是，他们构造了生成元 A 与全纯矩阵值函数 Δ之间的扩张后等价： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 其作用形式为

$$\Delta(z)q = zq - L[\theta \mapsto e^{z\theta}q], \quad \forall q \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

形式为

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} = F(z) \begin{pmatrix} I_{\mathbb{C}^n} & 0 \\ 0 & zI - A \end{pmatrix} E(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

在此， Δ可通过将形如 $t \mapsto e^{zt}q$ 的特征解代入（时滞微分方程）自然得到，而E 和 F 是全纯算子值函数，其取值是在适当巴拿赫空间之间的有界双射。由（3）可直接推出 σ（A）仅由有限型孤立特征值组成，并满足

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det \Delta(z) = 0\}. \tag{4}$$

此外，等价关系 (3) 自然给出了预解算子$z \mapsto (zI - A)^{-1}$ 关于 $z \mapsto \Delta(z)^{-1}$的显式表示。通过将所谓的“自治泛函微分方程中的民间定理”重新表述为重数定理，可以由此得到简洁的证明。它还给出了 A 的（广义）特征函数关于 Δ的约当链的显式描述；最终，（时滞微分方程）的所有基本解都可以用这些约当链表示，更多细节及应用参见[40, 29, 16] 。由此，矩阵值函数 Δ刻画了线性算子 A的谱性质，因此称为 A的特征矩阵。此外， A 与 Δ 之间的联系构成了在平衡点附近对（时滞微分方程）进行（数值）分岔分析的基础；更多细节及其在数值分岔分析软件包（如 `DDE-BifTool` [62, 20, 43] 和 `BifurcationKit`）中的实现，参见 [3, 4, 38, 16]。

为构造一个与常微分方程情形中周期轨道对应结果类似的结果，设 γ 是方程（T-周期解，并考虑（极限）周期轨道 $\Gamma = \{\gamma_t \in X : \ t \in \mathbb{R}\}$ 中的 X。为确定 Γ的稳定性，我们关注周期线性时滞微分方程的平凡解的稳定性

$$\dot{y}(t) = L(t)y_t, \quad t \geq 0, \tag{LDDE$_T$}$$

其中 $L(t) = DF(\gamma_t) : X \to \mathbb{C}^n$ 是一个有界线性算子。由 [16, 29] 可知，其解由定义在 U 上的强连续前向演化系统 X 生成，该系统在时刻 t的广义（无穷小）生成元 $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subseteq X \to X$ 为

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{\varphi \in X : \varphi' \in X, \ \varphi'(0) = L(t)\varphi\}, \quad A(t)\varphi = \varphi',$$

更多信息请参见 [50, 49, 8] 。在这一无限维情形下，单值算子$U(T, 0)$ 成为定义在 X上的迭代紧有界线性算子，并且同样可以证明线性化稳定性原理成立 [16]。由此自然产生的问题是：对于（时滞微分方程），如上文所示的特征矩阵方法是否也可用于分析（时滞微分方程$_T$）的谱结构。

这一方向上的首批结果归功于 Hale 和 Verduyn Lunel。他们在 [29] 中针对离散时滞情形引入了 $U(T, 0)$ 的特征矩阵，并假设最大时滞 h 是周期 T的整数倍。该结果的证明依赖于前文提到的、在 [40]中发展的特征矩阵理论框架。后来，Kaashoek 和 Verduyn Lunel 在 [41] 中利用适用于紧算子类的一般特征矩阵框架，重新证明了同一结论。最近，这些结果被推广到具有对称性的系统，这与等变 Pyragas 控制 [60], 相关；当时滞与解的时空对称性相关时，可以构造特征矩阵 [12]。所有这些结果都表明，特征矩阵是分析 (LDDE$_T$) 的 Floquet谱的有效工具。然而，这些结果仅适用于周期 T 与最大时滞h 之间满足特定关系的情形。为消除这些限制，Szalai 等人 [65],迈出了第一步：他们构造了特征矩阵 $\Delta_n(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ，用于求取 (LDDE$_T$) 的 Floquet乘子（或其逆算子），且不对 h与 T之间的关系施加额外假设。后来，Sieber 和 Szalai [63] 发现， Δ_n 在 $\mathbb{C}$中有极点，而这些极点可能与 Floquet乘子（或其逆算子）重合，因此构造出的特征矩阵未必能捕获所有乘子

。为解决这一问题，Sieber 和 Szalai 将 $\Delta_n(z)$ 修改为特征矩阵 $\Delta_{nk}(z) \in \mathbb{C}^{nk\times nk}$，使得 Δ_{nk} 在 $\mathbb{C}$ 中有限半径的圆盘内没有极点（该半径取决于 k），但在圆盘外仍可能存在极点。因此，可以保证构造出的特征矩阵 Δ_{nk} 能够捕获给定圆盘内的 Floquet乘子（或其逆算子），但可能无法捕获圆盘外的（取逆后的）乘子。

总而言之，迄今尚未有人构造出一种特征矩阵，能够在不对最大时滞 h 与周期 T之间的关系施加额外假设的情况下，完整刻画（时滞微分方程$_T$）的弗洛凯谱。本文正是旨在朝这个方向推进。为了捕捉所有弗洛凯乘子/指数，我们付出的代价是：所得的特征对象不再像以往的构造那样是矩阵值的，而是算子值的。换言之，我们构造了一个特征算子，用于编码（时滞微分方程$_T$）的完整弗洛凯谱。构造这一特征算子的方法，基于文献 [5, 48] 最近提出的一个发现：谱等式（1）对（时滞微分方程$_T$同样成立，其中非闭但可闭的线性算子$\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq C_T(\mathbb{R},X) \to C_T(\mathbb{R},X)$ 具有如下形式

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R},X) : \varphi(t) \in \mathcal{D}(A(t)) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (\mathcal{A}\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t). \tag{5}$$

此外，文献 [5, 48] 的作者建立了$\mathcal{A}$ 与全纯算子值函数 Δ 之间的若干有趣的谱关系，其作用为

$$(\Delta(z)q)(t) = \dot{q}(t) + zq(t) - L(t)[\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)], \quad \forall q \in C_T^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^n), \tag{6}$$

通过代入形式如下的 Floquet特征解，可以自然地得到 $t \mapsto e^{zt}q(t)$ 到（时滞微分方程$_T$）中，其中 $z \in \mathbb{C}$。随后， [5] 将这些结果用于研究（时滞微分方程）的极限环余维一分岔。其中，式（ Δ 6）中针对$\mathcal{A}$ 的特征算子，在分析平衡点分岔时发挥了与式（ Δ (2）中针对 A 的特征矩阵类似的作用 [3]。鉴于这些结果，自然可以预期，$\mathcal{A}$ 与 Δ 形式（3）的特征算子在扩张后等价。本文证实了这一预期。然而，建立这种等价关系及其相关谱结果，比我们最初预想的有趣得多，也更具技术挑战性。

为便于理解我们的结果，我们指出，在一般情形下，要捕捉（时滞微分方程$_T$）的所有弗洛凯乘子，需要使用特征算子而非特征矩阵；这与已有结果一致。Sieber 和 Szalai 的构造 [63], 中，特征矩阵 $\Delta_{nk}(z) \in \mathbb{C}^{nk\times nk}$ 的维数会随着圆盘半径（依赖于k）的增大而无界增长；该圆盘用于捕捉（取倒数后的）弗洛凯乘子。此外，专著 [41] 中列举了若干例子，其中（ h 时滞微分方程 T ）的最大时滞和周期$_T$成有理数关系。在这些例子中，随着比值T/h 变得越来越无理，特征矩阵的维数也随之增大。我们还注意到，Verduyn Lunel [68], 在 Just 的 [39], 以及 Skubachevskii 和 Walter [64]此前也报告过类似的观察结果。综上可见，若要捕捉（时滞微分方程$_T$）的完整弗洛凯谱，同时不对时滞与周期之间的关系作任何额外假设，那么采用特征算子框架而非特征矩阵框架是自然的选择。

尽管我们将谱问题化归为特征算子，并未像经典意义上借助特征矩阵那样降低维数，但这仍大大简化了谱问题：原先关于 A 的谱问题是在 $C_T(\mathbb{R},X)$ 上提出的，其中 $X = C([-h,0],\mathbb{C}^n)$；而特征算子 Δ 作用于更简单的空间 $C_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$。此外，与算子 A 相比，使用特征算子 Δ 具有计算和分析两方面的优势。在计算方面，事实证明，(DDE) 中极限环所有余维一分岔的临界正规形系数都可以用特征算子 Δ表示，更多细节见 [5] 。关键观察是，与上文所述的有限维常微分方程情形类似，与中心子空间相关的 A 的（广义）特征函数沿极限环 Γ构成一个 T-周期基，更多细节见 [50] 。最重要的是，这些

（广义）特征函数$\mathcal{A}$ 可以用 Δ的约当链表示。在这一框架$\mathcal{A}$与 Δ之间的联系构成了极限环附近 (时滞微分方程) 数值分岔分析的基础，更多细节以及其在数值分岔分析软件包 `PeriodicNormalizationDDEs` [6]中的实现方式见 [5, 50, 49] ；该软件包与 `BifurcationKit`兼容。本文提出的特征算子框架在分析上不仅适用于 (时滞微分方程$_T$，还适用于更广泛的一类周期演化方程，例如具有无限时滞的时滞微分方程以及混合型泛函微分方程。在这些情形下，我们利用特征算子的存在性，为这些类别的微分方程推导出新的谱结果。特别是，在相对温和的条件下，我们证明了混合型周期泛函微分方程的虚轴附近存在谱隙；此前这在文献中一直是一个未解问题。

1.1 挑战与概述

在即将进行的 线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征算子构造 Δ 中，我们遇到若干函数分析方面的挑战。

首个挑战源于线性算子 $\mathcal{A}$ 通常并非闭算子，而只是可闭的这一事实。在分析其谱时可以发现，传统的谱定义 $\sigma(\mathcal{A})$ 对于 $\mathcal{A}$ 并不适用（注 5）。因此，我们在第 2.1 节介绍可闭线性算子的谱理论，重点关注点谱和谱中的孤立点。我们首先利用约当链从代数角度分析点谱，随后通过围道积分从解析角度研究孤立谱点。然而，由此得到的谱投影只能确定闭包的不变子空间，因此无法充分刻画原可闭线性算子独特的谱结构（注 14）。

第二个挑战在于，需要为可闭线性算子定义一种合适的等价概念，因为文献主要关注闭（或有界）线性算子之间的有界等价（注 21）。采用这一扩展后的等价定义，我们仍然可以自然地定义约当链，并证明它们通过等价建立的重要一一对应关系，详见第2.2节 中的构造。此外，我们还证明了某些特定谱数在这种等价关系下保持不变。

第三个挑战在于证明，在定义于巴拿赫空间 X 上的可闭线性算子$\mathcal{A}$ 与特征算子Δ 之间的等价关系下，某些谱性质得以保持不变；后者的取值定义在一个（可能不同的）巴拿赫空间 Y上。这项工作将在第2.3节中完成，前提是满足三个额外的（谱）假设：（SH1）、（SH2）和（SH3）。因此，我们在第 2 节 中得到的所有结果，都是对 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 关于特征矩阵的相关工作的自然扩展，详情请见注 30 。

在第 3 节中，我们还针对给定的线性算子$\mathcal{A}$： $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$，构造了一套一般方案，其形式为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ MD\varphi = K\varphi\}, \quad \mathcal{A}\varphi = D\varphi, \tag{7}$$

一个特征算子 Δ，其取值为 $\Delta(z) : \mathrm{D}(\Delta(z)) \subseteq \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \to \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y)$，其中 $z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$。这里， D 和 K 是可闭线性算子，而 M 是有界线性算子。在应用中， D可视为极大算子，而 K 和 M 可解释为广义边界值算子。对于 $Z \in \{X, Y\}$，巴拿赫空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Z)$表示由定义在 $\mathbb{R}$上的 T-周期 Z值函数构成的任意函数空间。由于许多周期演化方程都可以表示为形式（7），因此这一方案可应用于广泛的周期演化系统，充分展现其广泛适用性。不过，我们已提到，这一构造比 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 的原始构造复杂得多，主要是因为线性算子 A 不一定是闭算子，而且 Δ 不一定是矩阵值的，这使得无法像（4）那样通过点谱和行列式进行强有力的谱刻画。尽管如此，特征算子仍能将 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$中一个棘手的谱问题简化为

将其约化为 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y)$ 中一个更简单的问题。在接下来的应用中（第4节），状态空间 X 通常具有 $\mathrm{F}(I, Y)$ 的形式，因此谱约化十分清晰。与特征矩阵方法类似，我们给出了预解算子 $z \mapsto (zI - \mathrm{A})^{-1}$ 关于 $z \mapsto \Delta(z)^{-1}$ 的显式表示（推论 43）；通过将“周期泛函微分方程中的民间定理”重新表述为抽象重数定理，给出了该定理的证明（推论 44）；给出了 A 的（广义）特征函数关于 Δ的约当链的显式表示（推论 45）；最终，还能利用这些约当链计算一大类周期线性泛函微分方程的所有基本解。此外，我们在注 59 中说明，Kaashoek 和 Verduyn Lunel 针对线性自治系统的特征矩阵，可以通过我们的构造以两种等价方式得到：自然地令周期 $T = 0$，或者限制在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Z)$ 中的常值函数子空间上；对于（时滞微分方程$_T$）且 $T/h \in \mathbb{Q}$的情形，后一种解释可能更有启发性，更多细节见注 60。此外，我们在第3.3节中表明，A 和 Δ 的底层 T-周期结构会使其谱呈现$\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-周期模式。因此，将谱分析限制在水平带 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]\}$（或其子集）内，而非考察整个复平面，可以进一步简化这些线性算子的谱分析。

在第4节中，我们将结果应用于泛函微分方程（函数微分方程）。由于周期线性泛函微分方程的类别相当广泛，我们将通过三个在应用中频繁出现的代表性子类来说明第 3 节中的结果：

1）经典时滞微分方程（第 4.1 节）： 这个子类作为我们的启发性示例在（时滞微分方程$_T$中引入，自然应纳入此处。我们将详细证明这一情形下的结果；而接下来两个子类的证明遵循类似的思路，因此会部分省略。

2）无限时滞延迟微分方程（第 4.2 节）： 无限时滞时滞微分方程这一子类尤其有趣，因为线性化稳定性原理是否成立取决于所选的状态空间 X。此外，我们注意到，在为自治无限时滞延迟微分方程构造特征矩阵时所遇到的挑战完全相同，也可以采用相同方法应对 [40,第 II.1 节。3]。

3）混合泛函微分方程（第 4.3 节）： 这一泛函微分方程子类凸显了特征算子框架的优势，尤其是因为通常不存在向前演化系统 U 。因此，我们肯定 Hupkes 和 Verduyn Lunel 关于弗洛凯指数离散谱结构的猜想 [35, 假设（HF）]，详情请参见注74。

在第 5 节中，我们总结并讨论了更多可应用我们构造方法的周期演化方程示例。此外，我们列出了一些由我们的结果自然引出的猜想和开放问题，这些内容或可为该领域的进一步研究指引方向。

注1。 我们旨在面向两类读者：一类对算子理论感兴趣，另一类关注动力系统中的应用。对于前者，我们建议阅读第 2 节中介绍的理论；对于后者，我们建议从第4节中的应用入手，之后再参考第 3 节概述的一般框架。 ♢

2 可闭线性算子的特征算子

2.1 可闭线性算子的谱性质

我们首先介绍本文后续部分将使用的记号。设 Y 和 Z 是赋范空间（但不一定完备）。从（ Y的一个线性子空间）到 Z的所有线性算子构成的集合记作 $L(Y, Z)$，并记 $L(Z) := L(Z, Z)$。类似地，从 Y 到 Z的所有有界线性算子构成的集合记作$\mathcal{L}(Y, Z)$，并记$\mathcal{L}(Z) := \mathcal{L}(Z, Z)$。注意，赋予$\mathcal{L}(Y, Z)$算子范数后，它成为赋范空间；当 Z 是巴拿赫空间时，它是巴拿赫空间；当 $Y = Z$ 是巴拿赫空间时，在复合运算下它构成巴拿赫代数。

设 Y 和 Z 是巴拿赫空间，并考虑线性算子 $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq Y \to Z$，其定义域$\mathcal{D}(A)$ 是 Y的线性子空间。我们称$\mathcal{N}(A) := \{\varphi \in \mathcal{D}(A) : A\varphi = 0\}$ 为 A的核，称$\mathcal{R}(A) := \{A\varphi \in$

$Z: \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$ 为 A 的值域，称 $\Gamma(A) := \{(A\varphi, \varphi) \in Z \times Y: \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$ 为 A的图。在本文余下部分中，我们将经常使用闭线性算子和可闭线性算子的概念。

定义 2. 如果线性算子 A 是闭的，则称其图 $\Gamma(A)$ 是 $Z \times Y$ 的闭子集。此外，如果线性算子 A 是可闭的，则称其为可闭的，即 A 存在一个闭线性扩张，这意味着存在一个闭线性算子 $B: \mathcal{D}(B) \subseteq Y \to Z$，满足 $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$，并且 $B\varphi = A\varphi$ 对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ 都成立。$\Diamond$

设 $A: \mathcal{D}(A) \subseteq Y \to Z$ 是一个可闭线性算子，则存在一个最小的闭线性扩张 A，称为 A的闭包，它可由 A刻画为 $\Gamma(A) = \Gamma(A)$，见 [24,命题 XIV.1。3] 其中给出了详细证明。作为上述定义和刻画的直接推论，我们得到以下关于 A 与 A的定义域、核和值域之间联系的结果。需要注意的是，（8）中的包含关系可能是严格的，并且拓扑闭包是相对于相关巴拿赫空间上的范数而言的。

引理 3. 下列包含关系成立：

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathcal{D}(A)}, \quad \mathcal{N}(A) \subseteq \overline{\mathcal{N}(A)} \subseteq \mathcal{N}(\overline{A}), \quad \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}. \tag{8}$$

证明。我们先证明关于定义域的结论。这里，第一个包含关系显然。为证明第二个包含关系，设给定 $\varphi \in \mathcal{D}(A)$。则 $(A\varphi, \varphi) \in \Gamma(A) = \Gamma(A)$。因此，存在一个序列 $(\varphi_m)_m$ 属于 $\mathcal{D}(A)$，使得 $(A\varphi_m, \varphi_m) \to (A\varphi, \varphi)$ 当 $m \to \infty$ 时成立。这意味着 $\varphi_m \to \varphi$ 当 $m \to \infty$ 时成立，即 $\varphi \in \mathcal{D}(A)$。

我们接着证明关于核的结论。这里，第一个包含关系显然。为证明第二个包含关系，设给定 $\varphi \in \mathcal{N}(A)$。那么存在一个序列 $(\varphi_m)_m$ 属于 $\mathcal{N}(A)$，使得 $\varphi_m \to \varphi$ 当$m \to \infty$ 时成立，因此对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A\varphi_m = 0$。因此，$(A\varphi_m, \varphi_m) \to (0, \varphi) \in \Gamma(A) = \Gamma(A)$ 当 $m \to \infty$ 时成立。因此，$\varphi \in \mathcal{D}(A)$ 且 $A\varphi = 0$，从而 $\varphi \in \mathcal{N}(A)$。

最后，我们证明关于值域的结论。这里，第一个包含关系显然。为证明第二个包含关系，设给定 $\psi \in \mathcal{R}(A)$。那么存在一个 $\varphi \in \mathcal{D}(A)$，使得 $A\varphi = \psi$ 因此 $(\psi, \varphi) \in \Gamma(A) = \Gamma(A)$。于是，存在一个序列 $(\varphi_m)_m$，它属于$\mathcal{D}(A)$，满足 $\varphi_m \to \varphi$ 并且$A\varphi_m \to A\varphi = \psi$ 当 $m \to \infty$时成立。由此可得 $\psi \in \mathcal{R}(A)$。 □

因此，若我们记（采用一种略显不寻常、但之后很有用的记法）$Y_A := \mathcal{D}(A) \subseteq Y$，那么这个赋范空间相对于图范数 $\|\cdot\|_A := \|\cdot\| + \|A\cdot\|$便成为一个巴拿赫空间。特别地，$A$ 成为 Y_A 上的连续（有界）线性算子，并且$\mathcal{D}(A)$在图范数下于 Y_A 中稠密。使用前面引入的记法，我们有 $A \in L(Y, Z)$ 和 $A \in \mathcal{L}(Y_A, Z)$。

现在我们来刻画可闭线性算子 A 的预解集和谱。为此，我们假设巴拿赫空间 Y 与 Z 是复数域上的且相同，并将这个共同的空间记作 X。如引言中所述，经典的谱概念并不适用于我们研究可闭线性算子的目的。因此，我们将采用以下扩展的谱概念，该概念引自 [66, 第 5] 章。

定义 4。 设 X 为复巴拿赫空间，$A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ 为可闭线性算子。若复数 z 属于 A 的预解集 $\rho(A)$，则算子 $zI - A$ 是单射，且其在 X 中的值域 $\mathcal{R}(zI - A)$ 稠密，并且由 $R(z, A)$ 定义的 A 在 z 处的预解式：$= (zI - A)^{-1}: \mathcal{R}(zI - A) \to \mathcal{D}(A)$ 是有界线性算子。在此情形下，我们称线性算子 $zI - A$ 是可逆。

谱 $\sigma(A)$ of A 定义为 $\mathbb{C}$中 $\rho(A)$的补集，而点谱$\sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$ of A 是由满足 $\sigma I - A$ 不是单射的那些 $\sigma \in \mathbb{C}$ 构成的集合，即对于某个非零特征向量 $\varphi \in \mathcal{D}(A)$，$A\varphi = \sigma\varphi$。如果 $\sigma \in \sigma_p(A)$，我们也将 σ 称为 A的特征值。$\Diamond$

注记 5. 我们强调，上述对可闭线性算子的预解集的定义扩展了经典定义（[17, 定义 IV.1.1]），后者针对闭线性算子，只要求 $zI - A$ 是线性双射。在我们的设定中，满射条件放宽为要求 $zI - A$ 具有稠密值域，同时还要求 $R(z, A)$ 有界。若 A 是闭的

（因而可闭的）线性算子，且 $z \in \rho(A)$，则应用闭图定理可证明 $zI - A$ 实际上是满射，且其逆算子自动有界 [66, 定理 4.2.E]。因此，对于闭线性算子，定义 4与经典定义一致。

我们无法采用通常定义的原因是，我们感兴趣的大多数算子通常并非闭算子，而只是可闭算子（命题 80），且它们的预解式的定义域不一定是整个空间 X（命题 81）。回想一下，按照通常的标准定义，根据 [24,命题 XIV.1。2]，对于非闭算子 $\rho(A) = \emptyset$，有 A，这对我们的目的而言极不实用。♢

在本节余下部分中，我们固定一个复巴拿赫空间 X 以及一个可闭线性算子A: $\mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$。下面陈述关于 A 的预解式与谱的第一个基本结果。由于该结果可由 [66, 定理 5.1.A 和 5.1.B],直接推出，故省略证明。

命题 6。 预解集 $\rho(A)$在 $\mathbb{C}$中是开集，因此谱 $\sigma(A)$ 是闭集。特别地，若 $z_2 \in \rho(A)$ 且 $z_1 \in \mathbb{C}$ 满足 $|z_2 - z_1| < 1/\|R(z_2, A)\|$，则 $z_1 \in \rho(A)$。

下一步是详细分析与 A 和 $\overline{A}$ 相关的谱对象之间的关系。

引理 7. 有 $\rho(A) = \rho(\overline{A})$，特别是

$$R(z, A) = R(z, \overline{A})|_{\mathcal{R}(zI-A)}, \quad \forall z \in \rho(A). \tag{9}$$

因此，$\sigma(A) = \sigma(\overline{A})$，并且有 $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_p(\overline{A})$。此外，若对某个 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，有 $\sigma_p(A) \cap \Omega = \sigma(A) \cap \Omega$，则 $\sigma_p(\overline{A}) \cap \Omega = \sigma_p(A) \cap \Omega$。

证明。我们先证明 $\rho(A) \subseteq \rho(\overline{A})$，因此设 $z \in \rho(A)$ 给定。由于 $\mathrm{D}(R(z, A)) = \mathrm{R}(zI - A)$ 在 X 中稠密，有界线性算子 $R(z, A)$ 可唯一扩张为有界线性算子 $R(z, A) \in \mathrm{L}(X)$。由于 $\Gamma(A) = \Gamma(\overline{A})$，可以验证 $R(z, A) = R(z, \overline{A})$，即 $z \in \rho(\overline{A})$。为证明另一包含关系，设 $z \in \rho(\overline{A})$ 给定。注意，$zI - A$ 是单射，因为线性扩张 $zI - A$ 是单射。为证明 $\mathrm{R}(zI - A)$ 在 X 中稠密，我们将引理 3 应用于线性算子 $zI - A$；该算子可闭，因为 A 可闭且 I 有界（引理 78）。由此得到 $X = \mathrm{R}(zI - A) \subseteq \mathrm{R}(zI - \overline{A})$，因此 $\mathrm{R}(zI - \overline{A}) = X$。显然，$R(z, A)$ 有界，因为 $R(z, A)$ 是有界线性延拓。由此可得 $z \in \rho(\overline{A})$。

要证明 (9)，还需说明 $R(z,A)|_{\mathcal{R}(zI-A)}$ 映入 $\mathrm{D}(\overline{A})$。事实上，若 $\psi \in \mathrm{R}(zI - A)$，则存在 $\varphi \in \mathrm{D}(A)$，使得 $(zI - A)\varphi = \psi$。由于 $\overline{A}$ 延拓了 A，因此 $(zI - \overline{A})\varphi = \psi$，这意味着 $R(z, \overline{A})\psi = \varphi \in \mathrm{D}(\overline{A})$。

为证明关于点谱的断言，取 $\sigma \in \sigma_p(A)$。现在将引理 3 中关于核的结论应用于可闭线性算子 $\sigma I - A$，即可得到所需结果。

最后一个断言由 $\sigma_p(A) \cap \Omega \subseteq \sigma(\overline{A}) \cap \Omega = \sigma(A) \cap \Omega = \sigma_p(A) \cap \Omega \subseteq \sigma_p(\overline{A}) \cap \Omega$ 得出。这里，第一个等式由证明的第一部分得到，第二个等式则由附加假设得到。 □

需要注意的是，引理 7 中的点谱包含关系可能是严格的，因为存在可闭线性算子虽然是单射，但其闭包却不是单射，详见 [56, 第 19.2 节。5]有关更多细节。不过，可以证明，$\sigma_p(\overline{A}) \setminus \sigma_p(A)$ 中的谱值实际上属于 A的近似点谱，但我们不再进一步探讨这一方向。回想一下，如果 $\sigma_p(\overline{A}) \cap \Omega = \sigma(A) \cap \Omega$ 对某个子集$\Omega \subseteq \mathbb{C}$成立，则不会出现这种情况，参见第4节中的应用。

为了进一步刻画 A 的点谱，设给定 $\sigma \in \sigma_p(A)$。X 的线性子空间$\mathcal{N}(\sigma I - A)$ 称为 A 在 σ 处的特征子空间，其维数 $m_g(\sigma, A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 称为 A 在 σ 处的几何重数。考虑以下闭线性子空间

$$E_\sigma(A) := \overline{\bigcup_{l \geq 1} \mathcal{N}((\sigma I - A)^l)}, \quad Q_\sigma(A) := \overline{\bigcap_{l \geq 1} \mathcal{R}((\sigma I - A)^l)},$$

X 的。这里，$E_\sigma(A)$ 称为 A 在 σ 处的广义特征子空间，而 $Q_\sigma(A)$ 称为 A 在 σ 处的互补广义特征子空间。$E_\sigma(A)$ 的维数 $m_a(\sigma,A)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 称为 A 在 σ 处的代数重数。注意，$E_\sigma(A)$ 是 X 中包含所有整数 $l\geq 1$ 对应的线性子空间递增链 $\mathrm{N}((\sigma I-A)^l)$ 的最小闭线性子空间。此外，$m_g(\sigma,A)\leq m_a(\sigma,A)$，且条件 $m_g(\sigma,A)=\infty$ 蕴含 $m_a(\sigma,A)=\infty$。对于情形 $m_g(\sigma,A)<\infty$，要更详细地描述 $E_\sigma(A)$，需要引入可闭线性算子的约当链这一概念。

定义 8. 设 X 是复巴拿赫空间，且 $A:\mathcal{D}(A)\subseteq X\to X$ 是可闭线性算子。若向量的有序集合 $\{\varphi_0,\dots,\varphi_{k-1}\}$ 属于 $\mathcal{D}(A)$，则称其为 A 在 $\sigma\in\mathbb{C}$ 处的**约当链**，如果 $\varphi_0\neq 0$ 且

$$(A-\sigma I)\varphi_i=\begin{cases}0, & i=0,\\ \varphi_{i-1}, & i=1,\dots,k-1.\end{cases}$$

向量 $\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1}$ 称为 A 在 σ 处的**广义特征向量**。数值 $k\in\mathbb{N}$ 称为该链的**长度**。如果以 φ_0 开始的链存在最大长度，则称该长度为 φ_0 的**秩**。如果不存在最大长度，则称 φ_0 具有**无限秩**。$\Diamond$

假设 $p=m_g(\sigma,A)<\infty$。按照 Gohberg 和 Sigal[26], 的代数步骤，我们可以将约当链排列如下。设 $\varphi_1,0,\dots,\varphi_p,0$ 是 $\mathrm{N}(\sigma I-A)$ 的一组基，并选取该基使特征向量 $\varphi_j,0$ 的秩 $k_j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 依次达到最大。可能为无限的整数 $k_1\leq\cdots\leq k_p$ 与基的选择无关，它们表示约当块的大小，称为 σ 的部分重数。我们将最大的部分重数 $k_p=:k(\sigma,A)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 定义为 A 在 σ 处的上升。在此框架下，代数重数满足 $m_a(\sigma,A)=\sum_{j=1}^p k_j$。此外，若 $m_a(\sigma,A)<\infty$，则称 σ 为 A 的有限型特征值，因为在这种情况下，$m_g(\sigma,A)$、$m_a(\sigma,A)$ 和 $k(\sigma,A)$ 均为有限。特别地，$k(\sigma,A)$ 是满足以下条件的最小整数

$$E_\sigma(A)=\mathcal{N}((\sigma I-A)^{k(\sigma,A)}),\quad Q_\sigma(A)\subseteq\overline{\mathcal{R}((\sigma I-A)^{k(\sigma,A)})},\tag{10}$$

这里回顾一下，$E_\sigma(A)$ 是闭的，因为它是有限维的。注意，第二个包含关系可能是严格的（参见 [66, 问题 5.4.2]）。此外，$E_\sigma(A)$ 存在如下形式的一组基

$$\varphi_{1,0},\dots,\varphi_{1,k_1-1},\dots,\varphi_{p,0},\dots,\varphi_{p,k_p-1},\tag{11}$$

这称为**（广义）特征向量的典范基**，属于 A 在 σ处。相对于这一特定基，$A|_{E_\sigma(A)}\in\mathcal{L}(E_\sigma(A))$ 的矩阵表示是一个若尔当矩阵，其主对角线上为 σ。（11）中向量的分组，恰好对应于将该若尔当矩阵分解为各个约当块。以下引理阐明了这些概念之间关于 A和 A 的关系。

—

引理 9。 若 $\sigma\in\sigma_p(A)$，则 $m_g(\sigma,A)\leq m_g(\sigma,A)$，$\overline{m}_a(\sigma,A)\leq m_a(\sigma,A)$ 以及 $k(\sigma,A)\leq k(\sigma,A)$，并且满足以下不等式

$$\begin{aligned}&m_g(\sigma,A)+k(\sigma,A)-1\leq m_a(\sigma,A)\leq m_g(\sigma,A)k(\sigma,A),\\ &m_g(\sigma,\overline{A})+k(\sigma,\overline{A})-1\leq m_a(\sigma,\overline{A})\leq m_g(\sigma,\overline{A})k(\sigma,\overline{A}).\end{aligned}\tag{12}$$

证明. 首先回顾引理 7，σ 也属于 $\sigma_p(A)$。由引理 3 可知 $\mathrm{N}(\sigma\overline{I}-A)\subseteq\mathrm{N}(\sigma I-A)$，因此第一个断言成立。为证明第二个断言，归纳论证表明，对于所有整数 $l\geq 1$，均有 $\mathrm{N}((\sigma I-A)^l)\subseteq\mathrm{N}((\sigma I-A)^l)$。由于并集和闭包运算保序，我们得到 $E_\sigma(A)\subseteq E_\sigma(A)$，从而证明了第二个断言。由于 A 在 σ 处的任意约当链也是 A 在 σ处的约当链，第三个断言成立。

现在我们证明 A 的 (12)。首先，若 $m_g(\sigma, A) = \infty$，则 $m_a(\sigma, A) = \infty$ 且 $k(\sigma, A) \geq 1$，因此 (12) 成立。其次，若 $m_g(\sigma, A) < \infty$，而 $m_a(\sigma, A) = \infty$，则必有 $k(\sigma, A) = \infty$，且由于 $m_g(\sigma, A) \geq 1$，(12) 成立。第三，若 $m_g(\sigma, A) < \infty$，但 $k(\sigma, A) = \infty$，则 $m_a(\sigma, A) = \infty$，因此 (12) 再次显然成立。因此，接下来只需考虑 σ 为有限型的情形。令$p = m_g(\sigma, A) < \infty$，并回顾我们已对 A 在 σ 处的（广义）特征向量典范基进行了排序，使得 $k(\sigma, A) = k_p$。那么

$$m_g(\sigma, A) + k(\sigma, A) - 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p-1 \text{ times}} + k_p \leq \sum_{j=1}^{p} k_j = m_a(\sigma, A),$$

其中，不等式成立是因为 $k_j \geq 1$ 对所有 $j = 1, \ldots\ldots, p$成立。这证明了（12）中的第一个不等式。第二个不等式由 $m_a(\sigma, A) = \sum_{j=1}^{p} k_j \leq pk_p = m_g(\sigma, A) k(\sigma, A)$ 得出，因为 k_p 是极大的。由于 A 是闭的（因而可闭），（12）中的第二串不等式也成立。

□

在建立了可闭线性算子 A 的点谱框架后，我们将分析扩展到全谱 $\sigma(A)$。这首先需要对预解集$\rho(A)$及其相关的预解算子 $R(\cdot\ A)$进行全面考察，其中 A。为了建立可闭线性算子的连贯谱理论，并与适用于闭线性算子的经典框架相呼应，需要对 $R(\cdot\ A)$ 的行为作出额外假设。特别是，我们希望使用如下形式的预解式恒等式：

$$R(z_1, A) - R(z_2, A) = (z_2 - z_1)R(z_1, A)R(z_2, A), \quad \forall z_1, z_2 \in \rho(A).$$

不过请注意，该恒等式中的表达式未必都有定义，因为：i) 在等式左边，当 $i \in \{1, 2\}$ 时，定义域 $\mathcal{D}(R(z_i, A)) = \mathcal{R}(z_i I - A)$ 可能不同；ii) 在等式右边，值域为 $\mathcal{R}(R(z_2, A)) = \mathcal{D}(A)$ 的算子 $R(z_2, A)$ 可能无法映入定义域 $\mathcal{D}(R(z_1, A)) = \mathcal{R}(z_1 I - A)$。为绕过这些问题，我们引入以下（谱）假设：

(SH1) The domain $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{R}(zI - A)$ for all $z \in \rho(A)$.

在（SH1）的假设下，我们将在下一个结果中证明，$\mathrm{D}(R(z, A)) = \mathrm{R}(zI - A)$ 与 $z \in \rho(A)$ 无关。这确保预解式恒等式两边都有定义，并使等式本身成立。值得注意的是，（SH1）与 [66,第 5 节1] 中的处理方式有所不同。具体而言，该文中以下结果的对应版本（[66, 定理 5.1.C]）是在更强的假设下得出的：只要 $z \in \rho(A)$，就有 $\mathrm{R}(zI - A) = X$。

命题 10。 假设 A 满足 *(SH1)* 并令 z_1, $z_2 \in \rho(A)$ 给定。那么

$$\mathcal{R}(z_1 I - A) = \mathcal{R}(z_2 I - A), \tag{13}$$

且预解式恒等式

$$R(z_1, A) - R(z_2, A) = (z_2 - z_1)R(z_1, A)R(z_2, A), \tag{14}$$

成立。此外，A 的预解算子 $R(\cdot\ A)$ 在 $\rho(A)$ 上是解析的，因为

$$R(z_1, A) = \sum_{l=0}^{\infty} (z_2 - z_1)^l R(z_2, A)^{l+1}, \tag{15}$$

对所有满足 $|z_1 - z_2| < 1/\|R(z_2, A)\|$ 的 $z_2 \in \rho(A)$ 及 $z_1 \in \mathbb{C}$。

证明。为证明 (13)，我们先证明对于 $z_1, z_2 \in \rho(A)$，$\mathrm{R}(z_1 I - A) \subseteq \mathrm{R}(z_2 I - A)$。交换 z_1 和 z_2 后即可得到另一个包含关系。取 $\psi \in \mathrm{R}(z_1 I - A)$，则存在一个 $\varphi \in \mathrm{D}(A)$，使得 $(z_1 I - A)\varphi = \psi$。接下来注意到 $(z_2 I - A)\varphi = \psi + (z_2 - z_1)\varphi$，或者等价地

$$\psi = (z_2 I - A)\varphi - (z_2 - z_1)\varphi.$$

右侧第一项是 $\mathcal{R}(z_2 I - A)$中的一个元素，第二项是 $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{R}(z_2 I - A)$ 根据 （SH1），所以 $\psi \in \mathcal{R}(z_2 I - A)$，因此 $\mathcal{R}(z_1 I - A) \subseteq \mathcal{R}(z_2 I - A)$，如所述。

为证明 (14)，我们首先注意到 $(z_2 - z_1)I = (z_2 I - A) - (z_1 I - A)$。从左侧将此恒等式与 $R(z_1, A)$ 复合；根据 (13)，由于 $z_2 I - A$ 映射到 $\mathrm{D}(R(z_2, A)) = \mathrm{R}(z_2 I - A) = \mathrm{R}(z_1 I - A)$，该复合是良定义的。再从右侧将所得恒等式与 $R(z_2, A)$ 复合，即得所需结果。

为证明 (15)，考虑 $z_2 \in \rho(A)$ 以及 $z_1 \in \mathbb{C}$ 满足 $|z_1 - z_2| < 1/\|R(z_2, A)\|$。于是 命题 6告诉我们 $z_1 \in \rho(A)$。随后应用 (14)，归纳可得表达式

$$R(z_1, A) = \sum_{l=0}^{m} (z_2 - z_1)^l R(z_2, A)^{l+1} + (z_2 - z_1)^{m+1} R(z_1, A) R(z_2, A)^{m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

由于（SH1）和（13）定义良好。注意，当 $m \to \infty$ 时，因 $\|R(z_1, A)\|[|z_1 - z_2|\|R(z_2, A)\|]^{m+1} \to 0$；当 $m \to \infty$ 时，因 $|z_1 - z_2|\|R(z_2, A)\| < 1$，式（15）得证，证明完毕。 □

建立了可闭线性算子 A 的点谱和预解集框架后，我们使用（SH1）将分析拓展至 $\sigma(A)$ 的孤立点。我们的目标是将 X 谱分解为两个 A-不变线性子空间，这与经典的闭线性算子情形类似，例如参见 [24, 第 XV 节2]中的结果。然而，这一目标过于宏大。事实上，由于 A 不一定是闭的，我们无法保证 A 在 A 的孤立特征值 σ 处的留数是投影算子，详见下文。因此，我们转而对 A 的不变子空间进行分解，随后尝试建立它们与 A相关子空间之间的联系。我们从下面的结果开始，该结果将经典的 $R(z, A)$ 在 $\sigma(A)$ 中孤立点附近的洛朗级数构造推广至 $R(z, A)$。

引理 11. 假设 A 满足 （*SH1*）。若 σ 是 $\sigma(A)$的一个孤立点，则 A在 σ 处的预解式可局部展开为洛朗级数

$$R(z, A) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (z - \sigma)^l R_l(\sigma, A), \quad R_l(\sigma, A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (z - \sigma)^{-(l+1)} R(z, A) dz, \tag{17}$$

只要 $0 < |z - \sigma| < \delta$ 对某个充分小的 δ 成立，且 Γ_σ 表示以 σ 为圆心、半径严格小于 δ的圆盘的正向边界。

证明. 首先回顾 引理 7 指出 $\sigma(A) = \sigma(A)$，因此 σ 也是 $\sigma(A)$的一个孤立点。由于 A 是闭线性算子，[17, 第四部分第 1 节17] 的结果告诉我们

$$R(z, \overline{A}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (z - \sigma)^l R_l(\sigma, \overline{A}), \quad R_l(\sigma, \overline{A}) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (z - \sigma)^{-(l+1)} R(z, \overline{A}) dz, \tag{18}$$

对所有充分接近 σ 的 $z \in \mathbb{C}$，由 (9) 可知，对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，$R_l(\sigma, A) = R_l(\sigma, A)|_{\mathcal{R}(z\overline{I} - A)}$。接下来，我们要证明 (17) 中所声称的 $R_l(\sigma, A)$ 的表达式。为此，将 (17) 中的积分项记为 $W_l(\sigma, A)$，因此我们要证明等式 $W_l(\sigma, A) = R_l(\sigma, A)$。我们注意到，只要能证明 $\mathrm{D}(W_l(\sigma, A)) = \mathrm{R}(zI - A)$，该等式便成立。为此，注意到 $\Gamma_\sigma \subset \rho(A)$，因此命题 10 告诉我们，$\mathrm{R}(wI - A)$ 与 $w \in \Gamma_\sigma$ 无关。于是，对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{D}(W_l(\sigma, A)) = \cap_{w \in \Gamma_\sigma} \mathrm{R}(wI - A) = \mathrm{R}(zI - A)$，从而证明了所述结论。将 (18) 中第一个等式的两边限制到 $\mathrm{R}(zI - A)$，即可证明 (17) 中的第一个等式。 □

如果存在一个 $r \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $l > r$， $R_{-r}(\sigma, A) \neq 0$，而 $R_{-l}(\sigma, A) = 0$，那么称 σ 为 $R(\cdot\, A)$ 的极点，其阶数为 $r =: r(\sigma, A)$，并且如果 $R(\cdot\, A)$ 在 σ 处有本性奇点，则定义 $r(\sigma, A) = \infty$。

引理 12。 如果 A 满足 （*SH1*） 且 σ 是 σ（A）的孤立点，那么 r（σ， A）$= r$（σ， $\overline{A}$）。

证明。由引理 7 可知， σ 也是 σ（A）的孤立点。由于对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，$\overline{R_l}$（σ， A）$= R_l$（σ， A）$|_{\mathcal{R}(zI-A)}$均有界，并且当 $z \in \rho$（A）时，R（$zI - A$）在 X 中稠密，因此 R_l（σ， A）$= 0$ 当且仅当 R_l（σ， A）$= 0$，这就证明了该结果。 □

考虑有界线性算子 P_σ（A）：$= R_{-1}$（σ， A），其在 σ（A）中的孤立点 σ 处的值恰为 R（$\cdot$ A）在 σ 处的留数。由于 A 不一定是闭的，我们通常无法保证式（17）中的 P_σ（A）的邓福德积分表示将值映入 D（A）。因此， P_σ（A）可能无法定义 X上的投影，因为复合 P_σ（A）^{2} 可能并非良定义。不过，由于 A 的闭包 A 是闭线性算子，关于闭线性算子的标准结果（见第 XV.2节）表明，黎斯谱投影 P_σ（A）$= R_{-1}$（σ， A）是 X 上的投影，并将该空间分解为两个闭的 A-不变线性子空间，如下所示

$$X = \mathcal{R}(P_\sigma(\overline{A})) \oplus \mathcal{R}(I - P_\sigma(\overline{A})), \quad \mathcal{N}(P_\sigma(\overline{A})) = \mathcal{R}(I - P_\sigma(\overline{A})).$$

此外，恒等式 (9) 表明，对于某个（因而对于所有）$\overline{z} \in \rho(A)$， $P_\sigma(A) = P_\sigma(A)|_{\mathcal{R}(zI-A)}$。这进而表明， $P_\sigma(A)$ 是稠密定义的，且其（唯一的）有界线性延拓 $P_\sigma(A)$ 与 $P_\sigma(A)$ 一致。结合这些事实，我们得到 X 可分解为 $P_\sigma(A)$ 和 $I - P_\sigma(A)$ 的值域的拓扑闭包，具体如下述结果所示。

引理 13. 若 A 满足 （*SH1*） 且 σ 是 σ（A）的孤立点，则

$$X = \overline{\mathcal{R}(P_\sigma(A))} \oplus \overline{\mathcal{R}(I - P_\sigma(A))}, \quad \overline{\mathcal{N}(P_\sigma(A))} \subseteq \overline{\mathcal{R}(I - P_\sigma(A))}. \tag{19}$$

证明。引理 3 结合 $P_\sigma(A) = P_\sigma(A)$ 这一事实表明，$\overline{\mathrm{R}(P_\sigma(A))} \subseteq \mathrm{R}(P_\sigma(A)) \subseteq \mathrm{R}(P_\sigma(A))$。由于 $P_\sigma(\overline{A})$ 是有界线性投影，其值域是闭的。因此，对这些包含关系取闭包可得 $\mathrm{R}(P_\sigma(A)) = \mathrm{R}(P_\sigma(A))$。对可闭线性算子$I - P_\sigma(A)$作类似论证，其闭包为投影 $I - P_\sigma(A)$，可得 $\mathrm{R}(I - P_\sigma(A)) = \mathrm{R}(I - P_\sigma(A))$。

为证明剩余的结论，设给定 $\varphi \in \mathcal{N}(P_\sigma(A))$。则 $(I - P_\sigma(A))\varphi = \varphi$，从而$\varphi \in \mathcal{R}(I - P_\sigma(A))$。因此，$\mathcal{N}(P_\sigma(A)) \subseteq \mathcal{R}(I - P_\sigma(A))$，取闭包即可得到该结论。 □

需要注意的是，第二部分（19）中的反向包含一般并不成立，因为 $P_\sigma(A)$ 不一定是投影。这一观察与 引理 3 给出的核的一般性质以及先前推导出的恒等式 $\mathcal{N}(P_\sigma(A)) = \mathcal{R}(I - P_\sigma(A))$ 一致，该恒等式见 引理 13。

为了更详细地研究 $\sigma(A)$ 的孤立点，现在假设 $\sigma \in \sigma(A)$ 是孤立的，且满足 $r(\sigma, A) < \infty$。结合引理 7 和引理 12 可得 $\sigma \in \sigma(A)$ 以及 $r(\sigma, A) < \infty$。此外，闭线性算子的谱理论告诉我们， $\sigma \in \sigma_p(A)$ 并且

$$E_\sigma(\overline{A}) = \mathcal{R}(P_\sigma(\overline{A})) = \mathcal{N}((\sigma I - \overline{A})^{k(\sigma,\overline{A})}), \quad Q_\sigma(\overline{A}) = \mathcal{N}(P_\sigma(\overline{A})) = \mathcal{R}((\sigma I - \overline{A})^{k(\sigma,\overline{A})}),$$

其中需要注意， $k(\sigma, A) = r(\sigma, A)$，且 $\overline{\sigma}$不一定是 A的特征值（引理 7）。此外，若 $\sigma \in \sigma_p(A)$，则由引理 9 和引理 12 可得可能的严格不等式$k(\sigma, A) \leq r(\sigma, A)$，以及包含关系 $E_\sigma(A) \subseteq E_\sigma(A)$。

备注 14。 即使 σ 是 A的有限型孤立特征值，这意味着 $\mathcal{R}(P_\sigma(A))$ 是有限维的，因而是闭的，但这个值域可能不同于我们对 A 在 σ处的广义特征子空间 $E_\sigma(A)$ 所作的较为代数化的定义。出现这种差异，是因为 $P_\sigma(A)$ 可能将向量映射到$\mathcal{D}(A)$之外，从而可能有严格包含关系 $E_\sigma(A) \subsetneq \mathcal{R}(P_\sigma(A)) = E_\sigma(A)$。因此，纯粹基于 A孤立点的谱分析，无法充分反映 A本身的谱结构，而更多地体现了其闭包 A 的相关谱信息。◊

接下来，我们旨在分析与给定的可闭线性算子 A相关的两个特定线性算子的谱结构。首先，我们研究 A 与A 在某个子空间上的限制之间的谱关系（定义 15）。其次，我们考察 A 与 A的共轭形式（定义17）之间的谱关系。

定义 15。 设 $X_|$ 是复巴拿赫空间 X 的一个线性子空间，并考虑线性算子 $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$。由下式定义的线性算子 $A_| : \mathcal{D}(A_|) \subseteq X_| \to X_|$

$$\mathcal{D}(A_|) := \{\varphi \in \mathcal{D}(A) \cap X_| : A\varphi \in X_|\}, \quad A_|\varphi := A\varphi.$$

称为 $X_|$中 A 的部分。 ◊

下面的结果讨论可闭线性算子 A ，并将 A 的谱数据与 $A_|$的谱数据联系起来；这可视为将 [17, 引理 IV.1。15] 和 [40, 命题 1。1]从闭算子推广到可闭线性算子。

命题 16。 设 $A: D(A) \subseteq X \to X$ 是一个可闭线性算子，并令 $A_|$ 表示 $X_| \subseteq X$中A 的部分。那么 $A_|$ 是可闭的，且以下结论成立：

1. 若 $D(A) \subseteq X_|$，则有：

(a) $\sigma_p(A_|) = \sigma_p(A)$. *(b)* 若 $\sigma \in \sigma_p(A_|)$，则 $m_g(\sigma, A_|) = m_g(\sigma, A)$ $m_a(\sigma, A_|) = m_a(\sigma, A)$ 且 $k(\sigma, A_|) = k(\sigma, A)$。此外，若 σ 是有限型的，则将 σ 视为 $A_|$ 的特征值时的部分重数，等于将 σ 视为 A的特征值时的部分重数。

2。如果 $\mathcal{D}(A) \subseteq X_| \subseteq \mathcal{R}(zI - A)$ 对所有 $z \in \rho(A)$都成立，那么 A 满足 *(SH1)*，并且有 ：

(a) $\sigma(A_|) \subseteq \sigma(A)$。*(b)* 如果 $\sigma \in \sigma(A_|)$ 是孤立的，
那么 $r(\sigma, A_|) = r(\sigma, A)$。

证明。为证明 $A_|$ 是可闭的，我们注意到 A 是 $A_|$的线性扩张，而 A 是 A 的闭线性扩张。因此，A 是 $A_|$的闭线性扩张，由此得证。为证明第一个结论，假设 $\mathrm{D}(A) \subseteq X_|$。由于 A 是 $A_|$的线性扩张，因此可得 $\sigma_p(A_|) \subseteq \sigma_p(A)$。为证明另一包含关系，设给定 $\sigma \in \sigma_p(A)$。那么存在非零的 $\varphi \in \mathrm{D}(A)$，使得 $A\varphi = \sigma\varphi \in \mathrm{D}(A) \subseteq X_|$。因此，根据定义 15， $\varphi \in \mathrm{D}(A_|)$，从而 $\sigma \in \sigma_p(A_|)$，这就证明了 (a)。为证明 (b)，设给定 $\sigma \in \sigma_p(A_|)$。显然，由定义 15 和 $\mathrm{D}(A) \subseteq X_|$ 可知，$\mathrm{N}(\sigma I - A) = \mathrm{N}(\sigma I - A_|)$，因此 $m_g(\sigma, A_|) = m_g(\sigma, A)$。归纳论证表明，对于任意整数 $l \geq 1$，$\mathrm{N}((\sigma I - A)^l) = \mathrm{N}((\sigma I - A_|)^l) \subseteq \mathrm{D}(A_|) \subseteq \mathrm{D}(A)$，因此 $m_a(\sigma, A_|) = m_a(\sigma, A)$。显然，如果其中一个为无穷大，则 $k(\sigma, A_|) = k(\sigma, A)$。现在进一步假设 σ 为有限型。由于 $A_|$ 在 $\mathrm{D}(A_|)$ 上的作用与 A 相同，因此 A 在 σ 处的任意（广义）特征向量典范基也是 $A_|$ 在 σ 处的典范基，反之亦然。这就证明了关于部分重数和上升的结论。

为证明第二个陈述，假设对所有 $z \in \rho(A)$，$\mathrm{D}(A) \subseteq X_| \subseteq \mathrm{R}(zI - A)$。这尤其意味着 A 满足（SH1）。为证明 (a)，固定 $z \in \rho(A)$，并注意到 $zI - A_|$ 是单射，因为 $\mathrm{D}(A_|) \subseteq \mathrm{D}(A)$。为证明 $zI - A_|$ 在 $X_|$中具有稠密值域，我们证明 $\mathrm{R}(zI - A_|) = X_|$。首先，根据定义 15 可知 $\mathrm{R}(zI - A_|) \subseteq X_|$。反过来，若 $\varphi \in X_|$，则根据附加假设，$\varphi \in \mathrm{R}(zI - A)$，因此 $R(z, A)\varphi = \psi \in \mathrm{D}(A) \subseteq X_|$ 是良定义的。因此，$\varphi = (zI - A)\psi \in \mathrm{R}(zI - A_|)$，这就证明了该结论。注意，$R(z, A)| : X_| \to \mathrm{D}(A_|)$是 $zI - A_|$ 的代数逆，因为 $(zI - A)R(z, A)_| = I_{X_|}$，且 $R(z, A)|(zI - A)_| = I_{\mathcal{D}(A_|)}$。因此，$R(z, A_|) = R(z, A)|$，其中后一个算子有界，因为 $R(z, A)$有界。由此可得 $z \in \rho(A_|)$，这就证明了该结论。为证明 (b)，令 σ 为 $\sigma(A_|)$的一个孤立点。由于对 $z \in \rho(A) \subseteq \rho(A_|)$，有 $R(z, A_|) = R(z, A)|$，因此对所有 $l \in \mathbb{Z}$，均有$R_l(\sigma, A_|) = R_l(\sigma, A)|$，这就证明了该结论。 □

定义17。 设 X 和 Y 为复巴拿赫空间，且 $A:\mathcal{D}(A)\subseteq X\to X$ 和 $B:\mathcal{D}(B)\subseteq Y\to Y$ 为线性算子。若存在可逆有界线性算子 $V:X\to Y$ 使得

$$\mathcal{D}(B)=\{\varphi\in Y:V^{-1}\varphi\in\mathcal{D}(A)\},\quad B=VAV^{-1},$$

那么我们称 A 和 B 是相似（由 V），并记作 $A\sim B$。 ◊

下面的结果讨论一个可闭线性算子 A，并将 A 的谱数据与 B的谱数据联系起来。这可以视为 [17, 第 II.2 节1] 中从闭算子推广到可闭线性算子的结果。

命题 18。 设 $A:D(A)\subseteq X\to X$ 是一个可闭线性算子。若 $A\sim B$ 由 $V:X\to Y$给出，则B 是可闭的，且有以下结论：

1. $\sigma_p(B)=\sigma_p(A)$ 且 $\sigma(B)=\sigma(A)$。*2.* 若 $\sigma\in\sigma_p(A)$，则 $m_g(\sigma,B)=m_g(\sigma,A)$ $m_a(\sigma,B)=m_a(\sigma,A)$，且 $k(\sigma,B)=k(\sigma,A)$。此外，若 σ 为有限型，则视 σ 为A 的特征值时的部分重数，等于视 σ 为 B的特征值时的部分重数。*3.* 若 A 满足（*SH1*），则 B 满足（*SH1*）。此外，若 $\sigma\in\sigma(A)$是孤立的，则 $r(\sigma,B)=r(\sigma,A)$。

证明。我们首先应用引理 77证明 B 是可闭的。设$(\varphi_m)_m$ 是D(B)中的一个序列，并在范数下收敛于零，且假设$(B\varphi_m)_m$ 在范数下收敛于某个 $\psi\in Y$。由于$V\in$L(X,Y)是可逆的，有界逆定理保证 $V^{-1}\in$L(Y, X)。因此，序列$(V^{-1}\varphi_m)_m$ 属于D(A)，并收敛于零。由 V^{-1}的连续性，我们注意到 $AV^{-1}\varphi_m=V^{-1}B\varphi_m\to V^{-1}\psi$ as $m\to\infty$。由于 A 是可闭的，$V^{-1}\varphi_m\to 0$ and $AV^{-1}\varphi_m\to V^{-1}\psi$as $m\to\infty$，因此可得 $V^{-1}\psi=0$。由于 V^{-1} 是单射，$\psi=0$，从而 B 是可闭的。

为证明第一个陈述，注意到 V（或 V^{-1}）给出了从 B（或 A）的特征向量到 A（或 B）的特征向量的一一映射，因此 σ_p（B）$=\sigma_p$（A）。为证明 σ（B）$=\sigma$（A），设给定 $z\in\rho$（A）。由于 $zI-A$ 是单射，$zI-B=V(zI-A)V^{-1}$ 也是单射。此外，由于 V的连续性，有 $Y=V$(R($zI-A$)) $\subseteq V$(R($zI-A$)) $=$R($zI-B$)，因此 $zI-B$ 具有稠密值域。此外，由于 $R(z,B)=VR(z,A)V^{-1}$，我们看到 R（z,B）是有界的，因为 V和 V^{-1} 是有界的。因此，$z\in\rho$（B），从而 ρ（A）$\subseteq\rho$（B）。另一个包含关系可通过交换 A 和 B的作用来证明，因此 σ（B）$=\sigma$（A）。

为证明第二个陈述，回顾证明第一部分中的结论：N ($\sigma I-B$) $=V$(N ($\sigma I-A$))，因此由于 V 是双射，$m_g(\sigma,B)=m_g(\sigma,A)$。归纳论证表明，对任意整数 $l\geq 1$，都有 N $((\sigma I-B)^l)=V$(N $((\sigma I-A)^l)$)，从而 $m_a(\sigma,B)=m_a(\sigma,A)$。显然，若 $k(\sigma,B)$ 和 $=k(\sigma,A)$ 中有一个为无穷大，则二者相等。现在进一步假设 σ 为有限型。若 $\varphi_{1,0},\dots,\varphi_{1,k_1-1},\dots,\varphi_{p,0},\dots,\varphi_{p,k_p-1}$ 是 A 在 σ 处（广义）特征向量的典范基，则 $V\varphi_{1,0},\dots,V\varphi_{1,k_1-1},\dots,V\varphi_{p,0},\dots,V\varphi_{p,k_p-1}$ 构成 B 在 σ 处（广义）特征向量的典范基，因为 V 有界且可逆。反过来，则利用 V^{-1} 同样有界且可逆这一事实。由此证明了关于部分重数和上升的断言。

为证明第三个陈述，假设 A 满足 (SH1)，并给定 $\varphi\in$ D(B)。那么，对所有 $z\in\rho(A)$，都有 $V^{-1}\varphi\in$D(A) $\subseteq$R($zI-A$)。注意，$\varphi=V(V^{-1}\varphi)\in V$(R($zI-A$)) $=$R($zI-B$)，这表明 D(B) $\subseteq$ R($zI-B$)。现在，令 σ 为 $\sigma(A)$ 的一个孤立点。由于对 $z\in\rho(A)$ 有 $R(z,B)=VR(z,A)V^{-1}$，因此对所有 $l\in\mathbb{Z}$，都有 $R_l(\sigma,B)=VR_l(\sigma,A)V^{-1}$，从而得证。 □

2.2 等价与 Jordan 链

设 X、X'、Y和 Y'为复巴拿赫空间，且 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 为非空开集。本节将考察算子值函数 $L:\Omega\to L($$X$、$Y$)。我们称 L 为有界（闭或可闭）

算子值函数，如果线性算子 $L(z):\mathcal{D}(L(z))\to Y$ 对于所有 $z\in\Omega$均有界（闭或可闭）。我们回顾第 VII.2 节中算子值函数的 A 型全纯性定义。 [42，第 VII.2 节。1] 关于算子值函数。

定义19. 算子值函数 $L:\Omega\to L(X,Y)$ 称为在 Ω 上全纯，如果定义域$\mathcal{D}(L(z))=\mathcal{X}$ 对所有 $z\in\Omega$ 都与 z 无关，且映射 $\Omega\ni z\to L(z)\varphi\in Y$ 对所有 $\varphi\in\mathcal{X}$ 都是全纯的。$\Diamond$

如果 A 是可闭线性算子，则算子值函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto zI-A\in L(X)$ 是全纯的；在附加假设 (SH1) 下， $\rho(A)\ni z\mapsto R(z,A)\in L(X)$ 也是全纯的。这是因为：i) $\mathbb{C}$ 和 $\rho(A)$ 是复平面中的开集（命题 6）；ii) 定义域 $\mathrm{D}(zI-A)=\mathrm{D}(A)$ 和 $\mathrm{D}(R(z,A))=\mathrm{R}(zI-A)$ 与 z 无关（命题 10）；以及 iii) 以下导数存在：

$$\frac{d}{dz}(zI-A)\varphi=\varphi,\quad \frac{d}{dz}R(z,A)\psi=-R(z,A)^2\psi, \tag{20}$$

对所有 $\varphi\in\mathcal{D}(A)$ 和 $\psi\in\mathcal{R}(zI-A)$，另请参见 [66, 定理5.1-C]，以证明（20）中的第二个等式。下面的定义扩展了 [40, 第 I.1 节2]中给出的闭有界线性算子之间的等价概念。

定义 20。设两个全纯可闭算子值函数 $L:\Omega\to L(X,Y)$ 和 $M:\Omega\to L(X',Y')$ 的 z-无关定义域分别为 $\mathcal{D}(L(z))=:\mathcal{X}$和 $\mathcal{D}(M(z))=:\mathcal{X}'$。如果满足以下陈述，则称它们在 Ω 上等价：

1. 存在全纯可闭算子值函数 $E:\Omega\to L(X',X)$ 和 $F:\Omega\to L(Y,Y')$，其值 $E(z):\mathcal{X}'\to\mathcal{X}$和 $F(z):\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}'$ 分别与 $\mathcal{D}(F(z))=:\mathcal{Y}$和$\mathcal{R}(F(z))=:\mathcal{Y}'$ 双射，并且对所有 $z\in\Omega$ 都是 z-无关的。

2. $E(\cdot)^{-1}:\Omega\to L(X,X')$ 和 $F(\cdot)^{-1}:\Omega\to L(Y,Y)$ 是全纯可闭算子值函数。

3. $\mathcal{R}(L(z))\subseteq\mathcal{Y}$，因此我们可以考虑限制 $F(z):=F(z)|_{\mathcal{R}(L(z))}$，对所有 $z\in\Omega$。

4. L 和 M 通过 E 和 F共轭：

$$M(z)=F(z)L(z)E(z), \tag{21}$$

对所有 $z\in\Omega$。 $\Diamond$

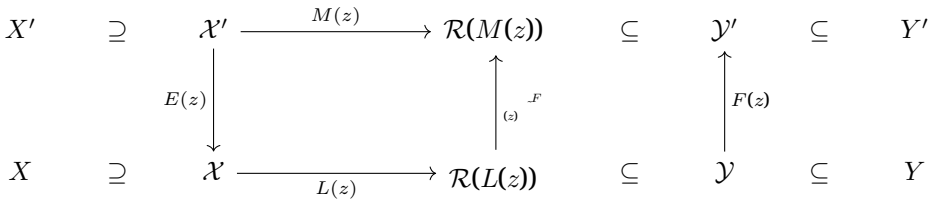

图1：定义中涉及的空间与算子之间的关系定义 20。

与 [40, 第 I.1 节2], 中闭有界线性算子的等价定义相比，上述定义对算子的定义域和值域E,F,L 以及 M作了额外假设，图1给出了示意图。特别是，定义 20

确保 $E(z)$ 和 $F(z)$ 的定义域和值域彼此 z-独立，这对于研究这些算子及其逆算子的全纯性至关重要。此外，这一设置使得能够对命题 24 中 L 和 M 的约当链（定义 22）进行良定义的分析。第二个条件是必要的，因为 E 和 F 未必是闭算子值函数；对于闭算子值函数而言，这一额外假设会自动成立，详见 [24, 第 I.2] 节。该条件在命题 24 和定理 28 的证明中也发挥着重要作用。第三个条件确保~式 (21) 中的共轭运算有良定义；并且请注意，对所有 $z\in\Omega$，$\mathrm{R}(F(z)) = \mathrm{R}(M(z))$，因为 $E(z)$~将 $\mathrm{D}(L(z))$ 映满。因此，对所有 $z\in\Omega$，$F(z):\mathrm{R}(L(z))\to\mathrm{R}(M(z))$ 都是一个双射。还值得注意的是，并不假设 $E(z)$ 和 $F(z)$，也不假设它们的逆算子 $E(z)^{-1}$ 和 $F(z)^{-1}$ 在 $z\in\Omega$ 上有界。若增加这一假设，将限制我们构造定理 42（第 3 节）中即将介绍的重要等价关系的能力。为求简洁，我们仍称可闭线性算子 $E(z)$ 和 $F(z)$ 在（代数意义上）可逆。

注记 21. 闭线性算子（以及有界线性算子）之间的等价最早由 Go- hberg 等人引入。 [25], 另见 [24, 41] ，了解更多信息及其应用。最近，Engström 和 Torshage 在 [21] 中引入了可闭线性算子值函数（全纯）之间形如（21）的等价概念 L 和 M，但他们假设 E 和 F 的取值有界，这对我们接下来的构造而言限制过于严格。 ◊

接下来，我们引入可闭算子值函数 L的特征值和约当链的概念。下面的定义可视为线性情形下特征值和约当链经典概念的一种自然扩张 $L(z) = zI - A$ 其中 $A\in L(X)$，分别见定义 4 和 定义 8。另请参阅 [40, 第 I.1 节。2]，了解有关闭线性算子情形的更多信息。

定义 22. 设 $L:\Omega\to L(X,Y)$ 是一个全纯可闭算子值函数，对于所有 $z\in\Omega$，均有 $\mathcal{X} = \mathcal{D}(L(z))$。若存在非零特征向量 $q_0\in\mathcal{X}$使得 $L(\sigma)q_0 = 0$，则称点 $\sigma\in\Omega$ 为 L 在 σ 处的特征值 。若向量$\mathcal{X}$中的有序集合$\{q_0,\dots,q_{k-1}\}$ 满足 $q_0\neq 0$ ，则称其为 L 在 σ 处的约当链 ，且

$$L(z)[q_0 + (z-\sigma)q_1 + \cdots + (z-\sigma)^{k-1}q_{k-1}] = \mathcal{O}((z-\sigma)^k).$$

向量 $q_1,\dots,q_{k-1}$称为 L 在 σ处的广义特征向量 。数 $k\in\mathbb{N}$称为该链的长度 。若以 q_0 开始的链存在最大长度，则称此长度为 q_0 的秩 ，并称全纯函数$\mathbb{C}\ni z\mapsto\sum_{l=0}^{k-1}(z-\sigma)^l q_l\in\mathcal{X}$为与 σ 对应的 L 的根函数 。若不存在最大长度，则称 q_0 具有无限秩。◊

现在我们引入 L在特征值 $\sigma\in\Omega$处的几何重数和代数重数的概念。 X 的线性子空间 $\mathrm{N}(L(\sigma))$ 称为对应于 σ的 L 的特征子空间，其维数 $m_g(L(\sigma))\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 称为 L 在 σ处的几何重数。为引入 L 在 σ处的代数重数 $m_a(L(\sigma))\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，我们按如下方式进行：若 $m_g(L(\sigma)) = \infty$，则令 $m_a(L(\sigma)) := \infty$。若 $p = m_g(L(\sigma)) < \infty$，则我们仿照第 2.1 节进行。于是，我们选取 $\mathrm{N}(L(\sigma))$ 的一组基 $q_{1,0},\dots,q_{p,0}$，使特征向量 $q_{j,0}$ 的秩 $k_j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 依次达到最大。整数（可能为无穷） $k_1\le\cdots\le k_p$ 与基的选取无关，称为 L在 σ处的零点重数。我们将最大的零点重数$k_p =: k(L(\sigma))\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 定义为 L 在 σ处的上升，并相应地定义 $m_a(L(\sigma)) := \sum_{j=1}^{p}k_j$。此外，若 $m_a(L(\sigma)) < \infty$，则称 σ 为 L的有限型特征值。依照这一过程，我们得到一个典范约当链系

$$q_{1,0},\dots,q_{1,k_1-1},\dots,q_{p,0},\dots,q_{p,k_p-1} \tag{22}$$

的 L 在 σ。再次，可以将（22）视为经典线性情形下（广义）特征向量典范系统这一经典概念的扩张 $L(z) = zI - A$ 其中 $A\in L(X)$ 见（11）。

备注 23。细心的读者可能已经注意到，我们对 $m_a(L(\sigma))$的定义与 $m_a(\sigma, A)$的定义在性质上有所不同。在经典线性情形 $L(z) = zI - A$ 且 $A \in L(X)$中，回顾（10）可知，若 σ 为有限型，则广义特征子空间 $E_\sigma(A)$与 N $((\sigma I - A)^{k(\sigma,A)})$一致。然而，在 L的一般非线性情形中， L 在 σ 处的约当链的线性张成通常无法刻画为某个单一算子的幂的核。关于 L: $\mathbb{C} \to$ L($\mathbb{C}^2$)上的一个简单反例，请参阅 [41, 第 5.1 节。1] 该反例说明，对于所有 $l \geq 1$， dim N $(L(\sigma)^l) \neq m_a(L(\sigma))$。$\Diamond$

下一个 结果是将 [40, 命题 1.2] 从闭线性算子推广到可闭线性算子 .

命题 *24.* 如果两个全纯可闭算子值函数 L 和 M 在 Ω 上等价，那么它们的约当链之间存在一一对应。特别地，对于特征值 $\sigma \in \Omega$，有 $m_g(L(\sigma)) = m_g(M(\sigma))$ $m_a(L(\sigma)) = m_a(M(\sigma))$ 和 $k(L(\sigma)) = k(M(\sigma))$。

证明. 设 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\} \subseteq$ X 是 L 在 σ处的一个约当链。由于根据假设（定义 20）， $E(\cdot)^{-1}$ 是全纯的，并且任何根函数也是全纯的，因此显然映射 $\Omega \ni z \mapsto E(z)^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} (z-\sigma)^l q_l \in X'$ 是全纯的，从而在 Ω 上解析。因此，存在向量 $(q'_l)_l$ 属于 X′，使得对于所有 $z \in \Omega$，都有 $E(z)^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} (z-\sigma)^l q_l = \sum_{l=0}^{\infty} (z-\sigma)^l q'_l$。于是， $q'_0 \neq 0$，利用 (21) 快速计算可得 $M(z) \sum_{l=0}^{k-1} (z-\sigma)^l q'_l = O((z-\sigma)^k)$，这证明了 $\{q'_0, \dots, q'_{k-1}\}$ 是 M 在 σ处的一个约当链。反方向可类似证明，只需利用 E 是全纯的这一事实，以及由于定义 20 而成立的共轭关系 $L(z) = F(z)^{-1} M(z) E(z)^{-1}$。我们得出结论： L 和 M的约当链之间存在一一对应。

为证明剩下的结论，注意到由 (21) 可知， $E(\sigma)$ 将 N $(M(\sigma))$ 一一映射到 N $(L(\sigma))$ 上，这就证明了 $m_g(L(\sigma)) = m_g(M(\sigma))$。由于 L 与 M 的约当链之间存在一一对应， L 与 M 的零点重数相同，因此 $m_a(L(\sigma)) = m_a(M(\sigma))$ 且 $k(L(\sigma)) = k(M(\sigma))$，从而证明了该结论。 □

我们强调，本小节前面引入的概念并不要求底层的复巴拿赫空间 X 与 Y 彼此相同。现在我们将介绍预解集$\rho(L)$ ，它是 L 的扩展，基于定义 4，其中我们假设 X 与 Y 确实相同。

定义 25。 设 $L : \Omega \to L(Y)$ 是一个全纯可闭算子值函数，并固定 $z \in \Omega$。若 $L(z)$ 可逆 ，则称其为可逆，即 $0 \in \rho(L(z))$；换言之， $L(z)$ 是单射，具有稠密值域 $\mathcal{R}(L(z))$，且其代数逆 $L(z)^{-1} : \mathcal{R}(L(z)) \to \mathcal{D}(L(z))$ 是有界线性算子。接下来，我们用 $\rho(L) := \{z \in \Omega : L(z)$ 可逆$\}$ 表示 L 的预解集 。$\Diamond$

在本节余下部分中，我们固定一个复巴拿赫空间 Y 以及一个全纯可闭算子值函数 $L : \Omega \to L(Y)$。秉承第 2.1 节中建立的结果，我们旨在引入孤立点 $\sigma \notin \rho(L)$处极点阶数的概念。回顾一下，在（SH1）中，我们对 D(A)施加了一个条件，从而能够在命题 10 中得出 $zI - A$的值域与 $z \in \rho(A)$无关。现在，我们希望为算子 $L(z)$的值域建立类似的性质。然而，由于 L 不一定具有这样的形式：对某个 $A \in L(X)$，有 $L(z) = zI - A$ ，因此，对定义域 D$(L(z))$施加条件，并不能直接推出值域 R$(L(z))$与 z无关（对于$z \in \rho(L)$）。为绕过这一问题，我们引入以下（谱）假设:

（SH2）对于所有 $z \in \rho(L)$，值域 $\mathcal{R}(L(z))$ 都是 z-无关的。

为了研究 L 在孤立点 $\sigma \notin \rho(L)$ 处的极点阶数，回忆线性情形（引理 11）： 当 $\rho(L)$ 是开集时， $L(\cdot)^{-1} : \rho(L) \to L(Y)$ 的全纯性会有所帮助。在这些附加假设下，显然，对于每个 $\varphi \in$ R$(L(z))$，我们都可以将映射 $L(\cdot)^{-1}\varphi$ 在 σ处局部展开为洛朗级数

$$L(z)^{-1}\varphi = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (z-\sigma)^l L_l(\sigma)\varphi, \quad L_l(\sigma)\varphi := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (z-\sigma)^{-(l+1)} L(z)^{-1}\varphi dz, \tag{23}$$

只要对于某个充分小的 δ 有 $0<|z-\sigma|<\delta$。注意，由于（SH2），式（23）中的邓福德积分是良定义的。然而，注意到 $L_l(\sigma)$ 可能映回 $\mathrm{D}(L(z))$，而非 $\mathrm{D}(L(z))$。如果存在一个 $r\in\mathbb{N}$，使得对所有 $l>r$，$\overline{L_{-r}(\sigma)}\neq 0$，而 $L_{-l}(\sigma)=0$，那么称 σ 是 L 的一个 $r=$阶极点：$r(L(\sigma))$；若 $L(\cdot)^{-1}$ 在 σ 处有本性奇点，则令 $r(L(\sigma))=\infty$。

2.3 特征算子与谱性质

在本节中，我们设 X 和 Y 为复巴拿赫空间，且 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 为非空开集。以下定义是本文的基石，它将第 [40, I 节2] 中闭线性算子的特征矩阵定义推广为可闭线性算子的特征算子定义。

定义 26。 考虑一个可闭线性算子 $A\colon \mathcal{D}(A)\subseteq X\to X$ 以及一个全纯可闭算子值函数 $\Delta:\Omega\to L(Y)$。若存在一个复巴拿赫空间 Z 以及稠密线性子空间 $X\subseteq X$ 和 $Z\subseteq Z$，使得全纯可闭算子值函数

$$\Omega\ni z\mapsto\begin{pmatrix}\Delta(z) & 0\\ 0 & I_{\tilde{X}}\end{pmatrix}\in L(Y\oplus X)\qquad\text{and}\qquad \Omega\ni z\mapsto\begin{pmatrix}I_{\tilde{Z}} & 0\\ 0 & zI-A\end{pmatrix}\in L(Z\oplus X_A, Z\oplus X)$$

在 Ω 上等价。 ◊

回顾等价的定义（定义 20），上述定义保证对于所有 $z\in\Omega$，$\mathrm{D}(\Delta(z))=\mathrm{Y}$ 与 z 无关，并且存在全纯可闭算子值函数 函数 $E\colon\Omega\to L(Y\oplus X, Z\oplus X_A)$ 和 $F\colon\Omega\to L(Z\oplus X, Y\oplus X)$，使得 $E(z):\mathrm{Y}\oplus X\to Z\oplus\mathrm{D}(A)$ 和 $F(z)=F(z)|_{\tilde{Z}\oplus\mathrm{R}(zI-A)}:\ Z\oplus\mathrm{R}(zI-A)\to\mathrm{R}(\Delta(z))\oplus X$ 均为双射，并且有

$$\begin{pmatrix}\Delta(z) & 0\\ 0 & I_{\tilde{X}}\end{pmatrix}=F(z)\begin{pmatrix}I_{\tilde{Z}} & 0\\ 0 & zI-A\end{pmatrix}E(z),\quad\forall z\in\Omega. \tag{24}$$

(24) 左端的算子称为 (X,X)-扩张，属于 $\Delta(z)$；而 (24) 右端中间的算子称为 (Z,Z)-扩张，属于 $zI-A$。

注 27. 后文需要使用稠密线性子空间 $X\subseteq X$ 和 $Z\subseteq Z$，这是因为定义 4 中 A 的谱定义要求其值域稠密。当 A 为闭算子时，回顾注 5 可知，对每个 $z\in\rho(A)$，均有 $\mathrm{R}(zI-A)=X$。在这种情况下，(X,X)-扩张和 (Z,Z)-扩张便分别成为通常的 X-扩张和 Z-扩张，这对应于闭线性算子的标准扩张后等价概念，见第4节.4]。◊

我们的下一个目标是通过特征算子 A 来分析 Δ 的谱性质。正如定理 28下文所示，关系 (24) 已经表明，A 的点谱与 Δ的特征值之间存在联系。然而，要用 Δ完整描述 A 的谱，有必要建立 $R(\cdot\ A)$ 与 $\Delta(\cdot)^{-1}$之间的联系。单凭关系 (24) 不足以达到这一目的，主要是因为算子 E 和 F 可能无界，或者未定义于整个空间 $Y\oplus X$ 和 $Z\oplus X$ 上。为解决这一问题，我们提出以下（谱）假设：

(SH3) 算子值函数 $G_\Delta\colon\rho(\Delta)\to L(X)$ 和 $G_A\colon\rho(A)\cap\Omega\to L(Y)$ 的值定义如下

$$G_\Delta(z):=\left[E(z)\begin{pmatrix}\Delta(z)^{-1} & 0\\ 0 & I_{\tilde{X}}\end{pmatrix}F(z)\right]_{22},\quad G_A(z):=\left[E(z)^{-1}\begin{pmatrix}I_{\tilde{Z}} & 0\\ 0 & R(z,A)\end{pmatrix}F(z)^{-1}\right]_{11},$$

它们有界，且其最大定义域分别在 X 和 Y 中稠密。

定理 28. 设 Δ 是Ω上 A 的特征算子。则以下结论成立：

1. A在Ω 中的点谱满足

$$\sigma_p(A)\cap\Omega=\{\sigma\in\Omega:\sigma\ is\ a\ characteristic\ value\ of\ \Delta\}. \tag{25}$$

此外，若 $\sigma\in\sigma_p(A)\cap\Omega$，则 $m_g(\sigma,A)=m_g(\Delta(\sigma))$ $m_a(\sigma,A)=m_a(\Delta(\sigma))$，且$k(\sigma,A)=k(\Delta(\sigma))$。若进一步假设 σ 是有限型，则 A 在σ 处的部分重数等于 Δ 在 σ处的零点重数。

2. 若 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$ 且 （*SH3*）成立，则 A 在 Ω 中的谱满足

$$\sigma(A)\cap\Omega=\{\sigma\in\Omega:\Delta(\sigma)\ is\ not\ invertible\}. \tag{26}$$

此外，若 A 满足（*SH1*）且 Δ 满足（*SH2*），并且 $\sigma\in\sigma(A)\cap\Omega$是孤立的，则$r(\sigma,A)=r(\Delta(\sigma))$。若进一步假设 $\sigma\in\sigma_p(A)\cap\Omega$是有限型，且 $k(\sigma,A)=r(\Delta(\sigma))$，则重数定理成立：

$$\dim\mathcal{N}((\sigma I-A)^{r(\Delta(\sigma))})=m_a(\Delta(\sigma)). \tag{27}$$

证明。我们首先证明第一个结论。为证明（25），我们证明 $zI-A$ 的核向量与 $\Delta(z)$ 在 $z\in\Omega$中的核向量之间存在一一对应。记作

$$M(z)=\begin{pmatrix}\Delta(z) & 0\\ 0 & I_{\tilde{X}}\end{pmatrix},\quad L(z)=\begin{pmatrix}I_{\tilde{Z}} & 0\\ 0 & zI-A\end{pmatrix},\quad \forall z\in\Omega,$$

~ ~并注意到 D$(M(z))$ $=$ Y $\oplus$ X 和 D$(L(z))$ $=$ $Z\oplus$ D(A) 是 z-线性无关的。根据命题 24 的证明，$E(z)$ 将 N $(M(z))$ $=$N $(\Delta(z))$ $\oplus${0} 一一映射到 N $(L(z))$ $=${0} $\oplus$N $(zI-A)$ 上。因此，取值于 $N(z)$ 的可闭全纯算子值函数 $N:\Omega\to L(Y,X):$ Y $\to$ D(A) 定义为

$$N(z)q:=(0,I_{\mathcal{D}(A)})E(z)\begin{pmatrix}q\\0\end{pmatrix},$$

将 $\mathcal{N}(\Delta(z))$ 一一映射到 $\mathcal{N}(zI-A)$ 上，这就证明了该断言。

现在假设 $\sigma\in\sigma_p(A)\cap\Omega$。根据前面的论证，特别有$m_g(\Delta(\sigma))=m_g(\sigma,A)$。为了证明关于代数重数和上升的断言，我们首先根据 L 的定义观察到 $m_a(\sigma,A)=m_a(L(\sigma))$ 且 $k(\sigma,A)=k(L(\sigma))$。命题 24 告诉我们，$m_a(L(\sigma))=m_a(M(\sigma))$ 且 $k(L(\sigma))=k(M(\sigma))$。根据 M的定义，我们观察到 $m_a(M(\sigma))=m_a(\Delta(\sigma))$ 且 $k(M(\sigma))=k(\Delta(\sigma))$，由此证明了该断言。

现在进一步假设 σ 是有限型的。设 $q_{1,}0,\ldots,q_{1,k_1-1},\ldots,q_{p,}0,\ldots,q_{p,k_p-1}$, with$k_1\leq\cdots\leq k_p$, 是 Δ 在 σ 处的典范约当链系。考虑函数 $Q_i:\mathbb{C}\to$ Y，由 $Q_i(z):=\sum_{l=0}^{k_i-1}(z-\sigma)^l q_{i,l}$ 定义，并回顾定义 22：该映射是对应于 σ 的 Δ 的根函数，即

$$\Delta(z)Q_i(z)=\mathcal{O}((z-\sigma)^{k_i}),\quad \forall i=1,\ldots,p. \tag{28}$$

由于 N 和 Q_i 在 Ω 上全纯，因此由 $\Phi_i(z):=N(z)Q_i(z)$ 定义的映射 $\Phi_i:\Omega\to$ D(A) 也是全纯的。因此，该映射是解析的，故存在向量 $\varphi_{i,}0,\ldots,\varphi_{i,k_{i-1}}\in$D$(A)$，使得 $\Phi_i(z)=\sum_{l=0}^{k_i-1}(z-\sigma)^l\varphi_{i,l}+$ O$((z-\sigma)^{k_i})$。等价关系 (24) 与 (28) 一起证明了 $(zI-A)\Phi_i(z)=$O$((z-\sigma)^{k_i})$，因此

$$(A-\sigma I)\varphi_{i,0}=0,\ldots,(A-\sigma I)\varphi_{i,k_i-1}=\varphi_{i,k_i-2}. \tag{29}$$

由于 $N(\sigma)$ 将 $\mathcal{N}(\Delta(\sigma))$ 一一映射到 $\mathcal{N}(\sigma I-A)$，因此 $\varphi_{1,0},\ldots,\varphi_{p,0}$线性无关。于是，$\varphi_{1,0},\ldots,\varphi_{1,k_1-1},\ldots,\varphi_{p,0},\ldots,\varphi_{p,k_p-1}$ 都线性无关，这是由于

到（29），这证明 $\varphi_{1,0},\dots,\varphi_{1,k_1-1},\dots,\varphi_{p,0},\dots,\varphi_{p,k_p-1}$ 是 A 在 σ 处（广义）特征向量的典范基，从而证明了该结论。

现在证明第二个陈述。因此，假设 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$，且 (SH3) 成立。为证明 (26)，我们证明 $\rho(A)\cap\Omega=\rho(\Delta)$。固定 $z\in\rho(\Delta)\neq\emptyset$。根据前面的论证，$zI-A$ 也是单射，因此我们可以考虑 $zI-A$ 的代数逆：$\mathrm{D}(A)\to\mathrm{R}(zI-A)$。虽然目前我们尚未证明 $\mathrm{R}(zI-A)$ 在 X 中稠密，但暂且滥用记号，将 $R(z,A)$ 称为 $zI-A$ 的代数逆。于是，等价关系 (24) 意味着

$$\begin{pmatrix} I_{\tilde{Z}} & 0\\ 0 & R(z,A)\end{pmatrix}=E(z)\begin{pmatrix}\Delta(z)^{-1} & 0\\ 0 & I_{\tilde{X}}\end{pmatrix}F(z). \tag{30}$$

但由此可知 $R(z,A)=G_\Delta(z)$，因此根据 (SH3) 可得，定义域 $\mathrm{D}(R(z,A))=\mathrm{R}(zI-A)$ 确实在 X 中稠密，且 $R(z,A)$ 有界。这证明了 $z\in\rho(A)\cap\Omega$，进而 $\rho(\Delta)\subseteq\rho(A)\cap\Omega$。为证明另一个包含关系，任取 $z\in\rho(A)\cap\Omega$。由等式 (30) 可知 $\Delta(z)^{-1}=G_A(z)$，并且根据 (SH3)，$\Delta(z)^{-1}$ 有界，且 $\mathrm{R}(\Delta(z))$ 在 Y 中稠密。由此得到 $z\in\rho(\Delta)$，从而证明了该结论。

现在进一步假设 $\sigma\in\sigma(A)\cap\Omega$ 是孤立的，且（SH1）和（SH2）成立。由于 $\rho(A)$ 和 Ω 在 $\mathbb{C}$ 中是开集（命题 6），由前述结论的证明可知，$\rho(\Delta)=\rho(A)\cap\Omega$ 在 $\mathbb{C}$ 中是开集。由于根据定义 20 和命题 6，$\Delta(\cdot)^{-1}=G_A$ 以及算子值函数 $E(\cdot)^{-1}$、$F(\cdot)^{-1}$ 和 $R(\cdot\ A)$ 在 $\rho(A)\cap\Omega$ 上全纯，因此显然 $\Delta(\cdot)^{-1}$ 在 $\rho(\Delta)$ 上全纯。由于 E 和 F 在 Ω 上全纯，我们可以利用洛朗级数展开（17）和（23），由（30）得出 $r(\Delta(\sigma))=r(\sigma,A)$，从而证明了该断言。

最后，若进一步假设 σ 是 Ω 中 A 的一个有限型特征值，且 $k(\sigma,\ A)=r(\Delta(\sigma))$，那么根据证明的第一部分，我们得到 $\mathcal{N}((\sigma I-A)^{r(\Delta(\sigma))})=\mathcal{N}((\sigma I-A)^{k(\sigma,A)})$。由于这个线性子空间等于 $E_\sigma(A)$，$\mathcal{N}((\sigma I-A)^{r(\Delta(\sigma))})$ 的维数等于 $m_a(\sigma,\ A)=m_a(\Delta(\sigma))$ 的维数，其中最后一个等式由证明的第一部分得出。 □

事实证明，在第4节中，对于某些周期演化系统，特征算子Δ 具有额外结构，例如闭性和紧性。在这种情况下，$zI-A$ 与 Δ 之间的等价性使我们能够得出 A 的谱是离散的，正如我们将在下一个引理中展示的那样。因此，如果 Δ 是Ω上的 A的特征算子，并且对所有 $z\in\Omega$，$\Delta(z)$都是闭线性算子，我们就称 Δ为Ω上的 A的闭特征算子。为清楚起见，我们称具有非空预解集的闭线性算子$\Delta(z)$具有紧预解式，如果对于某个（因而对于每个）$\mu\in\rho(\Delta(z))$，$R(\mu,\Delta(z))$是紧的；回顾 [17, 定义 II.4.24]。

引理 29。设 Δ 是 A 在 Ω 上的闭特征算子，满足 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$ 以及 *(SH3)*。若$\rho(\Delta(z))\neq\emptyset$ 且 $\Delta(z)$ 对于所有 $z\in\Omega$都具有紧预解式，则 A 在 Ω 中的每个谱值都是有限型孤立特征值，并且有

$$\sigma(A)\cap\Omega=\{\sigma\in\Omega:\sigma\ \textit{is a characteristic value of}\ \Delta\}. \tag{31}$$

证明. 设给定 $\sigma\in\sigma(A)\cap\Omega$，并注意定理 28 适用。因此，由 (26) 可知 $\Delta(\sigma)$ 不可逆，故 $0\in\sigma(\Delta(\sigma))$。根据这些假设，由 [17, 推论 IV.1.19]可知，$\Delta(\sigma)$ 的每个谱值都是有限型孤立特征值。特别地，0 是 $\Delta(\sigma)$ 的有限型孤立特征值。此外，由于 Δ 在 Ω 上全纯，且 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$，解析 Fredholm 定理 [24, 推论 XI.8.4] 保证 σ 是 Δ 的有限型孤立特征值。这就证明了 (31)，因为另一个包含关系显然成立。由于 σ 是 Δ的有限型孤立特征值，由定理 28 可知 σ 是 A的有限型孤立特征值。

□

注30。如果巴拿赫空间 Y 是有限维的，且线性算子 A 是闭的，那么本节的结果便简化为 Kaashoek˜ ˜和 Verduyn Lunel 在 [40, 41]中发展的特征矩阵框架。特别是，空间 $X=X$ 和 $Z=Z$，以及算子 E 和 F将成为处处有定义的全纯有界算子值函数，且其取值均为双射

因此， $E(\cdot)^{-1}$ 和 $F(\cdot)^{-1}$ 自动是全纯的。由此，（谱）假设（SH1）、（SH2）和（SH3）自动成立。此外，对于任意孤立点 $\sigma \in \sigma(A) \cap \Omega$，恒等式 $k(\sigma, A) = r(\Delta(\sigma))$ 自动成立，从而保证重数定理 (27) 始终有效。此外，由于有限维向量空间中存在行列式，映射 $\det \Delta(\cdot) : \Omega \to \mathbb{C}$ 是全纯的，因此 A 的所有谱值自动都是有限型孤立特征值 [40, Theorem I.2.1]。因此，可以将引理 29 视为通过添加紧性假设，将这一结果推广到 Y 的无限维情形。在 Y 的有限维情形中，代数重数 $m_a(\sigma, A)$ 也等于 σ 作为 $\det \Delta(\cdot)$ 的根的阶数，见 [40, Theorem I.2.1]。要证明这一结果，可将特征矩阵理论与局部史密斯形理论结合起来 [40, 41, 16]。$\Diamond$

3 构造特征算子的一般方案

本节的主要目标是为一大类 Δ 可闭线性算子 $\mathcal{A}$ 建立一种通用的特征算子构造方案。这种颇具技术性的构造将在第 3.1 节和第 3.2 节中完成。在第3.3节中，我们研究特征算子的周期谱性质；在满足某些条件时，这使我们能够进一步将 $\mathcal{A}$ 在 Ω 上的谱问题约化为 Δ 的谱问题。

3.1 以 $\mathcal{A}$ 为基础构造 Δ

设 X 和 Y 是复巴拿赫空间。在第4节介绍的应用中，空间 X 将作为所关注的周期演化系统的状态空间，而 Y 则表示其相应的约化空间。对于 $T \geq 0$ 和 $Z \in \{X, Y\}$，我们考虑复巴拿赫空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Z)$，它由属于指定函数类 F 的 Z 值 T 周期函数组成，其中函数定义在 $\mathbb{R}$ 上。当 $T = 0$ 时，这一情形将在证明自治演化系统类包含于我们的构造中发挥重要作用，详情见注 59。特征算子 Δ 的构造，其基本思想是将可闭线性算子 $\mathrm{A} \in L(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X))$ 的一个相当困难的谱问题，转化为关于可闭算子值函数 $\Delta : \Omega \to L(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y))$ 的一个简单得多的问题。例如，在周期线性经典时滞微分方程的情形下（第 4.1 节），我们选择状态空间 $X = C([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ 和约化空间 $Y = \mathbb{C}^n$。这表明，谱问题从 $C_T(\mathbb{R}, C([-h, 0], \mathbb{C}^n))$ 中的问题，约化为 $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 中更简单的问题。为此，我们首先为具有形式（33）的一大类可闭线性算子 A 构造相应的特征算子 Δ，并在定理 42 中完成这一构造。借助这一构造，我们可以应用定理 28 得到相应的等价关系，从而建立 A 与 Δ 的谱性质之间的联系，详见推论 43。第4节将展示，这种约化如何大大简化一大类周期演化系统的谱分析。

为构造起见，考虑一个可闭线性算子 $D : \mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$，它满足以下条件：

（H1）存在一个线性子空间 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y)$，以及一个有界双射线性映射 $\iota : \mathcal{Y} \to \mathcal{N}(D) \neq \{0\}$，其（代数）逆算子有界。

（H2）算子 D 有一个限制 $D_0 : \mathcal{D}(D_0) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$，其（代数）逆算子有界，且满足 $\Omega := \rho(D_0) \neq \emptyset$，并且

$$\mathcal{D}(D) = \mathcal{N}(D) \oplus \mathcal{D}(D_0). \tag{32}$$

（H3）对于所有 $z \in \Omega$，定义域 $\mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{R}(zI - D_0)$。

注意，D_0 是可闭的，因为它存在一个 D 作为闭线性扩张。此外，（H2）和(H3)保证对于所有 $\mathcal{D}(D_0) \subseteq \mathcal{R}(zI - D_0)$，$z \in \Omega$，这表明 D_0 满足(SH1)。以下结果将有助于接下来的构造。

引理 31。以下结论成立：

1. $\mathcal{R}(z_1 I - D_0) = \mathcal{R}(z_2 I - D_0)$ *for all* $z_1, z_2 \in \Omega$.
2. $\mathcal{R}(zI - D_0) = \mathcal{R}(zI - D)$ *for all* $z \in \Omega \cup \{0\}$.

证明。第一个陈述直接由命题 10 得出，因为（SH1）对 D_0成立。

为证明第二个陈述，我们首先回顾， D_0 是 D的一个限制，由此可知，对于所有 $z \in \Omega \cup \{0\}$，R($zI - D_0$) $\subseteq$ R($zI - D$)。为证明反向包含，取定 $z \in \Omega \cup \{0\}$，并令$\psi \in$ R($zI - D$)。于是存在一个 $\varphi \in$ D(D)，使得($zI - D$)$\varphi = \psi$。根据（H2），我们可以写成$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$，其中 ($\tilde{\varphi}, \varphi_0$) $\in$ N (D) $\oplus$ D(D_0)，因此 $\psi =$ ($zI - D$)($\tilde{\varphi} + \varphi_0$) $= z\tilde{\varphi} + (zI - D_0)\varphi_0$。若 $z \neq 0$，回忆由（H3）可知， $\tilde{\varphi} \in$ N (D) $\subseteq$ R($zI - D_0$)，所以显然 $\psi \in$ R($zI - D_0$)。若$z = 0$，则 $\psi = -D_0\varphi_0$ ，从而 $\psi \in$ R($-D_0$)，这就证明了该结论。 □

在继续之前，我们先说明 $0 \notin \Omega$ 仅当 $\mathcal{R}(D_0)$ 在 $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$中不稠密时才会出现。尽管如此，这个潜在的技术问题不会影响接下来的构造；正如我们将看到的， $0 \in \Omega$ 适用于第4节给出的所有例子。

为了建立特征算子的一般框架，我们引入两个线性算子

$$K : \mathcal{D}(K) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y), \quad M : \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y),$$

其中 K 是可闭的， M 是有界的。此外，我们对 K作如下假设：

(H4) 定义域$\mathcal{D}(K) \supseteq \mathcal{D}(D)$，且限制$K|_{\mathcal{D}(D_0)} : \mathcal{D}(D_0) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y)$是有界的。

对于 D, K和 M，我们关联两个线性算子$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$以及$\hat{\mathcal{A}} : \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) \to \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X)$，定义如下

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{\varphi \in \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ MD\varphi = K\varphi\}, \quad \mathcal{A}\varphi := D\varphi, \tag{33}$$

and

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) := \left\{ \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ q = M\varphi \right\}, \quad \hat{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} K\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}, \tag{34}$$

其中$\hat{\mathrm{F}}_T(\mathbb{R}, X) := \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$。我们分别将A和$\hat{\mathrm{A}}$称为与 D、 K和 M相关联的第一算子和第二算子。此外，我们指出，在(33)的语境下，可以将 K 和 M 视为广义边值算子。

引理 32. 线性算子 A 和 $\hat{A}$ 都是可闭的。

证明。显然， A 是可闭的，因为它有 D 作为闭线性扩张。为证明 $\hat{\mathrm{A}}$ 是可闭的，我们使用引理 77 中的刻画。设 $((q_m, \varphi_m))^m$ 是 D($\hat{\mathrm{A}}$) 中一个依范数收敛到零的序列，并假设 ($\hat{\mathrm{A}}(q_m, \varphi_m))_m$ 依范数收敛到某个 $(p, \psi) \in \hat{\mathrm{F}}_T(\mathbb{R}, X)$。那么，由 (34) 可知， $K\varphi_m \to p$ 和 $D\varphi_m \to \psi$ 分别为 $m \to \infty$。由于 K 和 D 是可闭的， p 和 ψ 必为零，从而证明了这一结论。 □

接下来，我们为 (33) 中的可闭线性算子 A 引入一个候选特征算子 $\Delta : \Omega \to L(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y))$。根据（H1），定义线性算子 $\Delta(z) : \mathrm{D}(\Delta(z)) \subseteq \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \to \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y)$，其定义域 Y =D($\Delta(z)$) 与$z$无关，定义如下

$$\Delta(z) := -(zM - K)D_0 R(z, D_0)\iota, \quad \forall z \in \Omega. \tag{35}$$

为验证 Δ 是一个定义良好的全纯可闭算子值函数（推论 34），我们首先需要以下重要结果。

Lem引理 33. 可闭线性算子 $Q(z):D(Q(z)) \subseteq F_T(\mathbb{R},X) \to F_T(\mathbb{R},X)$ 定义为 $b \qquad y$

$$\mathcal{D}(Q(z)) \coloneqq \mathcal{D}(D), \quad Q(z) \coloneqq I - R(z,D_0)(zI-D), \quad \forall z \in \Omega \cup \{0\}, \tag{36}$$

是一个投影。此外， $Q(z)\iota : Y \to N(zI-D)$ 是一个有界线性算子，且其代数逆算子有界，可表示为

$$Q(z)\iota = \iota - zR(z,D_0)\iota, \qquad [Q(z)\iota]^{-1} = \iota^{-1}Q(0)|_{\mathcal{N}(zI-D)}, \quad \forall z \in \Omega \cup \{0\}. \tag{37}$$

证明。首先，注意到由于（H2）和引理 31，对于所有 $z \in \Omega \cup \{0\}$，映射 $Q(z)$ 都是良定义的。其次，由于（H2），对于所有 $z \in \Omega \cup \{0\}$， $I = I_{\mathcal{D}(D)}$ 和 $R(z,D_0)$ 都是有界线性算子，且 $zI-D$ 是一个可闭线性算子，因此由引理 78 和引理 79 可知， $Q(z)$ 是一个可闭线性算子。第三，回顾 D_0 上的预解式恒等式 (14)，并利用（H2），经过直接但相当冗长的计算可得

$$Q(z_1) = Q(z_1)Q(z_2), \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \Omega \cup \{0\}. \tag{38}$$

接下来，固定 $z \in \Omega \cup \{0\}$ 并取 $z_1 = z_2 = z$ in (38) 使得 $Q(z)^2 = Q(z)$，即 $Q(z)$ 是一个投影。因此，我们可以直接计算出其核和值域为

$$\mathcal{N}(Q(z)) = \mathcal{D}(D_0), \quad \mathcal{R}(Q(z)) = \mathcal{N}(zI-D). \tag{39}$$

由此可从 [66, 方程 (4.8-2)] 推出

$$\mathcal{D}(D) = \mathcal{N}(zI-D) \oplus \mathcal{D}(D_0), \quad \forall z \in \Omega \cup \{0\}.$$

我们将其解释为沿着直和分解（ z在.....的核上的平移 D （32）。

下文中，我们常常需要考察 $Q(z)$ 在 ι 的值域上的作用。由于根据（H1）， $\mathrm{R}(\iota) = \mathrm{N}(D)$，因此可直接由 (36) 计算得到， $Q(z)\iota$ 的作用由 (37) 给出。此外，由于当 $z \in \Omega \cup \{0\}$ 时， ι 和 $R(z,D_0)$ 有界，我们直接得到 $\|Q(z)\iota\| \le (1+|z|\|R(z,D_0)\|)\|\iota\| < \infty$，因此 $Q(z)\iota$ 也有界。这还特别意味着 $Q(z)\iota$ 可闭（引理 78）。

由（39）可知， $\mathcal{R}(Q(z)\iota) \subseteq \mathcal{N}(zI-D)$，因此我们可以将 $Q(z)\iota$ 视为映射到 $\mathcal{N}(zI-D)$。我们的下一个目标是证明该映射为双射，且具有有界的（代数）逆算子。（37）中的第一个等式可改写为

$$Q(z)\iota = (I - zR(z,D_0))\iota = [(zI-D_0)R(z,D_0) - zR(z,D_0)]\iota = -D_0R(z,D_0)\iota, \tag{40}$$

右侧是由单射映射复合而成，因此可知 $Q(z)\iota$也是单射。为证明 $Q(z)\iota$ 是满射，任取 $\psi \in \mathrm{N}(zI-D)$，并令 $q = \iota^{-1}Q(0)\psi \in \mathrm{Y}$。由（38）可得 $Q(z)\iota q = Q(z)Q(0)\psi = Q(z)\psi$。由于 $\psi \in \mathrm{N}(zI-D)$，由（36）可知 $Q(z)\psi = \psi$。因此 $Q(z)\iota q = \psi$，从而 $Q(z)\iota$ 是满射，故为双射。上述计算还表明， $Q(z)\iota$ 的（代数）逆算子由（37）给出。为证明这个逆映射有界，我们先注意到

$$Q(0)\varphi = \varphi - D_0^{-1}D\varphi = (I - zD_0^{-1})\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{N}(zI-D).$$

回顾可知， D_0 根据（H2）有有界的（代数）逆算子，因此 $Q(0)|_{\mathcal{N}(zI-D)}$ 是有界的。由于我们还在（H1）中假设 ι 有有界的（代数）逆算子，因此由（37）可得 $Q(z)\iota$有有界的（代数）逆算子。 □

推论 34。 函数 Δ 定义于 (35) 具有如下表示形式

$$\Delta(z) = (zM-K)Q(z)\iota, \quad \forall z \in \Omega, \tag{41}$$

因此是一个全纯可闭算子值函数。

证明。(41) 中的表达式 Δ 直接由 (35) 中给出的定义和恒等式 (40) 得出。由于 $Q(z)\iota$ 的值域包含于 N $(zI - D)$ $\subseteq$D(D) $\subseteq$D(K)，显然 Δ 是良定义的。为证明 Δ 是全纯的，注意到 $z \mapsto zM - K$ 和 Q $(\cdot)\iota$ 在 Ω 上是全纯的，因为定义域 D$(zM - K)$ $=$D(K) 和 D$(Q(z)\iota)$ $=$Y 与 z无关，并且其导数

$$\frac{d}{dz}(zM - K)\varphi = M\varphi, \quad \frac{d}{dz}Q(z)\iota q = -R(z, D_0)Q(z)\iota q,$$

对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ 和 $q \in \mathcal{Y}$均存在，这证明了该断言。这里，第二个等式由（20）得出。由于 M 是有界的，且 K 是可闭的，根据引理 78 可知， $zM - K$ 是可闭的。由于 $\Delta(z)$是可闭线性算子 $zM - K$ 与有界线性算子 $Q(z)\iota$的复合，根据引理 79 可知， Δ 是全纯可闭算子值函数。 □

在证明 Δ 是$\mathcal{A}$ 在Ω上的特征算子之前，我们需要一些预备结果。为此，我们首先建立 $\Delta(z)$ 与 $zI - \hat{}\mathcal{A}$ 在 Ω上的 $\hat{}$扩张后的等价。这需要稍后精确描述 $\mathcal{A}$与 $\mathcal{A}$之间的关系，相关内容将在引理 35中在以下假设下给出：

(H5) The domain $\mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{R}(zI - \mathcal{A})$ for all $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \Omega$.

由于 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ $\subseteq\mathcal{D}(D)$， （H5）告知我们 $\mathcal{A}$ 满足 （SH1）。由下一个结果，我们还可得到 $\hat{}\mathcal{A}$满足 （SH1）。

引理 35. 设 A 和 $\hat{}A$ 分别是与 D、 K 和 M 相关联的第一算子和第二算子。那么，对于所有 $z \in \rho(A) \cap \Omega$, A 与 $\hat{}A$ 在 $\Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$ 中的部分相似。更准确地说，设 $J \in L(F_T(\mathbb{R}, X)$ $\Gamma(M))$ 是由下式定义的线性同构

$$J\varphi := \begin{pmatrix} M\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{42}$$

那么，对于所有 $z \in \rho(A)$ $\cap\Omega$， JAJ^{-1} 是 $\hat{}A$ 在 $\Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$ 中的部分。此外，有

$$J\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) \subseteq \Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})}), \quad \forall z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \Omega. \tag{43}$$

并且，由 命题 16 和命题 18，$\hat{}\mathcal{A}$ 也满足 （*SH1*）。

备注 36. 也可以像 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 在 [40, 引理 3.3], 中所做的那样，证明 A 与 $\hat{}$A 在 $\Gamma(M)$ 中的部分相似。然而，利用这一结果，无法在即将给出的推论 43 的证明中应用命题 16$\hat{}$；该推论将 A 的谱数据与 A 的谱数据联系起来，因为对于 $z \in \rho$(A) $\cap\Omega$， $\Gamma(M)$ 一般并非 R$(zI - \hat{}$A) 的子集。♢

引理 35 的证明。我们先证明（43）。根据（33）和（34）中给出的 D(A) 和 D($\hat{}$A) 的定义，可直接得出，对于所有 $z \in \rho$(A) $\cap\Omega$， JD(A) $\subseteq$D($\hat{}$A) $=\Gamma(M|_{\mathcal{D}(D)})$ $\subseteq\Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$，其中最后一个包含关系由（H5）推出。为证明第二个结论，我们先根据定义17注意到， JAJ^{-1}: D(JAJ^{-1}) $\subseteq\Gamma(M)$ $\to\Gamma(M)$ 可写为

$$\mathcal{D}(J\mathcal{A}J^{-1}) = \left\{ \begin{pmatrix} M\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \right\}, \quad J\mathcal{A}J^{-1} = \hat{\mathcal{A}}, \tag{44}$$

其中，我们回顾了 (33) 和 (34)，从而得到最后一个等式。这里，我们还用到 $\Gamma(M)$ 是一个巴拿赫空间，因为它是 F$_T(\mathbb{R}, X)$ 的闭线性子空间，而 M 有界。根据定义 15，对于某个固定的 $z \in \rho$(A) $\cap\Omega$，记 $\hat{}$A| 为 $\hat{}$A 在 $\Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$ 中的部分。由于 J 连续，且 R$(zI -$A) 在 F$_T(\mathbb{R}, X)$ 中稠密，我们知道 Γ $(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$ 在 $\Gamma(M)$ 中稠密。因此，$\hat{}$A|: D($\hat{}$A|) $\subseteq\Gamma(M)$ $\to\Gamma(M)$ 定义为 D($\hat{}$A|) $=$D(JAJ^{-1})，其作用为 $\hat{}$A| $=\hat{}$A；第一个等式用到了 (33)、(34) 和 （H5），第二个等式用到了 (44)。

为证明第三个断言，我们注意到，对于所有 $z \in \rho(\hat{A}) \cap \Omega$，$D(\hat{A}) \subseteq \Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})}) \subseteq R(zI-\hat{A})$，其中第二个包含关系可通过直接运用 (33) 和 (34) 计算得出。现在，将命题 16 和命题 18 应用于 $\hat{A}$ JAJ^{-1} 和 A，我们得到 $\rho(\hat{A}) \subseteq \rho(JAJ^{-1}) = \rho(A)$，因此，对于所有 $z \in \rho(\hat{A}) \cap \Omega$，$D(\hat{A}) \subseteq R(zI - \hat{A})$ 也成立，从而证明完毕。 □

3.2 显式等价的构造与谱性质

现在我们可以建立 $\Delta(z)$ 与 $zI - \hat{\mathcal{A}}$ 在Ω上的扩张后的等价。特别地，下面的结果表明，E 和 F 这两个来自定义 20的共轭算子，连同（代数）逆算子 $E(\cdot)^{-1}$ 和 $F(\cdot)^{-1}$，可以选取为全纯有界（因此根据引理 78可闭的）算子值函数。

定理 37。 设$\hat{A}$ 是与 D、K 和 M 相关联的第二算子。则存在全纯有界算子值函数 $E\colon \Omega \to L(\hat{F}_T(\mathbb{R}, X), \hat{F}_T(\mathbb{R}, X)_{\hat{\mathcal{A}}})$ 以及 $F\colon \Omega \to L(\hat{F}_T(\mathbb{R}, X))$，其取值为双射，并满足

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = F(z)(zI - \hat{\mathcal{A}})E(z), \quad \forall z \in \Omega. \tag{45}$$

此外，算子 $E(z) \in L(Y \oplus R(zI - D_0), D(\hat{A}))$ 以及 $F(z) \in L(F_T(\mathbb{R}, Y) \oplus R(zI - D_0))$ 及其有界（代数）逆算子分别为

$$E(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MQ(z)\iota q + MR(z, D_0)\varphi \\ Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi \end{pmatrix}, \quad E(z)^{-1}\begin{pmatrix} M\psi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota^{-1}Q(0)\psi \\ (zI - D)\psi \end{pmatrix},$$
$$F(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - (zM - K)R(z, D_0)\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad F(z)^{-1}\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + (zM - K)R(z, D_0)\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

注 38。细心的读者或许已经注意到，Δ 严格来说，按照定义 26，并不是$\hat{\mathcal{A}}$ 在Ω上的特征算子，因为等价关系 (45) 并非24式的形式，因为

$$zI - \hat{\mathcal{A}} \cong \begin{pmatrix} zI & -K \\ 0 & zI - D \end{pmatrix}, \quad \forall z \in \Omega.$$

然而，为简化起见，我们仍将 Δ 称为 $zI - \hat{\mathcal{A}}$ 在Ω 上的特征算子。我们指出，此处建立的等价关系主要是为证明 Δ 实际上是$\mathcal{A}$ 在Ω 上的特征算子定理 42而做的准备。此外，由于$\mathcal{A}$ 的约当链（以及$\hat{\mathcal{A}}$的约当链）可由引理 35推出，上述简单而明确的等价关系也很有用，尤其参见推论 45。 ◊

定理 37 的证明。根据注 38，我们验证定义 26 中的判据。首先，回顾由 (33) 定义的可闭线性算子 $\hat{A}$ 根据引理 35 满足（SH1）。其次，注意到，等式 (45) 左侧算子的定义域与 z 无关，因为对于所有 $z \in \Omega$，$D(\Delta(z)) = Y$；并且，由于引理 31，$I = I_{\mathcal{R}(zI-D_0)}$ 的定义域与 z 无关。同样，定义域 $D(zI - \hat{A}) = D(\hat{A})$ 也与 z 无关。第三，我们分四步建立等价关系 (45)，并证明 E、E^{-1}、F 和 F^{-1} 所述的性质。

步骤 1： 在构造算子值函数 E 之前，我们先考虑算子值函数 $H\colon \Omega \to L(\hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X), \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)_D)$，其取值为 $H(z)\colon \mathcal{Y} \oplus \mathcal{R}(zI - D_0) \to \mathcal{D}(D)$，定义如下：

$$H(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi. \tag{46}$$

我们将证明，H 是一个取值为双射的全纯可闭算子值函数。特别地，我们证明，对于每个 $z \in \Omega$，代数逆算子 $H(z)^{-1} : \mathcal{D}(D) \to$

$\mathcal{Y} \oplus \mathcal{R}(zI - D_0)$ 由下式给出

$$H(z)^{-1}\psi = \begin{pmatrix} \iota^{-1}Q(0)\psi \\ (zI - D)\psi \end{pmatrix}.$$

注意，由于 $Q(\cdot)\iota$、$R(\cdot\ D_0)$ 和 $z \mapsto zI - D$ 在 Ω 上全纯，因此 H 和 $H(\cdot)^{-1}$ 全纯。由于对所有 $z \in \Omega$，$Q(z)\iota$ 和 $R(z, D_0)$ 均有界，故 H 是全纯的有界算子值函数。为证明 $H(z)$ 是单射，设 $Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi = 0$。由于 $Q(z)\iota q \in \mathrm{N}(zI - D)$ 且 $R(z, D_0)\varphi \in \mathrm{D}(D_0)$，由此可知，根据 (32)，$Q(z)\iota q = -R(z, D_0)\varphi \in \mathrm{N}(zI - D) \cap \mathrm{D}(D_0) = \{0\}$，因此 $Q(z)\iota q = R(z, D_0)\varphi = 0$。由于 $Q(z)\iota$ 和 $R(z, D_0)$ 均为单射，q 和 φ 必为零，因此 $H(z)$ 是单射。接下来我们要证明 $\mathrm{R}(H(z)) = \mathrm{D}(D)$。由于 $Q(z)\iota$ 的值域包含于 $\mathrm{N}(zI - D) \subseteq \mathrm{D}(D)$，且 $R(z, D_0)$ 的值域包含于 $\mathrm{D}(D_0) \subseteq \mathrm{D}(D)$，因此 $\mathrm{R}(H(z)) \subseteq \mathrm{D}(D)$。反过来，设给定 $\psi \in \mathrm{D}(D)$。若令 $(q, \varphi) = (\iota^{-1}Q(0)\psi, (zI - D)\psi)$，则根据引理 31 和引理 33，$(q, \varphi) \in \mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0) = \mathrm{D}(H(z))$。此外，我们发现

$$H(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = Q(z)Q(0)\psi + R(z, D_0)(zI - D)\psi = Q(z)\psi + (\psi - Q(z)\psi) = \psi,$$

其中我们用到了（36）和（38）。这证明了 H（z）是双射。为证明 H（z）$^{-1}$ 有界，回顾 （H1）可知 ι^{-1} 有界，而由（36）可知 Q（0）和 $zI - D$ 在图范数 $\|\cdot\|_D$下有界。因此，我们得出 H（z）$^{-1}$ 有界。

步骤 2：接下来回顾由（42）给出的线性同构 $J \in \mathrm{L}(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)\ \Gamma(M))$，其中还需回顾 $\Gamma(M)$ 表示算子 M 的图。随后，我们定义算子值函数 $E := JH(\cdot)$。由于 H 是全纯有界算子值函数且 J 有界，因此 E 是全纯有界算子值函数。注意，由引理 31 可知，$\mathrm{D}(E(z)) = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 与 z 无关。此外，由于 J 和 $H(z)$ 均为单射，因此 $E(z)$ 是单射。由于 $\mathrm{R}(H(z)) = \mathrm{D}(D)$，由（34）可得 $\mathrm{R}(E(z)) = \mathrm{D}(\hat{\ }\mathrm{A})$。因此，$E$ 的取值在（代数意义上）可逆，并且对于 $(M\psi, \psi) \in \mathrm{D}(\hat{\ }\mathrm{A})$，我们有

$$E(z)^{-1}\begin{pmatrix} M\psi \\ \psi \end{pmatrix} = H(z)^{-1}\psi = \begin{pmatrix} \iota^{-1}Q(0)\psi \\ (zI - D)\psi \end{pmatrix}.$$

显然，由于 $H(\cdot)^{-1}$ 是全纯的，$E(\cdot)^{-1}$ 也是全纯的。要证明 $E(z)^{-1} = H(z)^{-1}J^{-1}$ 有界，只需证明 J^{-1}：$\Gamma(M) \to \hat{\ }\mathcal{F}_T(\mathbb{R},\ X)$有界，而这由有界逆定理可得。

步骤 3：接下来，我们定义定理 37 的陈述中提到的算子值函数 F，其取值为 $F(z) : \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0) \to \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$。注意，由引理 31 可知，$F(z)$的定义域和值域与$z$无关。此外，由于$z \mapsto zM - K$和 $R(\cdot\ D_0)$在Ω上全纯，F 和 $F(\cdot)^{-1}$ 也是全纯的。为证明 $F(z)$有界，回顾条件 (H4)，K 在$\mathrm{D}(D_0)$上作为有界线性算子作用，且 $R(z, D_0)$有界，由此可知 $KR(z, D_0)$有界。由于 M 有界，结论得证。此外，从 $F(z)$的表达式可直接看出其核是平凡的，因此它是单射。现在证明 $F(z)$ 是满射。因此，任取$(p, \varphi) \in \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$。若令 $q = p + (zM - K)R(z, D_0)\varphi$，则$(q, \varphi) \in \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$，且显然 $F(z)(q, \varphi) = (p, \varphi)$，从而结论得证。这证明了 $F(z)$是双射。直接计算可得，$F(z)^{-1}$是 $F(z)$的（代数）逆算子。采用证明 $F(z)$时相同的论证，可知 $F(z)^{-1}$ 也是有界的。接下来，注意到

$$\mathcal{R}(zI - \hat{\mathcal{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} (zM - K)\varphi \\ (zI - D)\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathcal{D}(D) \right\} \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathcal{R}(zI - D_0) = \mathcal{D}(F(z)),$$

˜其中包含关系由 引理 31 得出。这使我们可以考虑限制 $F(z) = \tilde{F}(z)|_{\mathcal{R}(zI - \hat{\ }\mathcal{A})}$并回顾正文 定义 20 下方提到的 $\mathcal{R}(F(z)) = \mathcal{R}(\Delta(z)) \oplus \mathcal{R}(zI - D_0)$。

步骤 4： 接下来还需验证等价关系 (45)。回顾 $\hat{\mathcal{A}}$ 在 (34) 中的作用，对于$(q,\ \varphi) \in \mathcal{Y} \oplus \mathcal{R}(zI - D_0)$ 可得

$$(zI - \hat{\mathcal{A}})E(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (zM - K)(Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi) \\ (zI - D)(Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(z)q + (zM - K)R(z, D_0)\varphi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

其中，我们使用了（41）来简化第一行中的表达式，并根据引理 33 回忆得Q（z）$\iota q \in \mathcal{N}$（$zI - D$）来简化第二行中的表达式。回顾 F（z）的定义，即得结论。

□

由于$\mathcal{A}$ 是我们主要关注的算子，我们希望证明 Δ 也是 Ω 上$\mathcal{A}$的一个特征算子。为此，我们将 $\hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) = \Gamma(M) \oplus \Gamma(M)^c$分解为

$$\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q - M\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

并定义两个线性算子 $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \subseteq \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) \to \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X)$ 和 $T_2 : \mathcal{D}(T_2) \subseteq \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) \to \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X)$，其定义域为

$$\mathcal{D}(T_1) := \mathcal{D}(T_2) := \left\{ \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{F}}_T(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D) \right\}$$

并且作用定义为

$$T_1 \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := JD\varphi = \begin{pmatrix} MD\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (K - MD)\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

算子 T_1 是良定义的，因为 M 作用于整个空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$；算子 T_2 也是良定义的，这是由于假设 $\mathrm{D}(K) \supseteq \mathrm{D}(D)$ 来自（H4）。此外，有 $\mathrm{R}(T_1) \subseteq \Gamma(M)$，$\mathrm{R}(T_2) \subseteq \Gamma(M)^c$，$\hat{\mathrm{A}} = T_1 + T_2$ 以及 $J\mathrm{D}(\mathrm{A}) = \mathrm{D}(\hat{\mathrm{A}}) \cap \mathrm{N}(T_2)$。

引理 39. 以下陈述成立：

1. $R(\Delta(z)) \subseteq R(MD - K)$ 且 $R(\Delta(z)) \oplus \{0\} \subseteq R(T_2)$ 对所有 $z \in \Omega$均成立。*2.* 若 $\rho(\Delta) \neq \emptyset$，则 $R(T_2)$ 在 $\Gamma(M)^c$ 中稠密。

证明. 为证明第一个陈述，取给定的 $z \in \Omega$，并回顾（35）可知 $\Delta(z) = (zM - K)Q(z)\iota$。由于 $(zI - D)Q(z)\iota = 0$ 由（39）可知，故有

$$zMQ(z)\iota = MDQ(z)\iota, \tag{48}$$

这意味着 $\Delta(z) = (MD - K)Q(z)\iota$，从而推出 $\mathrm{R}(\Delta(z)) \subseteq \mathrm{R}(MD - K)$。接下来回顾引理 33，$Q(z)\iota : \mathrm{Y} \to \mathrm{N}(zI - D)$ 是双射，因此 $\Delta(z)$ 的值域等于 $(MD - K)|_{\mathcal{N}(zI - D)}$ 的值域。此外，$\mathrm{D}(MD - K) = \mathrm{D}(D)$，因为 M 有界，且由（H4）可知 $\mathrm{D}(K) \supseteq \mathrm{D}(D)$。由于 $\mathrm{N}(zI - D)$ 是 $\mathrm{D}(D) = \mathrm{D}(MD - K)$ 的子空间，因此也可推出 $\mathrm{R}(\Delta(z)) \oplus \{0\} \subseteq \mathrm{R}(T_2)$。

为证明第二个陈述，设给定 $z \in \rho(\Delta)$。则 $\mathcal{R}(\Delta(z)) \oplus \{0\}$ 在 $\Gamma(M)$ 中稠密^c，根据证明的第一部分，我们得到 $\mathcal{R}(T_2)$ 在 $\Gamma(M)$ 中稠密^c。 □

作为证明定理 42的准备工作，接下来我们证明线性算子 $MD - K : \mathcal{D}(D) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y)$ 是可闭的。尽管 MD 和 K 都是可闭的，但我们不能直接保证它们的差也可闭；不过，由于线性算子 M, D 和 K的内在结构，这一点确实成立。

引理 40. 线性算子 $MD - K$ 是可闭的。

证明. 设给定 $\varphi \in \mathrm{D}(D)$，并回忆定理 37 的证明可知，对每个 $z \in \Omega$， $H(z)$ 都是双射。因此， $\varphi = H(z)(q, \varphi_0) = Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi_0$，其中 $q \in \mathrm{Y}$ 且 $\varphi_0 \in \mathrm{R}(zI - D_0)$。回忆式（48），我们得到

$$(MD - K)\varphi = zMQ(z)\iota q - KQ(z)\iota q + (MD - K)R(z, D_0)\varphi_0.$$

此外，由于 $R(z, D_0)$ 映入 $\mathcal{D}(D_0) \subseteq \mathcal{D}(D)$，我们得到预解式恒等式 $DR(z, D_0) = zR(z, D_0) - I$，因此

$$(MD - K)\varphi = zMQ(z)\iota q - KQ(z)\iota q + M(zR(z, D_0) - I)\varphi_0 - KR(z, D_0)\varphi_0. \tag{49}$$

接下来，我们逐一考察 (49) 中的四项：由于 M 和 $Q(z)\iota$ 有界，线性算子 $zMQ(z)\iota$ 有界。由于 K 可闭且 $Q(z)$ 有界，根据引理 79 可知 $KQ(z)$ 可闭。由于 M 和 $R(z, D_0)$ 有界， $M(zR(z, D_0) - I)$ 有界。最后，由 (H4) 可知 $K|_{\mathcal{D}(D_0)}$ 有界，且 $R(z, D_0)$ 有界，因此 $KR(z, D_0)$ 也有界。因此，(49) 表明 $MD - K$ 是一个可闭线性算子与三个有界线性算子之和，由引理 78 可知 $MD - K$ 可闭。

□

接下来，我们实际上需要至少对一个 $z \in \rho(\Delta)$，有$\mathcal{R}(\Delta(z))$ 与$\mathcal{R}(MD-K)$ 在$\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y)$ 中的线性（子）空间相等。因此，我们作出如下假设：

(H6) $\rho(\Delta) \neq \emptyset$ and there exists a $z_0 \in \rho(\Delta)$ such that $\mathcal{R}(\Delta(z_0)) = \mathcal{R}(MD - K)$.

引理 41. 我们有如下直和分解

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(J\mathcal{A}J^{-1}) \oplus \mathcal{R}(T_2^+), \tag{50}$$

其中， T_2^+是 T_2的一个右逆。

证明。根据 (H6)，取 $z_0 \in \rho(\Delta)$使得 $\mathrm{R}(\Delta(z_0)) = \mathrm{R}(MD - K)$。由于引理 39，$\mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \{0\} \subseteq \mathrm{R}(T_2)$；又由 (47)，$\mathrm{R}(T_2) \subseteq \mathrm{R}(MD - K) \oplus \{0\}$，因此可得 $\mathrm{R}(T_2) = \mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \{0\}$。考虑线性映射 $T_2^+ \colon \mathrm{R}(T_2) \to \mathrm{D}(T_2)$，其定义如下：

$$T_2^+ \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -MQ(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q \\ -Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q \end{pmatrix},$$

由于 $Q(z_0)$ 映入 $\mathcal{D}(D)$，因此定义良好；回顾一下引理 33。利用（48）和引理 33 可作简要计算，得到 $T_2T_2^+ = I_{\mathcal{R}(T_2)}$，因此 T_2^+ 是 T_2 的右逆。接下来，我们引入投影算子 $P := T_2^+T_2|_{\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}})} : \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) \to \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}})$，定义如下：

$$P \begin{pmatrix} M\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} MQ(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}(MD - K)\varphi \\ Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}(MD - K)\varphi \end{pmatrix}. \tag{51}$$

为确定该投影的值域和核，我们首先注意到 $\mathrm{R}(P) = \mathrm{R}(T_2^+)$，因为 $\mathrm{R}(T_2)$ 等于 T_2 在 $\mathrm{D}(\hat{\mathrm{A}})$ 上的值域。现在考虑线性算子 $I - P \colon \mathrm{D}(\hat{\mathrm{A}}) \to \mathrm{D}(\hat{\mathrm{A}})$，并直接注意到，通过简单计算可得 $\mathrm{D}(J\mathrm{A}J^{-1}) \subseteq \mathrm{R}(I - P)$。为证明另一个包含关系，设 $(M\psi, \psi) \in \mathrm{R}(I - P)$。那么，对于某个 $\varphi \in \mathrm{D}(D)$，有 $\psi = [I - Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}(MD - K)]\varphi$。回顾（48）可知 $(MD - K)\psi = 0$，因此 $(M\psi, \psi) \in \mathrm{D}(J\mathrm{A}J^{-1})$。由此可知， P 是一个投影，其值域为 $\mathrm{R}(T_2^+)$，核为 $\mathrm{D}(JAJ^{-1})$，于是直和分解（50）成立。 □

现在，我们终于可以证明，算子值函数 Δ 由式（35）定义，是$\mathcal{A}$ 在Ω上的特征算子。

定理 42. 假设 $\mathcal{A}$ 是与 D, K 和 M相关联的第一算子。那么函数 Δ由 (35) 定义，是$\mathcal{A}$ 在 $K\Omega$上的特征算子。

证明。我们验证定义 26 中的条件。首先，回忆一下，式 (33) 中定义的可闭线性算子 A ˜满足（SH1）。其次，我们在该定义中选取空间为 $X = \mathrm{R}(zI - D_0) \subseteq \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ ˜和 $Z = \mathrm{R}(MD - K) \subseteq Z$，其中取 $Z = \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y)$。根据 $\Omega = \rho(D_0)$ 的定义，对于所有 $z \in \Omega$，空间 X在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 中稠密。此外，由 (H6) 可知，存在一个 $z_0 \in \rho(\Delta)$，使得˜$\mathrm{R}(\Delta(z_0)) = \mathrm{R}(MD - K) = Z$，这意味着后一个空间在 Z 中也稠密。接下来，注意到根据引理 31，$\mathrm{D}(\Delta(z)) = \mathrm{Y}$ 和 $\mathrm{D}(I_{\mathcal{R}(zI-D_0)}) = \mathrm{R}(zI - D_0)$ 与 z 无关。此外，根据 (H6)，$\mathrm{D}(zI - \mathrm{A}) = \mathrm{D}(\mathrm{A})$ 和 $\mathrm{R}(\Delta(z_0)) = \mathrm{R}(MD - K)$ 同样与 z 无关。第三，我们证明这些全纯可闭算子值函数

$$z \mapsto \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{R}(zI-D_0)} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad z \mapsto \begin{pmatrix} I_{\mathcal{R}(MD-K)} & 0 \\ 0 & zI - \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

在Ω 上等价，方法是分三个步骤验证定义 20 中的条件。

步骤 1：我们利用式 (46) 中的算子值函数 H 和式 (51) 中的投影 P，构造共轭算子值函数 $E\colon \Omega \to L(\hat{}\,\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X), \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y) \oplus \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)_{\mathcal{A}})$，其取值为 $E(z) : \mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0) \to \mathrm{R}(MD - K) \oplus \mathrm{D}(\mathrm{A})$，如下所示：

$$\begin{aligned} E(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} (MD - K)H(z)(q, \varphi) \\ J^{-1}(I - P)JH(z)(q, \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (MD - K)[Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi] \\ (I - Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}(MD - K))[Q(z)\iota q + R(z, D_0)\varphi] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{52}$$

由于式 (46) 中的算子值函数 H 在 Ω 上全纯，我们可得 E 全纯。为证明 $E(z)$ 可闭，设 $((q_m, \varphi_m))_m$ 是 $\mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 中的一个序列，它在范数下收敛到零，并假设 $(E(z)(q_m, \varphi_m))_m$ 在范数下收敛到某个 $(p, \psi) \in \hat{}\,\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$。由于 $MD - K$ 可闭（引理 40），且根据定理 37 证明中的结果，$H(z)$ 有界，$\mathrm{R}(H(z)) = \mathrm{D}(D)$，由引理 79 可知 $(MD - K)H(z)$ 可闭，因此 $\Psi_m = (MD - K)H(z,q_m) \to 0$ as $m \to \infty$，从而证明了 $p = 0$。因此，$-Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}\Psi_m \to \psi$as $m \to \infty$。由于 $Q(z_0)\iota$ 和 $\Delta(z_0)^{-1}$ 有界（引理 33），由引理 78 可知 $Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}$ 可闭，因此 $\psi = 0$，这就证明了该结论。

为证明 $E(z)$ 是单射，假设 $E(z)(q, \varphi) = 0$。那么由（52）可知 $(MD - K)H(z)(q, \varphi) = 0$。将这个等式代入 $E(z)(q, \varphi) = 0$ 的第二个分量，得到 $H(z)(q, \varphi) = 0$，因此 $(q, \varphi) = (0,0)$，因为 $H(z)$ 是单射；回顾定理 37 的证明。

为证明 $E(z)$ 是满射，注意由（52）可知

$$\mathcal{R}(E(z)) = \left\{ \begin{pmatrix} (MD - K)\varphi \\ J^{-1}(I - P)J\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathcal{D}(D) \right\}.$$

这里，右侧的第一个分量源于这样一个事实：式（46）中的线性算子 $H(z)$ 将其定义域 $\mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 映到 $\mathrm{D}(D)$ 上。由于我们在引理 41 中证明了 $\mathrm{R}(I - P) = \mathrm{D}(JAJ^{-1})$，显然 $\mathrm{R}(E(z)) = \mathrm{R}(MD - K) \oplus \mathrm{D}(\mathrm{A})$，这就证明了所述结论。由此可知 $E(z)$ 是双射，直接计算可得其（代数）逆算子 $E(z)^{-1} : \mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathrm{D}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Y} \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 的作用为

$$E(z)^{-1}\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(z_0)^{-1}q + \iota^{-1}Q(0)\varphi \\ (z - z_0)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q + (zI - D)\varphi \end{pmatrix}, \tag{53}$$

其中 $\mathcal{R}(\Delta(z_0)) = \mathcal{R}(MD - K)$ 且 $\mathcal{R}(zI - D) = \mathcal{R}(zI - D_0)$ 分别由 (H6) 和 引理 31得到。此外，映射 $E(\cdot)^{-1}$ 是全纯的，因为 $z \mapsto zI - D$ 是全纯的。类似于上述论证可知，其取值也都是可闭线性算子。

步骤 2：我们现在来证明算子值函数 $F \oplus \mathcal{R}(zI - D_0) \to \mathcal{R}(MD - K) \oplus \mathcal{R}(zI \hat{-} D_0)$，定义为

$$F(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Delta(z)\Delta(z_0)^{-1}q - (MD - K)R(z, D_0)\varphi \\ (z - z_0)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q + \varphi \end{pmatrix}. \tag{54}$$

注意到，由引理 31， $F(z)$ 的定义域和值域对于所有 $z \in \Omega$ 都与 z 无关。此外，由于 Δ 和 $R(\cdot\ D_0)$ 是全纯的，因此可知 F 是全纯算子值函数。为证明 $F(z)$ 是可闭的，设 $((q_m, \varphi_m))_m$ 是 $\mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 中的一个序列，并且依范数收敛于零；假设 $(F(z)(q_m, \varphi_m))_m$ 依范数收敛到某个 $(p, \psi) \in \hat{\mathrm{F}}_T(\mathbb{R}, X)$。由于 $\Delta(z_0)^{-1}$ 是有界的，且 $\Delta(z)$ 是可闭的，由引理 79 可知 $\Delta(z)\Delta(z_0)^{-1}$ 是可闭的，因此 $\Delta(z)\Delta(z_0)^{-1}q_m \to 0$ 作为 $m \to \infty$。所以， $-(MD - K)R(z, D_0)\varphi_m \to p$ 作为 $m \to \infty$。由于根据引理 40， $MD - K$ 是可闭的，且 $R(z, D_0)$ 是有界的，由引理 79 可得 $p = 0$。由（54）的第二个分量，我们得到 $(z - z_0)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q_m \to \psi$ 作为 $m \to \infty$。如前所述，线性算子 $(z - z_0)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}$ 是可闭的，从而证明了 $\psi = 0$。

为证明 $F(z)$ 是单射，设 $F(z)(q, \varphi) = 0$。于是 $\varphi = (z_0 - z)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q$，并利用 (54) 中的 (41) 将其代入第一分量，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(zM - K)Q(z)\iota - (z - z_0)(MD - K)R(z, D_0)Q(z_0)\iota\right]\Delta(z_0)^{-1}q \\ &= (MD - K)\left[Q(z)\iota - (z - z_0)R(z, D_0)Q(z_0)\iota\right]\Delta(z_0)^{-1}q, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 (48)。接下来考察线性算子 $Q(z)\iota - (z_0 - z)R(z, D_0)Q(z_0)\iota$，由 (37) 可知

$$\begin{aligned} Q(z)\iota - (z_0 - z)R(z, D_0)Q(z_0)\iota &= \iota - zR(z, D_0)\iota - (z_0 - z)R(z, D_0)\iota + z_0(z_0 - z)R(z, D_0)R(z_0, D_0)\iota \\ &= \iota - zR(z, D_0)\iota - (z_0 - z)R(z, D_0)\iota + z_0(R(z, D_0) - R(z_0, D_0))\iota \\ &= Q(z_0)\iota, \end{aligned}$$

其中第二个等号用到了预解方程 (14)。因此，

$$0 = (MD - K)[Q(z)\iota - (z_0 - z)R(z, D_0)Q(z_0)\iota]\Delta(z_0)^{-1}q = (MD - K)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}q = q,$$

其中第三个等号由 (41) 与 (48) 推得。由于 $q = 0$，由 $F(z)$ 的第二个分量可知 $\varphi = 0$，这意味着 $F(z)$ 是单射。

为证明 $F(z)$ 是满射，任取 $(p, \psi) \in \mathrm{R}(MD - K) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$。考虑向量 $q = p + (MD - K)R(z, D_0)\psi$ 和 $\varphi = \psi + (z_0 - z)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}[p + (MD - K)R(z, D_0)\psi]$。由于 $p \in \mathrm{R}(MD - K)$，存在一个 $p_0 \in \mathrm{D}(D)$，使得 $p = (MD - K)p_0$，因此 $q = (MD - K)[p_0 + R(z, D_0)\psi] \in \mathrm{R}(MD - K)$。根据 (H3)，对于 Ω 中的 $z \in$， $Q(z_0)\iota$ 映入 $\mathrm{D}(D) \subseteq \mathrm{R}(zI - D_0)$，因此可得 $\varphi \in \mathrm{R}(zI - D_0)$。经过直接但相当冗长的计算可得 $F(z)(q, \varphi) = (p, \psi)$，从而证明了所述结论。由此可知 $F(z)$ 是双射，其（代数）逆算子 $F(z)^{-1} : \mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0) \to \mathrm{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$ 的作用为

$$F(z)^{-1}\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + (MD - K)R(z, D_0)\varphi \\ \varphi + (z_0 - z)Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}[q + (MD - K)R(z, D_0)\varphi] \end{pmatrix}, \tag{55}$$

这里我们再次回顾 $\mathcal{R}(\Delta(z_0)) = \mathcal{R}(MD - K)$，这是由于 (H6)。显然， $F(\cdot)^{-1}$ 是全纯的，因为 $R(\cdot\ D_0)$ 在 Ω 上全纯。类似于上述论证可知，其取值为可闭线性算子。接下来，注意到

$$\mathcal{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathcal{R}(zI - \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathcal{R}(zI - D_0),$$

因为 A 是 D 的限制，且根据引理 31， $\mathrm{R}(zI - D) = \mathrm{R}(zI - D_0)$。这使我们能够˜考虑限制 $F(z) = F(z)|_{\mathcal{R}(\Delta(z_0)) \oplus \mathrm{R}(zI - \mathrm{A})}$，并回顾定义 20 下方的正文：˜$\mathrm{R}(F(z)) = \mathrm{R}(\Delta(z)) \oplus \mathrm{R}(zI - D_0)$。

步骤 3： 直接计算可得

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{R}(zI - D_0)} \end{pmatrix} = F(z)\begin{pmatrix} I_{\mathcal{R}(MD - K)} & 0 \\ 0 & zI - \mathcal{A} \end{pmatrix} E(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

这就证明了该定理。 □

既然我们已经证明 Δ 既是 $\mathcal{A}$ 也是 $\hat{}\mathcal{A}$ 在Ω上的特征算子，我们现在可以应用 定理 28来分析它们的谱性质。特别地，我们证明Δ 满足（谱）假设 （SH2） 和 （SH3）。由此，我们可以将 $\hat{}$的 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 的谱信息与 Δ的谱信息联系起来。因此，我们也可以将 $\mathcal{A}$的谱信息与$\hat{}$的 $\mathcal{A}$联系起来。

推论 43. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\hat{}\mathcal{A}$ 分别是与 D、K 和 M相关联的第一算子和第二算子，并设 Δ 是在 (35) 中定义的、作用于Ω上的相关特征算子。那么 Δ 满足 （*SH2*） 和 （*SH3*），且有

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \cap \Omega = \{\sigma \in \Omega : \sigma \text{ is a characteristic value of } \Delta\} = \sigma_p(\hat{\mathcal{A}}) \cap \Omega \tag{56}$$

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \Omega = \{\sigma \in \Omega : \Delta(\sigma) \text{ is not invertible}\} = \sigma(\hat{\mathcal{A}}) \cap \Omega. \tag{57}$$

此外，A 和 $\hat{}A$ 在 $z \in \rho(\Delta)$ 处的预解式可表示为

$$\begin{aligned} R(z,\mathcal{A})\varphi &= Q(z)\iota\Delta(z)^{-1}[M\varphi - (zM-K)R(z,D_0)\varphi] + R(z,D_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(zI-\mathcal{A}), \\ R(z,\hat{\mathcal{A}})\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} &= J\big(Q(z)\iota\Delta(z)^{-1}[q-(zM-K)R(z,D_0)\varphi] + R(z,D_0)\varphi\big), \quad \forall \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(zI-\hat{\mathcal{A}}), \end{aligned} \tag{58}$$

并且有 $R(zI-A) = R(zI-D_0)$，它对所有 $z \in \rho(A) \cap \Omega$ 都与 z 无关。此外，若 $\sigma \in \sigma_p(A) \cap \Omega$，则 $m_g(\sigma, A) = m_g(\sigma, \hat{}A) = m_g(\Delta(\sigma))$ $m_a(\sigma, A) = m_a(\sigma, \hat{}A) = m_a(\Delta(\sigma))$ 并且$k(\sigma, A) = k(\sigma, \hat{}A) = k(\Delta(\sigma))$。若进一步 σ 为有限型，则将 σ $\hat{}$视为 A 和 A 的特征值时，其部分重数等于 Δ 在 σ 处的零点重数。此外，若 σ 在 $\sigma(A) \cap \Omega$ 中是孤立的，则 $r(\sigma, A) = r(\sigma, \hat{}A) = r(\Delta(\sigma))$。

证明。 为证明（56），回想一下， Δ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\hat{}\mathcal{A}$ 在 Ω上的特征算子。于是，结论立即由（25）得出。此外，关于各种重数概念与上升之间关系的断言直接由定理 28得出。

为证明（57）中的第一个等式，我们将运用定理 28 的结果，并将其应用于定理 42 中给出的 A 与 Δ 之间的等价。我们先回顾由（H6）可知， $\rho(\Delta) \neq \emptyset$。因此，只需验证（SH3）在此等价下成立。为计算（SH3）中定义的函数$G_\Delta(z) : \mathrm{R}(zI - \mathrm{A}) \to \mathrm{D(A)}$，我们结合（52）和（54），经过冗长但常规的计算，得到

$$\begin{aligned} G_\Delta(z) &= J^{-1}(I-P)J[-Q(z)\iota\Delta(z)^{-1}[(MD-K)R(z,D_0)] + R(z,D_0)] \\ &= Q(z)\iota\Delta(z)^{-1}[M-(zM-K)R(z,D_0)] + R(z,D_0), \quad \forall z \in \rho(\Delta), \end{aligned}$$

其中， $I-P$ 是引理 41 的证明中出现的投影，其值域为 $\mathrm{D}(J\mathrm{A}J^{-1})$。由于（H6）成立，线性算子 $G_\Delta(z)$ 可延拓至其最大定义域 $\mathrm{R}(zI-D_0)$，该定义域在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 中稠密。因此， $G_\Delta(z) : \mathrm{R}(zI-D_0) \to \mathrm{D(A)}$ 有界，因为它是有界线性算子的复合；这里特别指出，$K|_{\mathcal{D}(D_0)}$ 根据（H4）有界。由于 $z \in \rho(\Delta) \subseteq \Omega$，我们注意到 $\mathrm{D}(G_\Delta(z)) = \mathrm{R}(zI-D_0)$ 在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 中稠密。由于 $R(z, \mathrm{A}) = G_\Delta(z)$，由（58）给出的 A 在 $z \in \rho(\Delta)$ 处的预解式表示随即成立；并且根据引理 31，$\mathrm{R}(zI - \mathrm{A}) = \mathrm{R}(zI-D_0)$ 与 z 无关。为计算 $G_\mathcal{A}(z) : \mathrm{R}(\Delta(z)) \to \mathrm{Y}$，我们结合（53）和（55）得到

$$G_\mathcal{A}(z) = \Delta(z_0)^{-1} + (z_0 - z)\iota^{-1}Q(0)R(z,\mathcal{A})Q(z_0)\iota\Delta(z_0)^{-1}, \quad \forall z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \Omega.$$

根据引理 39 和 (H6)，线性算子 $G_\mathcal{A}(z)$ 在其最大定义域 $\mathrm{R}(\Delta(z_0))$ 上仍然定义良好。显然， $G_\mathcal{A}(z)$ 是有界的，因为它是有界线性算子的复合。特别是，图范数 $\|\cdot\|_\mathcal{A}$ 确保了 $Q(0)$ 分量的有界性；参见定理 37 的证明中用于证明 $H(z)^{-1}$有界性的类似论证。此外，$\mathrm{D}(G_\mathcal{A}(z)) = \mathrm{R}(\Delta(z_0))$，后者在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Y)$ 中稠密，因为根据 (H6)， $z_0 \in \rho(\Delta) \neq \emptyset$。这证明 (SH3) 对于 Δ 成立，因为

A 在 Ω 上的特征算子$\mathcal{A}$ 在 Ω，这意味着 (57) 中的第一个等式成立。由于 $\Delta(z)^{-1} = G_{\mathcal{A}}(z)$，我们得到 $\mathcal{R}(\Delta(z)) = \mathcal{R}(\Delta(z_0))$ 对所有 $z \in \rho(\Delta)$ 成立，因此 Δ 满足 (SH2)。

为证明（57）中的第二个等式，我们先回顾引理 35：对于所有 $z \in \rho(A) \cap \Omega$，A 与 $\Gamma(M|_{\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})})$ 中 $\hat{A}$ 的部分相似。因此，命题 16 和命题 18 中关于谱的结果表明，$\sigma(A) \subseteq \sigma(\hat{A})$，进而 $\sigma(A) \cap \Omega \subseteq \sigma(\hat{A}) \cap \Omega$。为证明另一方向的包含关系，设 $z \in \rho(A) \cap \Omega$，由（57）中的第一个等式可得 $z \in \rho(\Delta)$。回顾定理 37 中 $E(z)$ 和 $F(z)$ 的表示，对于所有 $(q, \varphi) \in R(zI - \hat{A})$，我们得到

$$R(z, \hat{\mathcal{A}}) \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = J\big(Q(z)\iota\Delta(z)^{-1}[q - (zM - K)R(z, D_0)\varphi] + R(z, D_0)\varphi\big),$$

进而 $z \in \rho(\hat{\mathcal{A}}) \cap \Omega$，由此得证。由此也可证明（58）中的第二个等式。

关于极点阶数的剩余结论现在可由 命题 16、命题 18、定理 28 和引理 35得出。

□

下面的结果给出了 $\mathcal{A}$ 与 Δ之间的重数定理。证明可由定理 28中的抽象重数定理直接推出，因此从略。

推论 44。设 σ 是 Δ 的一个有限型孤立特征值，且满足 $k(\sigma,A) = r(\Delta(\sigma))$。则重数定理 $\dim N((\sigma I - A)^{r(\Delta(\sigma))}) = m_a(\Delta(\sigma))$ 成立。

下面的结果表明，我们可以利用定理 37中导出的较简单等价关系，根据 Δ 的典范约当链系，计算 $\mathcal{A}$ 和 $\hat{\mathcal{A}}$ 的（广义）特征向量的典范基。

推论 45。设 σ 是 Δ 的一个有限型特征值，并设 $\{\{q_{i,0}, \ldots, q_{i,k_i-1}\}: i = 1, \ldots, p\}$ 是 Δ 在 σ 处的典范约当链系。对每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，定义向量

$$\varphi_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l+1} D_0 R(\sigma, D_0)^{l+1} \iota\, q_{i,k-l}, \qquad k = 0, \ldots, k_i - 1.$$

于是，$\{\{\varphi_{i,0}, \ldots, \varphi_{i,k_i-1}\}: i = 1, \ldots, p\}$ 是 A 在 σ 处（广义）特征向量的典范基，而 $\{\{J\varphi_{i,0}, \ldots, J\varphi_{i,k_i-1}\}: i = 1, \ldots, p\}$ 是 $\hat{A}$ 在 σ 处（广义）特征向量的典范基。

证明。设 $\{q_0, \ldots, q_{k-1}\}$ 是 Δ 在 σ 处长度为 k 的约当链。由于等价关系（45），可知对所有 $z \in \Omega$，有

$$E(z) \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} (z-\sigma)^i q_i \\ 0 \end{pmatrix} = JW_\sigma(z), \quad W_\sigma(z) := -\sum_{i=0}^{k-1} (z-\sigma)^i D_0 R(z, D_0)\iota q_i,$$

因此 $z \mapsto W_\sigma(z)$ 是 $zI - \hat{A}$ 在 σ 处的根函数。由定理 28 的证明可知，我们需要在 σ 的某个邻域内将 W_σ 展开到 k 阶。由于 D_0 满足（SH1），由命题 10 可得，对于充分接近 σ 的 z，$R(z, D_0) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (z-\sigma)^l R(\sigma, D_0)^{l+1}$。因此，

$$W_\sigma(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=0}^{i} (-1)^{l+1} D_0 R(\sigma, D_0)^{l+1} \iota q_{i-l} \right) (z-\sigma)^i + \mathcal{O}((z-\sigma)^k),$$

当 z 充分接近 σ 时，这表明 $\{J\varphi_0, \ldots, J\varphi_{k-1}\}$ 是 $\hat{A}$ 在 σ 处的一条约当链。由于这条约当链是 $D(JAJ^{-1})$ 的子集，根据引理 35，$\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}\}$ 是 A 在 σ 处的一条约当链。由于根据 (H6)，$\rho(\Delta) \neq \emptyset$，定理 28 成立，因此根据命题 24，A 和 Δ 的约当链一一对应。

□

3.3 周期谱性质与相似性

在 第4节的具体应用中，事实证明，$\mathcal{A}$的特征值，因而也是 Δ (推论 43中的特征值，将起到弗洛凯指数的作用；通常，这些指数只能在相差 $\frac{2\pi i}{T}$ 的整数倍的意义下唯一确定。因此，值得研究这类周期谱模式是否也能在$\mathcal{A}$和 Δ中显现。若果真如此，便可大幅简化在Ω上的谱问题，因为我们只需考察$\mathcal{A}$ 和 Δ 在子集$\{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]\}$ 上的谱行为，而不必考察整个定义域 Ω。

为建立这样的构造，我们证明，对于所有 $z \in \Omega$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，$zI - A \sim (z + \frac{2\pi i}{T}k)I - A$ 且 $\Delta(z) \sim \Delta(z + \frac{2\pi i}{T}k)$。从现在起，我们称映射 $z \mapsto \Delta(z)$ 和 $z \mapsto zI - A$ 在 Ω 上是 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的。为此，给定 $Z \in \{X, Y\}$，并考虑一个有界线性算子$\varepsilon_k : \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Z) \to \mathrm{F}_T(\mathbb{R}, Z)$，其作用为 $(\varepsilon_k u)(t) := e^{\frac{2\pi k i}{T}t}u(t)$，对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立。尽管 ε_k取决于底层空间 Z，但符号中省略了这一依赖关系，具体含义将由上下文明确。接下来，我们提出以下（周期）假设，并将在第4节的具体示例中验证：

(PH1) 对所有 $z \in \Omega$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，映射 ε_k 在 $\mathcal{D}(D_0)$、$\mathcal{D}(D)$、$\mathcal{D}(K)$ 和 $\mathcal{R}(zI - D_0)$ 中保持不变于 $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, X)$，并在 $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, Y)$ 中保持空间 $\mathcal{Y}$和 $\mathcal{R}(MD - K)$ 不变。

注意，ε_k 可逆，且其有界逆为 ε_{-k}。为了构造相似变换，我们必须假设以下关系：

$$\varepsilon_k D\varepsilon_k^{-1} = \frac{2\pi k i}{T}I + D,\ \varepsilon_k K\varepsilon_k^{-1} = \frac{2\pi k i}{T}M + K,\ \varepsilon_k M\varepsilon_k^{-1} = M,\ \varepsilon_k Q\left(z + \frac{2\pi k i}{T}\right)\iota\varepsilon_k^{-1} = Q(z)\iota, \quad \text{(PH2)}$$

对所有 $z \in \Omega$ 以及 $k \in \mathbb{Z}$。假设 (PH1) 保证了 (PH2) 中的关系定义良好。在证明本节的主要结果 (命题 47) 之前，我们首先必须证明 Ω 本身也具有这样的周期模式。

引理46. 若 $z \in \Omega$，则 $z + \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z} \subseteq \Omega$。

证明. 给定 $z \in \Omega = \rho(D_0)$。则方程 $(zI - D_0)\varphi = \psi$ 对于 ψ 在 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 的稠密子空间 $\mathrm{R}(zI - D_0)$ 中有唯一有界解$\varphi = R(z, D_0)\psi \in \mathrm{D}(D_0)$。将 (PH2) 中的第一个等式限制在 $\mathrm{D}(D_0)$ 上，并回顾 (PH1)，最终得到

$$\left[\left(z + \frac{2\pi k i}{T}\right)I - \varepsilon_k D_0 \varepsilon_k^{-1}\right]\varphi = (zI - D_0)\varphi = \psi, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

这意味着 $z + \frac{2\pi k i}{T} \in \rho(\varepsilon_k D_0 \varepsilon_k^{-1}) = \rho(D_0)$，其中该等式由 命题 18 得出，因为 ε_k 是有界的，且可闭线性算子 D_0 满足（SH1）。由此得证。 □

命题 47。 映射 $z \mapsto zI - A$ 和 $z \mapsto \Delta(z)$ 在 Ω 上是 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的。

证明。 设 $z \in \Omega$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 已给定。由（41）和（PH2）可得

$$\varepsilon_k \Delta\left(z + \frac{2\pi k i}{T}\right)\varepsilon_k^{-1} = \left[\left(z + \frac{2\pi k i}{T}\right)\varepsilon_k M\varepsilon_k^{-1} - \varepsilon_k K\varepsilon_k^{-1}\right]\varepsilon_k Q\left(z + \frac{2\pi k i}{T}\right)\iota\varepsilon_k^{-1} = \Delta(z),$$

由于 $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{-k}$ 保持 $\mathcal{D}(D)$ 和 $\mathcal{Y}$ 不变（依据 (PH1)），因此定义良好。

为了证明第二个结论，我们先证明 ε_k 保持 $\mathrm{D}(A)$ 不变。由于根据 (PH1)，它保持 $\mathrm{D}(D)$ 不变，因此只需证明对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$MD\varepsilon_k^{-1}\varphi = K\varepsilon_k^{-1}\varphi$，且 $\varphi \in \mathrm{D}(A)$。设 $\varphi \in \mathrm{D}(A)$，并注意到 $MD\varepsilon_k^{-1}\varphi = \varepsilon_k^{-1}M(\frac{2\pi k i}{T} + D)\varphi$。根据假设，$MD\varphi = K\varphi$，且 $K\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_k^{-1}(\frac{2\pi k i}{T}M + K)$，故结论成立。由于 A 的作用由 D 给出，(PH2) 中的第一个等式表明 $\varepsilon_k A\varepsilon_k^{-1} = \frac{2\pi k i}{T}I + A$，从而证明了该结果。□

鉴于前面的结果，从现在起，若 (PH1) 和 (PH2) 成立，我们称 Δ 是 Ω 上 A 的一个 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似特征算子。通过类似于命题 47 证明中所用的论证，也可得出 Δ 是 Ω 上 $\hat{}$A 的一个 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似特征算子，因为映射 $z \mapsto zI - \hat{}$A 在 Ω 上同样是 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的。为证明这一事实，可使用映射 $\hat{}\varepsilon_k \colon \hat{}\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X) \to \hat{}\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$，其定义为 $\hat{}\varepsilon_k(q, \varphi) := (\varepsilon_k q, \overline{\varepsilon_k}\varphi)$，对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立。

4 周期演化系统类的应用

本节讨论三类周期线性泛函微分方程，我们将在第 2 节 构造的特征算子将为我们提供有关弗洛凯指数的信息。本节讨论的所有周期线性泛函微分方程类均可写成以下形式

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t, \quad t \geq s, \tag{FDE}$$

其中，$x(t) \in \mathbb{C}^n$, $s \in \mathbb{R}$ 表示一个起始时间，而历史函数 x_t 定义为 $x_t(\theta) := x(t+\theta)$，对所有 $\theta \in I$均成立，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个（给定的）闭区间。这一设定表明，状态空间X 应选为形如 $\mathrm{F}(I, \mathbb{C}^n)$ 的函数空间，而约化空间 $Y = \mathbb{C}^n$ 则由 X的陪域给出。此外，映射 $\mathbb{R} \ni t \mapsto L(t) \in \mathrm{L}(X, \mathbb{C}^n)$ 假定具有T周期，某个（最小） $T \geq 0$；而在证明自治泛函微分方程类包含在我们的构造中时（注 59），$T = 0$ 的设定将发挥重要作用。由于我们要处理（FDE）中的导数，因此还需假设 X 含有一个线性子空间 $\mathrm{F}^1(I, \mathbb{C}^n)$，其元素均为在 X中可微的函数。导数的类型取决于函数空间 X的具体背景、选择及其底层拓扑。例如，若使用连续函数空间 $X = C(I, \mathbb{C}^n)$，则 $\mathrm{F}^1(I, \mathbb{C}^n) = C^1(I, \mathbb{C}^n)$表示连续可微函数空间（强导数）。同样，若使用某个$1 \leq p \leq \infty$下的 $X = L^p(I, \mathbb{C}^n)$，则 $\mathrm{F}^1(I, \mathbb{C}^n) = W^{1,p}(I, \mathbb{C}^n)$表示索伯列夫空间（弱导数）。映射 $t \mapsto L(t)$的正则性与 F 的选择密切相关，后续各例将对此作出说明。关于 F 的选择，我们只要求满足以下正则性条件：对每个固定的 $z \in \mathbb{C}$，指数映射$(\theta \mapsto e^{z\theta}) \in \mathrm{F}^1(I, \mathbb{C}^n)$。

若存在一个非零函数 v，其形式为$v(t) = e^{\sigma t}q(t)$，且满足 $q \in \mathrm{F}^1_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 并解出 (FDE)，则称 $\sigma \in \mathbb{C}$ 为 (FDE) 的弗洛凯指数。因此，我们关注的问题等价于寻找满足周期线性FDE的 Floquet 对 $(\sigma, q) \in \mathbb{C} \times \mathrm{F}^1_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$

$$\dot{q}(t) + \sigma q(t) - L(t)[\theta \mapsto e^{\sigma\theta}q(t+\theta)] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{59}$$

函数 v 称为与弗洛凯指数 σ相对应的 Floquet（特征）解。对于 (FDE)，若存在（强连续的）向前演化系统 $U := \{U(t,s)\}_{t \geq s} \subseteq \mathrm{L}(X)$，则可以证明，这种弗洛凯指数的概念等价于通过单值算子 $U(s+T, s)$ 的与 s 无关的谱值 $\lambda = e^{\sigma T}$ 来定义弗洛凯指数的概念；关于经典时滞微分方程情形的证明，参见 [29, 引理 8.1。2]（第 4.1 节）。对于不生成向前演化系统（在 X 上）的系统，例如混合型泛函微分方程（MFDE）（第 4.3 节），仍可通过寻找满足 (59) 的 Floquet 对 (σ, q) 来求取弗洛凯指数和解。因此，以 (59) 定义弗洛凯指数适用于比通过 U 的方法更广泛的一类方程。为体现第 3.3 节中关于$\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似性的部分抽象结果，以下结果表明，(FDE) 的弗洛凯指数确实在相差 $\frac{2\pi i}{T}$ 的整数倍意义下唯一确定。

—

—

命题 48。 如果 $\sigma \in \mathbb{C}$ 是弗洛凯指数，那么对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$\sigma + \frac{2\pi i}{T}k$ 都是弗洛凯指数。

证明。设 σ为一个弗洛凯指数，则 $t \mapsto e^{\sigma t}q(t)$ 是函数微分方程的一个解，其中 $q \in \mathrm{F}^1_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$。设 $k \in \mathbb{Z}$已给定，并考虑映射 $q_k \in \mathrm{F}^1_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，其定义为对所有 $t \in \mathbb{R}$，$q_k(t) = \overline{e^{-\frac{2\pi i}{T}kt}}q(t)$。

那么函数 $t \mapsto e^{(\sigma+\frac{2\pi i}{T}k)t}q_k(t) = e^{\sigma t}q(t)$ 是（函数微分方程）的一个解，这意味着 $\sigma + \frac{2\pi i}{T}k$ 是一个弗洛凯指数。 □

本节的核心结果是建立如下刻画

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \Omega = \{\sigma \in \Omega : \sigma \text{ is a characteristic value of } \Delta\} = \{\sigma \in \Omega : \sigma \text{ is a Floquet exponent} \tag{60}$$

该刻画适用于 (FDE) 的三个代表性子类，即经典时滞微分方程（第 4.1 节）、无限时滞微分方程（第 4.2 节）和混合型泛函微分方程（第 4.3 节）。对于经典时滞微分方程和混合型泛函微分方程，$\Omega = \mathbb{C}$；而对于无限时滞微分方程，Ω 是 $\mathbb{C}$ 中包含原点的一个右半平面。在每种情况下，集合 Ω 都足够大，因而可以应用线性化稳定性原理并研究局部分岔。此外，命题 48 和 (60) 的一个推论是，只需在水平带 $\{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]\}$ 内寻找 A 的谱值，或等价地，寻找 Δ 的特征值。为证明 (60)，我们分四步进行。首先，我们证明 Δ 是 Ω 上 $\hat{A}$ 的闭特征算子（定理 37）。其次，我们验证 Δ 满足 (H6)。第三，结合这两个关键结果，我们得出 Δ 是 Ω 上 A 的特征算子（定理 42）。最后，我们应用推论 43 和引理 29 来证明 (60)。

4.1 经典时滞微分方程

在经典时滞微分方程的框架下，状态空间 X 是配备上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的巴拿赫空间$C([-h, 0], \mathbb{C}^n)$。假设（最大）时滞 $h > 0$ 有限，且映射 L 属于 $C_T(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, \mathbb{C}^n))$。由向量值版本的里斯表示定理可知，对每个 $t \in \mathbb{R}$，算子 $L(t)$ 都可以唯一地表示为一个黎曼–斯蒂尔切斯积分

$$L(t)\varphi = \int_0^h d_2\zeta(t, \theta)\varphi(-\theta). \tag{61}$$

这里，映射 $\zeta\colon \mathbb{R}\times[0, h] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个矩阵值函数，而对于所有 $\theta \in [0, h]$，$\zeta(\cdot\ \theta)$ 都是连续且以 T 为周期的。此外，$\zeta(t, \cdot)$ 有界变差，在开区间 $(0, h)$ 上右连续（对所有 $t \in \mathbb{R}$），并满足归一化条件 $\zeta(\cdot,0) = 0$。记号 $d_2\zeta$ 表明，在计算黎曼 – 斯蒂尔切斯积分时，我们是关于 ζ 的第二个变量进行积分。由于 ζ 是矩阵值的，我们也将 $d_2\zeta$ 写在被积函数前面。对于任意起始时间 $s \in \mathbb{R}$，初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = L(t)x_t, & t \geq s, \\ x_s = \varphi, & \varphi \in X, \end{cases} \tag{62}$$

存在唯一解 x 于 $[s, \infty)$，该解由一个强连续前向演化系统 U通过 $x_t = U(t,\ s)\varphi$对所有 $t \geq s$，参见 [16, 定理 XII.2.7 和 XII.3。1]。与 U（在时间 $t \in \mathbb{R}$）相关联的（广义）生成元由闭线性算子 $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subseteq X \to X$ 及其定义域与作用给出

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{\varphi \in C^1([-h, 0], \mathbb{C}^n) : \varphi'(0) = L(t)\varphi\}, \quad A(t)\varphi = \varphi',$$

另见 [50, 8] 以了解更多信息。当我们对函数 $\varphi \in C^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ 关于状态变量求导时，用撇号表示，即 $\varphi' \in X$。然而，当我们对函数 $\varphi \in C^1_T(\mathbb{R}, X)$ 关于时间变量求导时，则用点号表示，即 $\dot{\varphi} \in C_T(\mathbb{R}, X)$。对于这个算子，让我们回顾一下式（5），与之关联的线性算子 $A : D(A) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 定义为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in C^1_T(\mathbb{R}, X) : \varphi(t) \in \mathcal{D}(A(t)) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (\mathcal{A}\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t). \tag{63}$$

正如我们将在引理 49中证明的，算子$\mathcal{A}$（来自（63））与第 3 节（$\mathcal{A}$（来自（33））中引入的可闭线性算子 第 3 节相同。本节旨在为

Δ 构造$\mathcal{A}$ 的特征算子，并以此为基础确立其谱的若干性质。特别地，我们将证明，$\mathcal{A}$ 的谱仅由有限型孤立特征值组成，并满足（60）。为此，我们首先构造算子 D，K和 M，使得$\mathcal{A}$是与 D，K和 M相关联的第一算子。

引理 49. 令 $D:D(D) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 为如下定义的算子

$$\mathcal{D}(D) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi(t)' \in X \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (D\varphi)(t) = \varphi(t)' - \dot{\varphi}(t). \tag{64}$$

则 D 是一个满足（*H1*）、（*H2*）、（*H3*）和（*H5*）的可闭线性算子，且 $\Omega = \mathbb{C}$。此外，定义线性算子 $K: D(K) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 和 $M: C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 如下

$$\mathcal{D}(K) = C_T^1(\mathbb{R}, X), \qquad (K\varphi)(t) = L(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)(0), \qquad (M\varphi)(t) = \varphi(t)(0), \tag{65}$$

则 K满足 （*H4*），且 $\mathcal{A}$ 由 (63) 定义，是与之关联的第一算子 D，K和 M。

证明。将 $I = [-h, 0]$、$Y = \mathbb{C}^n$ 和 $X = C([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ 代入第3.1节的构造中。我们首先证明算子 D 可闭，并满足假设（ H1 ）、（ H2 ）、（ H3 ）和（ H5 ）。为证明线性算子 D 可闭，取 D(*D*) 中的序列 $(\varphi_m)_m$，其在范数意义下收敛于零，并假设序列 $(D\varphi_m)_m$ 在范数意义下收敛于某个 $\psi \in C_T(\mathbb{R}, X)$。我们需要证明 $\psi = 0$。对每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $\psi_m = D\varphi_m$，并注意到该等式等价于

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_m(t)(\theta) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_m(t)(\theta) = \psi_m(t)(\theta), \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \theta \in [-h, 0].$$

这是一个非齐次输运方程，其解为

$$\varphi_m(t)(\theta) = \varphi_m(t+\theta)(0) + \int_0^\theta \psi_m(t+\theta-s)(s)ds.$$

由于 $\varphi_m \to 0$ 和 $\psi_m \to \psi$ 关于第一和第二个变量一致收敛，我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \psi(t+\theta-s)(s)ds &= \lim_{m\to\infty} \int_0^\theta \psi_m(t+\theta-s)(s)ds \\ &= \lim_{m\to\infty} [\varphi_m(t)(\theta) - \varphi_m(t+\theta)(0)] = 0, \end{aligned} \tag{66}$$

其中在最后一步中，我们用到了 $\varphi_m \to 0$一致地当 $m \to \infty$。设 $t_1 \in \mathbb{R}$和 θ_1，$\theta_2 \in [-h, 0]$ 其中$\theta_1 \neq \theta_2$ 给定。若 $t_2 = t_1 + \theta_1 - \theta_2$，则根据（66）我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi(t_1+\theta_1-s)(s)ds &= \int_0^{\theta_1} \psi(t_1+\theta_1-s)(s)ds + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi(t_1+\theta_1-s)(s)ds \\ &= \int_0^{\theta_2} \psi(t_1+\theta_1-s)(s)ds = \int_0^{\theta_2} \psi(t_2+\theta_2-s)(s)ds = 0 \end{aligned}$$

由于第二个和最后一个积分根据（66）为零。对左端关于θ_2 求导，得到 ψ（t_2）（θ_2）$= 0$ 对所有 $\theta_2 \in [-h, 0]$均成立。由于 t_1 和 θ_1是任意的，因此 t_2也是任意的，我们得出 $\psi = 0$，即 D 是可闭的。

为验证算子 D 满足（H1），我们首先证明$\mathcal{N}$（D）$\neq \{0\}$。算子 D的核由满足输运方程的函数 $\varphi \in \mathcal{D}$（D）构成

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(t)(\theta), \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \theta \in [-h, 0],$$

这等价于说，φ 具有平移性质 $\varphi(t)(\theta) = \varphi(t+\theta)(0)$，对所有的 $t \in \mathbb{R}$和 $\theta \in [-h, 0]$均成立。因此

$$\mathcal{N}(D) = \{\varphi \in \mathcal{D}(D) : \varphi(t)(\theta) = \varphi(t+\theta)(0) \text{ for all } t \in \mathbb{R} \text{ and } \theta \in [-h, 0]\} \neq \{0\}.$$

此外，若令 $\mathcal{Y} = C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，并定义线性算子 $\iota : \mathcal{Y} \to \mathcal{N}(D)$，如下：

$$(\iota q)(t)(\theta) = q(t+\theta), \tag{67}$$

那么 ι 显然是一个双射，其（代数）逆算子为 $\iota^{-1} : \mathcal{N}(D) \to \mathcal{Y}$ 由下式给出：$(\iota^{-1}\varphi)(t) = \varphi(t)(0)$。显然，$\iota$ 和 ι^{-1} 均有界，因此（H1）成立。

我们的下一个目标是验证（H2）在$\Omega = \mathbb{C} \ni 0$的条件下成立。因此，我们先引入线性算子 $D_0 : \mathcal{D}(D_0) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 定义如下：

$$\mathcal{D}(D_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}(D) : \varphi(t)(0) = 0 \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad D_0\varphi = D\varphi,$$

并回顾上文引理 31 中的详细论证可知，D_0 是可闭的。我们断言 $\mathrm{D}(D) = \mathrm{N}(D) \oplus \mathrm{D}(D_0)$。设 $\varphi \in \mathrm{N}(D) \cap \mathrm{D}(D_0)$，则对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in [-h, 0]$，$\varphi(t)(\theta) = \varphi(t+\theta)(0) = 0$，由此可知 $\varphi = 0$，进而 $\mathrm{N}(D) \cap \mathrm{D}(D_0) = \{0\}$。给定 $\varphi \in \mathrm{D}(D)$，定义 $\psi \in \mathrm{D}(D)$ 如下：$\psi(t)(\theta) = \varphi(t)(\theta) - \varphi(t+\theta)(0)$。于是 $\psi(\cdot)(0) = 0$，因此 $\psi \in \mathrm{D}(D_0)$。现在定义 $\phi \in \mathrm{D}(D)$ 为 $\phi(t)(\theta) = \varphi(t+\theta)(0)$，则 $\phi \in \mathrm{N}(D)$，且由于 $\varphi = \psi + \phi$，断言得证。为验证$\rho(D_0) = \mathbb{C} \neq \emptyset$，我们先研究下列方程的解

$$(zI - D_0)\varphi = \psi \tag{68}$$

满足 $z \in \mathbb{C}$，$\varphi \in \mathcal{D}(D_0)$ 以及 $\psi \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$。注意，(68) 等价于求解满足以下边界条件的非齐次输运方程

$$\left(z + \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi(t)(\theta) = \psi(t)(\theta), \quad \varphi(t)(0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \theta \in [-h, 0],$$

其唯一解为

$$\varphi(t)(\theta) = \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\psi(t+\theta-s)(s)ds, \tag{69}$$

如果我们能证明 $\varphi \in \mathcal{D}(D_0)$。为此，我们先注意到

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t)(\theta) &= \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\dot{\psi}(t+\theta-s)(s)ds, \\ \varphi(t)'(\theta) &= -\psi(t)(\theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}[z\psi(t+\theta-s)(s) + \dot{\psi}(t+\theta-s)(s)]ds, \end{aligned} \tag{70}$$

其中最后一个表达式由莱布尼茨积分法则得到。由于 $\psi \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$，(70) 中的第一个等式意味着 $\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$，而 (70) 中的第二个等式意味着对所有 $t \in \mathbb{R}$，$\varphi(t)' \in X$，这表明 $\varphi \in \mathrm{D}(D_0)$。因此，$C_T^1(\mathbb{R}, X) \subseteq \mathrm{R}(zI - D_0) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X)$，所以 $zI - D_0$具有稠密值域。在附录 B 中，我们实际上证明了这些包含关系一般而言是严格的，更多细节参见命题 81。此外，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，线性算子 $zI - D_0$ 都有一个稠密定义的线性逆算子，给出如下

$$[R(z, D_0)\varphi](t)(\theta) = \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(zI - D_0), \tag{71}$$

且该算子是有界的，因为有

$$\|R(z, D_0)\varphi\|_\infty \leq M_z\|\varphi\|_\infty, \quad M_z := \frac{1 - e^{-h\,\mathrm{Re}(z)}}{\mathrm{Re}(z)}, \tag{72}$$

其中 M_z 应理解为其极限值 h 只要 $\mathrm{Re}(z) = 0$。由于 $0 \in \Omega = \mathbb{C}$，我们有$D_0^{-1}$不仅是 D_0的（代数）逆算子，而且根据 D_0 的定义 定义 4，它实际上是 （H2）成立。

由（64）和上述论证可直接得出，$\mathcal{D}(D) \subseteq C_T^1(\mathbb{R}, X) \subseteq \mathcal{R}(zI - D_0)$对所有 $z \in \mathbb{C}$都成立，这表明 （H3）满足。

虽然推论 43 是在引入（H5）之后证明的，但公式（58）本身并不依赖于这一假设。因此，对于 $\mathcal{R}(zI - \mathcal{A}) = \mathcal{R}(zI - D_0)$ 对所有 $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \Omega$均成立，这证明了（H5）是（H3）的结果。

我们的下一个目标是验证（H4）。为此，考虑乘法算子 $M_L: C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，其作用为 $(M_L\varphi)(t) := L(t)\varphi(t)$，以及标准微分算子 $G: \mathrm{D}(G) \subseteq C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，其定义域为 $\mathrm{D}(G) := C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，作用为 $Gq := \dot{q}$。于是可以写成 $K = M_L - GM$。由于 G是闭算子，而 M是有界线性算子，根据引理 76可知，GM（定义域 $\mathrm{D}(GM) = \{\varphi \in C_T(\mathbb{R}, X): M\varphi \in \mathrm{D}(G)\} \supseteq C_T^1(\mathbb{R}, X)$）是闭的。由于 M_L是有界的，根据引理 75可知，算子 K（其定义域可能更小）$\mathrm{D}(K) = C_T^1(\mathbb{R}, X) \subseteq \mathrm{D}(GM)$，满足 $\mathrm{D}(K) \supseteq \mathrm{D}(D)$，是可闭的。此外，限制 $K|_{\mathcal{D}(D_0)} = M_L|_{\mathcal{D}(D_0)}$ 是有界的，因为 $\mathrm{D}(D_0) \subseteq \mathrm{N}(M)$，且 M_L是有界的。这表明（H4）得以满足。

由引理 32可知，线性算子$\mathcal{A}$ 是可闭的，其表示由（33）给出。因此，$\mathcal{A}$是与 D, K和 M相关联的第一算子。□

与 D, K 和 M 相关联的第二算子$\hat{\mathcal{A}}$ 现在具有如下形式

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{C}_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ q = M\varphi \right\}, \quad \hat{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}.$$

为确认我们在第 2 节中构建框架时确有必要考虑可闭但未必闭的线性算子，附录 B 证明了线性算子 D、D_0、A 和 A 均非闭，主要结果见命题 80。此外，附录 B 还说明，一般而言，对于所有 $z \in \mathbb{C}$，$C_T^1(\mathbb{R}, X) \neq \mathrm{R}(zI - D_0) \neq C_T(\mathbb{R}, X)$，这凸显了预解式采用稠密值域定义的必要性，参见注 5。接下来两个小节中，线性算子 D、D_0、A ˆ和 A 也有类似结果。

定理 50. 全纯算子值函数 $\Delta: \mathbb{C} \to L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$ 取值于 $\Delta(z): C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 定义为

$$(\Delta(z)q)(t) = \dot{q}(t) + zq(t) - \int_0^h d_2\zeta(t, \theta)e^{-z\theta}q(t - \theta), \tag{73}$$

是 ˆA 在 $\mathbb{C}$ 上的一个 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似闭特征算子，且等价关系由下式给出

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = F(z)(zI - \hat{\mathcal{A}})E(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{74}$$

其中 $E: \mathbb{C} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X), \hat{C}_T(\mathbb{R}, X) \hat{A})$ 和 $F: \mathbb{C} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X))$ 是全纯有界算子值函数，使得 $E(z) \in L(C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0), D(\hat{A}))$ 和 $F(z) \in L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0))$ 是双射，定义为

$$E(z) \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi(t)(\theta) = e^{z\theta}q(t + \theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta - s)}\varphi(t + \theta - s)(s)ds,$$
$$F(z) \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = \int_0^h d_2\zeta(t, \theta) \int_{-\theta}^0 e^{-z(\theta + s)}\varphi(t - \theta - s)(s)ds.$$

证明。 我们首先证明，式（73）中定义的算子值函数是 ˆ$\mathcal{A}$ 的特征算子。设 $q \in \mathcal{Y}$ 已给定，并注意到对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in [-h, 0]$，都有

$$(Q(z)\iota q)(t)(\theta) = (\iota q - zR(z, D_0)\iota q)(t)(\theta) = q(t + \theta) - z\int_\theta^0 e^{z(\theta - s)}q(t + \theta)ds = e^{z\theta}q(t + \theta), \tag{75}$$

其中用到了式（67）和式（71）。回顾式（65）可得

$$(\Delta(z)q)(t) = ((zM-K)Q(z)\iota q)(t)$$
$$= zq(t) - \left(L(t)[\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)] - \dot{q}(t)\right) = \dot{q}(t) + zq(t) - \int_0^h d_2\zeta(t,\theta)e^{-z\theta}q(t-\theta),$$

其中第一次等式使用了（41），最后一次等式使用了（61）。

接下来证明 $\Delta(z)$ 是闭的。固定 $z \in \mathbb{C}$，注意到我们可以写成 $\Delta(z) = G + N(z)$，其中 $N(z)\colon C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 是由 $(N(z)q)(t) := zq(t) - L(t)[\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)]$ 定义的线性算子。注意到 $N(z)$ 是有界的，因为

$$\|N(z)q\|_\infty \le \left(|z| + \sup_{\theta\in[-h,0]} |e^{z\theta}|\|L\|_\infty\right)\|q\|_\infty \le \left(|z| + \max\{1, e^{-h\,\mathrm{Re}(z)}\}\|L\|_\infty\right)\|q\|_\infty.$$

由于 $\Delta(z)$ 是闭算子 G与定义域 $\mathcal{Y} = C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 以及有界算子$N(z)$之和，根据 引理 75 可知 $\Delta(z)$ 是闭的。

由于(34) 得到的 A 是与 D, K和 M相关联的第二算子，因此我们可以应用 定理 37。我们得出 Δ 是作用于 $\hat{\mathcal{A}}$ 上的 $\mathbb{C}$ 的一个特征算子，并且 E和F的具体表示可以通过直接使用本小节前面提到的 $Q(z)$ $R(z, D_0)$ M 以及 K 的显式表示加以验证。

现在证明 Δ 是一个 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似特征算子，它对应于 $\hat{\mathcal{A}}$ 在 $\mathbb{C}$上。由于 $t \mapsto e^{\frac{2\pi k i}{T}t}$ 在 $\mathbb{R}$上是解析的，显然 (PH1) 成立。此外，利用（65）和（75）进行直接计算可得，（PH2）中的关系均得到满足，从而证明了该结论。 □

为了 证明 Δ 是一个特征算子，它对应于 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}$上，我们需要以下结果。

引理 51 。由（Δ 中的特征算子 (73) 满足 *(H6)* 以及 $\rho(\Delta(z)) \neq \emptyset$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$均成立 .

证明。我们首先证明第二个结论，即对于每个 $z \in \mathbb{C}$，存在一个 $\mu \in \mathbb{C}$，使得 $\mu I - \Delta(z)$ 是可逆的。为此，考虑线性算子 $S(z) : \mathcal{D}(S(z)) \subseteq C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，其定义域为 $\mathcal{D}(S(z)) := C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，以及由下式定义的 $C(z)\colon C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$

$$(S(z)q)(t) := zq(t) - \dot{q}(t), \qquad (C(z)q)(t) := -L(t)[\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)], \tag{76}$$

并注意到我们可以写成

$$\mu I - \Delta(z) = S(\mu - z) - C(z). \tag{77}$$

算子 $C(z)$ 是有界的，因为 $\|C(z)\| \le \max\{1, e^{-h\,\mathrm{Re}(z)}\}\|L\|_\infty$ as $L \in C_T(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, \mathbb{C}^n))$。此外，可以验证闭线性算子 $S(z)$ 的逆算子为

$$(S(z)^{-1}q)(t) = \frac{1}{e^{zT}-1}\left(\int_0^t e^{z(t-s)}q(s)ds + \int_t^T e^{z(t+T-s)}q(s)ds\right), \quad \forall q \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \tag{78}$$

只要 $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$，并且对于 $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，有 $\|S(z)^{-1}\| \le 1/|z| \to 0$ as $z \to \pm\infty$。因此，对于每个固定的 $z \in \mathbb{C}$，都存在一个 $\mu \in \mathbb{C} \setminus (z + \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z})$，使得 $\|S(\mu - z)^{-1}\| < \|C(z)\|^{-1}$。于是，根据诺伊曼级数，$I - C(z)S(\mu - z)^{-1}$ 是 $\mathrm{L}(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$ 中的可逆算子。因此，$[I - C(z)S(\mu - z)^{-1}]S(\mu - z) = \mu I - \Delta(z)$ 可逆，这表明 $\mu \in \rho(\Delta(z))$，即 $\rho(\Delta(z)) \neq \emptyset$。

为验证 (H6)，我们必须证明 $\rho(\Delta) \neq \emptyset$，并证明存在一个 $z_0 \in \rho(\Delta)$，使得 $\mathrm{R}(\Delta(z_0)) = \mathrm{R}(MD - K)$。为证明第一个结论，我们可以在上述构造中令 $\mu = 0$，并取一个 $z_0 \in \mathbb{R}$，使 $z_0 > 0$ 充分大，从而得到 $\|S(-z_0)^{-1}\| < \|L\|_\infty^{-1} \le \|C(z_0)\|^{-1}$，其中最后一个不等式由 $z_0 > 0$这一事实可得。因此，$-[I - C(z_0)S(-z_0)^{-1}]S(-z_0) = \Delta(z_0)$ 可逆，进而$z_0 \in \rho(\Delta)$，这就证明了 $\rho(\Delta) \neq \emptyset$。为证明第二个结论，回忆一下，$\Delta(z_0)$ 是闭的。由此，根据引理 39，得到 $\mathrm{R}(\Delta(z_0)) = C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) = \mathrm{R}(MD - K)$。 □

回顾定理 42 并结合前两个结果，我们得到如下结论

推论 52. 全纯算子值函数 Δ 由(73) 是 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的闭特征算子，用于$\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}$上。

得到特征算子 Δ 之后$\mathcal{A}$，我们可以接着应用推论 43，并根据$\mathcal{A}$ 的特征值来刻画 Δ的谱。

定理 53。A 的谱仅由孤立的有限型特征值构成：

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\sigma \in \mathbb{C} : \sigma \text{ is a characteristic value of } \Delta\} = \{\sigma \in \mathbb{C} : \sigma \text{ is a Floquet exponent}\}. \tag{79}$$

对于 $\sigma \in \sigma(A)$，有 $m_g(\sigma, A) = m_g(\Delta(\sigma))$ $m_a(\sigma, A) = m_a(\Delta(\sigma))$ $k(\sigma, A) = k(\Delta(\sigma))$，且$r(\sigma, A) = r(\Delta(\sigma))$；将 σ 视为 A 的特征值时，其部分重数等于将 σ 视为 Δ的特征值时的零点重数。此外，如果 $\{\{q_{i,0}, \dots, q_{i,k_i-1}\} : i = 1, \dots, p\}$ 是 Δ 在 σ处的典范约当链系，那么 $\{\{\varphi_{i,0}, \dots, \varphi_{i,k_i-1}\} : i = 1, \dots, p\}$ 就是 A 在 σ 处的典范（广义）特征向量系，其中

$$\varphi_{i,k}(t)(\theta) = e^{\sigma\theta} \sum_{l=0}^{k} \frac{\theta^l}{l!} q_{i,k-l}(t+\theta), \quad \forall k = 0, \dots, k_i - 1,\ t \in \mathbb{R},\ \theta \in [-h, 0].$$

证明。为了应用引理 29，我们接下来证明，对于所有 $z \in \mathbb{C}$，算子 $\Delta(z)$ 都具有紧预解式。为此，考虑 (76) 中的算子 S 和 C 。首先注意到，根据 (78)， $S(z)^{-1}$ 对所有 $z \in \mathbb{C}\setminus \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$ 都是紧的，因为它将连续函数映射为 C^1-光滑函数。回顾引理 51 的证明可知， $C(z)$ 是有界的，并且 $\rho(\Delta(z)) \neq \emptyset$；结合等式 (77) 以及 [17, 练习 II.4.30] ，可知 $R(\mu, \Delta(z))$ 对所有 $\mu \in \mathbb{C} \setminus (z + \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z})$ 都是紧的，从而证明了该结论。引理 29 告诉我们， $\sigma(A)$ 仅由有限型的孤立特征值组成，而这些特征值恰好是 Δ 的特征值。但由 (59) 可知，一个特征值就是一个弗洛凯指数，这就证明了 (79) 中的第二个等式。关于重数的结论则由推论 43 得出。

为证明关于约当链的剩余断言，可以直接应用 推论 45并利用 (71) 得到 $R(\sigma, D_0)^{l+1}$ 在充分大的 $l \in \mathbb{N}$下的显式表示。不过，下面给出的证明更为简短，也更具启发性。设 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ 是 Δ 在 σ 处的一条约当链。由 E 中定义的算子值函数的表达式定理 50，可推出

$$E(z)\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1}(z-\sigma)^i q_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1}(z-\sigma)^i q_i \\ t \mapsto e^{z\cdot} \sum_{i=0}^{k-1}(z-\sigma)^i q_i(t+\cdot) \end{pmatrix},$$

因此，由等价关系 (74) 可知， $z \mapsto (t \mapsto e^{z\cdot} \sum_{i=0}^{k-1}(z-\sigma)^i q_i(t+\cdot))$ 是 $zI - \hat{\mathcal{A}}$ 在 σ处的一个根函数。由 定理 28的证明可知，我们必须将 $e_z := (\theta \mapsto e^{z\theta})$ 在 σ的某个邻域内展开到 k 阶。由于

$$e_z(\theta) = e^{\sigma\theta} e^{(z-\sigma)\theta} = e^{\sigma\theta}\left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{\theta^l}{l!}(z-\sigma)^l + \mathcal{O}((z-\sigma)^k)\right),$$

对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in [-h, 0]$ ，都有

$$e^{z\theta}\sum_{i=0}^{k-1}(z-\sigma)^i q_i(t+\theta) = \sum_{i=0}^{k-1}\left(e^{\sigma\theta}\sum_{l=0}^{i}\frac{\theta^l}{l!}q_{i-l}(t+\theta)\right)(z-\sigma)^i + \mathcal{O}((z-\sigma)^k),$$

这表明，向量的有序集合 $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}\}$，其中 $\varphi_i(t)(\theta) = e^{\sigma\theta}\sum_{l=0}^{i}\frac{\theta^l}{l!}q_{i-l}(t+\theta)$，构成了$\mathcal{A}$ 在 σ处的一条约当链。 □

推论 54。 若 $z \in \mathbb{C}$ 不是弗洛凯指数，则 A 在 z 处的预解式可表示为

$$(R(z,\mathcal{A})\varphi)(t)(\theta) = e^{z\theta}\varphi_z(t+\theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(zI-\mathcal{A}) \supseteq C_T^1(\mathbb{R},X),$$

其中 φ_z 由下式给出

$$\varphi_z = \Delta(z)^{-1}\left(t \mapsto \varphi(t)(0) + \int_0^h d_2\zeta(t,\theta)\int_{-\theta}^0 e^{-z(\theta+s)}\varphi(t-\theta-s)(s)ds\right). \tag{80}$$

证明。回顾式 (79)， $z \in \rho(A)$ 当且仅当 $z \in \rho(\Delta)$，而这又当且仅当 z 不是弗洛凯指数。现在由式 (58) 可得 $R(z,A)$ 的表示式；这里回顾式 (75) 和 (71) 中 $Q(z)\iota$ 和$R(z,D_0)$ 的表示式。 □

注 55。也可以使用 [5, 命题 12] 来证明推论 54。不过，采用这种方法，还必须证明 $R(z,A)$ 是稠密定义的有界线性算子，并且 $\sigma(A)$ 实际上与弗洛凯指数集重合。为证明第一个结论，可利用这样一个事实：$C_T^1(\mathbb{R},X)$ 在 $C_T(\mathbb{R},X)$ 中稠密，并且由于 $\Delta(z)$ 的闭性， $\Delta(z)^{-1}$ 是 $C_T(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$ 上的有界线性算子；参见定理 50。为证明第二个结论，需要类似引理 29 的结果，更多信息请见 [50] 。♢

为确定函数 $\varphi_z \in C_T^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$ 在 推论 54 中的实际应用，我们注意到，它是（非）齐次周期线性经典时滞微分方程 v 的唯一解 $\Delta(z)v = w$，其中 w 表示式（80）右端括号内的函数。用于计算此类解的数值方法及相应软件见 注 58。下一个结果是推论 44的直接推论。

推论 56。 若 $\sigma \in \mathbb{C}$ 是一个弗洛凯指数，且 $k(\sigma,A) = r(\Delta(\sigma))$，则重数定理 $\dim N((\sigma I - A)^{r(\Delta(\sigma))}) = m_a(\Delta(\sigma))$ 成立。

下一个推论讨论周期线性时滞微分方程（62）的所谓基本解（在时刻s），即形式为 $t \mapsto e^{\sigma(t-s)}p(t)q(t)$ 的解，其中 $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个多项式，且 $q \in C_T^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$。特别地，我们证明， Δ 的约当链生成方程（62）的基本解。基本解这一概念扩展了线性自治时滞微分方程的基本解的概念，参见 [40, 推论 II.1.1.4]。此外，它还推广了第4节中讨论的弗洛凯解概念。关于其他方法，请比较 [29, 引理 8.1.2], [16, 第 XIII 节4], 和[41, 第 11 节2]。

下面的结果有两种证明方法。首先，可以直接利用（81）中的约当链结构验证（62）成立，其中 Δ 由（82）给出。不过，我们给出一种证明，它基于 U、$\mathcal{A}$ 和 Δ之间的自然联系。

推论 57. （(62) 的基本解为

$$x(t) = e^{\sigma(t-s)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(t-s)^l}{l!}q_{k-l-1}(t), \quad \forall t \geq s, \tag{81}$$

其中，$\{q_0,\ldots,q_{k-1}\}$ 是 Δ 在弗洛凯指数 σ 处的约当链。

证明。设给定 $\varphi_i \in N((\sigma I - A)^k)$（ $i = 0, \ldots, k-1$）。由于 $x_t^i = U(t,s)\varphi_i(s)$，我们知道 $x^i(t) = (U(t,s)\varphi_i(s))(0)$ 是方程（62）在 $t \geq s$ 下的一个解。为求得 x^i，回顾 [50, 定理 5]，

$$U(t,s)\varphi_i(s) = \begin{cases} e^{\sigma(t-s)}\varphi_0(t), & i = 0, \\ e^{\sigma(t-s)}\varphi_i(t) - \sum_{l=1}^i \frac{(s-t)^l}{l!}U(t,s)\varphi_{i-l}(s), & i = 1,\ldots,k-1. \end{cases}$$

通过归纳论证，改变求和次序并使用二项式公式，可得

$$U(t,s)\varphi_i(s) = e^{\sigma(t-s)}\left(\varphi_i(t) - \sum_{l=1}^{i} \frac{(t-s)^l}{l!}\varphi_{i-l}(t)\right).$$

现在，定理 53 告诉我们，对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in [-h, 0]$，$\varphi_i(t)(\theta) = e^{\sigma\theta}\sum_{l=0}^{i} \frac{\theta^l}{l!} q_{k-l-1}(t+\theta)$，并回忆 $x^i(t) = (U(t,s)\varphi_i(s))(0)$ 对于 $t \geq s$，即可证明式 (81)。 □

注 58. 要在实际中显式构造约当链 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ 对于 Δ 在 σ处，例如为了得到基本解 (81)，注意，解集 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ 满足以下系统

$$\sum_{l=0}^{i} \frac{1}{l!}\Delta^{(l)}(\sigma)q_{i-l} = 0, \quad \forall i = 0, \dots, k-1, \tag{82}$$

构成长度为 k 的约当链，参见 [29, 第 7.4] 节或 [16, 第 IV.5]节。这里，$z \mapsto \Delta^{(l)}(z)$ 表示映射 $z \mapsto \Delta(z)$ 的 l 阶导数。式 (82) 的一个主要优点是，对于任意整数 $l \geq 1$，$\Delta^{(l)}(\sigma)$ 都成为有界线性算子。因此，式 (82) 可视为一个线性系统，由 kn （若 $\sigma \in \mathbb{R}$）或 $2kn$ （若 $\sigma \notin \mathbb{R}$）个实值周期线性（非齐次）时滞微分方程组成。例如，可以使用著名的正交配置法 [18, 19],求解此类系统；该方法已在 `MATLAB` 延拓软件包 `DDE-BifTool` [20, 62] 中实现，也可使用可免费获取的时滞微分方程延拓软件包 `BifurcationKit` [67] 和 `PeriodicNormalizationDDEs` [6] （针对有限个离散时滞）。♢

注 59. 接下来说明，[40, 第二节 II.1.1] 中关于（LDDE）的特征矩阵的结果，可以通过此处针对（LDDE_T）所给出的构造，以两种不同方式获得。首先，若将情形 $T = 0$ 理解为我们构造中的极限 $T \downarrow 0$，那么对于 $l \in \{0, 1\}$，空间 $C_T^l(\mathbb{R}, E)$ 可化为定义在 $\mathbb{R}$ 上、取值于 E 且具有 C^l 光滑性的函数空间，并且这些函数在任意小的平移下保持不变。这个极限空间恰好由常值函数组成，因此我们可以将 $C_0^l(\mathbb{R}, E) = C_0(\mathbb{R}, E) \cong E$ 作规范识别。其次，我们可以将定义在周期函数 $C_T(\mathbb{R}, E)$ 的某个子空间上的任意（线性）算子限制到常值函数$C_0(\mathbb{R}, E)$ 上，并再次将该空间识别为 E。采用上述任一方法及其相应的识别，算子 $L \in \mathrm{L}(X, \mathbb{C}^n)$ 变为自治形式，并具有如下形式

$$L\varphi = \int_0^h d\zeta(\theta)\varphi(-\theta).$$

在 X 上的 C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 的生成元 A，定义为对所有 $t \geq 0$，$T(t) := U(t, 0)$，其定义域为 $\mathrm{D}(A) = \{\varphi \in C^1([-h, 0], \mathbb{C}^n) : \varphi'(0) = L\varphi\}$，作用为 $A\varphi = \varphi'$，且是一个闭线性算子，参见 [17, 定理 I.1.4]。利用这一对应关系，引理 49 中的可闭线性算子 D 化简为 $\mathrm{D}(D) = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，其作用为 $D\varphi = \varphi'$，因为关于时间的导数为零。因此，D 成为一个闭线性算子，并且有：$\mathrm{D}(\mathrm{A}) = \mathrm{D}(A)$ 且 $\mathrm{D}(\hat{\mathrm{A}}) = \mathrm{D}(\hat{A})$，其作用分别为 $\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{A}}\varphi = A\varphi$ 和 $\mathrm{A}\varphi = A\varphi$，其中

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \oplus X : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ c = \varphi(0) \right\}, \quad \hat{A}\begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}.$$

有界线性算子 M 和闭线性算子 K 现在分别成为 X 上的有界线性算子，由 $M\varphi = \varphi(0)$ 和 $K\varphi = L\varphi$给出，因为 $\dot{\varphi}(t)(0) = 0$，而 $t \mapsto \varphi(t)(0)$ 是常数。因此，算子值函数 Δ 化简为矩阵值函数 $\Delta : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$，其形式为

$$\Delta(z) = zI - \int_0^h d\zeta(\theta)e^{-z\theta},$$

这正是 [40, II.1 节1]中得到的特征矩阵。通过类似的论证，也可以验证函数 E和 F，以及预解式 $R(z, \mathcal{A})$ 都化简为 [40, II.1 节1]中得到的表达式。这种化简也适用于后续应用中的结果，关于时滞微分方程，参见[40, II.1 节3]；关于混合型泛函微分方程，参见 [35,第 4] 节。◊

注 60. 前一条注释说明，对于 (时滞微分方程)，在对函数空间作适当的识别后，特征 算子 可化为特征矩阵 。当周期 T 与最大时滞 h 在 (时滞微分方程 $_T$) 中成有理数关系时，也就是说 $T/h \in \mathbb{Q}$，可以进行类似的化简。正如第 1 节所述，在这种情形下还构造了其他几个特征矩阵。一个自然的问题是，这些特征矩阵与本节引入的化简后特征算子有何关系。我们预计，通过将其定义域限制在 $\Delta(z)$ 的某个特定有限维子空间上，这些矩阵与 $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$存在某种联系，不过这仍是未来研究中一个值得探讨的课题。 ◊

4.2 无限时滞微分方程

对于无限时滞微分方程（iDDE），状态空间 X的选取并非显而易见，因为“自然候选” $C(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n)$ 在标准的相应上确界范数下并非巴拿赫空间。事实上，状态空间的选取一直是文献中广泛研究的课题，参见例如 [57, 31, 28, 31] 那些确定状态空间应满足何种条件、以便经典的解的存在性、唯一性及稳定性（或不稳定性）结果得以适用的文章。在[15], 中，作者选取巴拿赫空间 $X := C_\rho(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n)$，其加权范数 $\|\cdot\|_\rho$ 定义如下

$$C_\rho(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n) := \left\{\varphi \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n) : \lim_{\theta \to -\infty} e^{\rho\theta}|\varphi(\theta)| = 0\right\}, \quad \|\varphi\|_\rho := \sup_{\theta \le 0} e^{\rho\theta}|\varphi(\theta)| \tag{83}$$

对于某个固定的 $\rho > 0$。采用这一状态空间后， [15] 的作者证明了线性化稳定性原理，并指出，中心流形定理和Hopf分岔定理也可以按照与 [16] 或 [53]类似的思路来表述和证明。这一切表明， X 是适用于我们的特征算子框架的状态空间，因此本节余下部分将始终采用这一空间。关于我们的结果同样适用的更一般的状态空间，参见本小节末尾的注记 67。无论选择哪种状态空间，解算子$U(\cdot\ s)$ 通常都不能指望最终变得紧致（这与第 4.1 节中的情况不同），因为状态必然包含初始函数在 $\mathbb{R}_-$上定义的一部分。在此背景下，值得注意的是，特征算子框架使我们能够证明，在 $\mathbb{C}$ 中包含原点的给定右半平面内，弗洛凯指数是孤立且为有限型的，见定理 63。

为陈述并证明我们的结果，我们假设 $L \in C_T(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, \mathbb{C}^n))$。向量值版本的里斯表示定理告诉我们，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，算子 $L(t)$ 都可以唯一地表示为

$$L(t) = \int_0^\infty d_2\mu(t, \theta)\varphi(-\theta).$$

这里，映射 $\mu\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个矩阵值函数，并且对于所有 $\theta \in \mathbb{R}_+$， $\mu(\cdot\ \theta)$ 连续且具有 T-周期。此外， $\mu(t, \cdot)$ 是一个博雷尔测度，满足 $\|\mu(t, \cdot)\|_\rho := \int_0^\infty e^{-\rho s} d|\mu(t, \cdot)|(s) < \infty$，其中，对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $|\mu(t, \cdot)|$ 表示 $\mu(t, \cdot)$ 的全变差。采用这一状态空间后，初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = L(t)x_t, & t \ge s, \\ x_s = \varphi, & \varphi \in X, \end{cases} \tag{84}$$

在 X 上适定，且由 $x_t = U(t, s)\varphi$ 对所有 $t \ge s$ 定义的算子族 $U := \{U(t, s)\}_{t\ge s}$ 构成 X 上的强连续前向演化系统。与之相关的（广义）

U 的生成元（在时刻 $t \in \mathbb{R}$）由闭线性算子 $A(t)$ 给出：$\mathcal{D}(A(t)) \subseteq X \to X$，其定义域和作用为

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{\varphi \in C_\rho^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n) : \varphi'(0) = L(t)\varphi\}, \quad A(t)\varphi = \varphi'.$$

对于该算子，我们关联如下线性算子 $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, X)$:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi(t) \in \mathcal{D}(A(t)) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (\mathcal{A}\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t). \tag{85}$$

由于 $U(\cdot\ s)$缺乏渐近紧性，因此我们只能用右半平面 $\mathcal{A}$ 中的 Δ 来刻画其谱 $\mathbb{C}_{-\rho} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -\rho\}$，见 [40, 第 II.1 节。3] 关于自治无限时滞延迟微分方程中出现的同一问题，另见 [15, 第 4] 节。

引理 61。 设 $D: \mathcal{D}(D) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 为如下定义的算子:

$$\mathcal{D}(D) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi(t)' \in X \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (D\varphi)(t) = \varphi(t)' - \dot{\varphi}(t).$$

则 D 是一个满足（*H1*）、（*H2*）、（*H3*）和（*H5*）的可闭线性算子，其中 $\Omega = \mathbb{C}_{-\rho}$。此外，定义线性算子 $K: \mathcal{D}(K) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 以及 $M: C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 如下:

$$\mathcal{D}(K) = C_T^1(\mathbb{R}, X), \qquad (K\varphi)(t) = L(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)(0), \qquad (M\varphi)(t) = \varphi(t)(0),$$

then K 满足 *(H4)*，且 $\mathcal{A}$ 是 (85) 中定义的与 D 相关的第一算子，K 且 M .

证明。 证明过程与引理 49 的证明类似，直到我们需要求解关于 右端为 φ 的预解方程 (68)，其右端项为 $\psi \in C_T^1(\mathbb{R},\ X)$。方程 (69表明，形式上的解 φ 为

$$\varphi(t)(\theta) = \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\psi(t+\theta-s)(s)ds,$$

但我们将证明，当且仅当 $\mathrm{Re}(z) > -\rho$ 时，这个函数属于 $\mathcal{D}(D_0)$，因此 $\Omega = \mathbb{C}_{-\rho}$ 非空。为此，我们首先证明，φ 是状态空间 $X = C_\rho(\mathbb{R}_-,\ \mathbb{C}^n)$ 的元素，当且仅当 $\mathrm{Re}(z) > -\rho$。显然，φ 连续，因此只需证明，对于所有$t \in \mathbb{R}$，当 $\theta \to -\infty$ 时，$e^{\rho\theta}|\varphi(t)(\theta)| \to 0$。设 $t \in \mathbb{R}$，$\varepsilon > 0$和 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$ 已给定。由于 ψ的取值属于 X，我们知道，对于所有 $\tau \in \mathbb{R}$，当 $s \to -\infty$ 时，$e^{\rho s}\psi(\tau)(s) \to 0$，因此

$$e^{\rho s}|\psi(t+\theta-s)(s)| \le \max_{\tau\in[0,T]} e^{\rho s}|\psi(\tau)(s)| \to 0,$$

由于第一分量中 $[0,T]$ 的紧性以及 ψ 的 T-周期性，故当 $s \to -\infty$ 时。因此，存在一个 $M_1 < 0$，使得对所有 $s \le M_1$，都有 $e^{\rho s}|\psi(t+\theta-s)(s)| \le (\mathrm{Re}(z)+\rho)\varepsilon/2$。此外，由于当 $\theta \to -\infty$ 时 $e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)\theta} \to 0$，存在一个 $M_2 < 0$，使得对所有 $\theta \le M_2$，都有 $e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)\theta} \le e^{-M_1(\mathrm{Re}(z)+\rho)\varepsilon}/(2\|\psi\|_\infty)$。因此，对所有 $\theta \le M = \min\{M_1, M_2\}$，有

$$\begin{aligned} e^{\rho\theta}|\varphi(t)(\theta)| &\le \int_\theta^M e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)(\theta-s)}e^{\rho s}|\psi(t+\theta-s)(s)|ds + \int_M^0 e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)(\theta-s)}e^{\rho s}|\psi(t+\theta-s)(s)|ds \\ &\le \frac{(\mathrm{Re}(z)+\rho)\varepsilon}{2}\int_\theta^M e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)(\theta-s)}ds + \|\psi\|_\infty \int_M^0 e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)(\theta-s)}ds \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

其中，我们明确计算了两个积分，并利用之前的估计得到了结果。由此得出 $\varphi \in C_T(\mathbb{R}, X)$。按照式 (70) 计算导数 $\dot{\varphi}(t)(\theta)$ 和 $\varphi(t)'(\theta)$，可知 φ属于 $C_T^1(\mathbb{R}, X)$，且对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$\varphi(t)' \in X$，因为 $\psi \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$，因此 $\varphi \in \mathrm{D}(D_0)$。为证明逆命题，假设对于某个固定的 $z \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Re}(z) \le -\rho$，并考虑一个非零函数 $\psi \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$，它满足平移性质 $\psi(t)(\theta) = \psi(t+\theta)(0)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\theta \in [-h, 0]$均成立。由于 $e^{\rho\theta} \to 0$

由于当 $\theta \le 0$ 时 $\theta \to -\infty$ 和 $e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)\theta} \ge 1$，存在一个 $M_3 < 0$，使得对于所有 $\theta \le M_3$，$e^{\rho\theta}($ $e^{\mathrm{Re}(z)\theta} - 1) > 1/2$。因此，应用反三角不等式可得

$$e^{\rho\theta}|\varphi(t)(\theta)| \ge \frac{e^{\rho\theta}(e^{\mathrm{Re}(z)\theta} - 1)}{|z|}|\psi(t+\theta)(0)| > \frac{1}{2|z|}|\psi(t+\theta)(0)|, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \theta \le M_3,$$

这证明了 $e^{\rho\theta}|\varphi(\cdot)(\theta)| \nrightarrow 0$ 当 $\theta \to -\infty$时。由此可得 $\varphi \in \mathcal{D}(D_0)$ 当且仅当$\mathrm{Re}(z) > -\rho$。因此，$zI - D_0$ 对于每个 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$，都有一个稠密定义的有界线性逆算子，由式（71）给出，因为

$$\|R(z, D_0)\varphi\|_\infty \le \frac{1}{\mathrm{Re}(z) + \rho}\|\varphi\|_\infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(zI - D_0).$$

证明的其余部分可按照引理 49的证明完成。 □

与 D、K 和 M 相关的第二算子 $\hat{\mathcal{A}}$ 现在具有如下形式

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{C}_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ q = M\varphi \right\}, \quad \hat{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}.$$

定理 62。 全纯算子值函数 $\Delta:\ \mathbb{C} \to L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$ 取值于 $\Delta(z)$: $C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 由下式给出

$$(\Delta(z)q)(t) = \dot{q}(t) + zq(t) - \int_0^\infty d_2\mu(t, \theta)e^{-z\theta}q(t-\theta),$$

是一个[2] $\frac{\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的闭特征算子，作用于 *{style id='2'>ˆA*，定义在 $\mathbb{C}_{-\rho}$ 上，且等价关系由下式给出

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = F(z)(zI - \hat{\mathcal{A}})E(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}_{-\rho},$$

其中，$E:\ \mathbb{C}_{-\rho} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X), \hat{C}_T(\mathbb{R}, X)\ \hat{A})$ 和 $F:\ \mathbb{C}_{-\rho} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X))$ 是全纯有界算子值函数，使得 $E(z) \in L(C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0), D(\hat{A}))$ 和 $F(z) \in L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0))$ 是双射，定义如下：

$$E(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi(t)(\theta) = e^{z\theta}q(t+\theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds,$$
$$F(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = \int_0^\infty d_2\mu(t, \theta)\int_{-\theta}^0 e^{-z(\theta+s)}\varphi(t-\theta-s)(s)ds.$$

证明。证明过程与定理 50 的证明类似。我们只需验证映射 $\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)$ 属于 X，且对于所有 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$、$t \in \mathbb{R}$ 和 $q \in C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，$\Delta(z)$ 是闭的。为证明第一个断言，注意到 $\theta \mapsto e^{z\theta}q(t+\theta)$ 显然连续，且 $e^{\rho\theta}|e^{z\theta}q(t+\theta)| \le e^{(\mathrm{Re}(z)+\rho)\theta}\|q\|_\infty \to 0$ as$\theta \to -\infty$，因为 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$。为证明第二个断言，注意到定理 50 的证明中的线性算子 $N(z)$ 仍然有界，因为对于所有 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$，$\|N(z)q\|_\infty \le (|z| + \|L\|_\infty)\|q\|_\infty$。 □

下一个关键结果表明，$\mathcal{A}$ 在给定右半平面 $\mathbb{C}_{-\rho}$ 中，$\rho > 0$的谱可以用算子 Δ的特征值来刻画。特别是，$\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}_{-\rho}$ 中的谱仅由有限型的孤立特征值组成。鉴于无限时滞微分方程的相关解算子 $U(\cdot\ s)$（84）并非最终紧算子，这一结果尤为引人注目。

定理 63。 A 的实部大于 $-\rho$ 的谱仅由有限型的孤立特征值组成：

$$\sigma(A) \cap \mathbb{C}_{-\rho} = \{\sigma \in \mathbb{C}_{-\rho}:\ \sigma \text{ 是一个特征值}\} = \{\sigma \in \mathbb{C}_{-\rho}:\ \sigma \text{ 是一个弗洛凯指数}\}。$$

对于 $\sigma \in \sigma(A) \cap \mathbb{C}_{-\rho}$，有 $m_g(\sigma, A) = m_g(\Delta(\sigma))$ $m_a(\sigma, A) = m_a(\Delta(\sigma))$ $k(\sigma, A) = k(\Delta(\sigma))$，且$r(\sigma, A) = r(\Delta(\sigma))$，将 σ 视为 A 的一个特征值时，其部分重数等于将 σ 视为 Δ的一个特征值时的零点重数。此外，若 $\{\{q_{i,0}, \dots, q_{i,k_i-1}\} : i = 1, \dots, p\}$ 是 Δ 在 σ处的典范约当链系，则 $\{\{\varphi_{i,0}, \dots, \varphi_{i,k_i-1}\} : i = 1, \dots, p\}$ 是 A 在 σ处的典范（广义）特征向量系，其中

$$\varphi_{i,k}(t)(\theta) = e^{\sigma\theta} \sum_{l=0}^{k} \frac{\theta^l}{l!} q_{i,k-l}(t+\theta), \quad \forall k = 0, \dots, k_i - 1,\ t \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}_-.$$

证明。与 引理 51 的证明类似，可以证明 定理 62 中的特征算子满足 $\rho(\Delta(z)) \neq \emptyset$，方法是在 $\mu \in \mathbb{C} \backslash (z + \frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z})$ 的证明中取 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$ 充分大时的实部。类似地，可以证明 引理 51 成立。证明的其余部分现在与定理 53的证明类似。 □

为完整起见，下面给出预解算子 $R(z, \mathcal{A})$的形式、重数定理以及基本解的刻画。这些结果的证明从略，因为它们与 推论 54、 推论 56 和推论 57的证明类似。

推论 64。 如果 $z \in \mathbb{C}_{-\rho}$ 不是弗洛凯指数，那么 A 在 z 处的预解式可表示为

$$(R(z, \mathcal{A})\varphi)(t)(\theta) = e^{z\theta}\varphi_z(t+\theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}(zI - \mathcal{A}) \supseteq C_T^1(\mathbb{R}, X),$$

其中 φ_z 由下式给出

$$\varphi_z = \Delta(z)^{-1}\left(t \mapsto \varphi(t)(0) + \int_0^\infty d_2\mu(t, \theta) \int_{-\theta}^0 e^{-z(\theta+s)}\varphi(t-\theta-s)(s)ds\right).$$

推论 65. 若 $\sigma \in \mathbb{C}_{-\rho}$是一个弗洛凯指数，且满足 $k(\sigma, A) = r(\Delta(\sigma))$，则重数定理 $\dim N((\sigma I - A)^{r(\Delta(\sigma))}) = m_a(\Delta(\sigma))$ 成立。

推论 66. 方程 (84) 的基本解为

$$x(t) = e^{\sigma(t-s)} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(t-s)^l}{l!} q_{k-l-1}(t), \quad \forall t \geq s,$$

其中 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ 是 Δ 在弗洛凯指数 $\sigma \in \mathbb{C}_{-\rho}$处的一个约当链。

实际上，可以使用 $\{q_0, \dots, q_{k-1}\}$ 处 Δ 的 $\sigma \in \mathbb{C}_{-\rho}$的相同技术，显式构造一个约当链 注 58中所述。不过，唯一的区别是 $\Delta(\sigma)\, q_0 = 0$ 现在是一个周期线性齐次 iDDE，而其余的 $k-1$ (82) 中的方程，用于求得 $q_1, \dots, q_{k-1}$的方程均为周期线性非齐次 iDDE。所述正交配置法仍适用于求解这一特定的线性微分方程组。

注 67. 如本小节的引言中所述，针对无限时滞微分方程，状态空间 X 有多种可能的选择。还有另外两种自然的状态空间可供应用我们的结果：

1）不使用指数加权空间 $X = C_\rho(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n)$ （见式83），而是可以选择具有更一般权函数的加权函数空间，参见例如 [22,第 2] 节。更准确地说，设 $w : \mathbb{R}_- \to (0, 1]$ 是一个满足以下条件的非减连续函数

$$w(0) = 1, \quad \lim_{\theta \to -\infty} w(\theta) = 0, \quad \lim_{u \uparrow 0} \frac{w(\theta+u)}{w(\theta)} = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_-,$$

其中，在第三个等式中，极限关于 θ一致。于是，我们可以考虑带有加权范数 $\|\cdot\|_w$ 的 w-加权巴拿赫空间 $C_w(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^n)$，该范数定义为

$$C_w(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^n) := \{\varphi \in C(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^n) : \lim_{\theta\to-\infty} w(\theta)|\varphi(\theta)| = 0\}, \quad \|\varphi\|_w := \sup_{\theta\le 0} w(\theta)|\varphi(\theta)|.$$

在这种情形下，我们可以在 $\Omega = \mathbb{C}_\beta = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \beta\}$ 上构造一个特征算子，其中

$$\beta = \inf_{z\in\Lambda} \mathrm{Re}(z), \quad \Lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\mathrm{Re}(z)\theta} w(\theta) = 0 \right\}, \tag{86}$$

并注意到 $\beta = -\rho$ 若对所有 $\theta \in \mathbb{R}_-$， $w(\theta) = e^{\rho\theta}$，则如预期所示。

2）另一种常见的状态空间选择是加权 L^p-空间，参见例如 [40, 第 II.1 节。3] 或 [58, 第 1] 节。该状态空间构造如下：设 $w : \mathbb{R}_- \to (0,1]$ 是一个可测的非减函数，且 $\|w\|_{L^1}$ 有限，并对每个 $p \ge 1$ 考虑巴拿赫空间$L^p_w(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^n)$，由可测函数 $\varphi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}^n$ 组成，且对于任意给定的 $k \ge 0$，限制函数 $\varphi|_{[-k,0]}$ 连续，其范数为

$$\|\varphi\|_{L^p_w} := \sup_{k\ge 0} \left(\sup_{\theta\in[-k,0]} |\varphi(\theta)|^p + \int_{-\infty}^0 |\varphi(\theta)|^p w(\theta) d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

在这种情形下， β按（86）中的定义给出，此时 $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^0 e^{p\,\mathrm{Re}(z)\theta} w(\theta) < \infty\}$。 ◊

4.3 混合型泛函微分方程

在前两个例子中，系统的变化率取决于系统当前和过去的状态。我们可以推广这些滞后方程，使系统的变化率也可以取决于未来状态。例如，在研究定义于格点上的微分方程的行波解时，自然会出现这类微分方程，参见 [32, 33, 69]及其中的参考文献。对于这些所谓的 混合型泛函微分方程 (MFDEs)，我们选取状态空间 X 作为巴拿赫空间 $C([r_-,r_+],\ \mathbb{C}^n)$，并赋予其上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$，其中假设（最大）滞后项和超前项均为有限值。此外，考虑函数 $L \in C_T(\mathbb{R},\ \mathcal{L}(X,\ \mathbb{C}^n))$。向量值版本的里斯表示定理表明，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，算子 $L(t)$都可以唯一地表示为

$$L(t)\varphi = \int_{r_-}^{r_+} d_2\eta(t,\theta)\varphi(\theta), \tag{87}$$

并注意（87）与（61）中的负号有细微差别。映射 $\eta :\ \mathbb{R}\times[r_-,r_+] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个矩阵值函数，且 $\eta(\cdot\ \theta)$ 连续，并且对所有 T都是 $\theta \in [r_-,r_+]$-周期的。此外，$\eta(t,\ \cdot)$ 有界变差，在开区间$(r_-,\ r_+)$ 上右连续，并按要求 $\eta(\cdot,\ 0)\ = 0$。

在混合型泛函微分方程的情形下，事实证明，初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = L(t)x_t, & t \ge s, \\ x_s = \varphi, & \varphi \in X. \end{cases} \tag{88}$$

通常是不适定的，例如 Härterich 等人给出的简单说明性例子 [30]。尽管（88）是不适定的，但过去二十年来，混合型泛函微分方程的通用理论得到了广泛发展，参见例如 [54, 55, 61, 34]。我们特别提及 Hupkes 和 Verduyn Lunel 关于周期混合型泛函微分方程的周期中心流形的研究 [35], ，我们将通过应用特征算子解决一个关于周期混合型泛函微分方程所产生的谱结构的开放问题，详情请参见注 74。

由于初值问题（88）通常是不适定的，我们无法构造相应的向前演化系统 U，因此无法通过单值算子 $U(s+T, s)$ 定义 Floquet 乘子。不过，我们可以根据$\mathcal{A}$和 Δ来定义弗洛凯指数，正如前两个小节中所做的那样。需要强调的是，鉴于此前自治 MFDE 的特征值定义基于一种在概念上相似的构造，这一定义是自然的，详情请参见 [54, 55, 34] 。具体而言，对于任意 $t \in \mathbb{R}$ ，定义闭线性算子 $A(t): \mathcal{D}(A(t)) \subseteq X \to X$ 如下:

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{\varphi \in C^1([r_-, r_+], \mathbb{C}^n) : \varphi'(0) = L(t)\varphi\}, \quad A(t)\varphi = \varphi'.$$

对该算子，我们关联线性算子 $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, X)$，定义如下

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi(t) \in \mathcal{D}(A(t)) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (\mathcal{A}\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t). \tag{89}$$

以下结果的证明与 引理 49 相似，因此略去。

引理 68. 令 $D: \mathcal{D}(D) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 为如下定义的算子

$$\mathcal{D}(D) = \{\varphi \in C_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi(t)' \in X \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}, \quad (D\varphi)(t) = \varphi(t)' - \dot{\varphi}(t).$$

则 D 是满足（*H1*）、（*H2*）、（*H3*）和（*H5*）的可闭线性算子，其中 $\Omega = \mathbb{C}$。此外，定义线性算子 $K: \mathcal{D}(K) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 和 $M: C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 如下

$$\mathcal{D}(K) = C_T^1(\mathbb{R}, X), \qquad (K\varphi)(t) = L(t)\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)(0), \qquad (M\varphi)(t) = \varphi(t)(0),$$

那么 K 满足 （*H4*），且 $\mathcal{A}$ 在 (89) 中定义，是与 D、K 和 M 相关联的第一算子。

与 D、K 和 M 相关联的第二算子 $\hat{\mathcal{A}}$ 现在具有如下形式

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} \in \hat{C}_T^1(\mathbb{R}, X) : \varphi \in \mathcal{D}(D),\ q = M\varphi \right\}, \quad \hat{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix}.$$

以下结果的证明与 定理 50 的证明相似，因此略去。

定理 69. 全纯算子值函数 $\Delta: \mathbb{C} \to L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$ 取值于 $\Delta(z): C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 定义如下:

$$(\Delta(z)q)(t) = \dot{q}(t) + zq(t) - \int_{r_-}^{r_+} d_2\eta(t, \theta)e^{z\theta}q(t+\theta),$$

is 一个与 $\frac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$-相似的闭特征算子，对应于 $\mathbb{C}$ 上的$\hat{A}$，且等价关系由 b 给出 y

$$\begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = F(z)(zI - \hat{\mathcal{A}})E(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

其中 $E: \mathbb{C} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X), \hat{C}_T(\mathbb{R}, X) \hat{A})$ 和 $F: \mathbb{C} \to L(\hat{C}_T(\mathbb{R}, X))$ 是全纯有界算子值函数，满足 $E(z): C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0) \to D(\hat{A})$ 且 $F(z) \in L(C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \oplus R(zI - D_0))$ 为双射，定义为

$$E(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi(t)(\theta) = e^{z\theta}q(t+\theta) + \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds,$$
$$F(z)\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+\phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \phi(t) = \int_{r_-}^{r_+} d_2\eta(t, \theta) \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds.$$

定理 70。 若 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$，则 A 的谱仅由有限型孤立特征值构成：

$$\sigma(\mathcal{A})=\{\sigma\in\mathbb{C}:\sigma\ is\ a\ characteristic\ value\ of\ \Delta\}=\{\sigma\in\mathbb{C}:\sigma\ is\ a\ Floquet\ exponent\}.$$

对于 $\sigma\in\sigma(A)$，有 $m_g(\sigma,A)=m_g(\Delta(\sigma))$ $m_a(\sigma,A)=m_a(\Delta(\sigma))$ $k(\sigma,A)=k(\Delta(\sigma))$，且 $r(\sigma,A)=r(\Delta(\sigma))$，并且将 σ 视为 A 的特征值时，其部分重数等于将 σ 视为 Δ的特征值时的零点重数。此外，若 $\{\{q_{i,0},\dots,q_{i,k_i-1}\}:i=1,\dots,p\}$ 是 Δ 在 σ处的典范约当链系，则 $\{\{\varphi_{i,0},\dots,\varphi_{i,k_i-1}\}:i=1,\dots,p\}$ 是 A 在 σ 处的典范（广义）特征向量系，其中

$$\varphi_{i,k}(t)(\theta)=e^{\sigma\theta}\sum_{l=0}^{k}\frac{\theta^l}{l!}q_{i,k-l}(t+\theta),\quad \forall k=0,\dots,k_i-1,\ t\in\mathbb{R},\ \theta\in[r_-,r_+].$$

证明。与引理 51 的证明类似，可以验证，只要对所有 $z\in\mathbb{C}$，$\rho(\Delta)\neq\emptyset$且 $\rho(\Delta(z))\neq\emptyset$，则 (H6) 成立。唯一的区别在于，引理 51 中 $C(z)$ 的算子范数有上界 $\max\{e^{r_-\mathrm{Re}(z)}e^{r_+\mathrm{Re}(z)}\}\|L\|_\infty<\infty$。证明的其余部分可按引理 51 和定理 53 中的方式完成。 □

注 71. 与经典时滞微分方程（第 4.1 节）和无限时滞微分方程（第 4.2 节）的结果不同，定理 70 的证明需要额外假设 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$。若尝试按照引理 51 的思路证明 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$，难点在于证明存在一个 $z_0\in\mathbb{C}$，使得 $\|C(z_0)S(-z_0)^{-1}\|<1$。直接计算表明，当 $\min\{-r_-,r_+\}<1/(e\|L\|_\infty)$ 时，该不等式成立；这意味着滞后项或超前项，或者算子范数 $\|L\|_\infty$ 足够小时即可。根据 [35, 引理 4.3.2]，，对于混合型泛函微分方程，可能存在 $\rho(\Delta)=\emptyset$ 的情况，但必要条件和（替代性的）充分条件仍有待进一步研究。 ♢

以下两个结果的证明与 推论 54 和 推论 56的证明类似，因此略去。

推论 72。 若 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$ 且 $z\in\mathbb{C}$ 不是弗洛凯指数，则 A 在 z 处的预解式可表示为

$$(R(z,\mathcal{A})\varphi)(t)(\theta)=e^{z\theta}\varphi_z(t+\theta)+\int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds,\quad \forall\varphi\in\mathcal{R}(zI-\mathcal{A})\supseteq C_T^1(\mathbb{R},X),$$

其中 φ_z 由下式给出

$$\varphi_z=\Delta(z)^{-1}\left(t\mapsto\varphi(t)(0)+\int_{r_-}^{r_+}d_2\eta(t,\theta)\int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t+\theta-s)(s)ds\right).$$

推论 73。 设 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$。若 $\sigma\in\mathbb{C}$ 是一个弗洛凯指数，且 $k(\sigma,A)=r(\Delta(\sigma))$，则重数定理 $\dim N((\sigma I-A)^{r(\Delta(\sigma))})=m_a(\Delta(\sigma))$ 成立。

由于混合型泛函微分方程的初值问题（88）通常是不适定的，而且没有可用的解算子 U，因此我们无法使用证明 推论 57 中的工具来求得混合型泛函微分方程的基本解。不过，若 $\rho(\Delta)\neq\emptyset$ 且 $\{q_0,\dots,q_{k-1}\}$ 是 Δ 在特征值 σ 处的一条约当链（可直接采用证明 推论 57 的方法验证），则形式如下的基本解x

$$x(t)=e^{\sigma(t-s)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(t-s)^l}{l!}q_{k-l-1}(t),\quad \forall t\geq s.$$

满足（88）。在实际中显式构造 $\{q_0,\dots,q_{k-1}\}$ 关于 Δ 在 σ处的约当链，可以采用 注 58中所述的相同方法。唯一细微的区别是，现在 $\Delta(\sigma)q_0=0$ 是周期线性齐次多时滞泛函微分方程，而其余 $k-1$ 方程（82）用于求得 $q_1,\dots,q_{k-1}$则是周期线性非齐次多时滞泛函微分方程。所提到的正交配置法仍适用于求解这个特定的线性微分方程组。

注 74。 在 [35], 中，Hupkes 和 Verduyn Lunel 陈述并证明了周期混合型泛函微分方程的周期中心流形定理。为此，他们需要额外的假设（在 HF中称为（ [35]））：弗洛凯指数在虚轴周围存在谱隙。尽管他们证明了若干特定子类的混合型泛函微分方程存在此类谱隙（其离散时滞和超前项与周期成有理数关系，见 [35, 引理3.3 和推论 3.4-3。5]），但所有周期混合型泛函微分方程是否都具有此类谱隙这一一般性问题，在 [35] 中仍未解决。如今 定理 70 对这一问题给出了（部分）解答：如果 ρ（Δ） $\neq \emptyset$，那么该定理指出，所有周期线性混合型泛函微分方程的弗洛凯指数都是孤立的且为有限型，这意味着存在这样的谱隙。 ♢

5 结论与展望

本文研究了周期线性演化系统的特征算子，从而在 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 关于自治线性演化系统特征矩阵的研究基础上进行了拓展。 [40] 我们将所得结果应用于周期泛函微分方程的三个重要子类：经典时滞微分方程（DDE，第 4.1 节）、无限时滞微分方程（iDDE，第 4.2 节）以及混合型泛函微分方程（MFDE，第 4.3 节）。对于最后一类方程，我们解决了一个关于弗洛凯指数离散谱结构的开放问题（注74）。我们推测，所得结果还可用于获取其他多类周期线性微分方程的谱信息，包括定义在 L^p 空间上的时滞微分方程（应用于控制理论）、抽象时滞微分方程（应用于数学神经科学和含时滞偏微分方程）、中立型泛函微分方程（应用于电气工程和机械工程）、双曲型偏微分方程（应用于波的分析），以及 Lotka-McKendrick-von Förster 模型（应用于种群动力学）。上述各类微分方程对应的自治系统的特征矩阵见 [40, 第 II 节]。然而，要验证所考虑的周期模型满足第 3 节中一般框架的假设，并非易事，且涉及诸多技术难题。例如，周期经典时滞微分方程的证明（第 4.1 节）与自治经典时滞微分方程的证明（[40, 第 II 节1]）在篇幅和复杂程度上就存在显著差异。在某些情况下，甚至可能需要放宽假设或采用其他假设，才能获得相当的结果。

将抽象结果应用于各类（泛函）微分方程（第 4 节）时，对于给定的线性算子 $\mathrm{A} \in L(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X))$，其中 $X = \mathrm{F}(I, \mathbb{C}^n)$，我们构造了特征算子 $\Delta : \Omega \to L(\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个闭区间。对于经典时滞微分方程，我们在 [50, 第 3] 节中观察到，A 的闭包是函数空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 上演化半群 U 的生成元，其中 $\mathrm{F} = C$。选择一个 T-周期函数空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R}, X)$ 并非惯例，因为演化半群通常定义在 $C_0(\mathbb{R}, X)$ 上——该空间由所有在无穷远处消失的 X值连续函数组成——或者定义在 $L^p(\mathbb{R}, X)$ 上，这是由于它们与非自治柯西问题的存在性和正则性有关。更多信息参见 [17, 7, 46, 47, 1, 59] 。然而，鉴于其在特征算子中的应用，选择一个 T-周期函数空间如今看来十分自然。未来一项有前景的研究方向是阐述并证明关于 A、U 与相关特征算子 Δ 之间（谱）关系的一般结果，包括谱映射定理、Fredholm 性质及相关方面。尤其值得研究的是，如何通过周期配对 $\cdot, \cdot_T$，探讨伴随算子 $\mathrm{A}^\star$、$\mathrm{U}^\star$ 和 $\Delta^\star$ 的性质；这些算子例如可应用于（数值）分岔分析。[50, 第 3 节3]和 [5, 第 3] 节。我们认为，这种演化半群方法也能为各类周期演化方程的级数展开理论、完备性定理和小解提供有价值的见解；当周期是时滞的整数倍时，它还可应用于时滞模型，参见 [29, 第 8 节。3], [41, 第 11]节和 [23, 第 6 节。2] 此外，也可回顾注 60，将其视为这一思路下未来研究的一个方向。

我们以关于本文结果的四个开放问题作结：

1. 在第4节的三个例子中，可以清楚地看到，$\sigma(\mathcal{A})\cap\Omega$ 仅由有限型孤立特征值组成，这是引理29的直接推论。这一谱性质与 Kaashoek 和 Verduyn Lunel 关于自治线性演化方程的特征矩阵的谱结构完全一致 [40] ，另见注30。由此自然引出一个问题：定义在 Δ上、作用于$\mathcal{A}$的Ω 特征算子是否总是具有这种谱结构。我们猜想并非如此，因为 $\Delta(z)$不一定对所有 $z\in\Omega$都具有紧预解式。然而，目前仍未找到简单的反例。

2. 要解决上述问题，需要将可闭线性算子的谱理论（第 2.1 节）和可闭算子值函数的谱理论（第2.2节扩展到特征值和孤立谱点之外。正如引理 7之后的讨论所指出的，这种扩展必须涵盖近似点谱。此外，建立一套全面的理论，还需要详细分析可闭线性算子的压缩谱、连续谱、剩余谱和本质谱，并研究其相关的（半）Fredholm 性质，以及这些性质与闭包的相应谱之间的关系，详见引理 7、引理 9和引理 12。

3. 在第4节的三个例子中，全纯算子值函数 Δ始终是闭的。然而，我们无法直接从一般公式（41）证明这一点。一个值得进一步研究的课题是，确定算子 M、D、K、$Q(z)$ 和 ι 满足什么充要条件时，$\Delta(z)$ 是（非）闭的，以及这一性质是否依赖于 $z\in\Omega$。

4. 我们在 T-周期函数空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R},Z)$ 上表述并证明了所有结果。由此自然产生一个问题：我们的结果是否也适用于 (T,z)-周期函数空间 $\mathrm{F}_T(\mathbb{R},Z)_z$，其中 $(T,z)\in\mathbb{R}_+\times S^1$，该空间由满足以下条件的 Floquet-周期函数 f构成：对所有 $t\in\mathbb{R}$，$f(t+T)=zf(t)$。事实证明，这类 Floquet-周期函数自然出现在对（无限维）动力系统中极限环的余维一 [45, 5] 和余维二 [10, 11] 分岔的研究中。特别是，如何将第3.3节关于周期谱模式的结果推广到 Floquet-周期函数，值得探讨。

致谢

作者感谢 Stein Meereboer（拉德堡德大学）和 Vitorio Courtens（哈瑟尔特大学）所进行的有益讨论并提出的建议。

A　A关于闭线性算子和可闭线性算子的补充说明　　s

在本附录的这一节中，我们回顾并证明一些与闭线性算子和可闭线性算子相关的基本结果。

引理 *75*（[17, 引理 *III.2*.4] 或 [42, 习题 *5*.6]）。设 X 和 Y 为巴拿赫空间，$A:D(A)\subseteq X\to Y$ 是闭线性算子，$B:D(B)\subseteq X\to Y$ 是有界线性算子，且 $D(B)\supseteq D(A)$。则 $A+B:D(A)\subseteq X\to Y$ 是闭的。

引理 76 ([17, 命题 B.2])**.** 设 X、Y 和 Z 为巴拿赫空间，$A:D(A)\subseteq Y\to Z$ 是闭线性算子，$B:X\to Y$ 是有界线性算子。则定义域为 $D(AB):=\{\varphi\in X:B\varphi\in D(A)\}$ 的 $AB:D(AB)\subseteq X\to Z$ 是闭的。

引理 77 ([17, 命题 B.4])**.** 设 X 和 Y 是巴拿赫空间。线性算子 $A:D(A)\subseteq X\to Y$ 可闭，当且仅当对于每个$(\varphi_m)_m$ 中属于 $D(A)$ 且依范数收敛至零的序列$(A\varphi_m)_m$，若其依范数收敛至 Y中的某个 ψ，则有 $\psi=0$。

引理 78. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，$A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ 是可闭线性算子，$B : D(B) \subseteq X \to Y$ 是有界线性算子。则 B 和 $A + B : D(A) \cap D(B) \subseteq X \to Y$ 均为可闭算子。

证明。 为证明第一个断言，设 $(\varphi_m)_m$ 是$\mathcal{D}(B)$中的一个序列，其范数收敛于零，并假设$(B\varphi_m)_m$ 在范数下收敛于某个 $\psi \in Y$。那么 $\|\psi\| \le \|\psi - B\varphi_m\| + \|B\|\|\varphi_m\| \to 0$ 当$m \to \infty$时，这表明 $\psi = 0$，因此 B 是可闭的。

为证明第二个断言，设$(\varphi_m)_m$ 是$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$中的一个序列，其范数收敛于零，并假设$((A + B)\varphi_m)_m$ 在范数下收敛于某个 $\psi \in Y$。那么 $\|A\varphi_m - \psi\| \le \|(A + B)\varphi_m - \psi\| + \|B\|\|\varphi_m\| \to 0$ 当 $m \to \infty$时，这表明 $A\varphi_m \to \psi$ 当 $m \to \infty$时成立。但是，A 是可闭的，因此 $\psi = 0$，这就证明了该结论。 □

引理 79。 设 X、Y 和 Z 为巴拿赫空间，$A : D(A) \subseteq Y \to Z$ 为可闭线性算子，$B : D(B) \subseteq X \to Y$ 为有界线性算子。则 $AB : D(AB) \subseteq X \to Z$ 的定义域为 $D(AB) := \{\varphi \in D(B) : B\varphi \in D(A)\}$ 是可闭的。

证明。 设 $(\varphi_m)_m$ 是 $\mathcal{D}(AB)$ 中的一个序列，且在范数下收敛于零，并假设 $(AB\varphi_m)_m$在范数下收敛于某个 $\psi \in Z$。那么 $\psi_m = B\varphi_m \to 0$，因为 $m \to \infty$，且 B 有界。因此，$AB\varphi_m = A\psi_m \to \psi$，因为 $m \to \infty$。由于 A 可闭，我们有 $\psi = 0$，这就证明了结论。 □

B 非闭性与预解集定义的必要性

在本附录部分，我们验证第 4.1 节中出现的算子 D、D_0、A 和 ˆA 并非闭算子，并且当 $T > 0$ 时，$zI - D_0$和 $zI - \mathrm{A}$ 的值域并非整个空间 $C_T(\mathbb{R}, X)$。回想一下，注 59 对这些算子在 $T = 0$ 情形下进行了详细讨论。此外，本节的结果也适用于第 4.2 节和第 4.3 节中出现的算子 D、D_0、A 和 A，但证明中的某些部分可能略有不同。

Prop命题 80. 算子 $D, D_0, \mathcal{A}$ 和 ˆ$\mathcal{A}$ 在 第 4.1 节的设定下不是闭算子 .

证明。 为证明 D不是闭算子，取序列 $(\psi_m)_m$，它属于 $C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，且一致收敛于某个 $\psi \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \setminus C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$。定义序列 $(\varphi_m)_m$，使其属于 $\mathcal{D}(D)$，并满足 $\varphi_m(t)(\theta) = \psi_m(t + \theta)$，再令 $\varphi(t)(\theta) = \psi(t + \theta)$。于是，当 $m \to \infty$ 时，$\|\varphi_m - \varphi\|_\infty = \|\psi_m - \psi\|_\infty \to 0$ 且 $D\varphi_m = 0$，但 $\varphi \notin \mathcal{D}(D)$，因为 φ 关于第一个变量不是连续可微的。因此，D 不是闭算子。</output>

为证明 D_0不是闭算子，取序列 $(\psi_m)_m$，它属于 $C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，且一致收敛于某个 $\psi \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \setminus C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$。定义序列 $(\varphi_m)_m$，使其属于 D(D_0)，并满足 $\varphi_m(t)(\theta) = \theta\psi_m(t + \theta)$，再令 $\varphi(t)(\theta) = \theta\psi(t + \theta)$。于是，当 $m \to \infty$ 时，$\|\varphi_m - \varphi\|_\infty \le h\|\psi_m - \psi\|_\infty \to 0$，并得到 $(D_0\varphi_m)(t)(\theta) = \psi_m(t + \theta)$。因此，$(D_0\varphi_m)_m$ 在范数意义下收敛于 $t \mapsto \psi(t + \cdot)$。然而，$\varphi$ 关于第一个变量不是连续可微的，因此 $\varphi \notin$D(D_0)；这证明了 D_0 不是闭算子。</output>

在证明 ˆ$\mathcal{A}$ 和 $\hat{A}_0 : D(\hat{A}_0) \subseteq C_T(\mathbb{R}, X) \to C_T(\mathbb{R}, X)$ 不是闭的之前，我们先证明线性算子

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}_0) := \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}), \quad \hat{\mathcal{A}}_0 \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -GM\varphi \\ D\varphi \end{pmatrix},$$

不是闭的，这里回顾一下引理 49 的证明中 G和 M 的定义。为此，设 $(\psi_m)_m$是 $C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 中的一个序列，一致收敛到某个 $\psi \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \setminus C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$。定义 D$(D)$ 中的序列 $(\varphi_m)_m$，使得 $\varphi_m(t)(\theta) = \theta^2\psi_m(t+\theta)$，并令 $\varphi(t)(\theta) = \theta^2\psi(t+\theta)$。那么，$((0, \varphi_m))^m$ 是 D(ˆA$_0$) 中的一个序列，且 $\|(0, \varphi_m) - (0, \varphi)\|_\infty \le h^2\|\psi_m - \psi\|_\infty \to 0$，当 $m \to \infty$ 时，(ˆA$_0(0, \varphi_m))(t)(\theta) = (0, 2\theta\psi_m(t + \theta))$。因此，(ˆA$_0(0, \varphi_m))_m$在范数意义下收敛到 $(0, t \mapsto (\theta \mapsto 2\theta\psi(t + \theta)))$。然而，$\varphi$关于第一个变量并非连续可微，因此 $\varphi \notin$D(D)。所以，$(0, \varphi) \notin$D(ˆA$_0$)，即 ˆA$_0$不是闭的。为了证明 ˆA 不是闭的，考虑扰动 ˆ$L\colon$ ˆ $C_T(\mathbb{R}, X) \to$ˆ$C_T(\mathbb{R}, X)$，其中

$$\hat{L} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} M_L\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

并注意到，当 $L \in C_T(\mathbb{R}, \mathsf{L}(X, \mathbb{C}^n))$ 时，$\hat{} L \in \mathsf{L}(\hat{} C_T(\mathbb{R}, X))$。我们观察到，$\hat{}\mathsf{A} = \hat{}\mathsf{A}_0 + \hat{} L$。若 $\hat{}\mathsf{A}$ 是 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 闭的，那么根据引理 75，$\mathsf{A} - L = \mathsf{A}_0$ 将是闭的，这与我们先前的发现矛盾。因此，$\hat{}\mathsf{A}$ 不是闭的。

现在证明$\mathcal{A}$ 不是闭算子。选取序列 $(\psi_m)_m$，其中 $C_T^1(\mathbb{R}, X)$ 中的函数一致收敛到 $\psi \in C_T(\mathbb{R}, X)$，且函数 $\Psi \in C_T(\mathbb{R}, X)$ 定义为

$$\Psi(t)(\theta) := \int_0^\theta \psi(t + \theta - s)(s)ds \tag{90}$$

不属于$\mathcal{D}(D)$。注意，如上所示，对于线性算子 D 的非闭性，这样的序列 $(\psi_m)_m$ 确实存在。现在考虑序列 $(q_m)_m$，其中 $C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 满足周期非齐次时滞微分方程

$$\dot{q}_m(t) = L(t)[q_m]_t + H_m(t), \quad H_m(t) := L(t)\left[\theta \mapsto \int_0^\theta \psi_m(t + \theta - s)(s)ds\right], \tag{91}$$

并定义序列 $(\varphi_m)_m$，使其属于 $\mathsf{D}(D)$，且 $\varphi_m(t)(\theta) = q_m(t+\theta) + \int_0^\theta \psi_m(t+\theta-s)(s)ds$。由于 (91)，$\dot{\varphi}_m(t)(0) = L(t)\varphi_m(t)$，故序列 $(\varphi_m)_m$ 属于 $\mathsf{D}(\mathsf{A})$，并且对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都满足 $\mathsf{A}\varphi_m = \psi_m$。显然，$H_m \to H$ 一致地收敛，因为当 $m \to \infty$ 时 $\mathsf{A}\varphi_m = \psi_m \to \psi$，其中 $H(t) = L(t)[\theta \mapsto \int_0^\theta \psi(t + \theta - s)(s)ds]$。根据解对非齐次项的连续依赖性，序列 $(q_m)_m$ 在$C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 中收敛到一个满足 $\dot{q}(t) = L(t)q_t + H(t)$ 的映射 q。因此，当 $m \to \infty$ 时，$\varphi_m \to \varphi$ 一致地收敛，其中 $\varphi(t)(\theta) = q(t + \theta) + \Psi(t)(\theta)$。反设 $\varphi \in \mathsf{D}(D)$。由于 $q \in C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，可得 $\Psi = \varphi - q \in \mathsf{D}(D)$，这与关于 Ψ 的假设矛盾。因此 $\varphi \notin \mathsf{D}(D)$，进而 $\varphi \notin \mathsf{D}(\mathsf{A})$，由此得出 A 不是闭算子。 □

命题 81。 在 第 4.1 节的设定下，以下陈述成立：

1. $\mathcal{R}(zI - D_0) = \{\varphi \in C_T(\mathbb{R}, X) : \mathcal{K}_z\varphi \in C_T(\mathbb{R}, X)\}$, *where* $\mathcal{K}_z \in \mathcal{L}(C_T(\mathbb{R}, X))$ *is defined by*

$$(\mathcal{K}_z\varphi)(t)(\theta) := \int_\theta^0 e^{z(\theta-s)}\varphi(t + \theta - s)(s)ds, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2. $C_T^1(\mathbb{R}, X) \neq R(zI - D_0) \neq C_T(\mathbb{R}, X)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均成立。

3. $C_T^1(\mathbb{R}, X) \neq \mathcal{R}(zI - \mathcal{A}) \neq C_T(\mathbb{R}, X)$ *for all* $z \in \rho(\mathcal{A})$.

证明。 回顾 引理 49 可知 $\rho(D_0) = \Omega = \mathbb{C}$。第一个陈述由 (69) 和 (70) 得出。注意，$\mathcal{K}_z$ 是有界的，因为 $\|\mathcal{K}_z\varphi\| \leq M_z\|\varphi\|$ 对所有 $\varphi \in C_T(\mathbb{R}, X)$均成立，其中 M_z 定义见 (72)。

现在证明第二个陈述。根据引理 31，只需证明$C_T^1(\mathbb{R}, X) \neq \mathsf{R}(D_0) \neq C_T(\mathbb{R}, X)$。固定一个 $c \in \mathbb{R}$，考虑函数 $W \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \setminus C_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$，并定义函数 $\varphi_c \in C_T(\mathbb{R}, X)$，使得 $\varphi_c(t)(\theta) := W(t + c\theta)$。于是，直接计算可得

$$(\mathcal{K}_0\varphi_c)(t)(\theta) = \begin{cases} \theta W(t + \theta), & c = 1, \\ \dfrac{1}{c-1}\displaystyle\int_{t+\theta}^{t+c\theta} W(s)ds, & c \neq 1. \end{cases}$$

因此，对于 $c \neq 1$，有 $\mathcal{K}_0\varphi_1 \notin C_T^1(\mathbb{R}, X)$ 和 $\mathcal{K}_0\varphi_c \in C_T^1(\mathbb{R}, X)$；而对于所有$c \in \mathbb{R}$，有 $\varphi_c \in C_T(\mathbb{R}, X) \setminus C_T^1(\mathbb{R}, X)$。根据第一个陈述给出的刻画，证明至此完成。

由 推论 43 可知，$\Omega = \mathbb{C}$。 □

参考文献

[1] W. Arendt 和 P. J. Rabier，周期函数空间上的线性演化算子，《Communicationson Pure & AppliedAnalysis》，8（2009），第5–36页，doi:10.3934/cpaa.2009.8.5。

[2] H. Bart、A. C. M. Ran、I. C. Gohberg 和 M. A. Kaashoek，《矩阵与算子函数的因子分解：状态空间方法》，第178卷《算子理论：进展与应用》，Birkhäuser Basel，2008年，doi:10.1007/978-3-7643-8268-1。[3] M. M. Bosschaert、S. G. Janssens 和 Yu. A. Kuznetsov，从时滞微分方程平衡点的余维二分岔转向非双曲周期轨道，《SIAM 应用动力系统期刊》，19（2020年），第252–303页，doi:10.1137/19m1243993。[4] M. M. Bosschaert 和 Yu. A. Kuznetsov，时滞微分方程中 Bogdanov–Takens 分岔的分岔分析，《SIAM 应用动力系统期刊》，23（2024年），第553–591页，doi:10.1137/22m1527532。[5] M. M. Bosschaert、B. Lentjes、L. Spek 和 Yu. A. Kuznetsov，时滞微分方程极限环余维一分岔的数值周期正规化，2025年，doi:10.48550/ARXIV.2505.19786。[6] M. M. Bosschaert、B. Lentjes、L. Spek 和 Yu. A. Kuznetsov，《时滞微分方程的周期正规化》。GitHub，2024年，https://github.com/mmbosschaert/PeriodicNormalizationDDEs.git。[7]C. Chicone 和 Y. Latushkin，无限维非自治微分方程的中心流形，《微分方程杂志》，141（1997年），第356–399页，doi:10.1006/jdeq.1997.3343。[8] P. Clément、O. Diekmann、M. Gyllenberg、H. J. A. M. Heijmans 和 H. R. Thieme，对偶半群扰动理论 II：sun-reflexive情形下的时变扰动，《爱丁堡皇家学会会刊：A辑数学》，109（1988年），第145–172页，doi:10.1017/s0308210500026731。[9] W. A. Coppel，《稳定性理论中的二分性》，Springer Berlin Heidelberg，1978年，doi:10.1007/bfb0067780。[10] V. De Witte、F. Della Rossa、W. Govaerts 和 Yu. A. Kuznetsov，极限环余维二分岔的数值周期规范化：计算公式、数值实现与示例，《SIAM 应用动力系统期刊》，12（2013年），第722–788页，doi:10.1137/120874904。[11] V. De Witte、W. Govaerts、Yu. A. Kuznetsov 和 H. G. E. Meijer，利用李雅普诺夫指数和数值正规形分析极限环分岔，《Physica D：非线性现象》，269（2014年），第126–141页，doi:10.1016/j.physd.2013.12.002。[12] B. A. J. de Wolff，具有对称性的时滞微分方程的特征矩阵函数，《动力系统》，38（2022年），第30–51页，doi:10.1080/14689367.2022.2132136。[13] A. Dhooge、W. Govaerts 和 Yu. A. Kuznetsov，MATCONT：用于常微分方程数值分岔分析的 MATLAB 软件包，《ACM Transactions on Mathematical Software》，29（2003年），第141–164页，doi:10.1145/779359.779362。[14]A. Dhooge、W. Govaerts、Yu. A. Kuznetsov、H. G. E. Meijer 和 B. Sautois，用于动力系统分岔分析的 MATCONT 软件新功能，《动力系统数学与计算机建模》，14（2008年），第147–175页，doi:10.1080/13873950701742754。[15] O. Diekmann 和 M. Gyllenberg，《无限时滞方程：抽象与具体的结合》，《微分方程杂志》，252（2012年），第819–851页，doi:10.1016/j.jde.2011.09.038。[16] O. Diekmann、S. M. Verduyn Lunel、S. A. van Gils 和 H.-O. Walther，《时滞方程》，Springer New York，1995年，doi:10.1007/978-1-4612-4206-2。

[17]K.-J. Engel 和 R. Nagel，《线性演化方程的单参数半群》，Springer-Verlag，2000年，doi:10.1007/b97696。[18] K. Engelborghs 和 E. J. Doedel，分段多项式配点法计算时滞微分方程周期解的稳定性，Numerische Mathematik，91（2002年），第 627–648 页，doi:10.1007/s002110100313。[19] K. Engelborghs、T. Luzyanina、K. J. Hout 和 D. Roose，计算时滞微分方程周期解的配点法，SIAM Journal on Scientific Com- puting，22（2001年），第 1593–1609 页，doi:10.1137/s1064827599363381。[20] K. Engelborghs、T. Luzyanina 和 D. Roose，使用 DDE-BifTool 对时滞微分方程进行数值分岔分析，ACM Transactions on Mathematical Software，28（2002年），第 1–21 页，doi:10.1145/513001.513002。[21] C. Engström 和 A. Torshage，关于含无界元素的算子矩阵函数的等价与线性化，Integral Equations and Operator Theory，89（2017年），第 465–492 页，doi:10.1007/s00020-017-2415-5。[22] T. Faria、W. Huang 和 J. Wu，一般巴拿赫空间中映射中心流形的光滑性及半线性泛函微分方程的形式伴随算子，SIAM Journal on Mathematical Analysis，34（2002年），第 173–203 页，doi:10.1137/s0036141001384971。[23]M. V. S. Frasson 和 S. M. Verduyn Lunel，线性泛函微分方程的大时间行为，Integral Equations and Operator Theory，47（2003年），第 91–121 页，doi:10.1007/s00020-003-1155-x。[24] I. C. Gohberg、S. Goldberg 和 M. A. Kaashoek，《线性算子类，第一卷》，Birkhäuser Basel，1990年，doi:10.1007/978-3-0348-7509-7。[25] I. C. Gohberg、M. A. Kaashoek 和 D. C. Lay，全纯算子函数的等价、线性化与分解，Journal of Functional Analysis，28（1978年），第 102–144 页，doi:10.1016/0022-1236(78)90081-2。[26] I. C. Gohberg 和 E. I. Sigal，对数留数定理及 Rouché定理的算子推广，Mathematics of the USSR-Sbornik，13（1971年），第 603–625 页，doi:10.1070/sm1971v013n04abeh003702。[27] J. K. Hale，《常微分方程》，Dover Publications，2009年。[28] J. K. Hale 和 J. Kato，具有无限时滞的滞后方程的相空间，Funkcial Ekvac，21（1978年），第 11–41 页。[29] J. K. Hale 和 S. M. Verduyn Lunel，《泛函微分方程导论》，Springer New York，1993年，doi:10.1007/978-1-4612-4342-7。[30]J. Härterich、B. Sandstede 和 A. Scheel，混合型线性非自治泛函微分方程的指数二分性，Indiana University Mathematics Jour- nal，51（2002年），第 1081–1110 页，doi:10.1512/iumj.2002.51.2188。[31] Y. Hino、S. Murakami 和 T. Naito，《无限时滞泛函微分方程》，Springer Berlin Heidelberg，1991年，doi:10.1007/bfb0084432。[32] H. Hupkes 和 B. Sandstede，离散 FitzHugh–Nagumo 系统脉冲解的稳定性，Transactions of the American Mathematical Society，365（2012年），第 251–301 页，doi:10.1090/s0002-9947-2012-05567-x。

[33]H. J. Hupkes 和 B. Sandstede，离散 FitzHugh–Nagumo 系统的行波脉冲解，SIAM 应用动力系统期刊，9（2010年），第 827–882 页，doi:10.1137/090771740。[34] H. J. Hupkes 和 S. M. Verduyn Lunel，混合型泛函微分方程的中心流形理论，《动力系统与微分方程杂志》，19（2006年），第 497–560 页，doi:10.1007/s10884-006-9055-9。[35] H. J. Hupkes 和 S. M. Verduyn Lunel，混合型周期泛函微分方程的中心流形，微分方程杂志，245（2008年），第 1526–1565 页，doi:10.1016/j.jde.2008.02.026。[36] G. Iooss，闭轨附近向量场正规形的整体刻画，微分方程杂志，76（1988年），第 47–76 页，doi:10.1016/0022-0396(88)90063-0。[37] G. Iooss 和 M. Adelmeyer，《分岔理论及其应用专题》，世界科学出版社，1999年1月，doi:10.1142/3990。[38] S. G. Janssens，关于时滞微分方程平衡点余维二分岔的规范化技术，硕士论文，乌得勒支大学，2010年， http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/312252。[39] W. Just，关于时滞弗洛凯问题的特征值谱，Physica D：非线性现象，142（2000年），第 153–165 页，doi:10.1016/s0167-2789(00)00051-8。[40] M. A. Kaashoek 和 S. M. Verduyn Lunel，演化系统的特征矩阵与谱性质，Transactions of the American Mathematical Society，334（1992年），第 479–517 页，doi:10.1090/s0002-9947-1992-1155350-0。[41] M. A. Kaashoek 和 S. M. Verduyn Lunel，《完备性定理与特征矩阵函数》，施普林格国际出版公司，2022年，doi:10.1007/978-3-031-04508-0。[42]T. Kato，《线性算子扰动理论》，Springer Berlin Heidelberg，1995年，doi:10.1007/978-3-642-66282-9。[43] B. Krauskopf 和 J. Sieber，《时滞系统的分岔分析：方法及其应用》，施普林格国际出版公司，2022年9月，第 195–245 页，doi:10.1007/978- 3-031-01129-0 7。[44] Yu. A. Kuznetsov，《应用分岔理论基础》，应用数学科学丛书第 112 卷，施普林格，Cham，第 4 版，2023年，doi:10.1007/978-3-031-22007-4。[45] Yu. A. Kuznetsov、W. Govaerts、E. J. Doedel 和 A. Dhooge，极限环余维一分岔的数值周期规范化，SIAM 数值分析期刊，43（2005年），第 1407–1435 页，doi:10.1137/040611306。[46] Y. Latushkin、S. Montgomery-Smith 和 T. Randolph，局部紧空间上具有巴拿赫纤维的线性斜积流的演化半群与二分性，微分方程杂志，125（1996年），第 73–116 页，doi:10.1006/jdeq.1996.0025。[47] Y. Latushkin 和 Y. Tomilov，演化半群的 Fredholm 性质，伊利诺伊数学杂志，48（2004年），第 999–1020 页，doi:10.1215/ijm/1258131066。[48] B. Lentjes、S. Daniëls、M. Follon 和 Yu. A. Kuznetsov，非线性周期强迫时滞微分方程的中心流形与正规形，2026年，doi:10.48550/ARXIV.2601.18918。

[49] B. Lentjes、L. Spek、M. M. Bosschaert 和 Yu. A. Kuznetsov，《从太阳与恒星的视角看时滞微分方程的周期中心流形》，《动力系统与微分方程杂志》，37（2023年），第 815–858 页，doi:10.1007/s10884-023-10289-9。[50] B. Lentjes、L. Spek、M. M. Bosschaert 和 Yu. A. Kuznetsov，《时滞微分方程中极限环分岔的周期正规形》，微分方程杂志，423（2025年），第 631–694 页，doi:10.1016/j.jde.2025.01.064。[51] B. Lentjes、M. Windmolders 和 Yu. A. Kuznetsov，《常微分方程中非双曲极限环的周期中心流形》，《分岔与混沌国际期刊》，33（2023年），第 1–29 页，doi:10.1142/s0218127423501845。[52] A. M. Lyapunov，《运动稳定性》，博士论文，哈尔科夫，1892年；英文译本，学术出版社，1966年。[53] P. Magal 和 S. Ruan，《非稠密定义域半线性方程的中心流形及其在年龄结构模型 Hopf 分岔中的应用》，《美国数学学会回忆录》，202（2009年），第 1–80 页，doi:10.1090/s0065-9266-09-00568-7。[54]J. Mallet-Paret，《混合型泛函微分方程的 Fredholm 择一定理》，《动力系统与微分方程杂志》，11（1999年），第 1–47 页，doi:10.1023/a:1021889401235。[55]J. Mallet-Paret 和 S. M. Verduyn Lunel，《混合型泛函微分方程、全纯因子分解及其应用》，载于《Equadiff 2003》，世界科学出版社，2005年2月，doi:10.1142/9789812702067_0007。[56] M. H. Mortad，《算子理论中的反例》，施普林格国际出版公司，2022年，doi:10.1007/978-3-030-97814-3。[57]S. Murakami 和 T. Naito，《无限时滞泛函微分方程的渐消记忆空间与稳定性性质》，《Funkcialaj Ekvacioj》，32（1989年），第 91–105 页。[58] T. Naito，《具有无限迟滞的自治线性泛函微分方程》，微分方程杂志，21（1976年），第 297–315 页，doi:10.1016/0022-0396(76)90124-8。[59] G. Nickel，《非自治柯西问题的演化半群》，《抽象与应用分析》，2（1997年），第 73–95 页，doi:10.1155/s1085337597000286。[60] K. Pyragas，《通过自控制反馈连续控制混沌》，《物理快报A》，170（1992年），第 421–428 页，doi:10.1016/0375-9601(92)90745-8。[61] A. Rustichini，《混合型泛函微分方程：线性自治情形》，《动力系统与微分方程杂志》，1（1989年），第 121–143 页，doi:10.1007/bf01047828。[62]J. Sieber、K. Engelborghs、T. Luzyanina、G. Samaey 和 D. Roose，《DDE-BifTool 手册——时滞微分方程的分岔分析》，2014年，doi:10.48550/ARXIV.1406.7144。[63] J. Sieber 和 R. Szalai，《线性周期时滞微分方程的特征矩阵》，SIAM 应用动力系统期刊，10（2011年），第 129–147 页，doi:10.1137/100796455。[64] A. L. Skubachevskii 和 H.-O. Walther，《非线性泛函微分方程周期解的 Floquet 乘子》，《动力系统与微分方程杂志》，18（2006年），第 257–355 页，doi:10.1007/s10884-006-9006-5。

[65]R. Szalai、G. Stépán 和 S. J. Hogan，《利用特征矩阵延拓周期时滞微分方程中的分岔》，SIAM Journal on Scientific Computing，28（2006年），第 1301–1317 页，doi:10.1137/040618709。[66] A. E. Taylor 和 D. C. Lay，《泛函分析导论》，Krieger，1986年。[67] R. Veltz，BifurcationKit.jl，2020年7月，https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02902346。[68] S. M. Verduyn Lunel，《时滞方程的谱理论》，载于《系统、逼近、奇异积分算子及相关主题》，Birkhäuser Basel，2001年，第 465–507 页，doi:10.1007/978-3- 0348-8362-7 19。[69] J. Wu 和 X. Zou，《混合泛函微分方程的渐近与周期边值问题，以及格点微分方程的波解》，微分方程杂志，135（1997年），第 315–357 页，doi:10.1006/jdeq.1996.3232。[70] M. Wu，《关于线性时变系统稳定性的一则注记》，IEEE自动控制汇刊，19（1974年），第 162–162 页，doi:10.1109/tac.1974.1100529。