arXiv:2603.21773v1 [math-ph] 23 Mar 2026

非自伴扰动的谱移函数

VINCENT BRUNEAU、NICOLAS FRANTZ 和 FRANC¸OIS NICOLEAU

Abstract. 本文致力于定义并分析与自伴算子的非自伴扰动相关联的谱移函数（SSF）。受散射理论中应用的启发，我们同时考虑迹类扰动和相对迹类扰动。在谱及预解式行为满足适当假设的条件下，我们将 Lifshits–Kre˘ın 迹公式推广到非自伴算子。我们仔细分析了谱奇异点的作用，并利用函数演算给出谱移函数的一种推广。最后，我们将结果应用于三维中具有复值短程势的 Schr¨odinger 算子。玩具模型展示了一些可能推广至一般情形的性质。特别是，这些模型表明，谱移函数包含有关复特征值是否存在的信息。

Contents

1. 引言 2 2. 假设与主要结果 3 2.1. 抽象框架 3 2.2. 假设 4 2.3. 主要结果 4 3. 函数演算 6 3.1. Helffer-Sj¨ostrand 公式 6 3.2. 谱变量变换 13 4. 迹类扰动下的谱移函数 16 4.1. 存在性 16 4.2. 谱移函数的一个初步表示公式 17 5. 非自伴相对迹类扰动下的谱移函数 18 5.1. 相对迹类扰动下谱移函数的定义 18 5.2. 相对迹类扰动情形下的表示公式 19 6. 非自伴扰动的极限吸收原理 21 6.1. 谱奇异点 21 6.2. 预解式估计 22 7. 复值势薛定谔算子的谱移函数 23 7.1. 谱奇异点与共振 23 7.2. 预备结果 24 7.3. 谱移函数的存在性 26 7.4. 谱移函数的正则性 27 7.5. 谱奇异点附近的渐近性 28 7.6. 高能渐近 31 8. 显式简单例子 32 8.1. 有限维情形：可对角化算子 33 8.2. 有限维情形：不可对角化情形 33

8.3. 秩一扰动：与连续谱的弱相互作用 34 8.4. 秩一扰动：与连续谱的较强相互作用 35 致谢 39 参考文献 39

1. Introduction

谱移函数（SSF）最初由 Lifshits 和 Kreĭn [18, 19], 引入，为参考算子的迹类（或相对迹类）扰动的谱分析提供了一个框架。它给出一个谱不变量，该不变量通常与散射相位、平均时延等散射量有关（参见参考文献 [24, 31]）。更准确地说，在自伴情形下，谱移函数的导数关于能量的导数与散射相移一致（相差一个$1/2\pi$因子），这一点由 Birman–Kreĭn 公式确立。这一联系使我们能够将谱移函数解释为编码散射过程累积谱效应的函数。此外，Eisenbud–Wigner公式表明，时延算子（用于测量相互作用导致的驻留时间差异）也可以用散射矩阵关于能量的导数表示，因此与谱移函数相关。

谱移函数最初是针对自伴算子对或酉算子对定义的，后来扩展到被视为酉算子扰动的压缩算子（见 [27, 28]），以及被解释为自伴算子边界扰动的耗散（或累积）算子（见[20, 21]）。近期， [1] 针对耗散算子得到了Levinson公式。在这些工作中，复平面至少有一侧（上半平面或下半平面，或单位圆盘外部）包含于预解集。 [23], 考虑了巴拿赫空间中一般算子对的谱移函数，并将其定义在 $(0, +\infty)$ 上，且假设该区间包含于预解集。

我们的目标是考察一个保持自伴的参考算子 H_0，并为其非自伴扰动定义谱移函数（简称 SSF）。为建立与散射理论的联系，我们旨在将 SSF 定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上，该实数轴包含所研究算子的本质谱。也就是说，对于自伴算子 H_0 的一般相对紧扰动 H （特别是， H 可能在实轴两侧都有特征值），我们希望定义并分析一个函数 $\xi := \xi(\cdot; H, H_0)$，使得对于任意 $f \in D(\mathbb{R})$，即具有紧支撑的光滑函数空间，

$$\mathrm{Tr}(f(H) - f(H_0)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\lambda)\, f'(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.1}$$

在这一背景下，一个特别重要的模型是薛定谔算子 $H = H_0 + V$，其中$H_0 = -\Delta$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上，而 V 是一个在无穷远处趋于零的复值电势。

与 [5], 一样，对于 $f \in D(\mathbb{R})$ 的算子 $f(H)$ 通过 Helffer–Sjöstrand 公式 (3.1) 定义，其中使用了 f 的几乎解析延拓。这一构造在第 3 节中推广到我们的非自伴情形。随后，我们研究 (1.1) 的左侧，先考虑迹类扰动，继而考虑相对迹类扰动。我们证明，它在分布意义下定义了谱移函数的导数；对于下有界算子，可以选择谱移函数，使其在 $-\infty$ 附近为零。

在 Lifshits 和 Kreĭn [18, 19], 关于自伴情形的原始著作中，谱移函数的存在性及其可积性性质通过其与扰动

行列式的关系得到了严格论证:

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arg D(\lambda + i\varepsilon); \qquad D(z) := \operatorname{Det}\left(I + V(H_0 - z)^{-1}\right). \tag{1.2}$$

对于非自伴算子 H，此公式不再成立，因为扰动行列式可能为零，且性质 $D(\overline{z}) = D(z)$ 不再成立。然而，利用 $\mathbb{C}^+$ 上全纯函数的因式分解定理，其中 $\mathbb{C}^\pm = \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$（例如参见 [20]），仍可推导出以测度表示谱移函数的结果；但正如我们将在玩具模型中看到的，这些测度不一定是实测度，也不一定绝对连续。

全文中，我们将使用以下记号:
给定一个巴拿赫空间 $\mathcal{A}$，我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 上有界线性算子的集合。对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$， p 阶薛定谔类记作 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$。若 A 是闭算子，则其谱记作 $\sigma(A)$，预解集记作 $\rho(A)$。 A 的核和值域分别记作 $\operatorname{Ker}(A)$ 和 $\operatorname{Ran}(A)$。给定一个自伴算子 H_0，我们用 $\mathcal{R}_0(z) := (H_0 - z)^{-1}$ 表示其在 $z \in \rho(H_0)$ 处的预解式，并用 $\mathcal{R}(z) := (H - z)^{-1}$ 表示另一个（可能是非自伴的）算子 H 的预解式。对于子集 $I \subset \mathbb{R}$，我们用 $D(I)$ 表示 I 上取值于 $\mathbb{C}$、具有紧支撑的光滑函数空间。其拓扑对偶记作 $D'(I)$。对于区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和 $a \in (0, \infty]$，我们引入复平面的以下子集:

$$S_a(I) := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Re}(z) \in I \text{ and } 0 < |\operatorname{Im}(z)| < a\}, \quad S_a^\pm(I) := S_a(I) \cap \mathbb{C}^\pm.$$

2. Assumptions and main results

2.1. 抽象框架。我们考虑作用于复可分希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的算子 H 。假设 H 具有如下形式

$$H := H_0 + V,$$

其中（H_0， $\mathcal{D}(H_0)$）是一个下有界自伴算子，且 V 关于 H_0有界并相对紧。特别地， H 是闭算子，其定义域为 $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$，其伴随算子为

$$H^* = H_0 + V^*, \quad \mathcal{D}(H^*) = \mathcal{D}(H_0)。$$

我们将 H 的点谱定义为

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}(H - \lambda) \neq \{0\}\},$$

也就是说， H的特征值集合。对于孤立特征值 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H)$，相应的黎斯投影定义为

$$\Pi_\lambda(H) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (z - H)^{-1} \, \mathrm{d}z, \tag{2.1}$$

其中， $\Gamma = C(\lambda, r)$是以 λ 为中心、半径为 $r > 0$ 的正向定向圆，且半径足够小，使得 λ 是谱 $\sigma(H)$中唯一落在圆盘 $D(\lambda, r)$内的点。

如果孤立特征值对应的黎斯投影的值域是有限维的，则称该特征值为离散特征值。我们用 $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$表示 H的离散特征值集合。 H的本质谱记为 $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$，定义为 H的全谱中除离散谱之外的部分:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) := \sigma(H) \setminus \sigma_{\mathrm{disc}}(H).$$

根据此定义，由于 V 相对于 H_0是相对紧的，根据维尔定理（例如参见 [25,定理 XIII.14]）可知

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0). \tag{2.2}$$

此外，利用变分论证以及 V的有界性，可以看出 $\sigma(H)$位于一个水平带内，且其实部有下界，因为 $H = H_0 + V$是 H_0的有界扰动。

2.2. 假设。本文中，某些假设均默认是相对于一个固定的开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 陈述的，该区间根据所考虑的谱区域选定。每当引用某个假设时，都假定相应的集合 I 是固定的。

假设1。设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间。扰动算子 H 只有有限多个实部落在 I中的非实特征值。

以下假设要求 H 的预解式在实区间 I的某个管状邻域内至多呈多项式增长。

假设 2。设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间。存在 $a_I > 0$、 $n_I > 0$ 和 $c_I > 0$，使得$S_{a_I}(I) \subset \rho(H)$，且对所有 $z \in S_{a_I}(I)$，

$$\|\mathcal{R}_H(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c_I |\operatorname{Im}(z)|^{-1} \left(\frac{\langle \operatorname{Re}(z) \rangle}{|\operatorname{Im}(z)|} \right)^{n_I}. \tag{2.3}$$

以下假设要求预解式（或算子）之差为一个迹类算子。

假设 3. 存在 $c \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，使得

$$(H - c)^{-m} - (H_0 - c)^{-m} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$$

注2.1. 让我们在特殊情形下对这些假设作一番说明。

- 如果假设1在 $I = \mathbb{R}$ 上成立，那么 H 具有有限个非实特征值。
- 如果 I 是有界区间，假设1意味着离散特征值不会在 $I \times \{0\}$ 处聚积。
- 如果 I 是有界区间，则假设 2 中的估计（2.3）等价于

$$\|\mathcal{R}_H(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c_I \, |\operatorname{Im}(z)|^{-n_I - 1}, \quad \forall z \in S_{a_I}(I).$$

- 如果 $I \subset (-\infty, c)$ 且 $c < \inf \sigma_{\text{ess}}(H_0)$，那么假设1和假设 2 在 I 上均成立。
- 假设 3 中的情形 $m = -1$ 表示 $V = H - H_0$ 属于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。

2.3. 主要结果。现在我们概述本文的主要结果。我们的第一个结果涉及为实数轴上的非自伴算子 $H = H_0 + V$构造函数演算。由于 H 可能具有非实特征值，我们将与这些特征值相关的谱贡献分离出来，并按照 Davies [5, 6], 的方法，对谱位于实轴上的算子部分应用 Helffer–Sj¨ostrand 函数演算。

在开区间 $I \subset \mathbb{R}$上满足假设 1 和 2 的条件下，对于支集包含于 I 中的适当函数 f，我们可以通过 Helffer-Sj¨ostrand 型公式定义算子 $f(H)$。此外，该映射

$$f \longmapsto f(H)$$

定义了一个 关于逐点乘法的连续代数同态（见第 3 节） .

我们的第二个结果确立了迹类扰动的谱移函数的存在性，并在第 4 节中予以证明。

定理 2.2（谱移函数的存在性）。假设假设 1、2 和 3 在开区间I 上成立，且满足 $m = -1$。那么，对于每个 $f \in \mathcal{D}(I)$，算子差 $f(H) - f(H_0)$ 属于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$，且映射

$$f \mapsto \mathrm{Tr}(f(H) - f(H_0))$$

在 I 上定义一个分布。谱移函数 $\xi(\cdot; H, H_0)$ 定义如下，且相差一个加性常数：

$$\langle \xi', f \rangle = \mathrm{Tr}(f(H) - f(H_0)).$$

此外，它满足

$$\xi'(\cdot; H, H_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\sigma(\cdot + i\varepsilon) - \sigma(\cdot - i\varepsilon)) \quad in\ \mathcal{D}'(I), \tag{2.4}$$

其中，对于 $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$，

$$\sigma(z) := \mathrm{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_{H_0}(z)\right).$$

请注意，与自伴性情形下 $\sigma(\cdot - i\varepsilon) = \sigma(\cdot + i\varepsilon)$ 不同，(2.4) 式右端不一定是实数。不过，与自伴情形一样，在第 5 节中，我们将利用谱变量变换把这一构造推广到相对迹类扰动。

定理 2.3（相对迹类扰动）。假设对某个 $m \in \mathbb{N}^*$，假设 1、2 和 3 在I 上成立。那么，算子对 (H, H_0) 的谱移函数可定义为

$$\xi(\lambda; H, H_0) := \xi\left((\lambda + c)^{-m}; (H + c)^{-m}, (H_0 + c)^{-m}\right),$$

其中，$\xi(\cdot; (H + c)^{-m}, (H_0 + c)^{-m})$ 表示与迹类对 $((H + c)^{-m}, (H_0 + c)^{-m})$ 相关联的谱移函数，其中某个 $c \gg 1$。

在满足前述定理的假设并附加一项技术条件的情况下，可以推导出一个类似于（2.4）的公式。该表示将成为分析薛定谔算子的谱移函数的关键工具。

最后，我们聚焦于三维空间中具有（光滑）复值紧支撑势的薛定谔算子。在此框架下，我们引入出射谱奇异点和入射谱奇异点的概念 $\lambda_0 > 0$ （见第 6 节），它们对应于实共振 $\pm\sqrt{\lambda_0}$。我们证明，除这些奇异点外，谱移函数是正则的。更准确地说，在谱奇异点集合之外，谱移函数的导数是能量的光滑函数。

在有限阶谱奇异点 $\lambda_0 > 0$ 附近，我们得到了精确的分布渐近展开。例如，在出射情形下，有（见第 7 节）：

$$\xi'(\lambda; H, H_0) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \frac{\alpha_k(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0 + i0)^k} + H(\lambda) \quad \text{in } \mathcal{D}'(I),$$

其中，$H(\lambda)$ 在 λ_0 附近光滑。等价地，$\xi'(\lambda; H, H_0)$ 的奇异部分是柯西主值分布 p. v.$(\lambda - \lambda_0)^{-k}$ 以及 λ_0 处狄拉克质量的导数的有限线性组合。

最后，在第 8 节中，我们通过研究若干简单且明确的例子来结束本文，这些例子展示了上述一般性结果。

3. Functional Calculus

3.1. Helffer-Sj¨ostrand 公式。下文中，我们将 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$等同，并对 $z \in \mathbb{C}$，用 (x, y) 表示其在 $\mathbb{R}^2$中的坐标。若 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 可微，我们定义

$$\partial_{\bar{z}} f := \tfrac{1}{2}\big(\partial_x f + i\partial_y f\big).$$

对于任意 $\beta \in \mathbb{R}$，我们定义 $\mathscr{S}^\beta$ 光滑函数空间 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 使得

$$f^{(r)}(x) = \mathcal{O}\left(\langle x\rangle^{\beta - r}\right), \quad |x| \to \infty,$$

对所有 $r \geq 0$，且其中 $\langle x\rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$。我们定义

$$\mathscr{A} := \bigcup_{\beta<0} \mathscr{S}^\beta.$$

于是， $\mathscr{A}$在逐点乘法下构成一个代数，它包含从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$的光滑紧支撑函数，并且在与 $\mathscr{S}^0$中的函数进行逐点乘法后保持不变。在 $\mathscr{A}$上，我们考虑以下范数族

$$\|f\|_n := \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \langle x\rangle^{k-1} \mathrm{d}x.$$

特别地，对于每个范数 $\|\cdot\|_n$， $D(\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{A}$中稠密。

在 [5], Davies 证明，对于作用于具有实谱的巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 上、并满足类似于 (2.3) 的假设的任意闭算子 L，对于任意 $f \in \mathscr{A}$，作用于 $\mathcal{B}$ 上的算子 $f(L)$ 都可由 Helffer–Sj¨ostrand 公式良好定义：

$$f(L) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, (L - z)^{-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.1}$$

˜其中 f 是 f 的一个合适的几乎解析延拓。此外，映射

$$\Psi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{B})$$
$$f \mapsto f(L)$$

是线性的、连续的，并且关于逐点乘法是一个态射。按照 [5], 的证明，我们容易看出，对于紧支撑于开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 内的 f，如果 L 的谱仅在 $I \times \mathbb{R}$ 中为实谱，且 $f(L^*) = (f(L))^*$，那么 $f(L)$ 仍然是¯良好定义的。

让我们回顾一个函数 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 的此类几乎解析延拓的定义：

定义 3.1（几乎解析延拓）。设 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，且设 $N \in \mathbb{N}$。 f 的一个 N 阶几乎解析˜延拓是指如下形式的函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\tilde{f}(z) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (iy)^k\right) \chi(x, y), \quad \textit{with} \quad \chi(x, y) = \tau\left(\frac{y}{\langle x\rangle}\right), \tag{3.2}$$

˜和 τ 是定义在 $\mathbb{R}$上的截断函数。几乎解析延拓 f 满足

$$\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z|^N) \quad \textit{as } \operatorname{Im} z \to 0.$$

在本节中，我们旨在通过将 L 替换为 H，并将 $\mathscr{B}$ 替换为 $\mathcal{H}$，来赋予 (3.1) 一个含义，同时考虑到 H 可能有非实特征值。思路是将 H 分解为一个实谱算子与另一个具有非实谱的算子的直和，其中前者记为 H_{r}，然后

根据 $f(H_r)$ 来定义 $f(H)$。由于我们的假设具有局部性质，我们引入以下记号：对于任意开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 令

$$\mathscr{A}(I) := \{f \in \mathscr{A} \,|\, \mathrm{supp}(f) \subset I\}.$$

特别地,

- 若 $I = \mathbb{R}$，则 $\mathscr{A}(I) = \mathscr{A}$;
- 若 I 有界，则 $\mathscr{A}(I) = D(I)$;
- 对于所有 $I \subset \mathbb{R}$ 开区间， $D(I)$ 在每个范数 $\|\cdot\|_n$下均在 $\mathscr{A}(I)$ 中稠密。

在第 3.1 小节余下部分中，我们固定 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个满足假设 1 和 2 的开区间。

3.1.1 分解。为了使用 [5], 中建立的函数演算，让我们将 H 分解为“实部”（即具有实谱的算子）和“非实部”（将 H 限制在与非实特征值相对应的特征子空间上）。这一分解基于以下引理。

引理 3.2。设 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个有界投影（即 $P^2 = P$），满足

$$P(\mathcal{D}(H)) \subset \mathcal{D}(H) \quad and \quad [P, H]u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(H). \tag{3.3}$$

定义

$$F := \mathrm{Ran}(P), \qquad G := \mathrm{Ran}(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - P).$$

则:

(1) F 和 G 在 H 下不变，即

$$H(F \cap \mathcal{D}(H)) \subset F, \quad H(G \cap \mathcal{D}(H)) \subset G.$$

(2) 存在一个连续同构

$$\Psi : F \oplus G \to \mathcal{H}$$
$$(u_F, u_G) \mapsto u_F + u_G.$$

(3) 记 H 在 F 和 G 上的限制分别为 $H_{|F}$ 和 $H_{|G}$，则对所有 $u \in D(H)$,

$$Hu = \Psi \left(\begin{array}{c|c} H_{|F} & 0 \\ \hline 0 & H_{|G} \end{array}\right) \Psi^{-1} u = H_{|F} u_F + H_{|G} u_G$$

(4) 谱满足

$$\sigma(H) = \sigma(H_{|F}) \cup \sigma(H_{|G})$$

(5) 对所有 $z \in \rho(H)$，对所有 $u \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{R}_H(z)u = \Psi \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{H_{|F}}(z) & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{R}_{H_{|G}}(z) \end{array}\right) \Psi^{-1} u, \qquad \mathcal{R}_\bullet(z) := (\bullet - z)^{-1}$$

证明。由于 P 具有闭值域，我们有拓扑直和

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ran}(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - P) = F \oplus G.$$

设 $u \in \mathcal{D}(H)$。由 (3.3)， $Pu \in \mathcal{D}(H)$ 且 $HPu = PHu$，这表明 F 在 H 下是不变的。同理， G 在 H 下是不变的。因此，对于任意满足 $u_F \in F$、 $u_G \in G$ 的 $u = u_F + u_G \in \mathcal{D}(H)$，我们有

$$Hu = Hu_F + Hu_G = H_{|F} u_F + H_{|G} u_G.$$

最后，为了关联这些谱，只需注意，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，以及任意 $u \in \mathcal{D}(H)$，

$$(H - z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}})\,u = \Psi \left(\begin{array}{c|c} H_{|F} - z\,\mathrm{Id}_{|F} & 0 \\ \hline 0 & H_{|G} - z\,\mathrm{Id}_{|G} \end{array} \right) \Psi^{-1} u.$$

□

在下文中，为了简洁起见，我们将写作 $H = H_{|F} \oplus H_{|G}$，而不使用矩阵表示。

命题 3.3. 假设假设 1 和 2 在开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上成立。那么存在一个有界投影 $\Pi_I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得，

$$\Pi_I(\mathcal{D}(H)) \subset \mathcal{D}(H), \quad \textit{and} \quad [\Pi_I, H]u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(H),$$

以及两个算子，$H_{I,\,\mathrm{c}}$作用于值域(Π_I)，而 $H_{I,\,\mathrm{r}}$作用于值域$(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \Pi_I)$，使得有 (1) ther
e 存在一个同构 Ψ : 值域$(\Pi_I(H)) \oplus$ 值域$(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \Pi_I(H)) \to \mathcal{H}$，使得 t

$$\Psi(u, v) = u + v$$

(2) 对所有 $u \in \mathcal{D}(H)$

$$Hu = \Psi \left(\begin{array}{c|c} H_{I,\mathrm{c}} & 0 \\ \hline 0 & H_{I,\mathrm{r}} \end{array} \right) \Psi^{-1} u$$

(3) $\sigma(H_{I,\,\mathrm{r}}) \cap I \times \mathbb{R} \subset I \times \{0\}$ 以及 $\sigma(H_{I,\,\mathrm{c}}) \cap I \times \{0\} = \emptyset$,

(4) 存在 $a_I > 0$ 使得

$$\overline{S_{a_I}} \ni z \mapsto \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \in \mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I))$$

是全纯的，并且以下预解式估计成立:

$$\forall z \in S_{a_I}(I), \quad \|\mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{r}}}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \Pi_I))} \leq c_I |\,\mathrm{Im}(z)|^{-1} \left(\frac{\langle \mathrm{Re}(z) \rangle}{|\,\mathrm{Im}(z)|} \right)^{n_I}; \tag{3.4}$$

$$\sup_{z \in \overline{S_{a_I}}} \|\mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I)} < \infty. \tag{3.5}$$

证明。根据假设1，H 仅有有限多个实部属于 I 的非实特征值。因此，令 $\Omega = \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H) \mid \mathrm{Re}(\lambda) \in I\}$，算子

$$\Pi_I(H) := \sum_{\lambda \in \Omega} \Pi_\lambda(H),$$

其中 Π_λ 是与 λ 相关联的黎斯投影（见 (2.1)），它是有限个有限秩投影之和。此外，当 $\Pi_\lambda \Pi_\mu = 0$ 时，对于 $\lambda \neq \mu$，Π_I 是一个投影且具有有限秩。令

$$F := \mathrm{Ran}(\Pi_I(H)), \quad G := \mathrm{Ran}(\mathrm{Id} - \Pi_I(H)),$$

并采用引理 3.2 中的记号，记

$$H_{I,\mathrm{c}} := H_{|F}, \quad H_{I,\mathrm{r}} := H_{|G};$$

这给出了 H 的分解。此外，根据构造，

$$\sigma(H_{I,\mathrm{c}}) \cap I \times \{0\} = \emptyset, \quad \sigma(H_{I,\mathrm{r}}) \cap I \times \mathbb{R} \subset I \times \{0\}.$$

根据假设1，我们可以找到足够小的 $a_I > 0$，使得 $S_{a_I}(I)$不包含 H的任何非实特征值。特别地，$z \mapsto \mathcal{R}_{H_{I,\,\mathrm{c}}}(z)$在 $\overline{S_{a_I}}$ 上全纯，由此得到（3.5），因为

复特征值只有有限个。最后，为了得到（3.4），我们对所有$z \in S_{a_I}$写出:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{r}}}\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Id}-\mathrm{Ran}(\Pi_I))} &= \sup_{u\in \mathrm{Ran}(\mathrm{Id}-\Pi_I)\setminus\{0\}} \frac{\|\mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{r}}}u\|_{\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}-\Pi_I)}}{\|u\|_{\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}-\Pi_I)}} = \sup_{u\in \mathrm{Ran}(\mathrm{Id}-\Pi_I)\setminus\{0\}} \frac{\|\mathcal{R}_H u\|_{\mathcal{H}}}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \\ &\le \|\mathcal{R}_H\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-\Pi_I))} \le c_I |\operatorname{Im}(z)|^{-1} \left(\frac{\langle \operatorname{Re}(z)\rangle}{|\operatorname{Im}(z)|}\right)^{n_I},\end{aligned}$$

其中，在最后一步中，我们使用假设 2。 □

3.1.2. 定义与性质。现在固定一个开区间 $I \subset \mathbb{R}$，并为在 I 中支集为 f 的函数 $f(H)$ 作出定义，其中 I 满足假设 1 和 2。

˜定义 3.4. 设 $f \in \mathscr{A}(I)$ 且 $N \in \mathbb{N}$。若存在一个截断函数 τ，使得定义 3.1 中所考虑的 χ 的支集不包含实部位于 I 中的 H 的任何非实特征值，则称 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是 H 的 N 阶几乎解析延拓（或称为 H-可容许几乎解析延拓）。

例 3.5. 例如，假设假设 1 在 $\mathbb{R}$ 上成立。那么存在 $\mathfrak{a}>0$ 和 $\mathfrak{b}>0$，使得

$$U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := \{z\in\mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Re}(z)|>\mathfrak{a} \ and\ |\operatorname{Im}(z)|<\mathfrak{b}\}$$

不包含 H 的任何非实特征值

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{y}{\mathfrak{b}}\frac{\langle \mathfrak{a}\rangle}{\langle x\rangle},\end{aligned}$$

并令 $\tau\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 为一个满足以下条件的截断函数: $\tau(s)=1$ 当 $|s|<1/2$ 时，以及 $\tau(s)=0$ 当$|s|>1$时。那么，函数 $\chi := \tau\circ\psi$ 的支集不包含H的任何非实特征值。

定义—命题 3.6. 假设假设 1 和 2 在 I 上成立。那么，对于所有 $f\in\mathcal{A}(I)$，由下式定义的算子 $f(H)$

$$f(H) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar z}\tilde f(z)\mathcal{R}_H(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

˜其中 f 是 f 的几乎解析延拓，如定义 3.1 中所述，且定义良好。此外，我们有如下估计

$$\|f(H)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \le c\|f\|_{n_I+1}. \tag{3.6}$$

最后， $f(H)$ 的定义不依赖于 N，也不依赖于截断函数 τ，前提是按照定义 3.1 将其应用于$N>n_I$。此外，只要区间 I 包含 f 的支集，且假设 1 和 2 在 I 上成立，该定义就与区间 I 的选取无关。

为了证明最后一个命题，思路是在

$$\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}-\Pi_I)\oplus\mathrm{Ran}(\Pi_I)$$

上进行研究，而不是在 $\mathcal{H}$ 上，并分析 H 在这些空间上的作用。对于满足假设 1 和 2 的任意区间 $I\subset\mathbb{R}$，定义在 $\mathrm{Ran}(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-\Pi_I)$ 上的算子 $H_{I,\mathrm{r}}$ 满足 Davies [5] 定义 $f(H_{I,\mathrm{r}})$ 所需的假设，其中 $f(H_{I,\mathrm{r}})$ 通过 Helffer–Sj¨ ostrand 公式 (3.1) 定义，对任意 $f\in\mathcal{A}(I)$ 均成立。因此，只需证明 $f(H_{I,\mathrm{c}})$ 在 $\mathrm{Ran}(\Pi_I)$ 上定义良好。

以下引理即为此目的而设。

引理 3.7. 假设 1 和 2 在 I 上成立。设 $F = $ 属于值域(Π_I)。那么，对于所有 $f \in \mathcal{A}(I)$˜和 f 的 H-可容许几乎解析延拓，积分

$$\int_{\mathbb{C}} \partial_{\tilde{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.7}$$

在 F 上定义良好且为零。此外，这与所考虑的 H-可容许几乎解析延拓无关。

˜引理 3.7 的证明。设 $f \in \mathcal{A}(I)$。令 f 为由 (3.2) 给出的一个 H-可容许几乎解析延拓。那么对所有整数 $N \geq 1$，直接计算可得

$$\partial_{\tilde{z}} \tilde{f}(z) = \frac{1}{2} f^{(N+1)}(x) \frac{(iy)^N}{N!} \chi(x,y) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N} f^{(k)}(x) \frac{(iy)^k}{k!} \right] \partial_{\tilde{z}} \chi(x,y). \tag{3.8}$$

接下来，直接计算可得

$$\partial_{\tilde{z}} \chi(x,y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{y\langle \mathfrak{a} \rangle}{\mathfrak{b}} \frac{x}{\langle x \rangle^3} + i \frac{\langle \mathfrak{a} \rangle}{\mathfrak{b} \langle x \rangle} \right) \tau' \left(\chi(x,y) \right).$$

特别地，若记

$$V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < \frac{|y|}{\mathfrak{b}} < \frac{\langle x \rangle}{\langle \mathfrak{a} \rangle} \right\}, \quad V_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\langle x \rangle}{2\langle \mathfrak{a} \rangle} \leq \frac{|y|}{\mathfrak{b}} \leq \frac{\langle x \rangle}{\langle \mathfrak{a} \rangle} \right\},$$

then $\mathrm{supp}(\chi) \subset V_1$ 且 $\mathrm{supp}(\partial_{\tilde{z}} \chi) \subset V_2$。那么对所有 $z \in U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$，利用 (3.8)，有

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\tilde{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z) \right\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I))} &\leq C \left(\left| f^{(N+1)}(x) \right| |y|^N \mathbb{1}_{V_1}(z) + \sum_{k=0}^{N} \left| f^{(k)}(x) \right| |y|^k \mathbb{1}_{V_2}(z) \right) \\ &\leq C \left(\left| f^{(N+1)}(x) \right| |y|^N \mathbb{1}_{V_1}(z) + \sum_{k=0}^{N} \left| f^{(k)}(x) \right| \langle x \rangle^{k-2} \mathbb{1}_{V_2}(z) \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

最后，对 y 进行积分可得

$$\begin{aligned} \|f(H)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I))} &\leq C \int_{\mathbb{C}} \|\partial_{\tilde{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I))} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f^{(N+1)}(x) \right| \langle x \rangle^N \mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right| \langle x \rangle^{k-1} \mathrm{d}x \right) \leq C \|f\|_{N+1}. \end{aligned}$$

接下来，为证明 (3.7) 为零，我们利用稠密性。设 $f \in \mathscr{C}^\infty{}_{\mathrm{c}}(I, \mathbb{C})$ 支集于开集 Ω 中。于是 $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$，由斯托克斯公式可得

$$\int_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \partial_{\tilde{z}} \tilde{f}(z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \tilde{f}(z) \mathrm{d}z,$$

˜其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，且上述轮廓积分沿逆时针方向进行。由于 f 是紧支撑的，

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \tilde{f}(z) \mathrm{d}z = 0.$$

使用相同的辐角，我们可以像在 [5, 定理 2], 的证明中那样证明，式 (3.7) 的值与所考虑的 H-容许几乎解析延拓无关。最后，利用 $D(I)$ 在 $\mathcal{A}(I)$ 中稠密以及不等式，可得引理 3.7

$$\forall f \in \mathcal{A}(I), \quad \|f(H)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{Ran}(\Pi_I))} \leq C \|f\|_{N+1}.$$

□

命题 3.6 的证明。设 $f \in \mathcal{A}(I)$。由命题 3.3 和引理 3.2，存在一个同构

$$\Psi : \mathrm{Ran}(\Pi_I(H)) \oplus \mathrm{Ran}(\mathrm{Id} - \Pi_I(H)) \to \mathcal{H}$$

使得对于所有 $z \in \rho(H)$,

$$\mathcal{R}_H(z) = \Psi \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{r}}}(z) & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{R}_{H_{I,\mathrm{c}}}(z) \end{array} \right) \Psi^{-1}.$$

因此，利用 Davies 的工作 [5], $f(H_{I,\,\mathrm{r}})$ 可良好定义为作用在值域$(\mathrm{Id} - \Pi_I)$上的算子；只要其阶数大于假设 2 中的 n_I，其定义就不依赖于式 (3.1) 中所考虑的几乎解析延拓。此外，根据引理 3.7 $f(H_{I,\,\mathrm{c}})$ 的定义良好，且独立于 f 的 H-可容许几乎解析延拓。对于包含 f 支集（满足假设 1 和 2）的区间 I 的选择，这也给出了独立性，因为对于 $I \subset J$，我们有

$$H_{J,\mathrm{c}} = H_{I,\mathrm{c}} \oplus H_{J\setminus I,\mathrm{c}}; \qquad H_{I,\mathrm{r}} = H_{J,\mathrm{r}} \oplus H_{J\setminus I,\mathrm{c}}$$

于是 $f(H_{I,\,\mathrm{r}}) = f(H_{J,\,\mathrm{r}}) \oplus 0$。 □

特别是，在下文中，我们可以写作

$$f(H) = \Psi \left(\begin{array}{c|c} f(H_{I,\mathrm{r}}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \Psi^{-1}. \tag{3.10}$$

这一表示 $f(H)$ 和 [5, 定理 3 以及 4] 立即推出以下命题 :

命题 3.8. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间，并假设假设 1 和 2 在 I上成立。那么映射

$$\mathscr{A}(I) \ni f \mapsto f(H) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

是关于逐点乘法的代数态射。此外，若 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(I,\mathbb{C})$ 与 $\sigma(H)$ 的支集不相交，则 $f(H) = 0$。

3.1.3. 与 Frantz-Faupin演算的比较。在 [11, 命题 5.2], 中，Frantz 和 Faupin 在类似假设下引入了一种函数演算。他们的构造受 Stone公式启发:

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathrm{supp}(f)} f(\lambda) \left(\mathcal{R}_H(\lambda + i\varepsilon) - \mathcal{R}_H(\lambda - i\varepsilon) \right) \mathrm{d}\lambda. \tag{3.11}$$

他们证明，对于 f 属于 $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(I,\mathbb{C})$ 的函数，公式 (3.11) 在弱拓扑下有意义；其中 I 是本质谱中一个没有谱奇异点的区间（定义见第 6 节），而 $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(I,\mathbb{C})$ 表示 I上有界连续函数构成的空间。他们还发展了一种考虑谱奇异点的函数演算（见 [11, 命题 5.3]）。这些方法要求对 H_0满足极限吸收原理，且证明基于交换极限与积分。在以下命题中，我们将证明，至少对于紧支撑函数，可以借助上述构造的 Helffer-Sj¨ostrand 公式赋予公式 (3.11) 以意义。

命题 3.9. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间，并假设假设 1 和 2 在 I 上成立。令 $f \in \mathscr{C}^{\infty}{}_{\mathrm{c}}(I,\mathbb{C})$。那么

$$f(H) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathrm{supp}(f)} f(\lambda) \left(\mathcal{R}_H(\lambda + i\varepsilon) - \mathcal{R}_H(\lambda - i\varepsilon) \right) \mathrm{d}\lambda.$$

证明. 我们断言

$$f(H) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\mathrm{Im}(z)>0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z + i\varepsilon) \mathrm{d}z + \int_{\mathrm{Im}(z)<0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z - i\varepsilon) \mathrm{d}z \right). \tag{3.12}$$

˜事实上，若记 $J{:=}\mathrm{supp}(f) \subset I$，则存在充分小的 $a_I > 0$，使得 $\mathrm{supp}(f) \subset S_{a_I}(J)$，且 $S_{a_I}(J)$ 不包含 H 的任何非实特征值。因此，在假设 1 和 2 下，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，映射 $z \to \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon)$ 在 $\mathrm{supp}(\tilde{f}) \cap \mathbb{C}^{\pm}$ 上连续，并且对所有 $z \in S_{a_I}(J)$，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon) = \mathcal{R}_H(z), \qquad \|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c_0$$

对某个常数 $c_0 > 0$，该结论关于 ε 和 z一致成立。因此，勒贝格定理推出式 (3.12)。现在，由于 $z \mapsto \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon)$ 在 $S_{a_I}(J)$ 上全纯，我们可以应用斯托克斯定理得到

$$\int_{\pm \mathrm{Im}(z)>0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \frac{1}{2i} \int_{\Gamma^{\pm}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon) \mathrm{d}z, \tag{3.13}$$

其中 $\Gamma^{\pm}$ 表示 $S_{a_I}(J)$ 在 $\overline{\mathbb{C}^{\pm}}$ 中的边界。最后， $\tilde{f}$的支撑性质意味着

$$\int_{\Gamma^{\pm}} \tilde{f}(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon) \mathrm{d}z = \int_J f(\lambda) \mathcal{R}_H(\lambda \pm i\varepsilon) \mathrm{d}\lambda. \tag{3.14}$$

因此，先将 (3.13) 再将 (3.14) 代入 (3.12)，即可得出结论。 □

作为对函数演算这一引言的总结，注意到如果 $\omega \in \rho(H)$ 和 $r_\omega(x) = (x - \omega)^{-1}$，那么 $r_\omega(H)$ 正是预解式 $(H - \omega)^{-1}$。更确切地说，在关于 $I = \mathbb{R}$ 的假设1下， H 有有限个非实特征值，而投影到 H 的非实特征值所对应的投影由下式定义：

$$\Pi_{\mathrm{complex}}(H) := \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H) \setminus \mathbb{R}} \Pi_\lambda(H).$$

于是我们有：

命题3.10. 假设 $\mathbb{R}$ 上的假设 1 和 2 成立。设 $\omega \in \rho(H)$ 和 $r_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均由下式定义

$$r_\omega(x) = (x - \omega)^{-1}.$$

Then

$$r_\omega(H) = \mathcal{R}_H(\omega)(\mathrm{Id} - \Pi_{\mathrm{complex}}(H)), \qquad \mathcal{R}_H(\omega) = r_\omega(H) + \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H) \setminus \mathbb{R}} (\lambda - \omega)^{-1} \Pi_\lambda(H). \tag{3.15}$$

证明. 对 $I = \mathbb{R}$ 应用命题 3.3，我们引入 H 的实部： H_r 是H 在 $\mathrm{Id} - \Pi_{\mathrm{complex}}(H)$ 的值域上的限制。利用 (3.10) 以及对所有 $u \in \mathcal{H}$ 成立的 [5, 定理 5], ，我们有：

$$\begin{aligned} r_\omega(H)u &= \Psi \left(\begin{array}{c|c} (H_{\mathrm{r}} - \omega)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \Psi^{-1} u \\ &= (H_{\mathrm{r}} - \omega)^{-1} (\mathrm{Id} - \Pi_{\mathrm{complex}}(H)) u \\ &= (H - \omega)^{-1} (\mathrm{Id} - \Pi_{\mathrm{complex}}(H)) u. \end{aligned}$$

于是我们推得 (3.15)。

□

3.2. 谱变量变换。本节中，对于任意满足 $c > 0$ 的 $-c \in \mathbb{R} \cap \rho(H)$，以及 $m \in \mathbb{N}^*$，我们考虑函数 $f \in D((0,+\infty))$，并通过以下关系定义 $g_m \in D((-c,+\infty))$

$$g_m(\lambda) := f((\lambda + c)^{-m}).$$

我们的目标是确定 H 满足哪些充分条件，使得以下复合公式成立：

$$f((H + c)^{-m}) = g_m(H).$$

首先，我们不考虑 $H + c$，而是考察一般算子 L。对于区间 $I \subset \mathbb{R}$、 $R \subset (0,+\infty)$、$\Theta_0 \subset [-\pi/2, \pi/2]$ 和 $a > 0$，我们引入复平面的以下子集：

$$R \cdot e^{i\Theta_0} := \left\{ \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \,\middle|\, \rho \in R,\ \theta \in \Theta_0 \right\}. \tag{3.16}$$

为了建立 L 的预解式与 L^{-m} 的预解式之间的关系，我们给出以下关于有界算子的几何和的引理。

引理 3.11. 设 $m \in \mathbb{N}^*$，并设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个有界算子，使得几何和

$$G_m(T) := \sum_{k=0}^{m-1} T^k \tag{3.17}$$

可逆。那么 $(T - \mathrm{Id})$ 可逆当且仅当 $(T^m - \mathrm{Id})$ 可逆，且在此情况下，以下恒等式成立：

$$(T - \mathrm{Id})^{-1} = G_m(T)(T^m - \mathrm{Id})^{-1} \tag{3.18}$$

$$= m(T^m - \mathrm{Id})^{-1} + \sum_{k=1}^{m-1} G_k(T) G_m(T)^{-1}. \tag{3.19}$$

证明。第一个恒等式由因式分解 $(T^m - \mathrm{Id}) = (T - \mathrm{Id})G_m(T)$ 得出。对于第二个恒等式，对所有 $k \in \mathbb{N}^*$，$T^k =$，我们写作 $\mathrm{Id} + (T^k - \mathrm{Id}) = I + G_k(T)(T - \mathrm{Id})$，并利用事实 $(T - \mathrm{Id})(T^m - \mathrm{Id})^{-1} = G_m(T)^{-1}$。□

我们定义 $\mathbb{C}_>$ 正实部复数的集合：

$$\mathbb{C}_> := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}.$$

应用上述引理并取 $T = zL^{-1}$，我们推得：

引理 3.12。设 $m \in \mathbb{N}^*$，且 $(L, \mathcal{D}(L))$ 是复可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的闭算子，满足

$$\sigma(L) \subset (0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0, \theta_0]} \quad \textit{for some } \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2m}\right). \tag{3.20}$$

于是，

(1) $z \in \rho(L) \backslash \{0\}$ 当且仅当 $z^{-m} \in \rho(L^{-m})$，

(2) 算子值映射

$$\Psi : z \longmapsto z^{-m+1} G_m(zL^{-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} z^{k+1-m} L^{-k} \tag{3.21}$$

在扇形 $(0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0, \theta_0]}$ 内是双全纯的，

(3) 对每个 $z \in \rho(L) \cap (0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0,\theta_0]}$，以下预解式恒等式成立：

$$(L-z)^{-1} = -z^{-m}L^{-1}G_m(zL^{-1})\left(L^{-m}-z^{-m}\right)^{-1}, \tag{3.22}$$

$$= -mz^{-1-m}\left(L^{-m}-z^{-m}\right)^{-1} - z^{-1}\sum_{k=1}^{m-1} G_k(zL^{-1})G_m(zL^{-1})^{-1}. \tag{3.23}$$

证明。由于 $0 \in \rho(L)$，由闭算子的全纯函数演算（[7],定理 VII.9.8.4）可知，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，算子 L^{-k} 有界，且其谱包含于扇形

$$\sigma(L^{-k}) = \{z^{-k} \,|\, z \in \sigma(L)\} \cup \{0\} \subset [0,+\infty) \cdot e^{i[-k\theta_0,\, k\theta_0]}.$$

这就证明了第 (1) 项。另一方面，对于任意 $k \in [\![0,\ m-1]\!]$，以及任意 $z \in (0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0,\,\theta_0]}$，有

$$z^{k+1-m} \in (0,+\infty) \cdot e^{i[-(k+1-m)\theta_0,\,(k+1-m)\theta_0]}.$$

因此，算子 $z^{k+1-m}L^{-k}$ 的谱包含于扇形

$$[0,+\infty) \cdot e^{i[-(m-1)\theta_0,\,(m-1)\theta_0]} \subset [0,+\infty) \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2})}.$$

如（[16], 命题 3.2.10）所示，若两个有界线性算子 A 和 B 可交换，则它们的和的谱满足包含关系 $\sigma(A+B) \subset \sigma(A) + \sigma(B)$。因此可得，

$$z^{-m+1}\big(G_m(zL^{-1}) - \mathrm{Id}\,\big) = \sum_{k=1}^{m-1} z^{k+1-m}L^{-k}$$

包含于 $\overline{\mathbb{C}_>}$ 中。因此，将这一结果与命题 3.2.10 结合，我们推得，对于所有 $z \in (0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0,\theta_0]}$，算子的谱

$$z^{-m+1}G_m(zL^{-1})$$

包含于开右半平面 $\mathbb{C}_>$ 中。特别地，对于所有 $z \in \mathbb{C}_>$，算子 $G_m(zL^{-1})$ 都是可逆的。将 (3.18) 应用于 $T = zL^{-1}$，我们得到，对于每个 $z \in \rho(L) \cap (0,+\infty) \cdot e^{i[-\theta_0,\theta_0]}$：

$$\begin{aligned}(L-z)^{-1} &= L^{-1}(\mathrm{Id} - zL^{-1})^{-1} \\ &= -L^{-1}G_m(zL^{-1})\left((zL^{-1})^m - \mathrm{Id}\right)^{-1} \\ &= -L^{-1}z^{-m}G_m(zL^{-1})\left(L^{-m}-z^{-m}\right)^{-1},\end{aligned}$$

由此得到恒等式 (3.22)。接下来，恒等式 (3.23) 可由引理 3.11 中的第二个公式如下推出：

$$\begin{aligned}(L-z)^{-1} &= L^{-1}(\mathrm{Id} - zL^{-1})^{-1} \\ &= -z^{-1}\,\mathrm{Id} - z^{-1}(zL^{-1} - \mathrm{Id})^{-1} \\ &= -z^{-1}\,\mathrm{Id} - mz^{-1-m}\left(L^{-m}-z^{-m}\right)^{-1} - z^{-1}\sum_{k=1}^{m-1} G_k(zL^{-1})G_m(zL^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Ψ 的双全纯性可以通过使用纽曼级数来证明。 □

命题 3.13。设假设 1 和 2 对 H 在 $I = (s_0, s_1)$ 上成立，$s_1 > s_0$。固定$m \in \mathbb{N}^*$。那么存在 $c > 0$，使得对于任意 $J = (r_0, r_1)$，满足 $0 < (s_1+c)^{-m} < r_0 < r_1 < (s_0+c)^{-m}$ 的算子 $(H+c)^{-m}$ 在 J 上满足假设 1 和 2，其中 $n_J = n_I$。此外，对于任意 $f \in D(J)$，有

$$f((H+c)^{-m}) = g_m(H),$$

其中 $g_m \in D(I)$ 由 $g_m(\lambda) = f((\lambda+c)^{-m})$ 定义。

证明。固定 $\theta_0 \in (0,\pi/2)$。由于 H_0 有下界且 V 有界，存在 $c>0$使得 $\sigma(H+c) \subset (0,+\infty)\cdot e^{i[-\theta_0,\theta_0]}$。此外，由于 $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0)$， $\sigma(H+c)$中的每个非实数都是离散特征值。利用引理3.12以及 $L = H + c$ 和双全纯函数

$$\varphi_m : -c + (0,+\infty)\cdot e^{i[-\theta_0,\theta_0]} \longrightarrow (0,+\infty)\cdot e^{i[-m\theta_0,m\theta_0]} \tag{3.24}$$

$$z = -c + \rho e^{i\theta} \longmapsto (z+c)^{-m} = \rho^{-m}e^{-im\theta}, \tag{3.25}$$

我们有 $\sigma((H+c)^{-m}) \subset (0,+\infty)\cdot e^{i[-m\theta_0,m\theta_0]} \subset \mathbb{C}_>$，且 $(H+c)^{-m}$的非实谱由离散特征值 $\Lambda = \varphi_m(\lambda)$组成，其中 λ 是 H的一个非实特征值。因此，若 H 满足假设1，则区间 I 中没有点是离散特征值的聚点，并且假设1对 $\varphi_m(I) = ((s_1+c)^{-m},(s_0+c)^{-m})$上的 $(H+c)^{-m}$ 成立。

此外，在 H 关于 I满足假设 2 的条件下，存在 $a_I > 0$ 使得 $S_{a_I}(I) \subset \rho(H)$，于是 $\varphi_m(S_{a_I}(I)) \subset \rho((H+c)^{-m})$。令 $J = (r_0,r_1)$，其中 $(s_1+c)^{-m} < r_0 < r_1 < (s_0+c)^{-m}$。取充分小的 $a_J > 0$，使得 $S_{a_J}(J) \subset \varphi_m(S_{a_I}(I))$，则有 $S_{a_J}(J)) \subset \rho((H+c)^{-m})$；对于 $Z \in S_{a_J}(J)$，存在 $z \in S_{a_I}(I)$ 使得 $Z = \varphi_m(z)$。结合 $L = H+c$的 (3.22)（并以 $z+c$ 代替 z）以及 H 关于 I的假设 2，可得:

$$\begin{aligned}\|\Big((H+c)^{-m} - Z\Big)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} &\le \sup_{z\in\overline{S_{a_I}(I)}} \|((z+c)^{-m}G_m((z+c)(H+c)^{-1}))^{-1}\|\,\|(H+c)(H-z)^{-1}\| \\ &\le C_J|\operatorname{Im}(z)|^{-n_I-1},\end{aligned}$$

对于某个 $C_J > 0$。设 $z = -c+\rho e^{i\theta}$，且 $\theta \in (-\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2m})$（当 a_I 充分小时这是可能的），我们有

$$Z = (z+c)^{-m} = \rho^{-m}e^{-im\theta}, \quad \text{and} \quad \operatorname{Im}(Z) = -\rho^{-m}\sin(m\theta).$$

由不等式 $\frac{2}{\pi}x \le \sin(x) \le x$ （对 $x \in [0,\pi/2]$ 成立），我们推出

$$\rho^{-(m+1)}\frac{2}{\pi}m|\operatorname{Im}(z)| \le \frac{2}{\pi}\rho^{-m}m|\theta| \le |\operatorname{Im}(Z)| \le \rho^{-m}m|\theta| \le \rho^{-(m+1)}\frac{\pi}{2}m|\operatorname{Im}(z)|, \tag{3.26}$$

并且假设 2 对于 $(H+c)^{-m}$ 在 J 上成立。

现在令 $C_J^\infty(\mathbb{C})$ 是 f 的几乎解析延拓，其支集包含于 $J\times(-a_J,a_J)$ 中。在函数演算公式中作变量替换 $Z = \varphi_m(z)$（其中 $Z = X+iY$, $z = x+iy$），

$$f((H+c)^{-m}) := \pi^{-1}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\overline{Z}}\tilde{f}(Z)\left((H+c)^{-m} - Z\right)^{-1}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y,$$

我们得到

$$f((H+c)^{-m}) := \pi^{-1}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\overline{Z}}\tilde{f}(\varphi_m(z))\left((H+c)^{-m} - (z+c)^{-m}\right)^{-1}|\partial_z\varphi_m(z)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由（3.26）可知，函数 $\tilde{g}_m := f\circ\varphi_m$ 是 $g_m = f\circ\varphi_m$的几乎解析延拓，并满足

$$\partial_{\bar{z}}\tilde{g}_m(z) = \partial_z\varphi_m(\bar{z})\cdot\partial_{\overline{Z}}\tilde{f}(\varphi_m(z)).$$

然后，利用引理 3.12 中的恒等式 (3.23)，以及映射

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{m-1} G_k((z+c)(H+c)^{-1})G_m((z+c)(H+c)^{-1})^{-1}$$

在 $\tilde{g}_m$ 的支集上全纯这一事实，我们得到

$$f((H+c)^{-m}) = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{\bar{z}}\tilde{g}_m(z)\left(-\frac{(z+c)^{m+1}}{m}(H-z)^{-1}\right)\partial_z\varphi_m(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = g_m(H),$$

其中我们使用恒等式 $-\frac{(z+c)^{m+1}}{m}\cdot\partial_z\varphi_m(z) = 1$。 □

4. SSF for Trace class perturbations

4.1. 存在性。下述定理为在一般非自伴情形中定义谱移函数（SSF）提供了所需的关键解析框架。在适当假设下，该定理保证算子差 $f(H) - f(H_0)$ 具有迹类性质，从而可以将一个分布与该算子差联系起来。

定理 4.1. 假设在开区间 I 上满足假设 1、2 和 3，其中 $m = -1$。那么，对于所有 $f \in D(I)$，算子差 $f(H) - f(H_0)$ 属于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。此外，映射

$$f \longmapsto \mathrm{Tr}\left(f(H) - f(H_0)\right) \tag{4.1}$$

在 I 上定义一个分布，该分布在 $I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 上为零。

˜证明。设 f 是 f 的 $n_I + 2$阶几乎解析延拓，支集包含于 $S_a(K)$，其中 K是一个包含 f 支集的紧子区间，并且 $a > 0$ 选得足够小，使得$\sigma(H) \cap S_a(K) = \emptyset$。那么，根据定义，我们有

$$\begin{aligned} f(H) - f(H_0) &= \pi^{-1}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)\left(\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_0(z)\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\pi^{-1}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)\mathcal{R}_H(z)V\mathcal{R}_0(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\pi^{-1}\left(\int_{\mathrm{Im}(z)>0} \partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)\mathcal{R}_H(z)V\mathcal{R}_0(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{Im}(z)<0} \partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)\mathcal{R}_H(z)V\mathcal{R}_0(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right). \end{aligned}$$

$z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 中的所有 ˜ ˜， $\partial_{\bar{z}}f(z)\mathcal{R}_H(z)V\mathcal{R}_0$ (z) 都属于迹类；又由于 f是紧支撑的，这表明整个积分属于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。最后，与 (3.9) 同理，可得

$$|\mathrm{Tr}\left(f(H) - f(H_0)\right)| \leq \beta_K\|V\|_{\mathcal{L}_1}\|f\|_{n_K+2},$$

这证明 (4.1) 是 I 上的一个分布。最后，命题 3.8 表明，该分布在 $\mathbb{R} \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 上为零。□

在定理 4.1 的假设下，迹公式自然引出 I 上谱移函数的定义，它刻画了谱在扰动下的变化。该函数最初只确定到一个加性常数；若 $I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 中存在谱隙，则可通过规定函数在该谱隙上的取值来确定这个常数。

定义 4.2. 假设 1、2 和 3 在开区间 I with $m = -1$ 上成立。区间 I 上的谱移函数 $\xi(;H,H_0)$ 定义为满足以下条件的分布，其定义仅相差一个加性常数：

$$\langle\xi', f\rangle := \mathrm{Tr}\left(f(H) - f(H_0)\right), \quad \textit{for all } f \in D(I).$$

当 $I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 非空时（例如，如果 $I = \mathbb{R}$ 且 H_0 和 H 都有界或半有界），加性常数便可通过规定 ξ 在谱隙上的取值来唯一确定；谱隙即包含于 $I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 中的一个区间。

4.2. 谱移函数的第一个表示公式。定义谱移函数（SSF）后，我们旨在建立更精确的性质，首先给出一个表示公式。对于 $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$，定义

$$\sigma(z) := \operatorname{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_0(z)\right).$$

只要满足 $H - H_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$，这个量就由预解式恒等式保证是良定义的。我们的目标是证明，定义 4.2 中定义的谱移函数的导数，可以用 $\sigma(z)$ 在实轴两侧的不连续性来具体表示。

命题 4.3. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间。假设假设 1、2 和 3 在 I上成立，且满足 $m = -1$。那么，在 I上的分布意义下，有

$$\xi'(\cdot; H, H_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sigma(\cdot + i\varepsilon) - \sigma(\cdot - i\varepsilon)\right). \tag{4.2}$$

注 4.4. 注意，由于$\sigma(\cdot)$在此处良定义且连续，(4.2) 的右端在集合 $I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 上为零。更准确地说，对于任意 $\lambda \in I \cap \rho(H) \cap \rho(H_0)$，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sigma(\lambda \pm i\varepsilon) = \sigma(\lambda).$$

˜证明。设 $f \in D(I)$ 是一个支集包含于紧区间 $K \subset I$ 的测试函数，并设 f 是一个支集包含于 $S_a(K)$ 的几乎解析延拓，其中 $a > 0$ 取足够小，使得$\sigma(H) \cap S_a(K) = \emptyset$。于是，我们写成:

$$\begin{aligned}\langle \xi', f \rangle &= \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z) \operatorname{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_0(z)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi^{-1} \left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathrm{Im}(z)>0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, \sigma(z + i\varepsilon)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathrm{Im}(z)<0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, \sigma(z - i\varepsilon)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $\sigma(z) := \operatorname{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_0(z)\right)$。

˜事实上，根据构造， f 的支集不包含 H的任何复特征值。因此，˜ ˜当 $\varepsilon > 0$充分小时，映射 $z \mapsto \partial_{\bar{z}} f(z) \mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon)$ 在 $\mathrm{supp}(f)$ 上连续。此外，由于$H - H_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$，预解式恒等式蕴含 $\mathcal{R}_H(z) - \mathcal{R}_0(z)$ 对于 $z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$ 是迹类的，并且我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sigma(z \pm i\varepsilon) = \sigma(z), \quad \text{for all } z \in S_a(K) \text{ with } \pm \operatorname{Im}(z) > 0.$$

此外，f 对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$ 以及所有满足 $\pm\mathrm{Im}(z) > 0$ 的 $z \in S_a(K)$，我们估计

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, \sigma(z \pm i\varepsilon)\right| &= \left|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, \operatorname{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon) V \mathcal{R}_0(z \pm i\varepsilon)\right)\right| \\ &\le \left|\partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\right| \cdot \|V\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{H})} \cdot \|\mathcal{R}_H(z \pm i\varepsilon)\| \cdot \|\mathcal{R}_0(z \pm i\varepsilon)\|.\end{aligned}$$

现在，由于 $z \mapsto \sigma(\ z \pm i\varepsilon)$ 在 $S_a(K) \cap \mathbb{C}^{\pm}$ 上全纯，我们可以应用斯托克斯定理，得到 :

$$\int_{\pm \operatorname{Im}(z)>0} \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)\, \sigma(z \pm i\varepsilon)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \pm \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_a^{\pm}} \tilde{f}(\lambda)\, \sigma(\lambda \pm i\varepsilon)\, \mathrm{d}\lambda, \tag{4.4}$$

其中 $\Gamma_a^{\pm}$ 表示 $S_a(K) \cap \mathbb{C}^{\pm}$ 的边界。这个边界积分可以分解为˜四部分，其中三部分因 f 的支撑性质而消失。因此，

$$\pm \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_a^{\pm}} \tilde{f}(\lambda)\, \sigma(\lambda \pm i\varepsilon)\, \mathrm{d}\lambda = \pm \frac{1}{2i} \int_{\mathrm{supp}(f)} f(\lambda)\, \sigma(\lambda \pm i\varepsilon)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{4.5}$$

将 (4.5) 代入 (4.3)，即可得到所需的恒等式 (4.2)。 □

注 4.5. 命题 4.3 使我们能够将表示公式 (1.2) 推广到非自伴算子。根据定理 4.1 的假设，引入扰动行列式

$$D_V(z) := \mathrm{Det}\left((H_0+V-z)(H_0-z)^{-1}\right) = \mathrm{Det}\left(I+V(H_0-z)^{-1}\right). \tag{4.6}$$

它在每个 $S_a(K)$ 上都是非零解析函数，且在 $K \subset I$ 紧集上成立（因为它属于 H 和 H_0的预解集），并且满足（例如参见 [31,第 8]章）：

$$D_V(z)^{-1}D_V'(z) = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)\right) = \sigma(z).$$

由此可知，除一个常数外，函数 $\ln D_V(z)$ 在每个 $S_a(K)$ 上都有定义，并满足：

$$\frac{d}{d\lambda}\ln D_V(\lambda \pm i\varepsilon) = \sigma(\lambda \pm i\varepsilon), \quad \lambda \in J, \quad \varepsilon > 0.$$

因此，除一个常数外，命题 4.3 给出了 (1.2) 的如下推广（当极限存在时）：

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln D_V(\lambda+i\varepsilon) - \ln D_V(\lambda-i\varepsilon)\right). \tag{4.7}$$

当然，当 H_0+V是自伴算子时，它对应于 (1.2)，因为此时 $\ln D_V(\lambda-i\varepsilon)$ 是 $\ln D_V(\lambda+i\varepsilon)$ 的复共轭。

注 4.6. 由上述结果可知，伴随算子 H^* 的谱移函数与 H的谱移函数的复共轭相同：

$$\xi(\lambda; H^*, H_0) = \overline{\xi(\lambda; H, H_0)}. \tag{4.8}$$

5. The SSF for non-selfadjoint relatively trace class perturbations

在许多应用中，差值 $H-H_0$ 不属于迹类。然而，它们的预解式之差，或预解式的幂之差，确实可能属于迹类。本节旨在将谱移函数（SSF）的定义推广到这类情形。

核心思想是考虑这对算子

$$(X, X_0) := \left((H+c)^{-m},\ (H_0+c)^{-m}\right),$$

其中选择 $c \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$，使得 $X - X_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。在这种情况下，可以直接将定义 4.2 应用于 (X, X_0)，从而为这对算子定义谱移函数。随后，为了求得与原算子对 (H, H_0) 相关的谱移函数，我们进行变量替换：对于 $\lambda > -c$，算子 X 的谱参数 μ 取为 $\mu = (\lambda+c)^{-m}$。相应地，我们定义

$$\xi(\lambda; H, H_0) := \xi\big((\lambda+c)^{-m};\ (H+c)^{-m},\ (H_0+c)^{-m}\big). \tag{5.1}$$

5.1. 相对迹类扰动的谱移函数定义。我们首先给出一个定理，它允许在扰动为相对迹类的情形下定义谱移函数（SSF），也就是说，预解式之差的某个适当幂属于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。

命题 5.1. 设 $(H_0, \mathcal{D}(H_0))$ 是一个自伴半有界算子，且 $(H, \mathcal{D}(H_0))$ 是作用于复可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的闭算子。

假设存在 $c \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$，使得：

(1) $V := H - H_0$ 是一个有界算子 (2) 算子

$H+c$ 可逆，且满足

$$\sigma\big((H+c)^{-m}\big) \subset (0, +\infty)\cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \tag{5.2}$$

(3) 对某个 $m \in \mathbb{N}^*$，假设 1、2 和 3 在 $I = (s_0, s_1)$ 上成立，$s_0 < s_1$

那么，谱移函数 $\xi_{c,\ m} := \xi(\cdot; (H+c)^{-m}, (H_0+c)^{-m})$ 在 $((s_1+c)^{-m}, (s_0+c)^{-m})$ 上除相差一个常数外定义良好。

此外，由下式定义的分布 $\xi(\cdot; H, H_0)$

$$\xi(\lambda; H, H_0) := \xi_{c,m}((\lambda + c)^{-m}) \tag{5.3}$$

对于 $\lambda \in I = (s_0, s_1)$，与 (c, m) 的选择无关，并满足迹公式 (1.1)。通过选择 $\xi(\cdot; H, H_0)$ 在谱隙上（若存在）$= 0$，可保证其唯一性。

证明。由于谱 系 $(H+c)^{-m}$ 的谱包含于 $(0, +\infty) \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$，因此存在 $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2m}[$ 使得 t

$$\sigma(H + c) \subset]0, +\infty[e^{i[-\theta_0, \theta_0]}.$$

因此，根据命题 3.13，对于任意相对紧包含于 $((s_1 + c)^{-m}, (s_0 + c)^{-m}) \subset]0, +\infty[$, 中的区间 $J = (r_0, r_1)$，假设 1、2 对 $(H + c)^{-m}$ 在 J上成立。应用定理 4.1，谱移函数 $\xi_{m,\ c} := \xi(\cdot; (H+c)^{-m}, (H_0 + c)^{-m})$ 因而在 J上有良好定义，且相差一个加性常数。对于每个 $f \in D(I)$，我们有：

$$\operatorname{Tr}\left(f((H+c)^{-m}) - f((H_0+c)^{-m})\right) = -\langle \xi'_{m,c}, f \rangle.$$

此外，对于任意 $g \in D(((s_1 + c)^{-m}, (s_0 + c)^{-m}))$，命题 3.13（应用于由 $f(\mu) = g(\mu^{-\frac{1}{m}} - c)$ 定义的函数$f \in D(I)$）给出：

$$f((H+c)^{-m}) = g(H),$$

因此：

$$\operatorname{Tr}\left(g(H) - g(H_0)\right) = \langle \xi, g' \rangle.$$

由于 $g(H)$ 和 $g(H_0)$ 与 (m, c) 的选取无关，因此分布 ξ 在 I 上由谱隙（若存在）上的归一化条件 $\xi = 0$ 唯一确定。□

得益于这一命题，在相对迹类扰动的情形下，仍可定义谱移函数，如下文的定义所述。

定义 5.2. 在命题 5.1 的假设下，我们通过关系式 (5.3) 定义与数对 (H, H_0) 相关联的谱移函数（SSF）。

注 5.3. 令 $s_{min} := \inf \sigma(H) \cap \sigma(H_0) \cap \mathbb{R}$。若在命题 5.1 中，$s_0 < s_{min}$，则可将谱移函数在整个谱隙 $(-\infty, s_{min})$ 上延拓为 0。

5.2. 相对迹类扰动情形下的表示公式。本节将在扰动仅为相对迹类而非迹类的框架下，建立引理 4.3 的一个类似结果。这一推广对于将迹公式和谱移函数的定义扩展到更广泛的算子类别至关重要。

命题 5.4。假设数对（H_0，H）满足命题 5.1 对某个 $I =$（s_0，s_1）、$c \in \mathbb{R}$ 和 $m \geq 1$ 的假设，并且

$$(H_0 + c)^{-m}\left((H+c)^{-1} - (H_0+c)^{-1}\right) \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}). \tag{5.4}$$

那么，就分布而言，在 I 上，我们有：

$$\xi'(\cdot; H, H_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sigma_m(\cdot + i\varepsilon) - \sigma_m(\cdot - i\varepsilon)\right), \tag{5.5}$$

其中

$$\sigma_m(z) := (z+c)^{m-1} \operatorname{Tr}\left((H+c)^{-m+1}\mathcal{R}_H(z) - (H_0+c)^{-m+1}\mathcal{R}_0(z)\right), \qquad \operatorname{Im}(z) \neq 0.$$

证明。记 $X=(H+c)^{-m}$ 和 $X_0=(H_0+c)^{-m}$。利用恒等式

$$(H+c)^{-m+1}\mathcal{R}_H(z)-(H_0+c)^{-m+1}\mathcal{R}_0(z)=(X-X_0)(H+c)\mathcal{R}_H(z)+X_0\big((H+c)\mathcal{R}_H(z)-(H_0+c)\mathcal{R}_0(z)\big),$$

结合预解式恒等式和强映射谱定理（例如参见 [25, 引理 2，XIII.4]），可以验证，对于所有 $z\in\rho(H)\cap\rho(H_0)$，$\sigma_m(z)$ 都是良定义的（进一步的论证也可参见下文关系式 (5.6)）。

此外，对于 $\lambda\in\mathbb{R}\cap\rho(H)\cap\rho(H_0)$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sigma_m(\lambda+i\varepsilon)=\sigma_m(\lambda)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\sigma_m(\lambda-i\varepsilon),$$

因此，(5.5) 两边在 $\mathbb{R}\cap\rho(H)\cap\rho(H_0)\supset(-\infty,\inf(\sigma(H)\cup\sigma(H_0)))\supset(-\infty,-c]$ 上均为零。根据定义 5.2，在 I 上，我们有

$$\xi'(\lambda;H,H_0)=-m(\lambda+c)^{-m-1}\,\xi'_{c,m}((\lambda+c)^{-m}).$$

现在，我们将命题 4.3 应用于有序对 $((H+c)^{-m},(H_0+c)^{-m})$，由此得到以下分布意义下的结果：

$$\xi'_{c,m}(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\Sigma(\mu+i\varepsilon)-\Sigma(\mu-i\varepsilon)\right),$$

其中

$$\Sigma(Z)=\operatorname{Tr}\left((X-Z)^{-1}-(X_0-Z)^{-1}\right),\qquad \operatorname{Im}(Z)\neq0.$$

对于 $Z=\mu\pm i\varepsilon$，其中 $\mu>0,\varepsilon>0$，存在 $z=\lambda\mp i\delta(\varepsilon)$，使得 $\lambda>-c$ 且 $\delta(\varepsilon)\to0^+$，满足 $Z=(z+c)^{-m}$。将引理 3.12 中的 with $L=H+c$ 和 with $z+c$ 替代 z 后，我们得到：

$$\begin{aligned}(H+c)^{-m+1}\mathcal{R}_H(z)&=X(H+c)\mathcal{R}_H(z)\\&=X+(z+c)X\mathcal{R}_H(z)\\&=X-mZX(X-Z)^{-1}-XB_H(z)\\&=X-mZ-mZ^2(X-Z)^{-1}-XB_H(z)\end{aligned}$$

其中

$$B_H(z):=\sum_{k=1}^{m-1}G_k((z+c)(H+c)^{-1})\,G_m((z+c)(H+c)^{-1})^{-1},$$

在 $I\times\{0\}$ 附近全纯。

同一恒等式对 H_0 也成立。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&(z+c)^{m-1}\Big((H+c)^{-m+1}\mathcal{R}_H(z)-(H_0+c)^{-m+1}\mathcal{R}_0(z)\Big)\\&\quad=(z+c)^{m-1}(X-X_0)-m(z+c)^{-m-1}\big((X-Z)^{-1}-(X_0-Z)^{-1}\big)\\&\qquad-(z+c)^{m-1}\big(XB_H(z)-X_0B_{H_0}(z)\big).\end{aligned}\tag{5.6}$$

(5.6) 右侧的第一项和第三项在实轴附近全纯，因此不会对极限中的跳跃产生贡献。边界值之差仅由第二项产生。由此得到

$$-m(\lambda+c)^{-m-1}\lim_{\varepsilon\to0^+}\big(\Sigma((\lambda+c)^{-m}+i\varepsilon)-\Sigma((\lambda+c)^{-m}-i\varepsilon)\big)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\sigma_m(\lambda+i\varepsilon)-\sigma_m(\lambda-i\varepsilon)\right),$$

这就证明了 (5.5)。

最后，我们简要说明 (5.6) 中第三项具有迹类性质的理由。根据$B_H(z)$的结构以及假设 (5.4)，可以验证 $z\mapsto X_0\big(B_H(z)-B_{H_0}(z)\big)$ 是取值于 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$的全纯函数。

□

6. Limiting absorption principle for non-self-adjoint perturbation

本节将说明如何将前几节的结果应用于 J. Faupin 和第二作者在 [11]中引入的一般情形。首先，我们回顾一些与自伴算子的非自伴扰动的极限吸收原理相关的众所周知的定义，然后给出假设 2 成立的充分条件。我们考虑第 2.1 节中的H_0 和 $H = H_0 + V$，并假设 V具有如下形式

$$V = CWC,$$

其中 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$是自伴的，且相对于 H_0相对紧，并且 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}$).

6.1. 谱奇异点。研究非自伴算子时，一个核心概念是谱奇异点，该概念由 [11] 引入，指本质谱中不满足以下意义下正则性的点。

定义 6.1（正则谱点与谱奇异点）。设 $\lambda \in \Lambda := \sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\{v5)$。

(i) 若 λ 不是集合 $\lambda \pm i(0,\infty)$ 中特征值的聚点，且极限

$$C\mathcal{R}_H(\lambda \pm i0^+)CW := \lim_{\varepsilon \to 0^+} C\mathcal{R}_H(\lambda \pm i\varepsilon)CW \tag{6.1}$$

在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的范数拓扑下存在，则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{H}$ 的出射（分别为入射）正则谱点。若此极限不存在，则称 λ 是 H 的出射（分别为入射）谱奇异点。

(ii) 若 λ 既是 H 的出射正则谱点，又是其入射正则谱点，则称 λ 是 H 的正则谱点。否则，称 λ 是 H 的谱奇异点。

(iii) 若存在 $m > 0$，使得对于所有 $\lambda > m$， λ 都是出射/入射正则谱点，且映射

$$[m,\infty) \ni \lambda \mapsto C\mathcal{R}_H(\lambda \pm i0^+)CW$$

在算子范数拓扑下有界，则称无穷远是 H 的出射/入射正则谱点。若这些条件中有任一项不成立，则称无穷远是 H 的出射（分别为入射）谱奇异点。

谱奇点的概念与 [29] 中引入的非自伴算子的谱投影概念密切相关。在假设 H_0 满足极限吸收原理的条件下， [11] 给出了谱奇点的一种刻画。这一概念在研究由非自伴哈密顿量支配的 Schr¨odinger 方程解的动力学时也起着根本作用。例如，Faupin 和 Fr¨ohlich [10] 证明，耗散波算子完备，当且仅当 H 没有谱奇异点；而 Faupin 和 Nicoleau[14] 则证明，在谱奇异点处，耗散散射矩阵不可逆。最后，我们提及 [13] ，其中针对非耗散情形构造了考虑谱奇异点的波算子（称为“正则化波算子”）。

下文中，我们用 Λ_{reg} 表示 H 的正则谱点集合。特别值得关注的是，当谱参数从上半平面或下半平面趋近谱奇点时， H 的加权预解式以多快的速度发散。这引出了谱奇点的阶这一概念。

定义 6.2（谱奇点的阶）。设 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ 是 H 的一个出射或入射谱奇点。若存在整数 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$ ，使得 λ ，则称其为有限阶谱奇点

$$\sup_{z \in D(\lambda,\varepsilon) \cap \mathbb{C}^{\pm}} |\lambda - z|^n \, \|C\mathcal{R}_H(z)CW\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \infty. \tag{6.2}$$

否则， λ 被称为无限阶出射或入射谱奇点。若 λ 是有限阶出射或入射谱奇点，则将其阶定义为使（6.2）成立的最小整数 n。

如果存在整数 n, $\varepsilon_0 > 0$, $m > 0$ 和 $z_0 \in \rho(H)\backslash\mathbb{R}$ 使得，我们就称无穷远是有限阶的出射或入射谱奇点。

$$\sup_{\substack{\mathrm{Re}(z)>m \\ |\pm\mathrm{Im}(z)|<\varepsilon_0}} |z - z_0|^{-n} \|C\mathcal{R}_H(z)CW\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \infty \tag{6.3}$$

否则，无穷远被称为无限阶的出射或入射谱奇点。如果无穷远是有限阶的出射或入射谱奇点，我们将其阶定义为使 (6.3) 成立的最小整数 n。

换言之，如果在上半平面或下半平面的奇点邻域内， H 的加权预解式可以通过多项式因子正则化，且无穷远处的奇点可以在上半平面或下半平面的无穷远邻域内通过有理函数正则化，那么该谱奇点就是有限阶的。正如我们将在第 7 节回顾的那样，对于 Schr¨inger 算子，谱奇异点与实共振有关（见第7.1节）。

6.2. 预解式估计。这里给出关于谱奇异点和特征值的充分条件，使得 H 满足假设 2 的预解式估计。

命题 6.3。假设 H 在开区间 I 上满足假设1，且其闭包$\overline{I}$ 包含有限个有限阶谱奇异点。那么 H在 I 上满足假设 2。

证明。若 I 有上界，则只需证明 I 有界时的结论，因为在本质谱以下，假设 2 总是成立（见注 2.1）。结合假设1与（6.2），在每个谱奇异点附近，存在 $c_1 > 0$ 和 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$\|C\mathcal{R}_H(z)CW\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c_1 |\mathrm{Im}(z)|^{-n_1}, \tag{6.4}$$

而在正则点附近，我们可以取 $n_1 = 0$。由于谱奇异点只有有限个，根据 $\overline{I}$的紧致性，（6.4）在 S_a（I）上成立，其中某个 $a > 0$，并且以所有有限阶中的最大值代替 n_1。若将 H在 I中的 n 个谱奇异点的阶依次记为 ν_1、.....、 ν_n，则可推出 I 上的假设 2，其中

$$n_I = \max(\nu_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} + 1$$

利用预解式恒等式

$$\mathcal{R}_H(z) = \mathcal{R}_0(z) - \mathcal{R}_0(z)V\mathcal{R}_0(z) + \mathcal{R}_0(z)CWC\mathcal{R}_H(z)CWC\mathcal{R}_0(z), \tag{6.5}$$

以及自伴算子 H_0 的预解式估计： $\|\mathcal{R}_0(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq |\mathrm{Im}(z)|^{-1}$。

若 I 没有上界，则只需在区间 $[s_1, +\infty)$ 上证明该结果，该区间仅在无穷远处有一个谱奇异点（在 $I \cap (-\infty, s_1]$ 上应用前面的论证）。由假设1和（6.3）可得

$$\|C\mathcal{R}_H(z)CW\| \leq c |\mathrm{Re}(z)|^n,$$

在 S_a 上 $([s_1, +\infty))$ 对某些 $n \in \mathbb{N}$、 $c > 0$ 和 $a > 0$ 成立。我们再次利用 (6.5) 得出结论。

□

7. SSF for Schrödinger Operators with Complex-Valued Potential

本节考虑自伴算子

$$H_0 = -\Delta \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3),$$

其定义域为 $\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^3);\ \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$，且 H 是薛定谔算子$H := H_0 + V$其中 V 是由函数 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ 给出的乘法算子。相对紧性由以下假设保证：

$$|V(x)| \le M\langle x\rangle^{-\delta}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad \delta > 0, \tag{7.1}$$

对某个常数 $M > 0$，本质谱为 $\Lambda := \sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [0, +\infty)$。我们重点讨论三维情形，但本节的结论很容易推广到任意奇数维。我们将说明如何将前面的结果应用于这一非自伴薛定谔算子；特别地，我们回顾共振与谱奇异点之间的联系，随后给出谱奇异点之外谱移函数的正则性。最后，我们说明高能下的行为与自伴情形非常接近。谱移函数的存在性将在短程条件 $\delta > 3$ 下给出。

我们通过考虑由 $C(x)$ 诱导的乘法算子 $V = CWC$ by considering $C := \langle x\rangle^{-\delta/2}$ and $W := \langle\cdot\rangle^{\delta}V$。若 V 是紧支撑势，我们还可以定义 C（分别为 W）为由 ρ（分别为 V）诱导的乘法算子，其中 ρ 是一个光滑紧支撑函数，且$\rho \equiv 1$ 在 $\mathrm{supp}(V)$ 上成立。

7.1. 谱奇异点与共振。对于 Schr¨odinger 算子，谱奇异点的概念与共振的概念密切相关。这里我们介绍两个相关概念，它们取决于势 V 的衰减情况。

7.1.1. 短程条件。我们定义加权空间

$$L^2_\delta := \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid x \mapsto \langle x\rangle^{\delta} f(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\},$$

在 [11], Faupin 和 Frantz 中，他们建立了以下命题：

命题 7.1。 [11, 命题 3.10] 设 V 是满足短程条件 (7.1) 且具有 $\delta > 1$ 的复值势。那么对所有 $\lambda > 0$，以下条件等价：

（i） λ 按照定义 6.1 的意义是 H 的出射/入射谱奇异点，

（ii）存在 $\Psi \in L^2_{-\frac{\delta}{2}}$，其中 $\Psi \neq 0$，使得

$$(-\Delta + V(x) - \lambda)\Psi = 0.$$

若（ii）中的函数 Ψ 属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$，则 λ 是 H的特征值。否则， λ 称为实共振，与共振态 $\Psi \notin L^2(\mathbb{R}^3)$ 相关。该状态满足出射/入射索末菲辐射条件：

$$\Psi(x) = |x|^{1/2} e^{\pm i\lambda^{1/2}|x|} \left(a\left(\frac{x}{|x|}\right) + o(1) \right), \quad |x| \to \infty,$$

其中 $a \in L^2(S^2)$且 $a \neq 0$。此外，如果算子 H 是耗散的（即对于 H定义域中的所有 u，都有 $\mathrm{Im}(\langle u, Hu\rangle) \le 0$），则 H 在 $(0,\infty)$ 中不会有出射谱奇异点（见 [30, 推论 3.2]）。但是，一般而言，谱奇异点仍可能出现。如 [30, 备注 5.4], 所示，对于任意 $\lambda > 0$，都可以构造一个光滑的紧支撑势 V，使得在耗散情形下， λ 是 H 的一个入射谱奇点。

7.1.2. 紧支撑势。如果 $V \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$，且 $d \geq 3$ 为奇函数，则映射

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \ni z \mapsto (H - z^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$$

是亚纯的 并且可亚纯延拓至整个复平面，作为一个 ma p

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto F(z) : L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \to L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{7.2}$$

其中

$$\begin{aligned} L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) &:= \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \mathrm{supp}(u) \text{ is compact}\}, \\ L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) &:= \{u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \mid u \in L^2(K) \text{ for all compact } K \subset \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

式 (7.2) 中亚纯延拓的极点称为 H 的共振。
可以验证， $\lambda_0 \geq 0$ 的 H 的任一实共振 $\pm\lambda_0$，对应于定义 6.1 意义下的一个出射/入射谱奇点 λ_0^2。此外， H 只有有限多个谱奇点，谱奇点的阶与相应共振极点的重数一致；参见 [9, 定理 3.8]。

关于薛定谔算子的共振理论概述，请读者参阅 [9] 及其中的参考文献；关于本文所讨论的共振与谱奇异点这两个概念的更详细比较，请参阅 [11, 第 3.3 节。

最后请注意，在这两种情形下， ∞ 都是出射和入射正则谱点。这是命题 7.2 第（3）点的推论。（关于谱移函数导数的高能渐近，更多细节可参见命题 7.14 的证明。）

7.2. 预备结果。这里我们回顾自由预解算子 $\mathcal{R}_0(z)$ 的一些有用结果，这些结果将用于推导谱移函数的定性结果。我们在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ 上定义 $\sqrt{z}$，要求 $\mathrm{Im}(\sqrt{z}) > 0$。因此，对所有 $\lambda \in (0, \infty)$，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\lambda \pm i\varepsilon} = \pm\sqrt{\lambda}.$$

对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$，令

$$T_0(z) := C\,\mathcal{R}_0(z)\,C\,W,$$

并回忆一下，对于这样的 z， $T_0(z)$ 的积分核是函数

$$K_0(z)(x, y) := \frac{1}{4\pi}\, C(x)\, \frac{e^{i\sqrt{z}\,|x-y|}}{|x-y|}\, C(y)\, W(y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

下一个众所周知的命题总结了算子 $T_0(z)$ 的一些有用性质（例如参见 [32] ）。

命题 7.2. 假设 V 是一个具有 $\delta > 3$ 的短程势（即满足 (7.1)）。那么，对于所有 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$，积分核 $K_0(z)$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$。特别地， $T_0(z)$ 是一个希尔伯特–施密特算子。此外：

(1) 对于所有 $\lambda \in \Lambda$，极限

$$T_0(\lambda \pm i0^+) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_0(\lambda \pm i\varepsilon)$$

在希尔伯特–施密特拓扑下存在。
(2) 映射 $\Lambda \ni \lambda \mapsto T_0(\lambda \pm i0^+)$ 在希尔伯特–施密特拓扑下是连续的。(3) 对任意 $\delta > 0$，存在常数 $c > 0$ 和 $C > 0$，使得对所有满足$|z| > c$的 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$，都有

$$\|T_0(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C\,|z|^{-\frac{1}{2}+\delta}. \tag{7.3}$$

关于 z 的 T_0 的 k-导数为

$$T_0^{(k)}(z) := (-1)^k C\mathcal{R}_0(z)^{k+1}CW.$$

对于 $k=1$，其积分核对所有 $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 均由下式给出

$$K_0^{(1)}(z)(x,y) = \frac{i}{8\pi\sqrt{z}} C(x) e^{i\sqrt{z}|x-y|} C(y) W(y), \quad \pm \operatorname{Im}(z) > 0.$$

以下命题汇总了算子 $T_0^{(k)}(z)$ 的一些有用性质（参见 [22], 引理 2.2）：

命题 7.3. 假设 V 满足 (7.1))，且 $\delta > 3$。则：

(1) 对所有 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和所有 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$，算子 $T_0^{(k)}(z)$ 属于迹类。(2) 若 $\delta > 2k+1$，则对所有 $\lambda \in (0,+\infty)$，下列极限

$$T_0^{(k)}(\lambda \pm i0^+) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_0^{(k)}(\lambda \pm i\varepsilon)$$

在希尔伯特–施密特拓扑中存在。

(3) 此外，映射

$$(0,+\infty) \ni \lambda \longmapsto T_0(\lambda \pm i0^+)$$

属于 $\mathscr{C}^k((0,+\infty)\ \mathcal{L}_2(\mathcal{H}))$，并且有

$$T_0^{(k)}(\lambda \pm i0^+) = \partial_\lambda^{(k)} T_0(\lambda \pm i0^+).$$

现在我们推导出 $T_{(1)\,0}(z)$ 和 $T_0^{(1)}(z)T_0(z)$ 的显式迹公式，这些公式将在谱移函数的计算中发挥关键作用。

引理 7.4. 假设 V 是指数为 $\delta > 3$ 的短程势，并令 $\lambda \in (0,+\infty)$。则：

(1) 有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{Tr}\Big(T_0^{(1)}(\lambda + i\varepsilon) - T_0^{(1)}(\lambda - i\varepsilon) \Big) \;=\; \frac{i}{4\pi\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.4}$$

(2) 此外,

$$\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\lambda \pm i0^+)\, T_0(\lambda \pm i0^+) \big) \;=\; \pm \frac{i}{32\pi^2\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^6} V(x)\, V(y)\, \frac{e^{\pm 2i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{7.5}$$

证明。(1) 对于所有 $\varepsilon > 0$，算子 $T_0^{(1)}(\lambda \pm i\varepsilon)$ 都是迹类算子，其迹由下式给出 y

$$\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\lambda \pm i\varepsilon) \big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} K_0^{(1)}(\lambda \pm i\varepsilon)(x,x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{i}{8\pi\sqrt{\lambda \pm i\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\,\mathrm{d}x.$$

将两个表达式相减，并令 $\varepsilon \to 0^+$ 取极限，得到 (7.4)。

(2) 令 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$。乘积 $T_0^{(1)}(z)\ T_0(z)$ 的积分核，记为 $K_0^{(0,1)}(z)$，由下式给出 y

$$K_0^{(0,1)}(z)(x,y) = \frac{i}{32\pi^2\sqrt{z}} \int_{\mathbb{R}^3} C(x)\, e^{i\sqrt{z}\,|x-t|}\, V(t)\, \frac{e^{i\sqrt{z}\,|t-y|}}{|t-y|}\, C(y)\, W(y)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $T_0^{(1)}(z)T_0(z)$ 属于迹类，我们有

$$\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(z)\, T_0(z) \big) = \frac{i}{32\pi^2\sqrt{z}} \int_{\mathbb{R}^6} V(x)\, V(y)\, \frac{e^{2i\sqrt{z}\,|x-y|}}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

最后，取 $z=\lambda\pm i\varepsilon$ 并令 $\varepsilon\to 0^+$，即可得到 (7.5)。 □

在陈述下一个引理之前，我们先回顾一下，根据预解式恒等式，对于每个 $z\in\rho(H)\cap\rho(H_0)$，算子 $\mathrm{Id}+T_0(z)$ 都是可逆的，并且有

$$\big[\mathrm{Id}+T_0(z)\big]^{-1} \;=\; \mathrm{Id}-C\mathcal{R}_H(z)CW. \tag{7.6}$$

我们用下面这个有用的恒等式结束本节：

引理 7.5。设 V 是具有衰减指数 $\delta>3$ 的短程势。那么，对于每个$z\in\rho(H)\cap\rho(H_0)$，差 $\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)$ 是一个迹类算子。此外，以下恒等式成立：

$$\mathrm{Tr}\big(\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)\big)=\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,[I+T_0(z)]^{-1}\Big)\,, \tag{7.7}$$

$$=\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\Big)-\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,[I+T_0(z)]^{-1}T_0(z)\Big)\,, \tag{7.8}$$

$$=\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\Big)-\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,T_0(z)\Big)+\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,C\,\mathcal{R}_H(z)\,C\,W\,T_0(z)\Big)\,. \tag{7.9}$$

证明。设 $z\in\rho(H)\cap\rho(H_0)$。由于 $\delta>3$，预解式恒等式表明 $\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)$ 是一个迹类算子（例如参见 [25, 定理 XI.21]）。再次连续应用预解式恒等式（分别应用两次和三次），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)&=-\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\;+\;\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_H(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\\&=-\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\;+\;\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\;-\;\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_H(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z)\,V\,\mathcal{R}_0(z).\end{aligned}$$

接下来，巧妙地利用迹的循环性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{R}_H(z)-\mathcal{R}_0(z)\big)&=\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,[\mathrm{Id}-C\,\mathcal{R}_H(z)\,C\,W]\Big)\\&=\mathrm{Tr}\Big(T_0^{(1)}(z)\,[\mathrm{Id}+T_0(z)]^{-1}\Big)\,,\end{aligned}$$

由 (7.6) 得出，从而证明了 (7.7)。恒等式 (7.8) 和 (7.9) 立即可得 y. □

7.3. 谱移函数的存在性。下述定理给出了谱移函数 $\xi(\cdot;-\Delta+V(x)\;-\Delta)$ 存在的充分条件。

命题 7.6. 设 V 是衰减指数为 $\delta>3$ 的短程势，并假设算子 H 仅有有限个特征值和有限个谱奇异点，且每个谱奇异点的阶数有限。那么存在 $c>0$，使得谱移函数

$$\xi(\cdot;\,-\Delta,\,-\Delta+V)\;:=\;\xi\big(\cdot;\,(H+c)^{-1},\,(H_0+c)^{-1}\big)$$

定义良好，且不依赖于 $c>0$ 的具体选取。

证明。由于 H 有有限个特征值，且有有限个有限阶谱奇异点，由命题 6.3 可知，假设 1 在 $\mathbb{R}$ 上满足。此外，由于V 有界，且 H 只有有限个特征值，因此存在 $c>0$，使得 $-c\in\rho(H)$，并且存在 $a>0$，使得

$$\sigma(H)\subset\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>-c\text{ and }|\,\mathrm{Im}(z)|<a\}\,.$$

此外，由于 $\delta>3$，根据引理 7.5，$(H_0+c)^{-1}$ –$(H+c)^{-1}$ 是一个迹类算子。因此，命题 5.1 中的条件 (2) 也得以满足。我们得出谱移函数

$$\xi(\cdot,-\Delta,-\Delta+V):=\xi(\cdot,(H+c)^{-1},(H_0+c)^{-1})$$

存在，且不依赖于 c 的具体选择。 □

由 $(H-c)^{-1}-(H_0-c)^{-1}$ 的迹类性质以及命题 5.4（其中$m=1$）可知，导数 $\xi'(H,H_0,\cdot)$ 有如下表示：

命题 7.7. 设 V 为衰减指数为 $\delta>3$的短程势，并假设算子 H 只有有限个特征值和有限个谱奇异点，且每个谱奇异点的阶数有限。那么，在分布意义下，有

$$\xi'(H,H_0;\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\operatorname{Tr}\Big(\mathcal{R}_H(\lambda+i\varepsilon)-\mathcal{R}_0(\lambda+i\varepsilon)\Big) \;-\; \operatorname{Tr}\Big(\mathcal{R}_H(\lambda-i\varepsilon)-\mathcal{R}_0(\lambda-i\varepsilon)\Big).$$

注 7.8. 假设算子只有有限个特征值这一条件可能显得过于严格。尽管如此，仍存在关于势 V 的充分条件，可确保 $-\Delta+V$ 只有有限个特征值。例如，在奇数维中，Frank、Laptev 和 Safronov [12] 证明，若 V 在无穷远处指数衰减，则算子 $-\Delta+V$ 有有限个特征值。

7.4. 谱移函数的正则性。本节将证明，谱移函数可延拓为任意正则谱点邻域内的正则函数。由于谱奇异点是孤立的，这使我们能够在局部避开这些奇异点来定义谱移函数。下面给出命题：

命题 7.9. 假设 V 是衰减指数为 $\delta>2k+1$的短程势，其中 $k\in\mathbb{N}^*$。另假设 H 只有有限多个特征值和有限多个谱奇异点，且每个谱奇异点的阶均有限。设 $\lambda\in(0,+\infty)$ 是 H的一个正则谱点。则谱移函数 $\xi(\cdot;H,H_0)$ 在 λ的某个邻域内属于 $\mathscr{C}^{k+1}$ 类。

证明. 由命题 7.2 的第 (2) 点以及 [11, 命题 4.7] 可知，存在一个不含谱奇异点的 λ 邻域 ω_λ。利用 (7.8)，可得，对于所有 $\mu\in\omega_\lambda$，以下等式在分布意义下成立：

$$\begin{aligned}\xi'(\mu;H,H_0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(&\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\mu+i\varepsilon)\big)-\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\mu-i\varepsilon)\big) &(7.10)\\ &-\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\mu+i\varepsilon)\,[I+T_0(\mu+i\varepsilon)]^{-1}\,T_0(\mu+i\varepsilon)\big)\\ &+\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\mu-i\varepsilon)\,[I+T_0(\mu-i\varepsilon)]^{-1}\,T_0(\mu-i\varepsilon)\big)\Big). &(7.11)\end{aligned}$$

由于每个 $\mu\in\omega_\lambda$ 都是 H 的正则谱点，[11, 命题 4.7] 保证算子 $I+T_0(\mu\pm i0^+)$ 可逆，并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[I+T_0(\mu\pm i\varepsilon)]^{-1}=[I+T_0(\mu\pm i0^+)]^{-1}$$

存在于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中。此外，映射

$$\mathrm{Inv}:\ \mu\in\omega_\lambda\longmapsto[I+T_0(\mu\pm i0^+)]^{-1}$$

是连续的。Inv 在 ω_λ 上的 $\mathscr{C}^k$-正则性来自求逆映射的可微性以及命题 7.3 的第 (2) 点。结合命题 7.2 的第 (1) 点和第 (2) 点，以及命题 7.3 的第 (2) 点，我们可推出

$$\operatorname{Tr}\Big(T_0^{(1)}(\mu\pm i0^+)\,[I+T_0(\mu\pm i0^+)]^{-1}\,T_0(\mu\pm i0^+)\Big):=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\operatorname{Tr}\Big(T_0^{(1)}(\mu\pm i\varepsilon)\,[I+T_0(\mu\pm i\varepsilon)]^{-1}\,T_0(\mu\pm i\varepsilon)\Big)$$

存在，并且这些映射

$$\mu\in\omega_\lambda\longmapsto\operatorname{Tr}\Big(T_0^{(1)}(\mu\pm i0^+)\,[I+T_0(\mu\pm i0^+)]^{-1}\,T_0(\mu\pm i0^+)\Big)$$

属于 $\mathscr{C}^k$ 类。最后，根据 (7.4)，映射

$$\mu \in \omega_\lambda \longmapsto \mathrm{Tr}\big(T_0(\mu + i0^+) - T_0(\mu - i0^+)\big)$$

是良定义的，且属于 $\mathscr{C}^k$ 类。证明至此完成。 □

7.5. 谱奇异点附近的渐近性。本节中，我们推导紧支撑且有界势的情形下，谱移函数（SSF）在谱奇异点邻域内的渐近行为。

假设 $V \in L^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$，即具有紧支撑的本质有界函数空间。那么存在一个紧支撑函数 ρ，使得

$$\rho \equiv 1 \quad \text{on } \operatorname{supp}(V), \qquad \rho V = V.$$

如第 7.1.2 小节所述，H的出射谱奇异点和入射谱奇异点 $\lambda_0 > 0$ 对应于映射 $\pm\sqrt{\lambda_0}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯延拓的实极点

$$\mathbb{C}_+ \ni z \longmapsto (H - z^2)^{-1} : L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3) \to L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3).$$

等价地（见 [9, 定理 3.8]），它们对应于映射 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯延拓的实极点

$$\mathbb{C}_+ \ni z \longmapsto \rho\,(H - z^2)^{-1}\rho : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3).$$

我们用 $F(z)$ 表示这一亚纯延拓。

为明确起见，假设 $\lambda_0 > 0$ 是 H 的一个 ν_0阶出射谱奇点。由此可知，$\sqrt{\lambda_0}$是 $F(z)$的一个极点。根据 [9],，存在有限秩算子 A_{-j}、$1 \le j \le \nu_0$，以及一个在 $\sqrt{\lambda_0}$的某个复邻域内全纯的算子值函数 $z \mapsto A_0(z)$，使得

$$F(z) \;=\; \sum_{j=1}^{\nu_0} \frac{A_{-j}}{(z^2 - \lambda_0)^j} \;+\; A_0(z), \tag{7.12}$$

在 $\sqrt{\lambda_0}$的某个复邻域内。

我们回顾以下标准展开式，它是与解析函数相关的分布理论的直接推论（例如参见 [15, 第 III 章，第 3.5] 节）。

引理 7.10（光滑函数与主部的乘法）。设 $j \in \mathbb{N}^*$、$\lambda_0 > 0$，且令 g 在 $V_{\lambda_0} \cap \mathbb{C}_\pm$ 内全纯，并可光滑延拓至实轴，记为 $g_\pm$，其中 V_{λ_0} 表示 λ_0的一个复邻域。则在实数轴上 λ_0 的某个邻域内，按分布的意义有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{g(\lambda \pm i\varepsilon)}{(\lambda \pm i\varepsilon - \lambda_0)^j} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{g_\pm^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\,(\lambda - \lambda_0 \pm i0)^{-(j-k)} \;+\; h^\pm(\lambda), \tag{7.13}$$

其中，$h^\pm$ 在 λ_0附近光滑。

证明。我们只讨论带有 $+$ 符号的情形，另一种情形完全相同。我们将 g 在 λ_0 处展开为泰勒级数，直到 $j-1$ 阶：

$$g(\lambda + i\varepsilon) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{g_\pm^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\,(\lambda + i\varepsilon - \lambda_0)^k \;+\; R_j(\lambda + i\varepsilon),$$

其中，余项满足 $R_j(\lambda+i\varepsilon) = \mathcal{O}\big((\lambda+i\varepsilon-\lambda_0)^j\big)$，在 V_{λ_0} 的某个邻域内成立。两边除以 $(\lambda+i\varepsilon-\lambda_0)^j$，得到

$$\frac{g(\lambda+i\varepsilon)}{(\lambda+i\varepsilon-\lambda_0)^j} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{g_\pm^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\,(\lambda+i\varepsilon-\lambda_0)^{-(j-k)} \;+\; r_j(\lambda,\varepsilon),$$

其中 $r_j(\lambda,\varepsilon)$ 是一个光滑函数，并且当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，在 λ_0 附近收敛到一个光滑函数 $h^+(\lambda)$。由于每个函数族 $(\lambda+i\varepsilon-\lambda_0)^{-m}$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 中收敛到 $(\lambda-\lambda_0+i0)^{-m}$，我们可以逐项取极限，从而得到 (7.13)。□

注 7.11（实部和虚部）。文中出现的每个分布 $(\lambda-\lambda_0+i0)^{-m}$ 都可分解为实部和虚部，如下所示：

$$(\lambda-\lambda_0+i0)^{-m} = \mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^m} \;-\; i\pi\,\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,\delta^{(m-1)}(\lambda-\lambda_0), \qquad m\ge 1. \tag{7.14}$$

因此，$(\lambda-\lambda_0+i0)^{-m}$ 的实部对应于柯西主值 $\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^m}$，而其虚部的支集位于 $\lambda=\lambda_0$，并涉及狄拉克δ分布的导数。

现在，根据命题 7.7，由于 v 是紧支撑的，以下表示在分布意义下成立：

$$\xi'(H,H_0;\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{R}_H(\lambda+i\varepsilon)-\mathcal{R}_0(\lambda+i\varepsilon)\Big) \;-\; \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{R}_H(\lambda-i\varepsilon)+\mathcal{R}_0(\lambda-i\varepsilon)\Big).$$

由 (7.9) 并回顾 $C=\rho$、$W=V$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{R}_H(\lambda\pm i\varepsilon)-\mathcal{R}_0(\lambda\pm i\varepsilon)\right) &= \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda\pm i\varepsilon)\right) \;-\; \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda\pm i\varepsilon)\,T_0(\lambda\pm i\varepsilon)\right)\\ &\quad+\; \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda\pm i\varepsilon)\,\rho\,\mathcal{R}_H(\lambda\pm i\varepsilon)\,\rho\,V\,T_0(\lambda\pm i\varepsilon)\right)\\ &:= \sum_{n=1}^{3} a_n^{\pm}(\varepsilon).\end{aligned}$$

我们首先考虑 $+$ 正号的情形，特别是第三项 $a_3^+(\epsilon)$。我们定义

$$g_j(\mu) \;:=\; \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\mu)\,A_{-j}\,V\,T_0(\mu)\right).$$

由于 V 是紧支撑的，g_j 满足引理 7.10 的假设。设 λ 属于 λ_0 的一个实邻域，并令 $\varepsilon>0$ 足够小。将 $z=\sqrt{\lambda+i\varepsilon}\in V_{\lambda_0}\cap\mathbb{C}_+$ 代入 (7.12)，其中 V_{λ_0} 表示 λ_0 的一个复邻域，可得

$$F(z) = \rho\,R_H(\lambda+i\varepsilon)\,\rho,$$

经过直接计算可得，在分布意义下

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} a_3^+(\varepsilon) \;&=\; \sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{k=0}^{j-1} \frac{g_{j,+}^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\,\frac{1}{(\lambda-\lambda_0+i0)^{j-k}} \;+\; H^+(\lambda)\\ &=\; \sum_{l=1}^{\nu_0} \frac{\alpha_l(\lambda_0)}{(\lambda-\lambda_0+i0)^l} \;+\; H^+(\lambda)\end{aligned}$$

其中$g_{j,\,+}$ 表示g_j 到实轴的光滑延拓，H^+ 表示 λ_0 附近的光滑函数，而 $\alpha_l=\sum_{k=0}^{\nu_0-l}\frac{1}{k}!g_{k+l,\,+}^{(k)}$。

负号情形则有所不同，因为 $\lambda - i\varepsilon$ 可以写成 z^2，其中z 位于 $-\sqrt{\lambda_0}$ 与 $\mathbb{C}_+$的交集的某个邻域内。由于 $-\sqrt{\lambda_0}$ 不是极点，截断预解式可全纯延拓至该区域，因此我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} a_3^-(\varepsilon) = H^-(\lambda),$$

其中 H^- 表示在 λ_0附近的一个光滑函数。

现在，我们比较前两项在实轴上具有相反边界值的情形。对于每个 $\varepsilon > 0$，定义

$$a_1^\pm(\varepsilon) := \operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\lambda \pm i\varepsilon)\big), \qquad a_2^\pm(\varepsilon) := -\operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\lambda \pm i\varepsilon)\, T_0(\lambda \pm i\varepsilon)\big).$$

由（7.4），立即可得，在分布的意义下，

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(a_1^+(\varepsilon) - a_1^-(\varepsilon)\Big) = \frac{i}{4\pi\sqrt{\lambda}}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)\,dx.$$

同理，利用（7.5），可得，在分布的意义下，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(a_2^+(\varepsilon) - a_2^-(\varepsilon)\Big) &= -\frac{i}{32\pi^2\sqrt{\lambda}}\int_{\mathbb{R}^6} V(x)\,V(y)\,\frac{e^{2i\sqrt{\lambda}\,|x-y|} + e^{-2i\sqrt{\lambda}\,|x-y|}}{|x-y|}\,dx\,dy \\ &= -\frac{i}{16\pi^2\sqrt{\lambda}}\int_{\mathbb{R}^6} V(x)\,V(y)\,\frac{\cos\big(2\sqrt{\lambda}\,|x-y|\big)}{|x-y|}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

使用前述记号，我们现在推导谱移位函数在出射谱奇点附近导数的奇异部分的显式表达式。

定理 7.12（ $\xi'(H, H_0; \lambda)$ 的显式分布公式）。假设 v具有紧支集，且 $\lambda_0 > 0$ 是 H 的一个有限阶出射谱奇点 ν_0。那么，在 λ_0的实邻域上的分布意义下，

$$\xi'(H, H_0; \lambda) = \sum_{l=1}^{\nu_0} \frac{\alpha_l(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0 + i0)^l} \;+\; H(\lambda),$$

其中 $H(\lambda)$ 在 λ_0附近光滑，且 $\alpha_l := \displaystyle\sum_{k=0}^{\nu_0 - l} \frac{1}{k!}\, g_{k+l,\,+}^{(k)}$，$g_{j,\,+}$ 是以下函数在实轴上的光滑延拓

$$g_j(\mu) := \operatorname{Tr}\big(T_0^{(1)}(\mu)\, A_{-j}\, V\, T_0(\mu)\big), \qquad \mu \in V_{\lambda_0} \cap \mathbb{C}_+,$$

其中 V_{λ_0} 是 λ_0的一个复邻域。

该公式表明，$\xi'(H, H_0; \lambda)$ 在 λ_0附近的奇异行为完全由加权预解式的有限秩留数 A_{-j}决定。特别地，$\xi'(H, H_0; \lambda)$ 的奇异部分具有与预解式 $\mathcal{R}_H(\lambda + i0^+)$ 的边界值相同的分布结构。这一现象相当自然，因为它源于出射谱奇点附近上半平面内预解式的统一控制失效。

注 7.13. 当 $\lambda_0 > 0$ 是 H 的入射谱奇点时，类似的公式成立，其中边界值为 $(\lambda - \lambda_0 - i0)^{-(j-k)}$，系数为 $g_{j,\,-}$。如果在 λ_0 处同时出现入射谱奇点和出射谱奇异点，分布导数 $\xi'(H, H_0; \lambda)$ 将同时获得来自两侧的贡献。

7.6. 高能渐近。在本节中，我们关注谱参数趋于 $+\infty$ 时谱移函数导数的渐近行为。我们计算渐近展开的首项，并证明它与自伴情形一致。我们采用的方法与自伴情形相同（见 [3]）。

下一个命题在关于 V 的短程假设下，给出了与 H 和 H_0 相关的谱移函数的高能渐近。

命题 7.14. 假设 V 是有界短程势，且满足 $\delta > 3$。假设 H 具有有限个特征值和有限个有限阶谱奇异点。那么

$$\xi'(\lambda, H, H_0) = \frac{1}{8\pi^2\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\ \mathrm{d}x + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \lambda \to \infty. \tag{7.15}$$

此外，若 V 属于 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$，且对某个 $\delta > 3$ 满足 $|\nabla V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\delta}$，那么

$$\xi'(\lambda, H, H_0) = \frac{1}{8\pi^2\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)\ \mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \lambda \to \infty. \tag{7.16}$$

证明. 由命题 7.2 的第 (3) 点可知，存在常数 $\lambda_0 > 1$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $\lambda \geq \lambda_0$ 和所有 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$，都有

$$\left\| T_0(\lambda \pm i\varepsilon) \right\|_{\mathcal{B}(L^2)} < 1$$

在一致（算子范数）拓扑下。因此，$\mathrm{Id} + T_0(\lambda \pm i\varepsilon)$ 可逆，且其逆具有纽曼级数展开

$$[\mathrm{Id} + T_0(\lambda \pm i\varepsilon)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, T_0(\lambda \pm i\varepsilon)^k, \tag{7.17}$$

其中级数关于算子范数在 ε 上一致收敛，直到 $\varepsilon \to 0^+$。结合 [11, 命题 4.7]，可知若 $\lambda > \lambda_0$，则 λ 是正则谱点。由命题 7.9，$\xi'(H, H_0, .)$ 在 $(\lambda_0, +\infty)$ 上连续，因此我们可以计算当 $\lambda \to +\infty$ 时 $\xi'(H, H_0, .)$ 的渐近行为。

接下来，由 (7.7) 和 (7.17) 可知，对所有 $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$，

$$\xi'(\lambda, H, H_0) = (2\pi i)^{-1} \Bigg(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda + i\varepsilon) - T_0^{(1)}(\lambda - i\varepsilon) \right) \tag{7.18}$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda + i\varepsilon) T_0(\lambda + i\varepsilon) - T_0^{(1)}(\lambda - i\varepsilon) T_0(\lambda - i\varepsilon) \right) \tag{7.19}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda + i\varepsilon) T_0(\lambda + i\varepsilon)^k - T_0^{(1)}(\lambda - i\varepsilon) T_0(\lambda - i\varepsilon)^k \right) \Bigg) \tag{7.20}$$

要计算（7.18）的极限，只需使用（7.4），于是有

$$(2\pi i)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\mu + i\varepsilon) - T_0^{(1)}(\mu - i\varepsilon) \right) = \frac{1}{8\pi^2\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) \mathrm{d}x.$$

要分析与（7.19）对应各项的渐近行为，可直接利用（7.5）进行计算

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda+i\varepsilon)\,T_0(\lambda+i\varepsilon)-T_0^{(1)}(\lambda-i\varepsilon)\,T_0(\lambda-i\varepsilon)\right)\Big]\\
&\quad=\mathrm{Tr}\left(T_0^{(1)}(\lambda+i0^+)\,T_0(\lambda+i0^+)-T_0^{(1)}(\lambda-i0^+)\,T_0(\lambda-i0^+)\right)\\
&\quad=\frac{i}{32\pi^2\sqrt{\lambda}}\int_{\mathbb{R}^6}V(x)\,V(y)\,\frac{\cos\big(2\sqrt{\lambda}\,|x-y|\big)}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (7.21)
\end{aligned}$$

根据黎曼–勒贝格引理，当 $\lambda\to\infty$ 时，该项按 $o(\lambda^{-1/2})$ 衰减。此外，若 $V\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$，且其梯度满足

$$|\nabla V(x)|=O\big(|x|^{-\delta}\big)\quad\text{for some }\delta>3,$$

则余项为 $\mathcal{O}(1/\lambda)$。

还需估计 (7.20)。应用命题 7.2 的 (3)，可知 $\big\|T_0(\lambda\pm i\varepsilon)^k\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}=\mathcal{O}\big(\lambda^{-\frac{k}{2}}\big)$。于是对于 $k\geq 2$，有：

$$\begin{aligned}
\big\|T_0^{(1)}(\lambda\pm i\varepsilon)T_0(\lambda\pm i\epsilon)^k\,\big\|_{\mathcal{L}_1}\;&\leq\;\big\|T_0^{(1)}(\lambda\pm i\varepsilon)\big\|_{\mathcal{L}_2}\,\big\|T_0(\lambda\pm i\epsilon)^{k-1}\big\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\,\big\|T_0(\lambda\pm i\varepsilon)\big\|_{\mathcal{L}_2} \qquad (7.22)\\
&=\mathcal{O}\big(\lambda^{-\frac{k}{2}}\big),
\end{aligned}$$

关于 $\varepsilon>0$ 一致。因此，(7.20) $=\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ 关于 ε 一致。 □

注 7.15. 在 [26], D. Robert 研究了自由拉普拉斯算子 H_0 受光滑实值衰减势 V 扰动时的散射相位高能渐近性，该算子作用于 $\mathbb{R}^n$。在衰减条件

$$|\partial_x^\alpha V(x)|\leq C_\alpha\langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|},\quad \rho>n,$$

谱移函数通过散射矩阵 $S(\lambda)$ 定义如下

$$\det S(\lambda)\;=\;\exp\big(-2\pi i\,\xi(\lambda;H,H_0)\big)\,. \qquad (7.23)$$

在耗散情形（即当 $\mathrm{Im}\,V\leq 0$ 时），Faupin 和 Nicoleau [14] 已证明散射矩阵 $S(\lambda)$ 是良定义的，并且具有显式表示公式。需要指出的是，尽管关系式 (7.23) 尚未在非自伴情形下得到证明，我们的定理结果与以下事实一致：在耗散情形下，$S(\lambda)$ 是一个压缩算子。

8. Explicit simple examples

为了阐释并讨论我们对谱移函数（SSF）的定义，我们给出一些极简单例子的显式计算。在这些玩具模型中，我们既能看到自伴情形下已知的现象（实特征值处的整数跳跃、谱奇点／共振处的分数跳跃、在这些奇点之外的光滑性，.....），也能看到一些新现象。第一个新现象是存在非实特征值时，SSF 不可积（对于迹类扰动）。第二个新现象是，SSF 不再是实函数。在我们的玩具模型中，如果扰动不与连续谱相互作用，SSF 仍为实函数，且其虚部的符号与扰动的符号有关。

8.1. 有限维情形：可对角化算子。当希尔伯特空间为 $\mathcal{H}=\mathbb{C}$时，考虑 H_0 的乘法算子以及 H 乘以 λ_0+v、 $v\in\mathbb{R}$的乘法算子。对于$f\in D$（$\mathbb{R}$）， f（H_0）是乘以 f（λ_0）的乘法算子。对于 H，这取决于 v 是否为实数。当 $v\in\mathbb{R}$时，f（H）是乘以 f（λ_0+v）的乘法算子；而当 $v\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$时， f（H）$=0$。因此，当 $v\in\mathbb{R}$时，谱移函数与标准的谱移函数相对应。根据微积分基本定理，我们有

$$\mathrm{Tr}(f(H)-f(H_0))=f(\lambda_0+v)-f(\lambda_0)=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+v}f'(\lambda)d\lambda$$

并且，除一个加性常数外，几乎处处有

$$\xi(\lambda;H,H_0)=\begin{cases}\mathbb{1}_{[\lambda_0,\lambda_0+v]}(\lambda)\ \text{if}\quad v\geq 0\\ -\mathbb{1}_{[\lambda_0+v,\lambda_0]}(\lambda)\ \text{if}\quad v\leq 0\end{cases}.$$

谱移函数在 H_0 和 H 的特征值处有两个跳跃。当 $v\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ，

$$\mathrm{Tr}(f(H)-f(H_0))=-f(\lambda_0)=\int_{\lambda_0}^{+\infty}f'(\lambda)d\lambda$$

并且，除一个加性常数外，有

$$\xi(\lambda;H,H_0)=\mathbb{1}_{[\lambda_0,+\infty)}(\lambda),$$

它在实特征值 λ_0 处有唯一的跳跃，而该特征值在扰动下变为非实特征值。与自伴情形不同， $\xi(\cdot;H,H_0)$ 并非紧支撑（也不可积）。这与受扰后的特征值 λ_0+v 不再是实数这一事实有关。

显然，对于对角矩阵（或可对角化矩阵），在 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^4$ 中也会出现相同的现象。例如，考虑以下对角矩阵

$$H_0:=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}\quad H:=H_0+V,\quad V:=\begin{pmatrix}v_1&0&0&0\\0&v_2&0&0\\0&0&v_3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

与 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4$和 $v_1>0$、 $v_2<0$、 $v_3\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，则

$$\mathrm{Tr}(f(H)-f(H_0))=f(\lambda_1+v_1)-f(\lambda_1)+f(\lambda_2+v_2)-f(\lambda_2)-f(\lambda_3),$$

并且，除一个加性常数外，我们有

$$\xi(\lambda;H,H_0)=\mathbb{1}_{[\lambda_1,\lambda_1+v_1]}(\lambda)-\mathbb{1}_{[\lambda_2+v_2,\lambda_2]}(\lambda)+\mathbb{1}_{[\lambda_3,+\infty)}(\lambda).$$

该函数在 H_0和 H的实特征值处有跳跃，但未扰动的特征值λ_4处除外。谱移函数在无穷远处等于1，这一事实与非实特征值 λ_3+v_3的出现有关。

8.2. 有限维中的一个不可对角化情形。考虑 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$中的一种情形，其中非自伴扰动不可对角化。例如，令

$$H_0:=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\quad H:=H_0+V,\quad V:=\begin{pmatrix}0&v\\0&0\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R},\quad v\in\mathbb{R}^*.$$

我们有 $f(H_0)=f(\lambda)I_2$以及 $f(H)=f(\lambda)I_2+f'(\lambda)\begin{pmatrix}0&v\\0&0\end{pmatrix}$，因为

$$(H-z)^{-1}=(\lambda-z)^{-1}I_2-(\lambda-z)^{-2}\begin{pmatrix}0&v\\0&0\end{pmatrix}.$$

那么 $\mathrm{Tr}(f(H) - f(H_0)) = 0$，在这种实谱在扰动下保持不变的情况下，谱移函数是一个可以取为零点的常数。

在前面讨论的具有离散谱的算子示例中，谱移函数只是一个阶梯函数，计算了 H_0 中受到扰动的特征值以及 H_γ 中受扰动后的实特征值。谱移函数的概念主要用于处理具有非空连续谱的算子，但谱移函数的显式计算很快就会变得复杂。下面讨论一个自伴算子的秩一扰动的简单示例，该算子具有连续谱。

8.3. 秩一扰动：与连续谱的弱相互作用。在空间 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ 中，我们考虑 H_0，它是由函数 $h_0(x)$ 乘以 $= x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ 的乘法算子；对于 $\gamma \in \mathbb{C}$，扰动为 $V_\gamma = \gamma\Pi_0$，其中 Π_0 是投影到归一化函数 $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ 上的正交投影：$\Pi_0 := \langle \cdot, u_0\rangle u_0$, $\|u_0\| = 1$。H_0 的谱为 $[0,1]$，且 0 是一个无限重特征值（每个支集位于 $[0,1]$ 之外的函数都是特征函数）。由于 V_γ 是 H_0 的紧扰动，因此 $H_\gamma = H_0 + V_\gamma$ 是闭的，其本质谱为 $[0,1]$。假设 u_0 的支集包含在 $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ 中，则 $H_0u_0 = 0$ 且 $H_\gamma u_0 := (H_0 + V_\gamma)u_0 = \gamma u_0$，也就是说，$u_0$ 是 H_γ 对应于特征值 γ 的特征函数。在这种情况下，我们有

$$(H_\gamma - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} + \big(\frac{1}{z} + \frac{1}{\gamma - z}\big)\Pi_0,$$

其中，$(H_0 - z)^{-1}$ 是由 $(x - z)^{-1}\mathbb{1}_{[0,1]} - z^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[0,1]}$定义的乘法算子。于是，对任意$f \in D(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(f(H_\gamma) - f(H_0)) = \begin{cases} f(\gamma) - f(0) & \text{if} \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ -f(0) & \text{if} \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases},$$

并且，除一个常数外，谱移函数几乎处处由下式给出：

$$\xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,\gamma]}(\lambda) & \text{if} \quad \gamma > 0 \\ -\mathbb{1}_{[\gamma,0]}(\lambda) & \text{if} \quad \gamma < 0 \\ \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\lambda) & \text{if} \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{cases}$$

在这种情况下，尽管存在连续谱，H_γ 和 H_0 的谱仅相差一个特征值，而谱移函数仍然是一个阶梯函数，其跳跃点位于受扰动影响的实特征值处。

值得一提的是，选取 $\arg D_V(\lambda) = 0$（当$\lambda \to -\infty$时），公式 (4.7) 给出相同的表达式。我们来检验一下 $\gamma = i\beta$, $\beta > 0$（$\gamma \in \mathbb{R}$ 的情形见 [2]）。我们有，

$$D_{V_\gamma}(z) := \mathrm{Det}\left(I + V_\gamma(H_0 - z)^{-1}\right) = 1 + \gamma\langle (H_0 - z)^{-1}u_0, u_0\rangle = 1 - \frac{\gamma}{z}$$

其极点 $z = 0$ 和零点 $z = \gamma$ 是 H的特征值。当 $\lambda \to -\infty$时，$D_{V_\gamma}(\lambda)$趋于 1，且我们将其辐角取为 0。于是，$D_{V_\gamma}(\lambda \pm i\varepsilon)$的对数有定义，且当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，它关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 连续光滑。我们有

$$\ln D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon) - \ln D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon) = a_\varepsilon(\lambda) + i\, b_\varepsilon(\lambda),$$

with

$$a_\varepsilon(\lambda) = \ln\left|\frac{D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon)}{D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon)}\right|, \qquad b_\varepsilon(\lambda) = \arg D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon) - \arg D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon).$$

显然，$\lim_{\varepsilon\to 0^+} a_\varepsilon(\lambda) = 0$，因为

$$\left|D_{V_\gamma}(\lambda \pm i\varepsilon)\right|^2 = \left|1 - \frac{i\beta}{\lambda \pm i\varepsilon}\right|^2 = \frac{\lambda^2 + (\beta \mp \varepsilon)^2}{\lambda^2 + \varepsilon^2} \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\lambda^2 + (\beta + \varepsilon)^2}{\lambda^2 + (\beta - \varepsilon)^2} = 1.$$

对于虚部 $b_\varepsilon(\lambda)$，当 λ 在实轴上从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，我们需要跟踪 $1-\frac{i\beta}{\lambda\pm i\varepsilon}$ 的辐角。“–”这种情况更简单，因为

$$1-\frac{i\beta}{\lambda-i\varepsilon}=1+\frac{\beta\varepsilon}{\lambda^2+\varepsilon^2}-\frac{i\beta\lambda}{\lambda^2+\varepsilon^2}$$

始终具有正实部，因此其辐角保持在 $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ 内。特别地，当该量为实数时，辐角为零（不存在转折点）。在“+”的情况下，我们有

$$1-\frac{i\beta}{\lambda+i\varepsilon}=1-\frac{\beta\varepsilon}{\lambda^2+\varepsilon^2}-\frac{i\beta\lambda}{\lambda^2+\varepsilon^2}$$

其实部（对于 $\lambda=\pm\sqrt{\beta\varepsilon-\varepsilon^2}$）两次为零，虚部（对于 $\lambda=0$）一次为零。于是，当 λ 趋于 $-\infty$ 时，其辐角从 0 变为 2π （当 λ 趋于 $+\infty$ 时）。当 $\lambda=0$ 和 ε 较小时，这些量符号相反，而相移为 π。对于 $\lambda\neq 0$， $1-\frac{i\beta}{\lambda+i\varepsilon}$和 $1-\frac{i\beta}{\lambda-i\varepsilon}$具有相同的极限 $1-\frac{i\beta}{\lambda}$，但转折点 0 产生了 2π的相移，并且我们有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} b_\varepsilon(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad \lambda<0\\ 2\pi & \text{if} \quad \lambda>0\end{cases}.$$

我们得到

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)-\ln D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)=\frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\lambda)+\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\lambda)\big),$$

这与上述 $\xi(\lambda;\, H_\gamma, H_0)$ 的表达式一致（除点 $\lambda=0$ 外，它与 $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\lambda)$ 重合）。

8.4. 秩一扰动：与连续谱的更强相互作用。在前一个例子中，谱移函数的计算因这一事实而得以简化：H_γ 和 H_0 的谱仅相差两个特征值，并且谱移函数仍然是一个阶梯函数。对于扰动与连续谱发生相互作用的情形，一个更有趣的例子是 $\operatorname{supp} u_0\cap[0,1]\neq\emptyset$ 的情况。考虑带有 $u_0=\mathbb{1}_{[0,1]}$的前述算子 H_0 和 $H_\gamma=H_0+V_\gamma$。在这种情况下， $f(H_\gamma)$ 的计算更加棘手，因此对于 $\gamma=i\beta,\beta>0$，我们更倾向于使用公式 (4.7) 来计算谱移函数 $\xi(\lambda;\, H_\gamma, H_0)$。由 $\beta<0$ 的 (4.8) 可知，只需取复共轭即可。

与自伴情形一样（参见 [2] 关于 $\gamma\in\mathbb{R}$ 的讨论），对于任意 $u\in L^2(\mathbb{R})$,

$$V_\gamma\mathcal{R}_0(z)u=\gamma\langle(H_0-z)^{-1}u\,,\,u_0\rangle u_0=\gamma\left(\int_{[0,1]}\frac{u(x)}{x-z}dx\right)u_0,$$

且对于 $\gamma=i\beta$、 $\beta>0$、 $z=x+iy$,

$$D_{V_\gamma}(z)=1+\gamma\langle\mathcal{R}_0(z)u_0,u_0\rangle=1-\beta\left(\arctan\frac{1-x}{y}+\arctan\frac{x}{y}\right)+i\frac{\beta}{2}\ln\left(\frac{(1-x)^2+y^2}{x^2+y^2}\right).$$

H_γ 的特征值为 0（与 H_0 的情形一样，相应的特征函数支集位于 $[0,1]$ 之外）以及 $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 中 D_{V_γ} 的零点，也就是说，满足以下条件的 $z=x+iy$

$$1=\beta\left(\arctan\frac{1-x}{y}+\arctan\frac{x}{y}\right);\qquad \ln\left(\frac{(1-x)^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=0,\qquad y\neq 0 \text{ or } x\notin[0,1].$$

当且仅当 $\beta>\frac{1}{\pi}$ 时，它有唯一解：$z_\beta:=\frac{1}{2}(1+i\coth\frac{1}{2\beta})$。因此，对于 $\beta\leq\frac{1}{\pi}$， H_γ 的谱为 $[0,1]$；而对于 $\beta>\frac{1}{\pi}$，它为 $[0,1]\cup\{z_\beta\}$，其中 z_β 是一个重数为一的特征值，并与特征函数 $w_\beta(x):=\frac{1}{z_\beta-x}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ 相关。对于 $\beta=\frac{1}{\pi}$，我们看到 $z_\beta=\frac{1}{2}$ 是一个

1 阶出射谱奇点。事实上， $V_{i\beta} = CWC$ ，其中 $C = \Pi_0$、 $W = i\beta$，并且由（7.6）可得，

$$C\mathcal{R}_{H_{i\beta}}(z)CW = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} + T_0(z))^{-1} = \Big(1 - \frac{1}{D_{V_{i\beta}}(z)}\Big)\Pi_0,$$

这里我们利用了 $T_0(z) := C\mathcal{R}_{H_0}(z)CW = i\beta\langle \mathcal{R}_0(z)u_0, u_0\rangle \Pi_0$。于是，由上述 $D_{V_{i\beta}}(z)$ 关于 $z = \frac{1}{2} + \delta + i\varepsilon, \varepsilon > 0$ 的表达式可推得，对于足够小的 $\delta + i\varepsilon$ ， $|z - \frac{1}{2}|^n \|C\mathcal{R}_{H_{i\beta}}(z)CW\|$ 关于 $\delta + i\varepsilon$ 一致有界，适用于 $n \geq 1$ （但不适用于 $n = 0$）。

现在，为了应用 (4.7)，我们来研究 $D_{V_\gamma}(z)$ 在 $z = \lambda \pm i\varepsilon, \varepsilon > 0$ 下的模和辐角，其表达式为：

$$D_{V_\gamma}(\lambda \pm i\varepsilon) = 1 \mp \beta \left(\arctan \frac{1-\lambda}{\varepsilon} + \arctan \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + i\frac{\beta}{2} \ln \left(\frac{(1-\lambda)^2 + \varepsilon^2}{\lambda^2 + \varepsilon^2} \right).$$

8.4.1. 谱移函数的虚部。 $\xi(\lambda; H_\gamma, H_0)$ 的虚部为：

$$\mathrm{Im}\, \xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \left| \frac{D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon)}{D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon)} \right|.$$

当 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$、$(1-\lambda)$ 和 λ 符号相反时，

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} D_{V_\gamma}(\lambda \pm i\varepsilon) = 1 + i\beta \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right),$$

与 ε 前面的正负号无关，并且

$$\mathrm{Im}\, \xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0, \qquad \text{for } \lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \tag{8.1}$$

当 $\lambda \in]0, 1[$, 时，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\arctan \frac{1-\lambda}{\varepsilon} + \arctan \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) = \pi.$$

于是，

$$\mathrm{Im}\, \xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{(1-\beta\pi)^2 + \beta^2 f(\lambda)^2}{(1+\beta\pi)^2 + \beta^2 f(\lambda)^2} \right) = G_\beta(f(\lambda)), \tag{8.2}$$

其中， G_β 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，其定义如下：

$$G_\beta(X) := \frac{1}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{4\beta\pi}{(1-\beta\pi)^2 + \beta^2 X^2} \right),$$

而 f 是从 $]0,1[$ 到 $\mathbb{R}$上的递减函数，定义如下：

$$f(\lambda) := \ln(\lambda^{-1} - 1), \quad \lambda \in]0,1[. \tag{8.3}$$

它是关于 $1/2$ 的对称函数（即 $f(1-\lambda) = -f(\lambda)$）。

由此可得，谱移函数的虚部为：

$$\mathrm{Im}\, \xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \lambda \notin [0,1] \\ G_\beta(f(\lambda)) & \text{if} \quad \lambda \in]0,1[\end{cases} \tag{8.4}$$

特别地，它的符号与 V_γ 的虚部相同，并且除 $\beta = \frac{1}{\pi}$ 外是连续的（谱奇异点 $z_\beta = \frac{1}{2}$是 $\mathrm{Im}\ \xi(\cdot; H_\gamma, H_0)$的奇点）。

8.4.2. 谱移函数的实部。谱移函数的实部为

$$\operatorname{Re}\xi(\lambda;H_\gamma,H_0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)-\arg D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)\right),$$

其中辐角的选取满足条件

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\arg D_{V_\gamma}(\lambda)=\arg 1=0.$$

• 当 $\beta\in]0,\frac{1}{\pi}[$, $D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)$ 的实部始终为正时，$\arg D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$且不存在转折点。因此

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)=\text{极限}_{\varepsilon\to0^+}D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)-\arg D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)\right)=0.$$

对于 $\lambda\notin[0,1]$，情况确实如此，因为

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)=1+i\frac{\beta}{2}\ln\left(\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2}\right)=1+i\beta\ln(1-\lambda^{-1}).$$

对于 $\lambda\in]0,\ 1[$,，再次利用 $D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)$ 的实部始终为正，且对于 $a>0$，$\arg(a+ib)=$ 反正切 $\frac{b}{a}$，对于 $f(\lambda)=\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\lambda)}{\lambda^2}^2=\ln(\lambda^{-1}-1)$，我们得到：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)-\arg D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)\right)=\arctan\frac{\beta f(\lambda)}{1-\beta\pi}-\arctan\frac{\beta f(\lambda)}{1+\beta\pi}=2\pi F_\beta(f(\lambda))$$

其中，F_β 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，其定义为

$$F_\beta(X):=\frac{1}{2\pi}\left(\arctan\frac{\beta X}{1-\beta\pi}-\arctan\frac{\beta X}{1+\beta\pi}\right),\qquad\beta\neq\frac{1}{\pi}.$$

由此可得，对于 $\beta\in]0,\ \frac{1}{\pi}[$,，谱移函数是下面这个支集包含于 $[0,1]$ 上的连续函数：

$$\xi(\lambda;H_\gamma,H_0)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad\lambda\notin[0,1]\\ (F_\beta+iG_\beta)(f(\lambda)) & \text{if}\quad\lambda\in]0,1[\end{cases}.\tag{8.5}$$

• 现在，考虑情形 $\beta>\frac{1}{\pi}$，此时 H_γ 的谱为 $[0,1]\cup\{z_\beta\}$，其中 $z_\beta:=\frac{1}{2}(1+i\coth\frac{1}{2\beta})$。在这种情况下，$D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)$ 的实部仍为正，而 $D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)$ 则经过 0。这将使 $\lambda\in]0,\ 1[$ 的相移为 2π。首先，如上所述，对于 $\lambda<0$，当 $\varepsilon\searrow0$ 时，$D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)$ 都趋于 $1+i\beta\ln(1-\lambda^{-1})$，并且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)-\arg D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)\right)=0.$$

对于 $\lambda\in]0、\ 1[$,，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}D_{V_\gamma}(\lambda\pm i\varepsilon)=1\mp\beta\pi+i\beta f(\lambda);\qquad f(\lambda)=\ln(\lambda^{-1}-1).$$

那么，与之前一样

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\arg D_{V_\gamma}(\lambda-i\varepsilon)=\arctan\frac{\beta f(\lambda)}{1+\beta\pi}.$$

相反，由于 $(1-\beta\pi)<0$，对于 $\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)$，我们必须考虑相移 π and

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\arg D_{V_\gamma}(\lambda+i\varepsilon)=\pi+\arctan\frac{\beta f(\lambda)}{1-\beta\pi}.$$

对于 $\lambda > 1$， $D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon)$ 和 $D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon)$ 具有相同的极限（与 $\beta < \frac{1}{\pi}$ 一样），但相移变为 2π。因此，最终对于 $\beta > \frac{1}{\pi}$，我们得到：

$$\xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \lambda < 0 \\ (\frac{1}{2} + F_\beta + iG_\beta)(f(\lambda)) & \text{if} \quad \lambda \in]0,1[\\ 1 & \text{if} \quad \lambda > 1 \end{cases}. \tag{8.6}$$

- 最后，我们来讨论这一例中的情形：$\beta = \frac{1}{\pi}$，此时 $z_\beta = \frac{1}{2}$ 是一个谱奇异点。与前面的情形一样，对于 $\lambda < 0$，我们得到 $\xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = 0$。对于 $\lambda \in]0, 1[$，$D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon)$ 的实部趋于 0^+，当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，其虚部改变符号于 $\lambda = \frac{1}{2}$。于是，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \arg D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon) = \frac{\pi}{2}\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{2}[}(\lambda) - \frac{\pi}{2}\mathbb{1}_{]\frac{1}{2},1[}(\lambda),$$

而

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \arg D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon) = \arctan \frac{\beta f(\lambda)}{1 + \beta\pi} = \arctan \frac{f(\lambda)}{2\pi}.$$

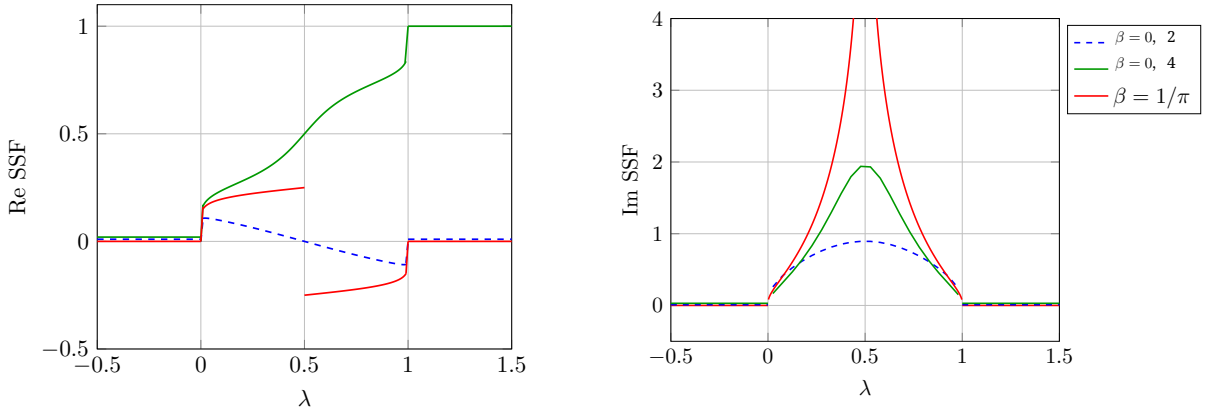
对于 $\lambda > 1$，$D_{V_\gamma}(\lambda + i\varepsilon)$ 和 $D_{V_\gamma}(\lambda - i\varepsilon)$ 的实部均为正，且由于它们具有相同的极限，因此没有相移。因此，当 $\beta = \frac{1}{\pi}$ 时，谱移函数为如下函数，它在谱奇异点 $z_\beta = \frac{1}{2}$ 处不连续：

$$\xi(\lambda; H_\gamma, H_0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \lambda \notin [0,1] \\ F_{\pi^{-1}}(f(\lambda)) & \text{if} \quad \lambda \in]0,1[\backslash\{\frac{1}{2}\} \end{cases}, \tag{8.7}$$

with

$$F_{\pi^{-1}}(X) := \lim_{\beta \to (1/\pi)^-} F_\beta(X) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{X}{2\pi}\right) & \text{if} \quad X < 0 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{X}{2\pi}\right) & \text{if} \quad X > 0. \end{cases} \tag{8.8}$$

为了直观展示公式 (8.5)、(8.6) 和 (8.7) 之间的差异，我们来看看在特定情形 $\beta = 0.2 < \frac{1}{\pi}$、$\beta = \frac{1}{\pi}$ 和 $\beta = 0.4 > \frac{1}{\pi}$ 下，谱移函数 $\xi(\cdot; H_\gamma, H_0)$ 的实部和虚部的图形表示。



当 $0 < \beta < \frac{1}{\pi}$ 扰动 $V_{i\beta}$ 不产生新的特征值或谱奇异点，并且$\xi(\cdot;\ H_{i\beta}, H_0)$在 $\mathbb{R}$上连续。对于 $\beta > \frac{1}{\pi}$，当 λ穿过连续谱时会发生1的跳跃

$[0,1]$可以用非实特征值 $^{z_\beta}$ 的出现来解释。最后，对于 $\beta = \frac{1}{\pi}$， $\xi(\cdot;\, H_{i\beta}, H_0)$ 的实部在谱奇异点 $\lambda = \frac{1}{2}$ 处有一个高度为$_{12}$的跳跃。此外，在该点，谱移函数的虚部会发散。

Acknowledgments

本研究部分在 France 2030 框架计划及亨利·勒贝格中心 ANR-11-LABX-0020-01 的支持下开展。V.B 部分获得 ANR-24-CE40-2939-01 项目资助。N.F. 获得卢瓦尔河地区（R´egion Pays de la Loire）的资助，用于开展由 Clotilde Fermanian Kammerer 牵头的 Connect Talent 项目 HiFrAn 2022 07750，以及 ANR-25-CE40-7296（La Gabare）。V.B 和 F.N. 也感谢法国 GDR Dynqua 的支持。

References

[1] A. Alexander, J. Faupin, S. Richard *Levinson's theorem for dissipative systems or how to count the asymptotically* , , ArXiv . . [2] V. *disappearing states* 2509 12799 Bruneau *The Spectral Shift Function for Quantum Hamiltonians*, 2025年预印本，即将发表于 Panoramas et Synth`eses, SMF. [3] Colin de Verdi`ere, Yves, *Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^3$, 《Annales scientifiques de l'´ Ecole Normale Sup´erieure》，27–39页，Elsevier，第四辑，14，1981年。[4] C. Cheverry and N Raymond *A Guide to Spectral Theory - Applications and Exercices* Birkh¨aeuser Advanced Texts Basler Lehrbaecher，2021年。[5] E. B. Davies *The functional Calculus*, 《伦敦数学学会杂志》，第52卷第1期，1995年8月，166-176页。[6] E. B. Davies *Linear Operators and their Spectra*, 《高等数学剑桥研究丛书》第106卷。剑桥：剑桥大学出版社，（2007），451页。[7] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I: General Theory*, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], 纽约-伦敦-悉尼，1958年。[8] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part III: Spectral operators*, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], 纽约-伦敦-悉尼，1971年。[9] S. Dyatlov and M. Zworski. *Mathematical theory of scattering resonances* 200, , 美国数学会数学 2019 研究丛书。[10] J. Faupin and J. Fr¨ohlich, *Asymptotic completeness in dissipative scattering theory*, 《Adv. Math.》，340, (2018)，300–362页。[11] J. Faupin and N. Frantz *Spectral decomposition of some non-self-adjoint operators*, 《Annales Henri Lebesgue》，第6卷（2023），1115-1167页。[12] R. L. Frank, A. Laptev, and O. Safronov, *On the number of eigenvalues of Schrödinger operators with complex potentials* 2 94, 2016 377 390 ，《伦敦数学学会杂志》， （） （），–。[13] N.Frantz *Scattering theory for some non-self-adjoint operators*, 《数学物理评论》，2024年） 2450023。[14] J. Faupin and F. Nicoleau, *Scattering matrices for dissipative quantum systems*, 《J. Funct. Anal.》，9, (2019)，3062–3097页。[15] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, 第一卷：性质与运算，学术出版社，1964年。[16] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory* 1983 ，学术出版社，。

[17] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 第二版，Springer-Verlag，1980年。[18] I. M. Lifshits, *On a problem in perturbation theory*, 《数学科学进展》，7（1952），171–180页（俄语）。[19] M. G. Krein, *On the trace formula in perturbation theory*, 《数学文集》，33（1953），597–626页（俄语）。[20] M. Malamud and H. Neidhardt, *Trace formulas for additive and non-additive perturbations* 274, 《 Adv. Math.》- （）。[21] M. Malamud, H. Neidhardt and V. V. Peller 736 832 2015 *Absolute continuity of spectral shift* 276, 5, 《J. Funct. 1575 1621 2019 Anal.》第-期（）。[22] A. Jensen and T. Kato, *Spectral properties of Schrodinger operators and time decay of the wave functions*, 《杜克数学杂志》46(3)：583-611（1979年9月）。[23] A.R. Mirotin *Lifshitz-Krein trace formula for Hirsch functional calculus on Banach spaces*《复分析与算子理论》13卷，第3期，1511-1535页（2019）。[24] A. Pushnitski, *The spectral shift function and the invariance principle*, 《J. Funct. Anal.》，183（2001），269–320页。

[25] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I–IV*。学术出版社 [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 纽约-伦敦，1975–1980年。[26] D. Robert, *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, 《渐近分析》3(4)（1991），301–320页。[27] A. V. Rybkin *The spectral shift function for a dissipative and a selfadjoint operator and trace formulas for resonances* , 《苏联数学文集》- (); 译自《数学文集》新辑 (), 第 () 期, - 430页（俄语）[28] A. V. Rybkin *The spectral shift function, the characteristic function of a contraction and a generalized integral* 《俄罗斯科学院数学文集》83卷，第1期，237-281页（1995）；译自《数学文集》185卷，第10期，91-144页（1994）（俄语）。[29] J. Schwartz, *Some non-selfadjoint operators*, 《纯粹与应用数学通讯》，13，(1960)，609–639页。[30] X. P. Wang. *Time-decay of semigroups generated by dissipative Schrödinger operators* 《微分方程杂志》，253，(2012)，3523–3542页。[31] D. R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory: General Theory*，美国数学会，1992年。[32] D. R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory: Analytic Theory*。《数学调查与专著》第158卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010年。

（V. Bruneau）波尔多数学研究所，CNRS混合研究单位5251，波尔多大学，解放大道351号，33405 塔朗斯 Cedex，法国 电子邮箱：vbruneau@math.u-bordeaux.fr

（N. Frantz）昂热大学、法国国家科学研究中心、LAREMA，
F-49000 昂热，法国 电子邮箱：nicolas.frantz@univ-angers.fr

（F. Nicoleau）Jean Leray 数学实验室，CNRS混合研究单位6629。南特大学，F-44000 南特 电子邮箱：francois.nicoleau@univ-nantes.fr