深水孤子的衍射

Filip Novkoski，[1, 2, *] Loïc Fache，[1, 3, †] Félicien Bonnefoy，[4] Guillaume Ducrozet，[4] Jason Barckicke，[1] François Copie，[3] Pierre Suret，[3] Eric Falcon，[1] 和 Stéphane Randoux[3]

[1]巴黎西岱大学、法国国家科学研究中心、物质与复杂系统实验室，法国巴黎 *F-75013*[2]*PULS*、理论物理研究所、埃尔朗根-纽伦堡大学，德国埃尔朗根 *91058*[3]里尔大学、法国国家科学研究中心、激光、原子与分子物理实验室，法国里尔 *F-59 000*[4]南特大学、南特中央理工学院、法国国家科学研究中心、*LHEEA*，*UMR 6598*，法国南特 *F-44 000*

孤子是局域化的非线性波包，由于非线性与色散相平衡，它们能够传播而不展宽。孤子在有效的一维系统中的稳定性已得到充分理解，但通常认为，引入额外的空间维度会使其失稳或破坏其相干特性。在此，我们通过衍射引入受控的横向自由度，实验研究深水重力波孤子的行为。我们利用大型水波实验设施生成孤子波包，并通过窄缝或平滑的高斯加权，在分段式造波机上施加横向结构。随后以高空间分辨率测量形成的二维波场。衍射改变了波包的横向剖面，而其纵向动力学仍保留孤子的典型特征。非线性谱分析证实，沿传播方向的孤子成分得以保持，而横向演化则遵循线性菲涅耳衍射定律。这些观测揭示了非线性孤子动力学与经典波衍射出人意料地共存。

arXiv:2603.21801v1 [nlin.PS] 23 Mar 2026

衍射是波传播的一种基本且普遍的结果。对衍射进行定量描述，对于确立光的波动性具有重要作用，最著名的例子是菲涅耳基于惠更斯原理提出的波动理论 [1]。在这一框架下，只要波遇到阻抗或边界条件的空间变化，就会产生衍射，而这与具体的物理系统无关。因此，衍射不仅出现在光学中 [2] ，也出现在其他波动系统中，例如声波 [3], 、弹性波 [4], 和表面水波 [5]。

在水面上，衍射在海岸水动力学中发挥着核心作用，尤其体现在海浪与防波堤等人工构筑物之间的相互作用中；这些构筑物能够保护海岸线 [6], 。边缘、孔径和间隙的影响长期以来一直受到理论研究 [6–10] 和实验研究 [11, 12], ，但研究主要局限于线性区间。然而，在真实的海洋条件下，非线性效应变得显著，可能形成包络孤子和呼吸子等相干结构 [13, 14], ，并以此作为怪波形成的模型 [15, 16]。

孤子是相干波包，在本质上是一维传播时具有鲁棒性。然而，它们对横向扰动天生敏感——这是自然环境中无法避免的特征——因此通常认为它们无法在二维中保持持久性 [17–23]。近期的光学实验表明，非线性波包在某些二维构型中可能仍能保持鲁棒的孤子动力学 [24]。然而，相干水波孤子如何响应横向空间自由度的引入这一问题在实验上仍基本未得到探索。

非线性自稳定与横向扩展之间的竞争引出了一个根本问题：孤子在真正的二维环境中发生衍射时会如何表现？在深水中，衍射、色散和非线性同时作用，而横向动力学的引入从根本上改变了波演化。在这种条件下，孤子会失去相干性，还是仍能保持可辨识的结构，至今仍未有定论。

本文研究深水孤子在二维中的衍射。我们通过实验表明，尽管存在横向动力学且一维约束被打破，孤子仍紧密遵循线性菲涅耳衍射的预测，同时保留其孤子频谱成分。通过将受控实验室实验与数值模拟相结合，我们量化了波前的横向变形，并揭示了线性衍射定律与非线性相干波动力学之间一种出乎意料的对应关系。

I. 理论背景

我们研究中关注并通过实验测量的量是水的水面高程$\eta(x,\ y,\ t)$。在线性区间内，具有谐波时间依赖的二维表面波表示为 $\eta(x,\ y,\ t) = u(x,\ y)e^{i\omega t}$，其中 ω 为角频率，空间包络 $u(x,\ y)$ 满足亥姆霍兹方程： [5, 25]

$$\left(\partial_{xx} + \partial_{yy} + k^2\right) u(x,y) = 0, \tag{1}$$

与 $k = 2\pi/\lambda$ 波数。

* filip.novkoski@fau.de
† loic-joseph.fache@u-pariscite.fr

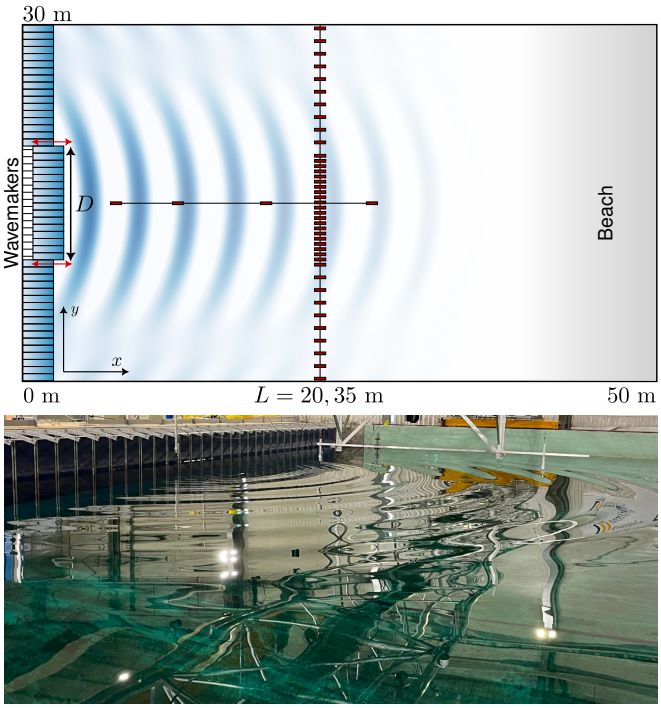


图 1. 实验装置。上图：用于实验的三维水槽示意图（俯视图，非按比例绘制）。沿 y 轴在 $x = 0$ m 处布置了 48 台计算机控制的分段式造波机，可精确调节所生成波的横向剖面。水平红线：45 个波面高程探针以非均匀间距布置在离散的传播距离 $x = 1$–25 m 和横向位置$y \in [0.1, 29.64]$m 处，如探针阵列所示。载波波长约为 $\lambda_c \simeq 1.3$ m。下图：开口宽度为 $D = 1.2$ m 的衍射波图像（即 48 个挡板中有 2 个打开），见影片 S1 和 S2。

位于 $x = 0$ 处的孔径对单色波的衍射可由菲涅耳–基尔霍夫积分描述；该积分在二维情况下给出孔径后方的场 $u(x, y)$，即 [25]

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_0)\left(-\frac{kx}{2i\,r}\right) H_1^{(1)}(kr)\,\mathrm{d}y_0, \qquad (2)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}$ 和 $H_1^{(1)}$ 是第一类一阶汉克尔函数，而 y_0 是在 $x = 0$处沿孔径平面的横向坐标。函数 $p(y_0)$表示孔径处的入射场分布，由狭缝几何决定；在我们的实验中，该分布由启用的造波机数量决定（见图 1）。在对积分进行数值计算时，我们采用基尔霍夫近似，在孔径内令 $p(y_0) = 1$，在孔径外令 $p(y_0) = 0$。

然而，当波幅较大时，线性描述便不再适用，因为非线性效应会显著改变波传播。在假设波沿 x方向近轴传播的条件下，弱非线性深水波包的演化则由以下方程支配：

（二维）+1双曲型非线性薛定谔方程（HNLSE）[26–28]。该方程描述了复包络 $A(x,\ y,\ t)$ 的动力学，该包络对应一个波数为 k_0 、沿 x方向传播、载波频率为 $\omega_0 = \sqrt{g k_0}$的载波波，g 其中是重力加速度。

$$\partial_x A + \frac{1}{c_g}\partial_t A = -\frac{i}{4k_0}\left(\partial_{xx}A - 2\partial_{yy}A\right) - ik_0^3|A|^2 A, \quad (3)$$

其中 $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k\big|_{k_0}$ 为群速度。水面高程 $\eta(x, y, t)$ 可用一阶近似表示为 [28]

$$\eta(x,y,t) = \mathrm{Re}\left\{A(x,y,t)\,e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}\right\}. \qquad (4)$$

在弱非线性区域的主导阶上，包络以群速度 c_g传播，因此$\partial_t A + c_g \partial_x A \simeq 0$ [28, 29]。此关系用于改写纵向二阶色散项，而输运算子 $\partial_x + c_g^{-1}\partial_t$ 保持不变，因为它定义了包络演化。因此，高阶非线性薛定谔方程写为

$$\partial_x A + \frac{1}{c_g}\partial_t A = -i\left(\frac{1}{g}\partial_{tt}A - \frac{1}{2k_0}\partial_{yy}A\right) - ik_0^3|A|^2 A. \qquad (5)$$

虽然波在纵向仍为聚焦（如下文所示），但在横向却为散焦，这引发了人们对其在存在这一额外空间维度时稳定性的疑问 [17, 21]。为研究这一状态并与实验进行比较，我们对（5）进行数值积分（见方法）。

若假设解与横向方向 y无关，我们便可得到（1D +1）聚焦非线性薛定谔方程（NLSE），它对应于沿 x 轴的纯单向波传播，形式如下

$$\partial_x A + \frac{1}{c_g}\partial_t A = -\frac{i}{g}\partial_{tt}A - ik_0^3|A|^2 A, \qquad (6)$$

与 (3) 和 (5) 不同，该方程是可积的，并可通过逆散射变换（逆散射变换）求解 [30–32]。众所周知，方程 (6) 的基本单孤子解可写为 [26, 33, 34]，

$$\eta(x,t) = a\ \mathrm{sech}\left[\frac{ak_0\omega_0}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{x}{c_g}\right)\right] \times \cos\left[\omega_0 t + k_0\left(1 + \frac{k_0^2 a^2}{4}\right)x\right], \qquad (7)$$

其中 a为孤子包络振幅的最大值。在逆散射变换框架中，孤子由相关散射问题的一个离散复特征值 ζ 表征。该特征值的虚部决定孤子振幅，实部则与其传播速度相关。该特征值通过求解相应的散射问题获得（见方法）。

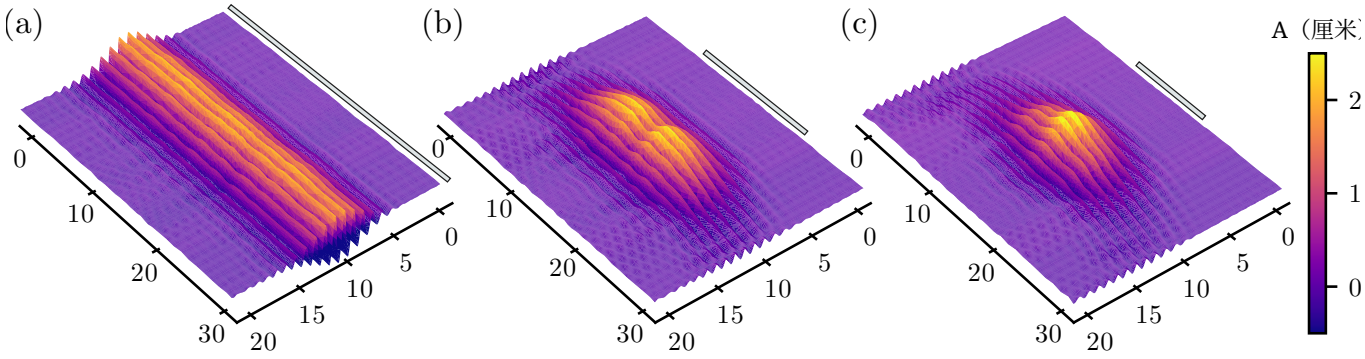


图 2. 测得的孤子水面高程 $\eta(y,\ t)$ 其陡峭度为 $\epsilon = k_0 a = .097$ 由位于 $L = 20$ m 处的波浪探针测得，狭缝开口（见白色矩形）分别为三种不同宽度 $D = 30$（a）、15（b）和 10（c）m。对于最大的开口（a），我们观察到经典的一维非线性薛定谔方程孤子波形 [(7)]。如（b）和（c）所示，孔径宽度减小会使孤子的横向（y）尺寸缩小，但我们仍能在水槽中心观察到相干结构。此外，横向剖面中出现了明显的极小值和极大值，这与经典波衍射相符。

II. 实验装置

实验在法国南特中央理工学院的大型波浪水槽（50 米长 × 30 米宽 × 5 米深）中进行。实验装置示意图见图 1。造波机制由48台可独立控制的造波机（宽0.62 米的翻板，铰接点位于自由水面下2.8米处）组成，安装在水槽的一端，即 $x = 0$。另一端设有一处倾斜的消波滩。

我们重点研究两种类型的孤子波形：狭缝衍射孤子和高斯光束（沿 y方向具有横向高斯分布的孤子，见图 1）。这里的“狭缝”一词借用于光学衍射，因为孔径是通过选择性驱动一组有限的相邻造波机来实现的。为产生衍射孤子，造波机由频率固定为 $f_0 = 1.1$ Hz [的单色载波驱动，即载波波长固定为$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = g/(2\pi f_0^2) \simeq 1.3\,\mathrm{m}]$,，并按照式（7）所示的一维非线性薛定谔方程孤子解，在 $x = 0$处进行双曲正割振幅调制。载波波数 k_0保持不变，而孤子的最大包络振幅 a 在典型值 $0.4 - 2$cm 附近变化，其典型尺寸为 $L_x = gT_0/\omega_0 \in [5.38, 25]$ m，其中 T_0为孤子的典型持续时间。对应的载波陡度 $\epsilon \equiv k_0 a$ 在范围 [0.019, 0.044, 0.070, 0.097, 0.127]内进行考察，使我们能够探测从弱非线性到强非线性的不同状态。如果所有造波机均同相驱动，就会生成横向延伸覆盖水槽全宽（30 m）的一维非线性薛定谔方程孤子，并向海滩传播。通过改变工作的造波机数量，我们可以改变衍射孔径 D（见图 1 顶部），以观察其对孤子传播和衍射的影响。参数 D 从较小的 0.6 m 孔径变化至水槽全宽 30 m。

为了产生高斯光束，载波现在沿造波机进行振幅调制，即沿横向 y 方向。通过对不同造波机的驱动振幅进行加权，我们对初始孤子横向剖面实施高斯渐变加权，从而能够可控地平滑孔径边缘。

水面高程 $\eta(t)$ 由一组45 个电阻式波浪探针记录。其中，41 个探针沿一条可选横向直线排列，距造波机 L=20 m 或 L=35 m。探针间距为 1 m，但中间的 23 个探针间距为 0.5 m，以提高空间分辨率。其布置如图1顶部所示。另有四个探针位于主传播方向上。传感器的垂直分辨率为 0.1 mm，频率带宽为 20 Hz，采样频率为 128 Hz。为了考察色散、衍射和非线性在当前配置中的影响，有必要引入相应的特征长度及其在本实验中的可测范围。式（5）中的色散项定义了色散长度 $L_{\mathrm{disp}} = gT_0^2 \in [141, 3285]\,\mathrm{m}$。横向衍射项给出衍射长度 $L_{\mathrm{diff}} = 2k_0 D^2 \in [9.7, 3895]$ m。最后，非线性项定义了非线性长度 $L_{\mathrm{NL}} = 1/k_0^3 a^2 \in [12.7, 569]$ m。

III. 孤子的狭缝衍射

如上所述，我们生成的波包，其纵向动力学对应于精确的单孤子解（7）（1D+1）非线性薛定谔方程。通过改变孔径宽度 D，我们引入可控的横向衍射。图2展示了三种不同孔径开口下产生的波场。对于最大开口（图2a），当所有造波机均启动时，式（7）所描述的经典非线性薛定谔方程单孤子得以重现。随着孔径宽度减小（图2b–c），波包仍保持局域，同时横向受限于水槽中心区域，其宽度与设定的开口相符。这一现象还伴随着

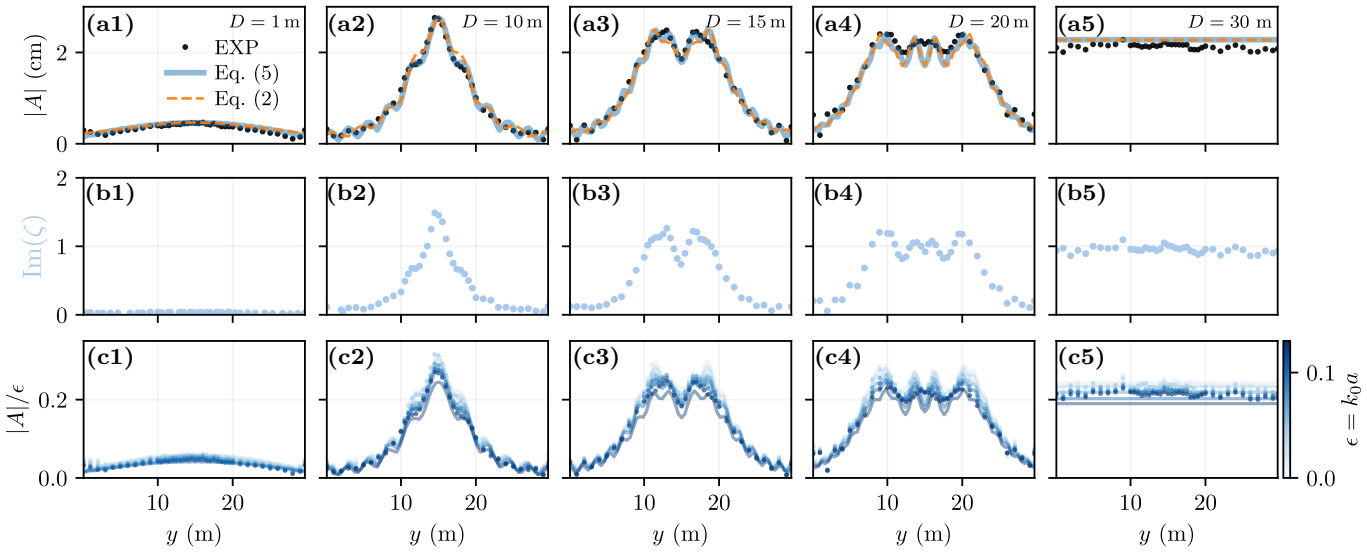


图 3. 衍射深水孤子的横向结构。振幅和 IST 剖面，并与高阶非线性薛定谔方程及亥姆霍兹衍射进行比较。各列对应不同的孔径宽度 $D = 1$、10、15、20 和 30 m（从左至右），测量时的传播距离固定为 $L = 20$ m。(a1–a5) 横向包络振幅 $|A(y)|$。黑点：实验数据 ($\epsilon = 0.097$)；蓝色实线：高阶非线性薛定谔方程 (5) 的数值模拟；橙色虚线 (2)：矩形狭缝宽度为 D 时的线性亥姆霍兹衍射，计算采用载波波数 k_0。对每个面板中的亥姆霍兹预测结果，均乘以一个单一比例因子，使其峰值振幅与实验值相匹配。(b1–b5) 从纵向波场中提取的 IST 谱，以横向坐标 y 为自变量表示。蓝色点表示离散特征值的虚部 Im(ζ)，该值表征孤子振幅。在 y 范围内存在离散特征值，表明波包具有孤子特性。(c1–c5) 不同孤子振幅下的陡峭度归一化横向振幅 $|A(y)|/\epsilon$，孤子振幅为 $a \in [0.37, 2.61]$cm，均由相同孔径 D 产生。每次实验均展示了不同陡峭度值 $\epsilon = k_0 a \in [0.02, 0.13]$ 下的实验曲线（标记）及相应的高阶非线性薛定谔方程剖面（实线）；颜色表示孤子陡峭度，如右侧色标所示。

此时清晰可见的弯曲波前。此外，我们还可以观察到孤子的横向 y剖面中出现了明显的极大值和极小值，表明衍射图样已经形成。

图中更清楚地呈现了这些特征。3(a1– a5)显示，在距离 $A(L, y)$ $L = 20$ 米处，横向包络振幅会随着孔径宽度D 的增加而展宽，同时逐渐形成具有交替横向极大值和极小值的典型衍射图样。将测得的振幅剖面（圆点）与方程（5）的数值解（实线）进行比较，可见二者高度吻合，证实高阶非线性薛定谔方程能够准确描述不同孔径下的孤子衍射。我们还将数据与由亥姆霍兹方程推导出的方程（2）（橙色虚线）所给出的经典菲涅耳–基尔霍夫预测进行了比较。值得注意的是，尽管孤子本质上是非线性波包，其经过狭缝时的衍射仍可由经典线性理论定量描述。

为进一步阐明狭缝衍射下的孤子行为，我们使用逆散射变换（IST）分析纵向测量，具体方法详见“方法”。这种方法能够对每个横向位置处沿纵向方向的 (1D+1) 非线性薛定谔方程进行非线性谱表征。与单独的包络测量不同，逆散射变换可直接给出用于量化孤子成分的离散特征值。

离散复特征值 $\zeta(y)$ 随横向位置的变化如图3(b1–b5)所示，对应的孤子振幅为 Im$[\zeta(y)]$。当孔径宽度 D足够大时，特征值在整个横向范围内仍保持清晰可辨，即使包络呈现出显著衍射。这表明，尽管有限孔径会改变波前的横向结构，但每个横向位置处的纵向动力学仍由孤子行为所支配。

相比之下，对于较小的孔径宽度（见图3b1），未检测到离散特征值，这表明不存在孤子成分。这揭示了孔径尺寸阈值的存在：低于该阈值时，波场将变为纯色散状态，孤子动力学也随之消失。

这些观察结果表明，有限孔径引起的横向衍射会重塑孤子前沿，却不会破坏其纵向孤子特性。因此，我们观察到沿传播方向 x 的一维可积孤子动力学与横向线性扩展并存。这种行为的起因可以从物理上加以理解。在纯色散介质中，波包会沿传播方向展宽，而孔径处的衍射则会产生与其谱分量相关联的菲涅耳图样叠加。

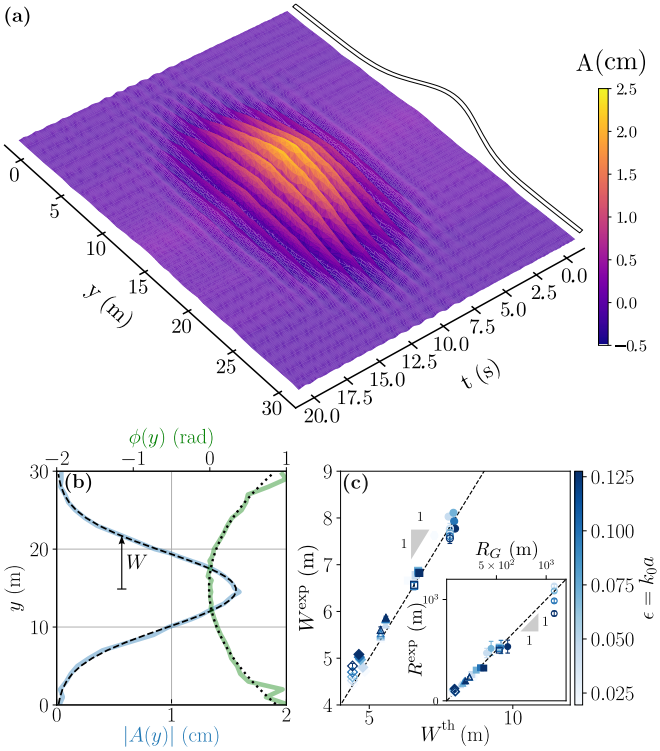


图 4。（a）测得的孤子高斯光束的水面高程 $\eta(y,t)$，其 $\epsilon \approx 0.072$ 和束腰为 $W_0 \approx 6.43$ m。该光束在横向上高度局域化；不同于狭缝衍射孤子，由于高斯加权（白色标尺），我们观察到规则得多的波前。（b） $x = 20$m处参考孤子的横向截面，显示测得的包络振幅 $|A(y)|$（蓝色实线）及其高斯拟合（黑色虚线），以及相应的展开后的横向相位分布 $\phi(y)$（绿色实线）及其抛物线拟合（黑色点线），由此提取波前曲率半径。箭头表示高斯包络拟合得到的横向束腰 W。（c）对于不同初始束腰 W_0，测得的束腰 Wexp 随理论预测值 W^{th}((8)) 的变化。插图：测得的曲率半径 $R^{\exp}$ 与理论曲率半径 R_{G}((8)) 的对比。在图（c）及其插图中，实心符号表示实验结果，空心符号表示高阶非线性薛定谔方程模拟。标记形状表示不同的初始束腰（$W_0 \approx \diamond 3.87$、 $\triangle 5.15$、 $\square 6.43$ 和 $\circ 7.73$ m），右侧的颜色刻度表示孤子的陡峭度 $\epsilon = k_0 a$。

然而，在这里，逆散射变换分析表明，波包保留了其孤子成分：沿 x 方向的色散持续受到非线性的平衡，因此波包在纵向上始终有效地保持无色散。相比之下，在横向上，控制方程呈散焦特性，无法提供相当的非线性自约束。因此，横向演化主要由衍射主导。由于纵向结构保持完整，横向场表现得如同一个相干、无色散的物体，可由基于亥姆霍兹方程推导出的经典菲涅耳衍射理论准确描述。因此，孤子在传播方向上基本保持其非线性特性，同时经历线性横向衍射。

最后，我们考察孤子振幅对衍射图样的影响，如图所示。3(c1– c5)。振幅 $|A(y)|$ 以波陡度 ϵ归一化，并与（5）的数值模拟结果进行比较。所得衍射图样在不同探测非线性效应下呈现出明显的自相似性（见右侧色条），且不同孔径宽度 D下亦是如此。这种不变性表明，当 D 足够大时，纵向孤子动力学仍保持完整，而横向衍射基本不受孤子振幅影响。

IV. 具有横向高斯分布的孤子

上一节中，我们通过对造波机运动进行横向锐利截断来引发衍射，这对应于狭缝几何。现在，我们跳出这一配置，引入高斯光束光学中的概念，从不同视角探究孤子衍射。在光学中，高斯光束为描述衍射和光束扩展提供了一种基础且便于解析处理的方式 [35]。我们在深水水面上通过沿造波机阵列施加高斯加权，并使其位于 $x = 0$ 水槽中心y轴上，在实验中重现了这一几何构型。由此产生的波场构成了光学高斯光束的真正水动力学类比，但有一个关键区别：其纵向动力学仍由非线性薛定谔方程支配，并保留孤子特性，而横向包络最初呈高斯分布，束腰为 W_0。这种构造使我们能够直接检验高斯光束广为确立的传播定律是否适用于非线性孤子波包。图中展示了以这种方式生成的孤子表面位移测量实例。4a，显示其在横向 y方向以及时间（即 x方向）上都具有明显的局域性。

我们预计，波场的演化遵循标准的傍轴高斯光束传播规律 [35]

$$W(x) = W_0\sqrt{1+\left(\frac{x\lambda_0}{\pi W_0^2}\right)^2},\quad R_G(x) = x\left[1+\left(\frac{\pi W_0^2}{x\lambda_0}\right)^2\right], \tag{8}$$

其中， $W(x)$ 是在 x 处由孤子包络 $|A(x,\ y)|$ 提取的束腰， $R_G(x)$ 是根据横向相位推断出的曲率半径，而 λ_0 是载波波长。实验中也观察到，在利用电致伸缩操控水波时，会出现类似的传播规律 [36]。

我们在图中展示了经高斯加窗的孤子的实测横向剖面。4b，结果表明，该孤子在传播后确实仍能极好地保持高斯形状，

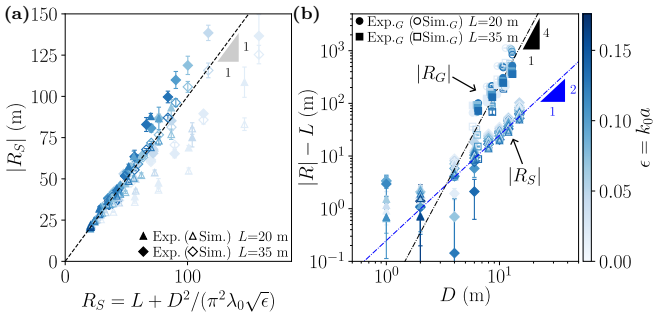


图 5。（a）孤子波前曲率半径的绝对值 $|R_S|$，由载波波前提取，随重标度变量 $L + D^2/(\pi^2\lambda_0\sqrt{\epsilon})$ 的变化，其中 L为传播距离， D 为横向孔径（狭缝）宽度， λ_0 为载波波长， $\epsilon = k_0 a$ 为陡峭度。实心（空心）符号表示实验（高阶非线性薛定谔方程模拟）。三角形对应 $L = 20\,\mathrm{m}$，菱形对应 $L = 35\mathrm{m}$。颜色表示 ϵ。误差棒表示对各个载波振荡分别拟合后所得结果的标准差。黑色虚线（斜率为 1）突出显示了式（9）的经验塌缩。（b）（双对数坐标）：曲率 $|R| - L$ 随 D 的变化。圆形（$L = 20\mathrm{m}$）和方形（$L = 35\mathrm{m}$）表示由二次相位拟合提取的高斯加窗光束（R_G）（实心：实验；空心：高阶非线性薛定谔方程模拟），其中 $D = 2W_0\sqrt{\ln 2}$，对应五种不同的陡峭度值。黑色点划线对应 $L = 35$ m 时的式（8），蓝线对应 $\epsilon = 0.1$ 时根据式（9）预期的 D^2 标度。这些数据点的误差棒来自二次相位拟合的不确定度，该不确定度根据拟合参数的协方差矩阵估算。

无论是振幅还是相位皆如此。波前的曲率可直接从载波的横向相位中提取；该相位在局部范围内可用二次拟合很好地描述 $\phi(y) \simeq \phi_0 + \alpha y^2$（见虚线），由此得到曲率半径 $R^{\exp} \equiv k_0(2\alpha)^{-1}$。尽管在光学领域，高斯光束的这种表征方法十分常见，但通常都是间接获得的：要么基于高斯光束假设，根据光束腰斑的演化推算 [35],，要么采用专门的波前传感技术，例如夏克–哈特曼传感器或塔尔博特效应方法 [37–41] 而非直接测量载波相位。相比之下，我们的流体动力学系统能够直接获取完整的时空波场，从而测量载波波前的曲率。通过对不同宽度和非线性效应重复测量，我们在图4c 中证实，这类孤子完全遵循式（8）所示的关系；实验结果（实心符号）和数值结果（空心符号）均如此。这首次实现了深水环境中聚焦高斯光束的实证呈现与控制。

V. 衍射孤子的曲率半径

利用可直接获得的波前曲率，我们进一步研究狭缝衍射孤子并将其与高斯加窗孤子进行比较。在固定 L的情况下，二次相位分布能够很好地局部描述波前振荡，且该分布定义在 y中，由此可以定义曲率半径（高斯加窗孤子的处理过程见图4b）。

图 5a 展示了狭缝衍射孤子的所有曲率测量结果。每组数据对应一个给定的传播距离（$L = 20$ 或 35 m）、孔径宽度D和陡峭度 ϵ，其中颜色表示 ϵ，空心符号表示高阶非线性薛定谔方程模拟。值得注意的是，尽管参数范围如此广泛，所有数据点仍出乎意料地很好地落在同一条斜率为 1的直线上（黑色虚线）；只需按照以下方式重新缩放横坐标即可：

$$R_S = L + \frac{D^2}{\pi^2\lambda\sqrt{\epsilon}}, \tag{9}$$

据我们所知，这种关系此前尚未见报道。这种数据塌缩首先表明，孔径的影响主要体现为二次依赖关系，$R_S - L \propto D^2$。其次，它揭示了非线性通过因子 $1/\sqrt{\epsilon}$ 产生的显著影响；也就是说，在 L 和 D固定时，增大 ϵ 会减小 R_S，这意味着波前会变得更加弯曲。这一趋势与衍射波前的有效非线性聚焦相符 [42, 43]。换言之，尽管横向扩展仍由有限孔径决定，非线性效应会重新调节局部波前几何。

图 5b 通过将狭缝衍射行为（菱形和三角形符号）与高斯加窗孤子（方形和圆形符号，见第 IV节）进行比较，展现了其相对特征；后者的初始横向剖面平滑，而非截断。如图4c 所示，在这种情况下，束腰和曲率均遵循标准的高斯光束传播预测（8），因此对横向尺寸的依赖性强得多，即 $R_G \propto D^4$ 因为 $W_0 = D/(2\sqrt{\ln 2})$。狭缝衍射孤子的 D^2 标度关系 R_S与高斯加权孤子的 D^4 标度关系 R_G并存，凸显了在 $x = 0$处的初始横向整形对于确定波前几何具有决定性作用。

目前，对经验标度关系（9）的理论描述仍是一个开放问题。

VI. 结论

我们研究了一维深水孤子在二维衍射作用下的演化。受光学领域的启发——在光学中，通常使用狭缝或高斯加权来整形光束的横向剖面——我们将这一理念拓展至水波：在造波机附近维持纵向相干孤子结构的同时，引入受控的横向自由度。

尽管增加了一个空间维度，波包仍保留其孤子特性。横向扩展可以用线性菲涅耳衍射理论非常准确地描述，而非线性频谱

与孤子动力学相关的特征则沿传播方向持续存在，逆散射变换方法清楚地证明了这一点。因此，线性衍射与非线性相干性共存于同一波结构中。

相干结构在维度扩展下的稳健性，是许多领域共同关注的核心问题，因为人们已知高维效应会触发横向不稳定性 [17] 或从定性上改变孤子动力学 [19, 22, 44]。这一问题在非线性光学和玻色–爱因斯坦凝聚态中具有直接的应用价值，在等离子体物理和海洋波动力学中亦是如此。我们的结果表明，从可积一维动力学向真正二维行为的转变是渐进的，而非突发的。更广泛地说，这一可控实验平台提供了一个定量框架，可用于探索弱非可积区制，并检验试图衔接理想可积模型与现实非线性波系统的微扰方法 [45–49]。

VII. 方法

二维非线性薛定谔方程的积分

我们采用伪谱格式，在（t, y）平面上对延迟时间参考系中的双曲型（2D+1）非线性薛定谔方程（（5））进行数值积分，其复包络为 $A(x,t,y)$。场在矩形周期区域 $t \in [-L_t/2, L_t/2]$, $y \in [-L_y/2, L_y/2]$ 上离散，采用大小为 $N_t \times N_y$ 的均匀网格；导数 ∂_{tt} 和 ∂_{yy} 在傅里叶空间中使用快速傅里叶变换计算，而三次项 $|A|^2 A$ 则在物理空间中计算。在模拟中，我们使用 $L_t = 80$ s 和 $L_y = 110$ m，其中网格点数为 $N_t = 512$ 和 $N_y = 256$ 。随后，使用显式自适应龙格–库塔积分器（DOP853） [50]，沿传播变量 x 对所得常微分方程组进行积分。初始条件以孤子波形重现实验驱动，其横向剖面（超高斯、高斯或其他形式）与实验孔径相匹配。参数由实验载波频率（$k_0 = \omega_0^2/g$）和陡峭度 $\epsilon = k_0 a$ 确定。

实验数据的逆散射变换谱

对于由 N 个孤子构成的非线性薛定谔方程（NLSE）解，离散谱由 N 个复特征值 ζ_n 组成，每个复特征值都与一个复归一化常数 C_n 相关联，该常数表征相应的相位。这些量共同构成该解的完整散射数据。

离散谱通过求解与 NLSE 的 Lax 对公式相关联的特征值问题来确定。每个特征值都有直接的物理意义：其实部对应孤子速度，虚部则决定孤子振幅。

在 NLSE 的聚焦情形下，相关的特征值问题可化简为 Zakharov–Shabat 谱问题 [51],

$$\hat{\mathcal{L}}\,\Phi = \zeta\,\Phi, \qquad \hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} i\partial_\xi & -i\psi \\ -i\psi^* & -i\partial_\xi \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中， $\Phi(\xi,\zeta)$ 是一个矢量波函数。 $\zeta \in \mathbb{C}$ 表示构成离散谱的特征值，它们与场 $\psi(\tau,\xi)$ 中的孤子成分相关；该场是在给定演化时间 τ（或实验中的传播距离 x ）下测得的，并且对应于每个 y坐标。物理包络 $A(x,t)$ 与问题 (10) 中使用的无量纲变量之间的关系为：$\tau = x k_0^3 a^2/8$、 $\xi = \sqrt{k_0^2\omega_0^2 a^2/8}\left(t - \frac{x}{c_g}\right)$ 和$\psi(\tau,\xi) = A(x,t)/(a/2)$，见 [52, 53]。

我们根据水面高程重建缓变复包络$A(x;y)$ $\eta(x,\ t;y)$ ：通过希尔伯特变换，以频率 ω_0 和波数 k_0 对载波进行解调，从而得到包络的振幅和相位。随后，按照上文给出的标准深水 NLSE 归一化对包络进行重新缩放。对于每个横向位置 y，将重建的包络 $A(x;y)$ 作为 Zakharov-Shabat 谱问题（10）的初始条件。随后，按照 y 中所述的流程，使用傅里叶配置法数值求解每个横向位置 [32]对应的 Zakharov-Shabat 问题；该方法此前已在实验中成功用于 [52, 53]。

致谢

感谢 A. Levesque、S. Mazo、B. Pettinotti（ECN）在实验装置方面提供技术帮助。本研究部分得到法国国家研究署通过 SOGOOD（资助编号：ANR-21-CE30-0061）项目以及西蒙斯基金会 MPS- WT No. 651463 项目的支持。F. C.、P. S. 和 S. R. 感谢 CDP C2EMPI 的支持，以及法国政府通过法国2030计划、里尔大学、里尔大学卓越计划和里尔欧洲大都会为 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目提供的经费和支持。F.N 感谢洪堡基金会提供博士后奖学金。

[1] A. Fresnel, 《光的衍射回忆录》（1821年）。[2] M. Born 和 E. Wolf, 《光学原理：传播、干涉与光衍射的电磁理论》, 第4版（Pergamon Press, 牛津, 1970年）。[3] G. Bekefi, 《美国声学学会杂志》25, 205（1953）。[4] A. N. Guz'、V. D. Kubenko 和 M. A. Cherevko, 《苏联应用力学》14, 789（1978）。[5] J. J. Stamnes, 《焦区中的波：光、声和水波的传播、衍射与聚焦》（Routledge, 2017年）。[6] R. A. Dalrymple 和 P. A. Martin, 《水道、港口、海岸与海洋工程杂志》116, 727（1990）。[7] W. G. Penney 和 A. T. Price, 《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑》244, 236（1952）。[8] R. A. Dalrymple 和 J. T. Kirby, 《流体力学杂志》192, 33–50（1988）。[9] Y. Goda、T. Takayama 和 Y. Suzuki, “方向随机波的衍射图”, 载于《1978年海岸工程》（1978年）, 第628–650页。[10] M. Buccino、S. Tuozzo 和 M. Calabrese, 《海岸工程》199, 104740（2025年）。[11] F. L. B. Jr. 和 J. W. Johnson, 《美国地球物理联合会汇刊》30, 705（1949年）。[12] J. D. Pos 和 F. A. Kilner, 《水道、港口、海岸与海洋工程杂志》113, 1（1987年）。[13] K. Dysthe、H. E. Krogstad 和 P. Müller, 《流体力学年度评论》40, 287（2008年）。[14] M. Onorato、L. Cavaleri、S. Randoux、P. Suret、M. I. Ruiz、M. De Alfonso 和 A. Benetazzo, 《科学报告》11, 23606（2021年）。[15] M. Onorato、S. Residori、U. Bortolozzo、A. Montina 和 F. Arecchi, 《物理学报告》528, 47（2013年）。[16] C. Kharif、E. Pelinovsky 和 A. Slunyaev, 《海洋中的怪波》（Springer Science & Business Media, 2008年）。[17] V. Zakharov 和 A. Rubenchik, 《实验与理论物理学杂志》65, 997（1973年）。[18] J. Ghidaglia 和 J. Saut, 《非线性科学杂志》6, 139（1996年）。[19] Y. S. Kivshar 和 D. E. Pelinovsky, 《物理学报告》331, 117（2000年）。[20] D. E. Pelinovsky, 《数学与计算机模拟》55, 585（2001年）。[21] B. Deconinck、D. E. Pelinovsky 和 J. D. Carter, 《英国皇家学会会刊A辑》462, 2039（2006年）。[22] C. Sulem 和 P.-L. Sulem, 《非线性薛定谔方程：自聚焦与波坍缩》, 第139卷（Springer Science & Business Media, 2007年）。[23] M. J. Ablowitz 和 J. T. Cole, 《物理评论快报》127, 104101（2021年）。[24] L. Dieli、D. Pierangeli、F. Baronio、S. Trillo 和 C. Conti, 《物理评论快报》136, 053804（2026年）。[25] J. J. Stamnes, 《美国光学学会杂志》71, 15（1981年）。[26] V. E. Zakharov, 《应用力学与技术物理学杂志》9, 190（1968年）。[27] J.-M. Ghidaglia 和 J.-C. Saut, 《非线性科学杂志》3, 169（1993年）。[28] A. R. Osborne, 载于《散射》（Elsevier, 2002年）, 第637–666页。[29] A. Chabchoub、K. Mozumi、N. Hoffmann、A. V. Babanin, A. Toffoli, J. N. Steer, T. S. van den Bremer, N. Akhmediev, M. Onorato, 和 T. Waseda, 美国国家科学院院刊 116, 9759 (2019年)。[30] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, 和 V. E. Zakharov, 《孤子理论：逆散射法》（Springer Science & Business Media, 1984年）。[31] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, 和 H. Segur, 《物理评论快报》31, 125 (1973年)。[32] J. Yang, 《可积与不可积系统中的非线性波》（工业与应用数学学会, 2010年）。[33] M. Remoissenet, 《称为孤子的波：概念与实验》（Springer Science & Business Media, 2013年）。[34] A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot, B. Semin, S. Au- maître, M. Berhanu, F. Bonnefoy, 和 E. Falcon, 《流体物理评论》3, 114802 (2018年)。[35] O. Svelto, D. C. Hanna, 等, 《激光原理》, 第 1 卷（施普林格, 2010年）。[36] V. Mouet, B. Apffel, 和 E. Fort, 美国国家科学院院刊 120, e2216828120 (2023年)。[37] D. R. Neal, W. J. Alford, J. K. Gruetzner, 和 M. E. Warren, 载于《第三届激光束与光学表征国际研讨会》, 第 2870 卷（国际光学工程学会, 1996年）, 第 72–82 页。[38] V. Y. Zavalova 和 A. V. Kudryashov, 载于《高分辨率波前控制：方法、器件与应用 III》, 第 4493 卷（国际光学工程学会, 2002年）, 第 277–284 页。[39] D. Thul, M. Richardson, 和 S. Rostami Fairchild, 《科学报告》10, 8920 (2020年)。[40] A. Goloborodko, 《美国光学学会杂志A》40, B8 (2023年)。[41] M. M. Kotov, V. P. Danko, 和 A. O. Goloborodko, 《光学与激光工程》169, 107718 (2023年)。[42] V. Zakharov, 《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》26, 994 (1968年)。[43] S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, 和 R. V. Khokhlov, 《苏联物理学进展》10, 609 (1968年)。[44] K. Moll, A. L. Gaeta, 和 G. Fibich, 《物理评论快报》90, 203902 (2003年)。[45] D. Kaup, 《工业与应用数学学会应用数学杂志》31, 121 (1976年)。[46] V. Karpman 和 E. Maslov, 《实验与理论物理学杂志》73, 537 (1977年)。[47] Y. S. Kivshar 和 B. A. Malomed, 《现代物理评论》61, 763 1989( )。[48] A. Gelash, S. Dremov, R. Mullyadzhanov, 和 D. Kachulin, 《物理评论快报》132, 133403 (2024年)。[49] L. Falsi, A. Villois, F. Coppini, A. J. Agranat, E. DelRe, 和 S. Trillo, 《物理评论快报》133, 183804 (2024年)。[50] E. Hairer, G. Wanner, 和 S. P. Nørsett, 《常微分方程求解 I：非刚性问题》（施普林格, 1993年）。[51] A. Shabat 和 V. Zakharov, 《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》34, 62 (1972年)。[52] P. Suret, A. Tikan, F. Bonnefoy, F. m. c. Copie, G. Ducrozet, A. Gelash, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El, 和 S. Randoux, 《物理评论快报》125, 264101 (2020年)。[53] L. Fache, F. Bonnefoy, G. Ducrozet, F. m. c. Copie, F. Novkoski, G. Ricard, G. Roberti, E. Falcon, P. Suret, G. El, 和 S. Randoux, 《物理评论 E》109, 034207 (2024年)。