arXiv:2603.21841v1 [cs.LO] 23 Mar 2026

树状范畴公理*

Tomáš Jakl[1] 和 Luca Reggio[2]

[1] 捷克共和国布拉格捷克技术大学
tomas.jakl@cvut.cz https://tomas.jakl.one

[2] 意大利米兰米兰大学 luca.reggio@unimi.it
https://lucareggio.github.io/

摘要。 树状范畴最初被引入，作为博弈余单子的公理化框架；博弈余单子为逻辑中的许多模型比较博弈提供了余单子视角。我们指出，声称路径是连通的这一公理并不充分。随后，我们提出“树连通性”的概念来弥补这一不足，并表明据我们所知，树状范畴的所有基本性质在这一新定义下仍然成立。此外，我们还证明路径函子是一个 Street 纤维化。

目录

1 引言.1 2 预备知识.3 3 博弈余单子及其余代数范畴.6 4 树状范畴与连通性的失效.11 5 重新定义树状范畴：树连通性.14 6 重新审视 $\mathscr{M}$-子对象的偏序集.16 7 路径函子是一个 Street 纤维化.18

1 引言

博弈余单子于 [1,9] 中被引入，旨在以范畴论和余单子论的方式阐述有限模型论中的若干核心概念。其关键洞见在于，模型论（有限模型论）的基本工具——模型比较博弈——可以自然地组织为关系结构范畴上的自函子，并赋予余单子结构。事实上，这些自函子根据博弈规则，对给定关系结构中可能的对局或位置进行编码，而对局集合上的关系结构则由获胜条件导出。主要例子包括：

(i) 卵石游戏刻画无穷一阶逻辑有限变量片段中的等价$\mathcal{L}_{\infty,\,\omega}$；它们对应于卵石博弈余单子 [1]。

* 这是某篇论文的扩展版本，该论文将发表于第 18 届计算机科学中的余代数方法国际研讨会（CMCS 2026）论文集。

(ii) Ehrenfeucht–Fraïssé 游戏刻画普通一阶逻辑片段中的等价$\mathcal{L}_{\omega,\,\omega}$，其中量词秩有界；它们对应于 [9,10]中引入的*Ehrenfeucht–Fraïssé*余单子 。(iii) 双模拟游戏刻画模态深度有界的模态逻辑（的标准翻译）中的等价；它们对应于同上中引入的模态余单子 。

多年来，博弈余单子一词已被广泛用于描述模型比较博弈的余单子。其他例子包括混合逻辑 [4], 受限合取逻辑 [28,33],描述逻辑 [15], 带广义量词的逻辑 [29] 或守卫量词 [3],以及路径谓词逻辑 [19]

Eilenberg–Moore 余代数范畴在该理论中居于核心地位。首先，其结构用于关联博弈余单子与相应的模型比较博弈。其次，余代数编码了关系结构的分解，从而与树深度和树宽度等重要的组合参数建立对应关系；这一点已被用于例如 [18,31,11] 中。

为了捕捉博弈余单子的 Eilenberg–Moore 余代数范畴的共同特征， [6,7] 提出了树状范畴的公理化框架。该公理化框架基于一个关键洞见：余自由余代数编码了遵循博弈规则进行的对局，而这些对局可以从外部识别为有限“线性有序”余代数到余自由余代数的嵌入。

有限线性有序余代数被抽象地定义为路径，即根据所选分解系统，具有有限子对象链的对象。树状范畴公理确保路径具有良好的性质，并且由 Joyal、Nielsen 和 Winskel [25] 提出的广义双模拟等价概念，等价于在路径嵌入之间进行的抽象往返游戏概念。

在第 4 节中，我们回顾树状范畴的定义，并说明尽管其公理在上述 (i)–(ii) 项的情形下是可靠的，但其中一个公理并不满足于 (iii) 项中的模态余单子的（余代数）。事实上，对于定义在带常元的关系结构（例如带指定点的 Kripke 框架）上的余单子，该公理并不成立。

有问题的公理断言，路径按照下文定义 5 的意义是连通的。在碎石和 Ehrenfeucht–Fraïssé 余单子的情形下，该公理成立，此时余代数是满足适当性质的森林序结构。连通对象的概念涉及余积；在底层森林序层面上，余积通过形成不交并得到。相比之下，模态余单子的余代数是树序的；也就是说，底层森林序具有底元素。特别是在形成余积时，必须将底元素识别。这正是连通性公理失效的根本原因，如例 8 所示。

在第5节中，我们通过引入全新的树连通性概念来取代存在问题的连通性概念，从而修订了树状范畴的定义。使用连通性公理在 [6,7] 中确立的树状范畴的主要性质，在将连通性替换为树连通性后仍然成立。更多详情请参见第6节。我们相信，这一新

提出的树状范畴概念（参见定义 11）不仅弥补了现有缺陷，还带来了稳健的结构理论：

– 作者所知的所有博弈余单子的余代数范畴，若按照 [6] 中的定义属于树状范畴，也按照新定义属于树状范畴。– 模态余单子的余代数按照新定义构成树状范畴（但按照 [6]中的定义则不然）。– 正如我们在第 7 节中所证明的，从树状范畴[3] 到树范畴的路径函子是一个纤维化。– 一大类树状范畴满足表示结果。有关这一点以及树状范畴结构理论其他方面的更多信息，请参阅论文末尾的“未来工作”一节。

本文的目的有二。首先，提出新的连通性公理，并说明旧公理的不足之处。其次，向通用余代数界介绍博弈余单子与树状范畴理论；为此，我们从这一视角展示主要示例。

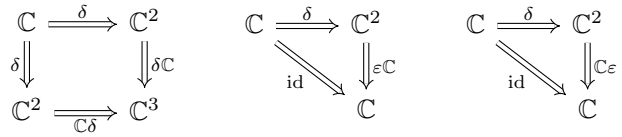
与现有树状范畴文献的关系。自 [6], 中引入树状范畴以来，已有不少关于树状范畴或与之相关的文章发表。这些文章包括 [7,8,30,2]。这些论文中确立的有关树状范畴的所有事实，在新提出的树状范畴概念下仍然成立。第6节将进一步说明如何调整相关证明。关于线性树状范畴的论文 [5] 则需要进一步审视。

2 预备知识

我们假设读者熟悉范畴论的基本概念，例如函子、自然变换、伴随、极限和余极限（参见 [12] 或 [14]）。本节回顾有关余单子、余代数和分解系统的一些基本事实。尽管本文的技术重点并非余单子，但理解这一主题是领会主要示例所必需的。

2.1 余单子与余代数

范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个余单子是一个元组（$\mathbb{C}$，ε，δ），其中 $\mathbb{C}\colon\ \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 是一个自函子，且余单位 $\varepsilon\colon\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathsf{Id}$ 和余乘法 $\delta\colon\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}^2$ 是自然变换，使得下列图表交换。



[3] 在本条及下一条中，“树状范畴”均指新的定义。

给定一个函子 $F\colon\ \mathscr{C} \to \mathscr{C}$，对于 F 的自函子余代数是一个对（$A,\ \alpha$），其中 α 是 $\mathscr{C}$ 中类型为 $A \to FA$ 的态射。余代数（$A,\ \alpha$） $\to$（$B,\ \beta$）之间的态射是 $\mathscr{C}$ 中满足下列方形交换的态射 $h\colon\ A \to B$。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ FA & \xrightarrow[Fh]{} & FB \end{array}$$

另一方面，给定范畴 $\mathscr{C}$上的余单子 $\mathbb{C}$，关于 $\mathbb{C}$的*Eilenberg–Moore* 余代数是一个自函子余代数 $(A,\ \alpha)$，即一个态射 $\alpha\colon\ A \to \mathbb{C}A$，满足以下图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \searrow^{\mathrm{id}} & \\ \mathbb{C}A & \xrightarrow[\varepsilon_A]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}^2A \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_A} \\ \mathbb{C}A & \xrightarrow[\mathbb{C}\alpha]{} & \mathbb{C}^2A \end{array}$$

我们用 EM(ℂ) 表示关于 $\mathbb{C}$ 的 Eilenberg–Moore 余代数范畴，以及它们之间的余代数态射。遗忘函子 EM(ℂ) $\to \mathscr{C}$ 将 $(A,\ \alpha)$ 映为 A，并且有一个右伴随，将 A 映为余自由余代数 $(\mathbb{C}(A)\ \delta_A)$。本文中大多数关注的余代数都是 Eilenberg–Moore 余代数。若不致混淆，我们就简称它们为余代数。

2.2 分解系统

我们回顾一些关于分解系统的基本事实；更多细节可见于例如 [13, 第 14]章和 [32, §11.2]。范畴 $\mathscr{C}$上的一对态射类 $(\mathscr{Q},\ \mathscr{M})$ 是一个正交分解系统，如果

1. 每个态射 f 属于 $\mathscr{C}$ 都可以写成 $f = m \cdot q$，其中 $q \in \mathscr{Q}$ 和$m \in \mathscr{M}$；
2. 对于每个 $q \in \mathscr{Q}$ 和 $m \in \mathscr{M}$，以及下方左侧所示的每个交换方块，

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{q} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{q} & \bullet \\ \downarrow & \swarrow^{d} & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{m} & \bullet \end{array}$$

存在唯一的对角填充子，即满足上方右侧图表交换的态射 d；

3. $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{M}$ 在与同构复合后仍然封闭。

设 $(\mathscr{Q}, \mathscr{M})$ 是某个范畴中的正交分解系统。我们将$\mathscr{Q}$-态射称为商，并记作 $\twoheadrightarrow$；将 $\mathscr{M}$-态射称为嵌入，并记作 $\rightarrowtail$。若 $(\mathscr{Q}, \mathscr{M})$ 是一个真分解

系统，即每个商都是满态射，且每个嵌入都是单态射。此外，若 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 稳定，则称其为稳定的；这意味着沿嵌入对商作拉回总是存在，且结果仍为商。

我们将直接使用以下关于正规分解系统 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{M})$ 的标准事实（例如参见 [20,32]）：

– $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{M}$ 都在复合运算下封闭；– $\mathcal{Q} \cap \mathcal{M}$ 恰好是同构类；– 类 $\mathcal{M}$ 在任意态射下所有存在的拉回运算中封闭；– $g \circ f \in \mathcal{M}$ 蕴含 $f \in \mathcal{M}$，对偶地，$g \circ f \in \mathcal{Q}$ 蕴含 $g \in \mathcal{Q}$。

以下结果使我们能够将分解系统从基范畴提升到余单子对应的余代数范畴。

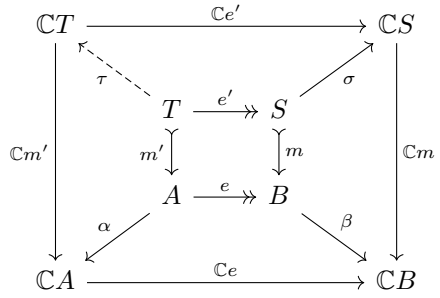
引理 *1.* 设 $\mathbb{C}$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 上的余单子，且该范畴带有正规分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$。若 $\mathbb{C}$ 保持嵌入，则 $EM(\mathbb{C})$ 具有正规分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$，其中余代数态射 $h\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ 属于 $\mathcal{Q}$（分别地，$\mathcal{M}$），当且仅当其底层态射 $h\colon A \to B$ 属于 $\mathcal{Q}$（分别地，$\mathcal{M}$）。此外，若 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 稳定，且 $\mathbb{C}$ 将商沿嵌入的拉回映为弱拉回，则 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 也稳定。

证明。只要 $\mathbb{C}$ 保持嵌入，由 [27, 引理 2] 的一个推广即可推出 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{M})$ 是一个正规分解系统。

对于该陈述的第二部分，设 $e\colon (A,\ \alpha) \twoheadrightarrow (B,\ \beta)$ 和 $m\colon (S,\ \sigma) \rightarrowtail (B,\ \beta)$ 分别是 $\mathbf{EM}(\mathbb{C})$ 中的一个商和一个嵌入。我们将底层态射的拉回表示如下。

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{e'} & S \\ {\scriptstyle m'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow{e} & B \end{array}$$

由于 $\mathbb{C}$ 将后一个拉回映射为一个弱拉回，因此存在一个态射 τ 使下面的图表交换。



我们断言 (T, τ) 是一个 Eilenberg–Moore 余代数。由 ε 的自然性可知

$$m' \circ \varepsilon_T \circ \tau = \varepsilon_A \circ \mathbb{C}m' \circ \tau = \varepsilon_A \circ \alpha \circ m' = m',$$

其中，最后一个等号成立是因为 (A, α) 是一个余代数。因此，由于 m' 是单态射，我们得到 $\varepsilon_T \circ \tau = \mathrm{id}$。接下来，为了验证等号 $\delta_T \circ \tau = \mathbb{C}\tau \circ \tau$，我们注意到

$$\mathbb{C}^2 m' \circ \delta_T \circ \tau = \delta_A \circ \mathbb{C}m' \circ \tau = \delta_A \circ \alpha \circ m' = \mathbb{C}\alpha \circ \alpha \circ m',$$

其中，第一个等号由 δ的自然性得出，第二个等号由上述图表左侧面的交换性得出，第三个等号则是因为（A，α）是一个余代数。接着，利用左侧面的交换性两次，可得

$$\mathbb{C}\alpha \circ \alpha \circ m' = \mathbb{C}\alpha \circ \mathbb{C}m' \circ \tau = \mathbb{C}^2 m' \circ \mathbb{C}\tau \circ \tau.$$

因此，我们得到 $\mathbb{C}^2 m' \circ \delta_T \circ \tau = \mathbb{C}^2 m' \circ \mathbb{C}\tau \circ \tau$，这给出了所需的等号，因为 $\mathbb{C}^2 m'$ 是单态射（只需回想一下 $\mathbb{C}$保持嵌入）。

剩下要证明（T，τ）是 m和 e的拉回。设h:（Z，ζ）$\to$（A，α），且 l:（Z，ζ）$\to$（S，σ）满足 $f \circ h = g \circ l$。由于底层态射在 $\mathscr{C}$中交换，存在一个 $d\colon Z \to T$，使得 $h = m' \circ d$且 $l = e' \circ d$。为了证明 d是一个态射（Z，ζ）$\to$（T，τ），注意到

$$\mathbb{C}m' \circ \tau \circ d = \alpha \circ m' \circ d = \mathbb{C}m' \circ \mathbb{C}d \circ \zeta$$

并且由于 $\mathbb{C}m'$是单态射，我们得到所需的等号 $\tau \circ d = \mathbb{C}d \circ \zeta$。由 m' 是单态射这一事实可知，d 是唯一的。□

备注 2。请注意，文献中正交分解系统的定义并不统一，例如 [32]采用了不同的定义。关于蕴含其与前引文献中定义等价的陈述，参见 [13, 第 14]章和 [17] 。

$\mathscr{M}$-子对象的偏序集。设 $\mathscr{C}$ 是一个带有正规分解系统（$\mathscr{Q}$，$\mathscr{M}$）的良幂[4] 范畴。对象 $X \in \mathscr{C}$ 的 $\mathscr{M}$-子对象 偏序集 $\mathbb{S}X$的定义方式，与通常定义 X的子对象偏序集的方式类似。形式上，我们先在嵌入类$S \rightarrowtail X$ 上定义预序 $\leq$ 如下。对于嵌入 $m\colon S \rightarrowtail X$ 和 $n\colon R \rightarrowtail X$，令

$$m \leq n \quad \text{if} \quad \exists h\colon S \to R \text{ such that } m = n \cdot h.$$

（如果存在，h属于 $\mathscr{M}$。）那么，$\mathbb{S}X$是嵌入预序 $\leq$的偏序反射 $S \rightarrowtail X$，即等价类的偏序集 $[m] = \{n\colon R \rightarrowtail X \mid m \leq n \text{ 和 } n \leq m\}$，其偏序关系定义为 $[m] \leq [n]$ 当且仅当 $m \leq n$。

3 博弈余单子及其余代数范畴

我们回顾引言中已经提到的三个主要博弈余单子，它们来自 [9,10]。经验表明，在研究这些余单子时获得的直觉通常也适用于其他博弈余单子和树状范畴。

[4] 回顾一下，如果某个范畴中每个对象的子对象构成一个集合而非真类，那么这个范畴就是良幂的。

关系结构。这三个余单子定义在范畴 Str(σ) 上，该范畴的对象是固定关系签名 $\sigma = \langle R_1, \dots, R_n \rangle$ 下的关系结构（对于模态余单子，则定义在带指定点的关系结构上；更多详情见下文）。对于每个关系符号 $R \in \sigma$，记 ar(R) $\in \mathbb{N}$ 为其元数。于是，Str(σ) 的对象是元组 $X = (X, R_1^X, \dots, R_n^X)$，其中 X 是一个集合，且对于每个 $R \in \sigma$，都有 $R^X \subseteq X^{\mathrm{ar}(R)}$。Str($\sigma$) 的态射是关系结构同态，也就是说，是底层集合之间的函数 $h\colon X \to Y$，并且对于每个 $R \in \sigma$，

$$R^X(x_1, \dots, x_n) \quad \text{implies} \quad R^Y(h(x_1), \dots, h(x_n)). \tag{1}$$

类似地，Str$_\bullet$(σ) 是带指定点的关系结构范畴，即指带有指定点 $\bullet \in X$ 的结构 X，同态必须保留该点。当 σ 是模态签名时，也就是说，σ 中的每个关系符号要么是一元的（表示命题谓词），要么是二元的（表示转移关系），Str$_\bullet$(σ) 就是带指定点的 ***Kripke*** 框架范畴。注意，Kripke 同态比通常的***p***-态射（也称有界态射 [16, , 第 17] 页）更一般。这是必要的，否则我们的余单子的余单位就不会是该范畴中的态射。

Str(σ) 和 Str$_\bullet$(σ) 都配备了（满射，正则单射）分解系统。具体而言，这意味着商是满射同态，而嵌入是能够反映关系的单同态（也就是说，(1) 是等价关系，而不仅仅是蕴含关系）。

余代数视角。 注意，Str(σ) 可视为函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 的自函子余代数范畴，其中该函子定义为

$$F(X) = \prod_{R \in \sigma} \mathcal{P}(X^{\mathrm{ar}(R)-1}). \tag{2}$$

然而，Str(σ) 中的态射只是宽松的 余代数态射，如下方左侧所示。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X' \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & \subseteq & \downarrow{\scriptstyle\xi'} \\ FX & \xrightarrow[Fh]{} & FX' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ X & \xrightarrow{h} & X' \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & \subseteq & \downarrow{\scriptstyle\xi'} \\ FX & \xrightarrow[Fh]{} & FX' \end{array} \tag{3}$$

序关系是逐点子集序，由式 (2) 中的幂集给出。类似地，当 σ 是一个模态签名时，Str$_\bullet$(σ) 对应于带指点的余代数与宽松态射构成的范畴，如上方右侧所示；其对应的函子为 $F(X) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(X)^T$，其中 A 是命题谓词的集合，T 是（二元）转移符号的集合。

（满态射，正则单态射）分解系统中的嵌入是单射的松弛余代数态射，如式 (3) 所示，其中 ξ 取最大可能值。

注 *3.* 尽管我们的定义假设签名 σ 是有限且有限元的，但大多数结果和概念同样适用于无限且无限元的签名。然而，在讨论博弈余单子与逻辑之间的关系时会出现一些微妙问题，因此这里最好避开这些问题。

模态余单子。 我们定义的第一个余单子是指向Kripke结构上的模态余单子。更确切地说，对于每个模态签名 σ 和每个自然数 $k \geq 1$，我们按如下方式定义 $\mathbf{Str}_\bullet(\sigma)$ 上的余单子 $\mathbb{M}_k$ 。给定一个指向的 Kripke 结构 $A \in \mathbf{Str}_\bullet(\sigma)$， $\mathbb{M}_k A$ 是 A 的-展开，也就是说：

– $\mathbb{M}_k A$的底层集合由长度至多为

$$\bullet \xrightarrow{R_{\tau_i}} a_1 \xrightarrow{R_{\tau_2}} a_2 \xrightarrow{R_{\tau_3}} \cdots \xrightarrow{R_{\tau_n}} a_n$$

k的序列组成。

我们将这样的序列编码为 $s = [a_0, \tau_1, a_1, \tau_2, a_2, \ldots, \tau_n, a_n]$，其中 $0 \leq n \leq k$，a_0是指定点 $\bullet \in A$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $R^A_{\tau_i}(a_{i-1}, a_i)$。存在一个函数 $\varepsilon_A\colon\ \mathbb{M}_k A \to A$，用于提取序列的最后一个元素，即它将 $[\bullet, \tau_1, a_1, \ldots, \tau_n, a_n]$映射为 a_n。 – $\mathbb{M}_k A$的指定点是最短序列，也就是 $[\bullet]$。 –对于一元符号 $P \in \sigma$，将 $P^{\mathbb{M}_k A}$定义为 $\{s \mid P^A(\varepsilon_A(s))\}$. 对于二元符号 $R_\tau \in \sigma$，将 $R^{\mathbb{M}_k A}_\tau$定义为由满足 $R^A_\tau($ $\varepsilon_A(s)$ $a)$ 的 $a \in A$ 所构成的有序对 $(s, s +\!\!+ [\tau, a])$ 的集合。这里， $+\!\!+$ 表示序列的连接。

注意， $\mathbb{M}_k$ 是一个自函子；它对态射的作用定义如下

$$\mathbb{M}_k(f)\colon [\bullet, \tau_1, a_1, \ldots, \tau_n, a_n] \mapsto [\bullet, \tau_1, f(a_1), \ldots, \tau_n, f(a_n)].$$

余单子结构定义如下：

– 余单位是上文定义的映射 $\varepsilon_A\colon\ \mathbb{M}_k A \to A$ 。 – 余乘法 $\delta_A\colon\ \mathbb{M}_k A \to \mathbb{M}^2_k A$ 将一个序列映射为其前缀序列，即 $[\bullet, \tau_1, a_1, \ldots, \tau_n, a_n]$ 映射为

$$[[\bullet], \tau_1, [\bullet, \tau_1, a_1], \tau_2, \ldots, \tau_n, [\bullet, \tau_1, a_1, \ldots, \tau_n, a_n]].$$

注意，一般而言， ε_A 不是一个 p-态射，因为 $\mathbb{M}_k A$ 中的序列长度受限于 k。然而，在模态逻辑的片段 $\mathbf{ML}_k$ 中，结构 A和 $\mathbb{M}_k A$ 无法区分；该片段由模态深度至多为 k 的公式组成（即嵌套模态算子至多有 k 个）。特别地，

$$A \equiv_{\mathrm{ML}_k} B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{M}_k A \sim \mathbb{M}_k B \tag{4}$$

其中 $\sim$ 表示互模拟等价，或者等价地，表示复制者在互模拟博弈中存在获胜策略。

这些事实在模态逻辑文献中广为人知，参见例如 [22],；不过，或许值得一提的是， $\mathbb{M}_k$ 是一个余单子。有趣的是，许多其他出现在（有限）模型论中的模型比较博弈也呈现出类似的模式。然而，对于其他余单子而言，余代数范畴通常发挥着更为重要的作用，因为必须显式地借助它来表达双模拟等价。

Ehrenfeucht–Fraïssé余单子。接下来定义的两个余单子作用于 Str(σ) 上，其中 σ 是给定的关系签名。第一个余单子可以看作是根据 Ehrenfeucht–Fraïssé 博弈规则对一个结构进行展开。对于固定的 k 和关系结构 $A \in \in$Str(σ)，定义 $\mathbb{E}_k A$ 如下：

– $\mathbb{E}_k A$的论域是由序列 $[a_1, \ldots, a_n]$组成的集合，其中 $1 \leq n \leq k$，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$， $a_i \in A$。 – $\mathbb{E}_k(f)$： $\mathbb{E}_k A \to \mathbb{E}_k B$将 $[a_1, \ldots, a_n]$映射到 $[f($ $a_1) \ldots, f(a_n)]$。 – ε_A： $\mathbb{E}_k A \to A$将 $[a_1, \ldots, a_n]$ 映射到 a_n。 – δ_A：将一个序列映射到其前缀组成的序列。– 对于一个 n元关系符号 $R \in \sigma$，关系 $R^{\mathbb{E}_k A}$ 由满足以下条件的序列元组$(s_1, \ldots, s_n)$组成

- $s_1, \ldots, s_n$ 在前缀预序下两两可比较，并且
- $R^A(\varepsilon_A(s_1) \ldots, \varepsilon_A(s_n))$.

与（4）类似，我们有

$$A \equiv_{\mathcal{L}^-_{\omega,k}} B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}_k A \sim \mathbb{E}_k B \tag{5}$$

其中 $\mathcal{L}^-_{\omega\ ,\ k}$ 表示一阶逻辑的一个片段，由不含等号且量词秩至多为 k 的句子构成（即至多含有 k 个嵌套量词）。

不过，这一次，将（5）右侧解释为 EM($\mathbb{E}_k$) 中的对象至关重要。具体而言，$\mathbb{E}_k A$ 和 $\mathbb{E}_k B$ 分别是 A和 B上的余自由余代数，而关系 $\sim$ 是在 EM($\mathbb{E}_k$) 中内部定义的，我们将在下文第 3.2 节讨论这一点。另请注意，如果使用扩展签名 $\sigma \cup \{I\}$，其中 I 是二元的，且 I^A 被解释为对角线 $\{(a,\ a) \mid a \in A\}$，那么可以恢复含等号的公式；详情见 [10]。

卵石余单子。第三类博弈余单子基于卵石游戏。对于固定的 k 和关系结构 $A \in$ Str(σ)，定义 $\mathbb{P}_k A$ 如下：

– $\mathbb{P}_k A$的论域是由序列 $[(p_1, a_1) \ldots, (p_n, a_n)]$ 组成的集合，其中对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_i \in \{1, \ldots, k\}$ 和 $a_i \in A$。 – $\mathbb{P}_k(f)$： $\mathbb{P}_k A \to \mathbb{P}_k B$将 $[(p_1, a_1) \ldots, (p_n, a_n)]$映射为 $[$ $(p_1, f(a_1)) \ldots, (p_n, f(a_n))]$。 – ε_A： $\mathbb{P}_k A \to A$将 $[(p_1, a_1) \ldots, (p_n, a_n)]$ 映射为 a_n。 – δ_A： $\mathbb{P}_k A \to \mathbb{P}^2_k A$ 将一个序列映射为其前缀构成的序列。– 对于一个 n 元关系符号 $R \in \sigma$，关系 $R^{\mathbb{P}_k A}$ 由满足以下条件的序列元组 $(s_1, \ldots, s_n)$ 组成：

- $s_1, \ldots, s_n$ 在前缀预序中两两可比较；
- $R^A(\varepsilon_A(s_1) \ldots, \varepsilon_A(s_n))$；
- 如果 s_i是 s_j的前缀，即 $s_i = [(p_1,\ a_1) \ldots, (p_n,\ a_n)]$ 且 $s_j = s_i +\!\!+ [(q_1,\ a'_1) \ldots, (q_r,\ a'_r)]$, 那么 $p_n \notin \{q_1, \ldots, q_r\}$。

同样地，与（4）类似，我们有

$$A \equiv_{\mathcal{L}^{-,k}_{\infty,\omega}} B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_k A \sim \mathbb{P}_k B \tag{6}$$

其中 $\mathcal{L}^{-}{}_{,\infty}{}^{k}{}_{,\omega}$ 表示无穷一阶逻辑 $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$ 的一个片段，由不含等号且至多使用 k 个不同变量的句子组成。这个片段在有限模型论 [26,21]中至关重要。例如，图中存在一条长度为 4 的路径，可以用 $\mathcal{L}^{-}{}_{,\infty}{}^{2}{}_{,\omega}$中的以下句子来表达:

$$\exists x_1(\exists x_2.R(x_1,x_2)\wedge(\exists x_1.R(x_2,x_1)\wedge(\exists x_2.R(x_1,x_2)\wedge(\exists x_1.R(x_2,x_1))))).$$

3.1 余代数范畴

下文中，回顾一下 [10]我们所用博弈余单子示例的余代数范畴的具体描述将很有帮助。为此，若偏序集（F，$\leq$）对每个 $x\in F$而言，其集合

$$\downarrow x \coloneqq \{y\in F \mid y\leq x\}$$

都是有限链。森林之间的函数 $f\colon\ F\to F'$ 若满足单调性，并且对每个 $x\in F$，链 $\downarrow x$和 $\downarrow f$（x）具有相同长度，则称其为森林态射。

如果 x 是森林 F中的一个元素，则其高度记为 ht(x)，定义为集合 $\downarrow x\setminus\{x\}$ 的基数。高度为 0 的元素称为根。树是恰好包含一个根的森林。森林的高度 F 是集合{ht(x) $\mid x\in F$} 在 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$中的上确界。

我们三个博弈余单子的余代数具有内在的森林序。具体而言，对于余单子 $\mathbb{C}$ among $\mathbb{M}_k$，$\mathbb{E}_k$，$\mathbb{P}_k$ 以及余代数 $\alpha\colon A\to\mathbb{C}A$，令

$$a\sqsubseteq_\alpha b \quad\Longleftrightarrow\quad \text{the sequence } \alpha(a) \text{ is a prefix of } \alpha(b).$$

于是，偏序集 (A，$\sqsubseteq_\alpha$) 是一个森林，余代数态射也是森林态射。这使我们能够将范畴 EM($\mathbb{C}$) 具体刻画为一类森林序结构:

– 由于 $\mathbb{M}_k$ 是幂等余单子，范畴 EM($\mathbb{M}_k$) 同构于 Str$_\bullet$(σ) 的满子范畴，该满子范畴由高度为 $\leq k$ 的同步树 [24] 构成，即树序 σ-结构 ($A,\leq$)，满足当且仅当 $R^A(a,b)$ 对某个关系 R 属于 σ 成立时，a 才是 b 的父节点。特别地，同步树之间的 Kripke 态射自动就是森林态射。– EM($\mathbb{E}_k$) 的对象可以描述为高度为 $\leq k$ 的森林序 σ- 结构 ($A,\leq$)，满足若 $R^A(x_1,\dots,x_n)$，则 $x_1,\dots,x_n$ 在序 $\leq$ 中两两可比较。后一条件由上文给出的关系 $R^{\mathbb{E}_kA}$ 的定义推出。余代数态射恰好对应于底层关系结构的同态，且这些同态也必须是森林态射。– EM($\mathbb{P}_k$) 中的对象可以描述为森林序 σ-结构 ($A,\leq,p$)，配有一个“pebbling 函数” p: $A\to\{1,\dots,k\}$，满足 $R^A(x_1,\dots,x_n)$ 蕴含：(i) $x_1,\dots,x_n$ 两两可比较；(ii) 若 $x_i<x_j$，则 $p(x_i)\notin\{p(y)\mid x_i<y\leq x_j\}$。EM($\mathbb{P}_k$) 中的态射是保持 pebbling 函数的关系结构同态，同时也是森林态射。

这些余代数范畴的性质非常良好。例如，它们完备且余完备，具有一个（满态射，正则单态射）分解系统，甚至还是局部有限可呈的。参见 [18,23,31]。

3.2 博弈余单子与逻辑

利用范畴 EM(ℂ) 的具体刻画，其中 $\mathbb{C}$ 的博弈余单子之一为 $\mathbb{M}_k$、 $\mathbb{E}_k$ 或 $\mathbb{P}_k$，我们可以表达普适余代数文献中的熟悉概念。为此，我们称余代数 $(A,\ \alpha)$ 为一条路径，如果它在诱导序 $\sqsubseteq_\alpha$ 中是一条有限链。接着，沿用 [24], ，我们称态射 $f\colon X \to Y$ 在 EM(ℂ) 中是开 的，如果任意交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \end{array}$$

带有 $P,\ R$ 路径的对角填充子 $R \to X$，使得后续图表交换。开态射可以看作是 p-态射的一种抽象。

利用这些概念，我们可以在 EM(ℂ) 中引入三种等价类型。对于余代数 X 和 Y，我们称它们为

– 来回等价，如果存在一个关于 Kripke结构 $(X,\ \prec)$ 和 $(Y,\ \prec)$ 的互模拟 $B \subseteq X \times Y$（依 [16, 第 14] 页的定义），其中$\prec$表示森林序中的直接后继关系，并且对于每个 $(x,\ y) \in B$，诱导路径 $\downarrow x \subseteq X$和 $\downarrow y \subseteq Y$同构；– 互模拟等价，如果存在开态射的张成 $X \leftarrow Z \to Y$。

若将式 (4)、(5) 和 (6) 中出现的关系 $\sim$ 设为往返等价，那么后面这些等式表达了一个众所周知的事实：在 k 轮互模拟、 k 轮 Ehrenfeucht–Fraïssé 游戏和 k 卵石游戏中，复制者存在获胜策略，分别恰好对应于这些等式左侧的逻辑等价。

此外，正如 [8] 所示，在我们将在下文引入的树状范畴中，往返等价与双模拟等价是一致的。

4 树状范畴与连通性的失效

树状范畴的 存在意义 在于为处理博弈余单子的余代数范畴中的往返等价、双模拟等价等概念提供一种通用语言。该方法具有统一性，不依赖于余单子或底层结构范畴的任何特定性质。

树状范畴定义中的一个基本要素，是路径这一公理化概念；它将第 3.2 节讨论的具体路径概念推广到了任何具有正规分解系统的范畴。

定义 4. 设 $\mathscr{C}$ 是一个配备正规分解系统（$\mathscr{Q}$、$\mathscr{M}$）的良幂范畴。若对象 $X \in \mathscr{C}$的 $\mathscr{M}$-子对象偏序集 $\mathbb{S}X$ 是有限线性序，则称 X为一条路径。若 P 是一条路径，则其高度记为 ht(P)，即有限链 $\mathbb{S}P$的高度。路径嵌入是指定义域为路径的嵌入$P \rightarrowtail X$ 。

以下是文献 [6] 中给出的树状范畴定义。

定义 5（树状范畴的“旧定义”）。设 $\mathscr{A}$ 是一个配备稳定正规分解系统的良幂范畴。若 $\mathscr{A}$ 满足以下条件，则称其为树状的：

路径是连通的 在 $\mathscr{A}$ 中，路径集合的余积存在，并且每条路径P 都是连通的；也就是说，任何映入非空路径集合的余积 $\{Q_i \mid i \in I\}$ 的态射 $P \to \coprod_{i\in I} Q_i$，都可经由某个余积态射分解
$Q_j \to \coprod_{i\in I} Q_i$.

二取三性质 给定路径之间的态射 $f\colon\ P \to Q$ 和 $g\colon\ Q \to R$，若$g \circ f$ 是一个商，则 f也是如此。[5]

路径生成 路径的满子范畴在 $\mathscr{A}$中稠密。[6]

文献 [7]，首次引入了树状范畴，并为有限模型论中逻辑等价的公理化研究奠定了基础。事实上，后来引入的博弈余单子也仍然属于树状范畴的范畴，这凸显了这一概念的稳健性。因此，在树状范畴的一般框架下证明的结果（例如参见 [2,5,8,23,30]）也适用于这些新引入的余单子。

然而，这里存在一个问题。在带基点的 Kripke结构上定义的博弈余单子的余代数范畴可能不是树状的。这个错误直到现在才被发现。下面我们将证明，模态余单子通常不满足连通性公理。

首先，我们应用引理 1，证明 $\mathbf{Str}_\bullet(\sigma)$ 的（满态射，正则单态射）分解系统会在范畴 $\mathbf{EM}(\mathbb{M}_k)$ 上诱导出一个稳定正规分解系统。容易验证，$\mathbb{M}_k$ 保持正则单态射，因此只需证明它将商沿嵌入的拉回映为弱拉回。

引理 6。 $\mathbb{M}_k$ 将拉回映为弱拉回。

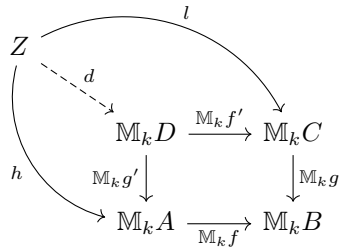
证明。设 $f\colon\ A \to B$ 和 $g\colon\ C \to B$ 是 $\mathbf{Str}_\bullet(\sigma)$ 中的同态，其拉回如下图所示。

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f'} & C \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

不失一般性，我们假设 D 是由满足 $f(a) = g(c)$ 的有序对 $(a,\ c)$ 构成的 $A \times C$ 的子结构。

[5] 该条件等价于：若 f、g 和 $g \circ f$ 中任意两个是商，则第三个也是商；参见 [7, 注 3.9]。因此称为“二取三性质”。[6]配备稳定正规分解系统的范畴满足路径生成性质，当且仅当每个对象都是由路径生成的；也就是说，对于每个对象 X，由所有路径嵌入 $P \rightarrowtail X$ 构成的余锥都是余极限余锥 [7, 引理 5.1 和注 5.2]。

假设存在一个带基点的 Kripke结构 Z，以及同态 $l\colon Z \to \mathbb{M}_k C$ 和 $h\colon Z \to \mathbb{M}_k A$，使得下方外层图表可交换。



我们定义映射 $d\colon Z \to \mathbb{M}_k D$。对于任意 $z \in Z$，我们有

$$h(z) = [\bullet, \tau_1, a_1, \ldots, \tau_n, a_n] \quad \text{and} \quad l(z) = [\bullet, \varphi_1, c_1, \ldots, \varphi_m, c_m].$$

由于上方的外部图表可交换，我们得到 $\mathbb{M}_k f(h(z)) = \mathbb{M}_k g(l(z))$。因此，$m = n$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$\tau_i = \varphi_i$ 和 $f(a_i) = g(c_i)$。因此，我们可以定义 $d(z) := [\bullet, \tau_1, (a_1, c_1) \ldots, \tau_n, (a_n, c_n)]$。根据 d 的定义，上述图表显然可交换。最后，由于 h 和 l 都是同态，因此 d 也是同态。□

注*7*。上述论证可以加以调整，从而证明由 Str(σ) 上的（满态射，正则单态射）分解系统所诱导的 EM($\mathbb{E}_k$) 和 EM($\mathbb{P}_k$) 上的分解系统也是稳定正规分解系统。

EM($\mathbb{M}_k$) 中的路径恰好是由单个分支构成的同步树。下一个例子表明，EM($\mathbb{M}_k$) 中的路径不一定是连通的。因此，根据定义 5，范畴 EM($\mathbb{M}_k$) 通常不是树状的。

例 *8.* 假设签名 σ 包含两个不同的一元关系符号 r, s。我们基于一个单元素论域定义 σ-结构 $P_r, P_s, P_{r,s}$：

– P_r 由一个满足 r 但不满足 s 的元素构成；– P_s 由一个满足 s 但不满足 r 的元素构成；– $P_{r,s}$ 由一个同时满足 r 和 s 的元素构成。

将各自唯一的元素作为指定元素时，σ-结构 $P_r, P_s, P_{r,s}$ 是 EM($\mathbb{M}_k$) 中的路径，并且在 EM($\mathbb{M}_k$) 中满足 $P_{r,s} \cong P_r + P_s$。然而，同构 $P_{r,s} \to P_r + P_s$ 无法通过包含映射 $P_r \to P_r + P_s$ 或 $P_s \to P_r + P_s$ 分解。因此，$P_{r,s}$ 是一条根据定义 5 不连通的路径。

注*9*。例 8 中路径的连通性失效与存在一个指定点有关，并不适用于 Ehrenfeucht–Fraïssé 余单子或卵石余单子。特别地，根据定义 5，EM($\mathbb{E}_k$) 和 EM($\mathbb{P}_k$) 是树状的。另一方面，我们预计，对于定义在带指定点的关系结构上的其他博弈余单子，例如 hybrid [4], PPML [19] 和 pebble-relation [28] 余单子，路径的连通性也会失效。

5 重新定义树状范畴：树连通性

我们建议修订树状范畴的定义，将连通性条件替换为树连通性 条件。二取三和路径生成公理保持不变。

定义 10. 设 $\mathscr{C}$ 是一个配备稳定正规分解系统的范畴。$\mathscr{C}$ 中的一个树图 是一个函子 $D\colon\ T \to \mathscr{C}$，其中 T 是一个树序，并且 D 的像由 $\mathscr{C}$ 中的嵌入组成。若 D 的像还由路径之间的嵌入组成，则称其为路径树图 。

定义 11（树状范畴的"新定义"）。设 $\mathscr{A}$ 是一个配备稳定正规分解系统的良幂范畴。若 $\mathscr{A}$ 满足以下条件，则称其为树状的 :

路径是树连通的 $\mathscr{A}$ 存在一个始对象以及路径树图的余极限，并且每条路径 P 都是树连通的；也就是说，对于每个路径树图 $D\colon\ T \to \mathscr{A}$和每个态射 $f\colon\ P \to$ 余极限 D，存在最小的 $t \in T$，使得 f 可经由余极限态射 $D(t) \to$ 余极限 D分解。

二取三性质 给定路径之间的态射 $f\colon P \to Q$ 和 $g\colon Q \to R$，若$g \circ f$是一个商，则 f 也是一个商。
路径生成 路径构成的满子范畴在 $\mathscr{A}$中稠密。

例 8 中的路径图表展示了范畴$\mathsf{EM}(\mathbb{M}_k)$中路径连通性的失效；该图表不是路径树图，也无法转化为路径树图。事实上，我们有如下结论：

引理 12。 范畴$\mathsf{EM}(\mathbb{M}_k)$ 中的每条路径都是树连通的。

证明。设 $D\colon T \to \mathsf{EM}(\mathbb{M}_k)$ 是 $\mathsf{EM}(\mathbb{M}_k)$ 中的一个路径树图，其中 T 是一棵树。首先注意，对每个 $u \in T$，余极限映射 $i_u\colon D(u) \to \operatorname{colim} D$ 都是嵌入。它是单射，因为它是从一条链出发的森林态射。为证明它反映一元关系，注意到满包含 $\mathsf{EM}(\mathbb{M}_k) \to \mathsf{Str}_\bullet(\sigma)$ 是左伴随，因此保余极限。这意味着，$\operatorname{colim} D$ 的计算方式是：先取 σ结构 $D(u)$（其中 $u \in T$）的余积，即将结构 $D(u)$沿其指定元素粘合起来；然后按照图表中的嵌入取商。因此，若 $x \in D(u)$和 $i_u(x)$满足关系 r，则存在 $x' \in D(u')$满足 r，且$i_u(x) = i_{u'}(x')$。但这只有在存在 $t \leq u$、u' 和 $y \in D(t)$，使得 $D(t \leq u)(y) = x$ 且 $D(t \leq u')(y) = x'$时才可能发生。由于 $D(t \leq u)$和 $D(t \leq u')$是嵌入，因此 x 满足 r，因为 x' 满足。

现在，考虑一个态射 $f\colon\ P \to \operatorname{colim} D$，其中包含一条路径 P，并将其分解为一个商映射，后接一个嵌入：

$$P \xrightarrow{\ e\ } Q \rightarrowtail^{m} \operatorname{colim} D$$

由于 P 是一条路径，也就是说，它仅由一条高度至多为 k 的分支构成，因此 Q 也是如此。同态 m 的像具有 $\downarrow x = \{y \in \text{余极限 } D \mid y \leq x\}$ 的形式

对于唯一的元素 $x \in$ 余极限 D。由于 D 的像中的每个态射都是嵌入，存在 $t_0 \in T$，使得余极限映射 $D(t_0) \rightarrowtail$余极限 D 的像包含 $\downarrow x$ 作为子结构。因此，m 经由嵌入$D(t_0) \rightarrowtail$ 余极限 D 分解。由于 T 是一个交半格，其中每个元素的高度都有限，因此存在最小的 $t \in T$，使得 m 经由余极限映射$D(t) \rightarrowtail$ 余极限 D 分解。由此可知，t 也是满足 f 经由 $D(t) \rightarrowtail$ 余极限 D 分解的最小元素。□

类似的论证表明，卵石游戏余单子和 Ehrenfeucht–Fraïssé 余单子的余代数范畴中的路径是树连通的。由于范畴 $\mathbf{EM}(\mathbb{M}_k)$、$\mathbf{EM}(\mathbb{E}_k)$ 和 $\mathbf{EM}(\mathbb{P}_k)$ 是余完备的（尤其是它们存在路径树图的余极限），我们得出：

命题 13. 范畴$\mathbf{EM}(\mathbb{M}_k)$、$\mathbf{EM}(\mathbb{E}_k)$和$\mathbf{EM}(\mathbb{P}_k)$是定义 *11* 意义下的树状范畴。

关于连通性与树连通性之间的关系，以下事实成立：

引理 14. 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，配备稳定正规分解系统并且有初始对象$\mathbf{0}$。以下陈述等价：

1. $\mathbf{0}$ 没有真商，即任何以$\mathbf{0}$ 为定义域的商都是同构；*2.* 对每个对象 $X \in \mathscr{C}$，唯一的态射 $\mathbf{0} \to X$ 是一个嵌入。

如果这两个条件之一（因而也就是两者）成立，且 $\mathscr{C}$ 余完备，那么 $\mathscr{C}$ 中的任意树连通对象都是连通的。

证明。 根据正交因子分解系统的基本性质，很容易验证条目 1 和 2 等价。现在，设 X 是 $\mathscr{C}$中的一个树连通对象，且 $\{Q_i \mid i \in I\}$ 是一个非空路径集合。考虑一棵树 T，它由一个根节点及其 I个直接后继组成，并设 $D\colon T \to \mathscr{C}$ 是如下函子：它将 T 的根节点映至$\mathbf{0}$，将根节点的第 i个直接后继映至 Q_i。这是一个路径树图，其余极限与$\coprod_{i\in I} Q_i$重合。由于 X是树连通的，任意态射$X \to \coprod_{i\in I} Q_i$ 都可经由某个余极限态射$Q_j \to \coprod_{i\in I} Q_i$分解。□

以下结论可由引理 14 直接得出。

命题 15. 设 $\mathscr{C}$ 是新意义下的树状范畴（定义 *11*）。若 $\mathscr{C}$ 存在路径集合的余积，且其始对象没有真商，则 $\mathscr{C}$ 是旧意义下的树状范畴（定义 *5*）。

由于在 $\mathbf{EM}(\mathbb{E}_k)$ 和 $\mathbf{EM}(\mathbb{P}_k)$ 中，始对象都没有真商，因此上述命题提供了另一种不那么直接的证明，说明这两个范畴在旧意义下都是树状的。然而，该命题不适用于 $\mathbf{EM}(\mathbb{M}_k)$。注意，只要模态签名 σ 包含一个一元符号 P，任何由一个元素构成且满足 P 的结构，都是始对象的一个真商；始对象是一个没有任何关系的单元素结构。

6 $\mathscr{M}$-子对象的偏序集再探

连通性公理在 [6,7]中的主要技术用途，是确立 $\mathscr{M}$-子对象偏序集的性质。我们将说明如何在树状范畴的新定义下恢复这些性质。下文中，“树状范畴”指满足定义 11 中条件的范畴。

按照 [7, §3], 中的推理，我们可以将树状范畴的每个对象 X 与射入 X的路径嵌入（的等价类）集合 $\mathbb{P}X$ 联系起来。我们将后者视为一个偏序集，其序由 $\mathbb{S}X$ 上的序诱导（参见第 2.2 节）。此外，每个态射 $f\colon X \to Y$ 都会诱导一个单调映射 $\mathbb{P}f\colon \mathbb{P}X \to \mathbb{P}Y$，它将 $m\colon P \rightarrowtail X$ 映射到通过对 $f \circ m$取 $(\mathscr{Q}, \mathscr{M})$-分解而得到的路径嵌入 $Q \rightarrowtail Y$：

$$\begin{array}{ccccc} P & \twoheadrightarrow & Q & \rightarrowtail & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f\circ m & & \end{array}$$

根据 [7,引理 3.5], 对象 Q 是一条路径。

定理 16。 设 $\mathscr{A}$ 为一个树状范畴。赋值 $X \mapsto \mathbb{P}X$ 诱导出一个函子 $\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$，其值域为由树和森林态射构成的范畴 $\mathscr{T}$。

证明。 对于旧意义上的树状范畴，这是 [7,定理 3.11]。其证明只需要一个具有始对象和稳定正规分解系统的范畴，并满足二取三条件 [7, 注 3.14]。□

引理 17。 对于树状范畴的任意对象 X $\mathscr{A}$，以下结论成立：
(a) 任意子集 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}X$ 在 $\mathbb{S}X$中都有一个上确界 $\bigvee \mathcal{U}$。 *(b)* 对任意路径嵌入 $[m] \in \mathbb{P}X$和非空集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{S}X$，若 $[m] = \bigvee \mathcal{S}$，则 $[m] \in \mathcal{S}$。 *(c)* 若 m、n：$P \rightarrowtail Q$ 是路径之间的嵌入，则 $[m] = [n]$ 在 $\mathbb{S}Q$ 中。

证明。 对于旧意义上的树状范畴，这是 [7, 引理 3.15]。路径的连通性在原证明中不起作用，但我们需要调整证明，以便使用树图的余极限，而非路径的余积。

对于项目 (a)，考虑一组（等价类的）路径嵌入$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}X$。 $\mathbb{P}X$ 中 $\mathcal{U}$的向下闭包 $I := {\downarrow}\mathcal{U}$是一棵树，因此我们可以定义一个路径树图

$$D\colon I \to \mathscr{A}$$

将等价类 $[m]$ 映射到所选代表元m的定义域 $P\colon P \rightarrowtail X$，并将 $[m] \le [m']$ 映射到满足 $m = m' \circ e$的唯一 $e\colon P \rightarrowtail P'$。在 D 上存在一个顶点为 X 的相容余锥，其分量 $D([m]) \to X$ 由所选代表元给出。令 $S :=$ 余极限 D，并考虑唯一中介态射 $\delta\colon S \to X$的 $(\mathscr{Q}, \mathscr{M})$ 分解：

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{e} & T & \xrightarrow{n} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \delta & & \end{array}$$

$[m] \in \mathcal{U}$ 的每个代表元 m 都经过 n分解，因此 $[n]$ 是 $\mathcal{U}$的一个上界。我们声称 $[n]$ 是最小上界，即 $\mathbb{S}X$中的 $[n] = \bigvee \mathcal{U}$。假设 $\mathcal{U}$中的所有路径嵌入都经过一个嵌入 $n' \colon T' \rightarrowtail X$分解。那么 $\downarrow\mathcal{U}$中的所有路径嵌入也同样如此。根据 S 的泛性质，我们得到一个态射 $\varphi \colon S \to T'$。根据 δ的唯一性，我们得到 $n' \circ \varphi = \delta$，因此下图交换。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & T \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ T' & \xrightarrow{n'} & X \end{array}$$

因此，存在一个对角填充子 $T \to T'$。特别地，下方三角形的交换性意味着 $n \leq n'$，这正是所要证明的。

（b）和（c）的证明与 [7,引理 315] 中的证明相同。 □

对于下一个引理，请回忆定义 4：ht(P) 表示路径 P 的高度。

引理 18. 设 $\mathscr{A}$ 是一个树状范畴。以下陈述成立：
(a) 对于 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 X 以及任意 $m \in \mathbb{S}X$， $m = \bigvee \{p \in \mathbb{P}X \mid p \leq m\}$。
(b) 态射 f 是一个商，当且仅当 $\mathbb{P}f$ 是满射。***(c)*** 路径之间的态射 $P \to Q$ 是一个商，当且仅当 $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(Q)$。

证明。 对于旧意义上的树状范畴，这由 [7, 引理 5.5] 与 [2, 引理 6.11]结合得出。原证明依赖于给定对象中路径嵌入的上确界存在，但并不依赖通过余积显式构造这些上确界。因此，相同的证明仍然适用。□

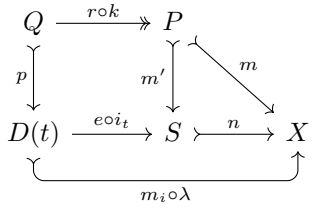
命题 19。 设 $\mathscr{A}$ 是一个树状范畴， X 是 $\mathscr{A}$的一个对象，且 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}X$ 是一个非空子集。路径嵌入 $m \in \mathbb{P}X$ 低于 $\bigvee \mathcal{U}$，当且仅当它低于 $\mathcal{U}$中的某个元素。

证明。 对于旧意义上的树状范畴，这就是 [7,命题 5.6]。我们调整该结果的证明。固定 $\mathscr{A}$ 的一个对象 X 以及一个非空的路径嵌入集合 $\mathcal{U} = \{m_i \colon P_i \rightarrowtail X \mid i \in I\}$。设 $m \colon P \rightarrowtail X$ 是任意一个路径嵌入。若 m 低于 $\mathcal{U}$中的某个元素，则显然 $m \leq \bigvee \mathcal{U}$。

对于逆向，假设 $m \leq \bigvee \mathcal{U}$。回顾引理 17(a) 的证明， $\mathcal{U}$ 的上确界是通过对中介态射 $\operatorname{colim} D \to X$ 进行 $(\mathscr{Q}, \mathscr{M})$ 分解 $\operatorname{colim} D \overset{e}{\twoheadrightarrow} S \overset{n}{\rightarrowtail} X$ 得到的，其中 $D \colon T \to \mathscr{A}$ 是与 $\downarrow\mathcal{U}$ 相关联的路径树图。采用此记号，$\bigvee \mathcal{U} = n$。由于 $m \leq \bigvee \mathcal{U}$，存在一个嵌入 $m' \colon P \rightarrowtail S$，使得 $m = n \circ m'$。考虑沿 e 对 m' 作拉回：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{r} & P \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle m'} \\ \operatorname{colim} D & \xrightarrow{e} & S \end{array}$$

将引理 18(b) 应用于商 r，可知存在一个路径嵌入 $k\colon Q \rightarrowtail V$，使得 $\mathbb{P}r(k) = \mathrm{id}_P$，即 $r \circ k$ 是一个商。由于 Q 是树连通的，存在最小的 $t \in T$，使得 $j \circ k\colon Q \rightarrowtail \mathrm{colim}\ D$ 可通过余极限态射 $i_t\colon D(t) \to \mathrm{colim}\ D$ 分解，即对于某个嵌入 $p\colon Q \rightarrowtail D(t)$，有 $j \circ k = i_t \circ p$。令 $i \in I$ 满足：与 $D(t)$ 对应的路径嵌入到 X 中的形式为 $m_i \circ \lambda$，其中 $\lambda\colon D(t) \rightarrowtail P_i$ 是某个嵌入。于是我们得到如下交换图。



由于 $m \circ r \circ k = m_i \circ \lambda \circ p$ 且等式右侧是一个嵌入，$r \circ k$ 是一个同构。因此 $m \leq m_i \circ \lambda \leq m_i \in \mathcal{U}$，从而完成证明。□

注记 *20*。引理 17(a) 和 18(a) 合起来表明，对于树状范畴中的任意对象 X，其嵌入偏序集 $\mathbb{S}X$ 存在所有上确界，因此是一个完备格。

注记 *21*。我们可以通过仅考虑路径的路径树图 D，来弱化定义 11 中的树连通条件：$T \to \mathscr{A}$ 在 $\mathscr{A}$ 中存在相容嵌入余锥。这个较弱的公理仍足以证明本节的所有结果，因为我们只需考虑到固定对象中的路径嵌入的上确界。同样，只需假设 $\mathscr{A}$ 存在具有相容嵌入余锥的路径树图的余极限。然而，我们的树状范畴主要例子都是余完备的。

7 路径函子是 Street 纤维化

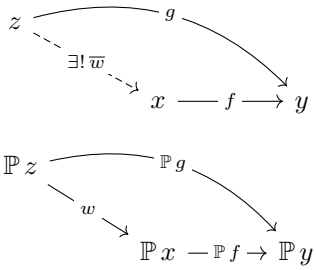
在最后这一节中，我们将展示树状范畴新定义的一个重要推论。设树状范畴为 $\mathscr{A}$，并记

$$\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$$

其到树及其间森林态射所成范畴 $\mathscr{T}$ 的关联路径函子（参见定理 16）。回顾一下，$\mathbb{P}$ 将 $\mathscr{A}$ 的对象 X 映射为树 $\mathbb{P}X$，其节点是到 X 的路径嵌入的（等价类）；$\mathbb{P}X$ 上的序由 X 的 $\mathscr{M}$-子对象偏序集 $\mathbb{S}X$ 所诱导。

我们希望证明 $\mathbb{P}$ 是 Street 纤维化（下文定理 26）。为此，我们先回顾一些与纤维化相关的基本定义。

定义 22。态射 $f\colon x \to y$ in $\mathscr{A}$ 若满足以下条件，则称为（相对于 $\mathbb{P}$）笛卡尔态射：对于所有 $g\colon z \to y$ in $\mathscr{A}$ 以及所有满足 $\mathbb{P}f \circ w = \mathbb{P}g$ 的 $w\colon \mathbb{P}z \to \mathbb{P}x$ in $\mathscr{T}$，都存在唯一的 $\overline{w}\colon z \to x$ in $\mathscr{A}$，使得 $g = f \circ \overline{w}$ 和 $\mathbb{P}\overline{w} = w$。



此外，若对于 $\mathscr{T}$ 中所有形如 $h\colon T \to \mathbb{P}\,y$ 的态射，都存在一个笛卡尔态射 $f\colon x \to y$ in $\mathscr{A}$ 和一个同构 $\iota\colon \mathbb{P}\,x \cong T$ in $\mathscr{T}$，使得 $\mathbb{P}\,f = h \circ \iota$，则称 $\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$ 是一个（*Street*）纤维化。

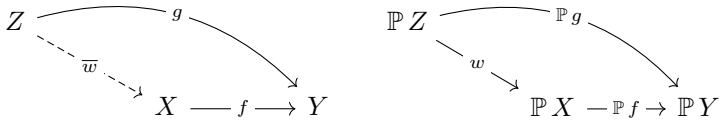
证明 $\mathbb{P}$ 是纤维化的第一步，是一个技术性结果：它将笛卡尔态射刻画为所谓的“逐路径嵌入”。逐路径嵌入是树状范畴理论中的一个重要态射类。

定理 23. 态射 $f\colon X \to Y$ 在 $\mathscr{A}$ 中是笛卡尔态射，当且仅当它是一个逐路径嵌入，也就是说，对于每个路径嵌入 $m\colon P \rightarrowtail X$，$f \circ m$ 都是一个嵌入。

我们分几个步骤证明定理 23，具体如下。

命题 24. 每个逐路径嵌入都是笛卡尔态射。

证明. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个逐路径嵌入，并假设给定了如下右侧所示的交换图。



我们必须证明存在唯一的 $w\colon Z \to X$ 使得 $\mathbb{P}\,w = w$ 且 $f \circ \overline{w} = g$。 —

我们将把 w 定义为由相容余锥诱导的唯一中介态射

$$\{\varphi_n\colon Q \to X \mid n\colon Q \rightarrowtail Z\}$$

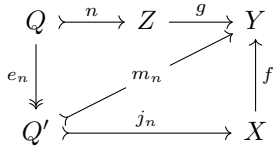
在嵌入到 Z的路径嵌入图表上。固定任意路径嵌入$n\colon Q \rightarrowtail Z$，并考虑 $g \circ n$的（$\mathscr{Q}, \mathscr{M}$）分解：

$$Q \xrightarrow{e_n} Q' \xrightarrowtail{m_n} Y.$$

那么 $[m_n] = \mathbb{P}\,g(n) = \mathbb{P}\,f(w([n]))$ 蕴含着存在一个嵌入

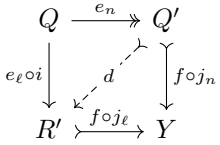
$$j_n\colon Q' \rightarrowtail X$$

使得 $[j_n] = w([n])$，且下图交换（只需回想一下， f 是逐路径嵌入）。



设 $\varphi_n \coloneqq j_n \circ e_n \colon Q \to X$。

为了证明态射 φ_n 在到 Z 的路径嵌入图表上诱导出一个相容余锥，设 $\ell \colon R \rightarrowtail Z$ 是另一个路径嵌入，且存在 $i \colon Q \rightarrowtail R$ 使得 $\ell \circ i = n$。我们必须证明 $\varphi_n = \varphi_\ell \circ i$。考虑下面的交换方块，并注意到底部的水平态射是一个嵌入，因为 f 是逐路径嵌入，因此存在一个对角填充子 d。



暂且假设 $j_\ell \circ d = j_n$。那么我们有

$$\varphi_n = j_n \circ e_n = j_\ell \circ d \circ e_n = j_\ell \circ e_\ell \circ i = \varphi_\ell \circ i,$$

这表明该余锥是相容的。为了验证恒等式 $j_\ell \circ d = j_n$，注意到 $\ell \circ i = n$ 蕴含 $[n] \leq [\ell]$ 在 $\mathbb{P}\,Z$ 中成立，因此，由于 w 是单调的，

$$[j_n] = w[n] \leq w[\ell] = [j_\ell].$$

这意味着对于某个嵌入 d'，有 $j_\ell \circ d' = j_n$，因此

$$f \circ j_\ell \circ d' = f \circ j_n = f \circ j_\ell \circ d.$$

由于 $f \circ j_\ell$ 是一个嵌入（因此是一个单态射），我们得到 $d' = d$。由此可得 $j_\ell \circ d = j_n$。

记 $w \colon \overline{Z} \to X$ 为由上面的相容余锥诱导的唯一中介态射。我们断言 $\mathbb{P}\,w = w$ 和 $f \circ w = g$。对于后一个等式，注意对所有路径嵌入 $n \colon Q \rightarrowtail Z$，

$$f \circ \overline{w} \circ n = f \circ \varphi_n = f \circ j_n \circ e_n = g \circ n$$

因此 $f \circ w = g$，因为 Z 由路径生成。为证明 $\mathbb{P}\,w = w$，注意对任意 $[n] \in \mathbb{P}\,Z$

$$\mathbb{P}\,\overline{w}([n]) = \exists_{\varphi_n} \mathrm{id}_Q = [j_n] = w([n])$$

其中，按照树状范畴文献中的惯例， $\exists_{\varphi_n}\mathrm{id}_Q$ 表示 $\varphi_n \circ \mathrm{id}_Q$的（$\mathscr{Q}$，$\mathscr{M}$）分解中的嵌入部分。

最后，我们证明满足这些性质的 w 是唯一的。假设 $\widehat{w}\colon\ Z \to X$满足 $\mathbb{P}\,\widehat{w} = w$ 和 $f \circ \widehat{w} = g$。由于 Z 由路径生成，要得出$w = \widehat{w}$，只需证明对于所有路径嵌入 $n\colon\ Q \rightarrowtail Z$，都有 $w \circ n = \widehat{w} \circ n$。恒等式

$$\mathbb{P}\,\widehat{w}([n]) = w([n]) = [j_n]$$

蕴含商 ε_n 的存在：$Q \twoheadrightarrow Q'$，使得 $\widehat{w} \circ n = j_n \circ \varepsilon_n$。如果我们能证明 $\varepsilon_n = e_n$，那么就可以推出

$$\overline{w} \circ n = \varphi_n = j_n \circ e_n = j_n \circ \varepsilon_n = \widehat{w} \circ n,$$

如所需。现在注意到

$$f \circ j_n \circ \varepsilon_n = f \circ \widehat{w} \circ n = g \circ n = f \circ \overline{w} \circ n = f \circ j_n \circ e_n.$$

复合态射 $f \circ j_n$ 是一个嵌入，因为 f 是逐路径嵌入，因此我们得出 $\varepsilon_n = e_n$。 □

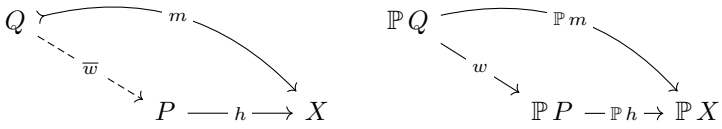
为证明命题 24 的逆命题，即每个笛卡尔态射都是逐路径嵌入，我们先考察一个特殊情形：

引理 25. 设 $h\colon\ P \to X$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个态射，其中 P 是一条路径。若 h 是笛卡尔态射，则它是一个嵌入。

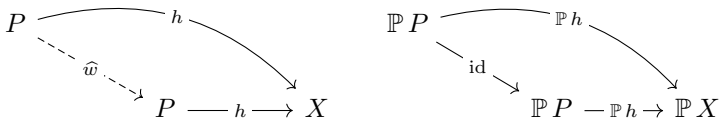
证明。 考虑 h 的（$\mathscr{Q}$，$\mathscr{M}$）分解：

$$P \xrightarrow{\ e\ } Q \xrightarrow{\ m\ } X.$$

森林态射 $\mathbb{P}\,e$ 是双射（因为它是链之间的满射森林态射），因此是 $\mathscr{T}$ 中的同构；我们将其逆记作 w。由于 h 是笛卡尔态射，存在唯一的态射 w，属于 $\mathscr{A}$，使得 $\mathbb{P}\,w = w$ 成立，并且下方最左侧的图表交换。



为了得出 e 是同构（逆为 w），从而 h 是一个嵌入，我们再次使用 h 是笛卡尔态射这一事实。令 $\widehat{w}\colon\ P \to P$ 为 $\mathscr{A}$ 中唯一满足以下条件的态射：$\mathbb{P}\,\widehat{w}$ 是 $\mathbb{P}\,P$ 的恒等态射，且 $h \circ \widehat{w} = h$。



P的恒等态射显然满足这些条件，$w \circ e$也满足。只需注意到

$$\mathbb{P}(\overline{w} \circ e) = w \circ \mathbb{P}\,e = \mathrm{id}_{\mathbb{P}\,P}$$

and

$$h \circ \overline{w} \circ e = m \circ e = h.$$

因此，$\overline{w} \circ e = \mathsf{id}_P$。由此可知，$e$ 是一个嵌入（事实上是一个截面），因此也是一个同构。□

结合前面的观察，我们得到定理 23 的证明。

证明（定理 *23*）。一个方向即命题 24 的内容。对于另一个方向，假设 $f\colon X \to Y$是笛卡尔态射，并令 $m\colon P \rightarrowtail X$ 为路径嵌入。根据命题 24，m 是笛卡尔态射；又由于笛卡尔态射在复合下封闭，$f \circ m$ 也是笛卡尔态射。由引理 25 可知，$f \circ m$ 是路径嵌入，因此 f 是逐路径嵌入。

□

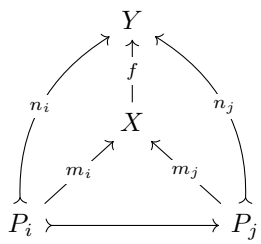
现在我们可以陈述本节的主要结果了。

定理 26。路径函子 $\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$是一个 *Street* 纤维化。

证明。考虑一个森林态射 $h\colon T \to \mathbb{P}Y$，其中 T是一棵树。根据定理 23，我们必须在 $\mathscr{A}$中给出一个逐路径嵌入 $f\colon X \to Y$和一个同构 $\iota\colon \mathbb{P}X \cong T$，其中 $\mathscr{T}$，使得 $\mathbb{P}f = h \circ \iota$。我们将 X定义为以 T为指标的路径树图的余极限，如下所示。

对于每个 $i \in T$，记 P_i 为任意路径嵌入 n_i 到 Y的定义域，使得 $h(i) = [n_i]$；注意，$[n_i]$ 中的任意两个元素的定义域都同构，因此 P_i 在同构意义下唯一。若 $i, j \in T$ 满足 $i \leq j$，则 $h(i) \leq h(j)$，因此存在唯一的嵌入 $e\colon P_i \rightarrowtail P_j$ 使得 $n_i = n_j \circ e$。由此，赋值 $i \mapsto P_i$ 给出了路径树图 $F\colon T \to \mathscr{A}$。令 $X \coloneqq$为 F的余极限，并将余极限态射记为 $m_i\colon P_i \to X$。

存在一个显然的相容余锥，其顶点为 Y，定义在图表 F上，且其在 i 处的分量为 n_i。因此，存在唯一的中介态射$f\colon X \to Y$，使下图交换。



特别注意，由于每个 n_i 都是嵌入，因此每个 m_i 也都是嵌入。为证明 f 是逐路径嵌入，考虑任意路径嵌入 $m\colon P \rightarrowtail X$。由于 P 是树连通的，存在一个（最小的）$k \in T$，使得 m 可经由 m_k 分解，例如 $m = m_k \circ \lambda$，其中 $\lambda\colon P \rightarrowtail P_k$。由此可得

$$f \circ m = f \circ m_k \circ \lambda = n_k \circ \lambda,$$

它是一个嵌入，因此 f 是逐路径嵌入。

记 $\rho\colon T \to \mathbb{P}X$ 为将 i 映射到（m_i 的等价类）的映射，并注意，对所有 $i \in T$，我们有 $(\mathbb{P}f \circ \rho)(i) = \mathbb{P}f([m_i]) = [f \circ m_i] = [n_i] = h(i)$，即

$$\mathbb{P}f \circ \rho = h. \tag{7}$$

最后，只需证明 ρ 是森林同构，因为其逆映射 $\iota := \rho^{-1}$ 满足所需性质。注意，式 (7) 蕴含 ρ 保持元素的高度。但 ρ 也是单调的（理由与证明 F 是函子时相同），因此它是一个森林态射。为证明 ρ 是单射，假设 $\rho(i) \le \rho(j)$，并令 $k \in T$ 为使 m_i 经由余极限态射 m_k 分解的最小元素；特别地，$k \le i,\ j$。回顾第 3.1 节，对于森林中的元素 x，其高度记作 $\mathrm{ht}(x)$，

$$\mathrm{ht}([m_k]) = \mathrm{ht}(\rho(k)) = \mathrm{ht}(k) \le \mathrm{ht}(i) = \mathrm{ht}(\rho(i)) = \mathrm{ht}([m_i])$$

因为 $k \le i$。由此可得 $\mathrm{ht}(k) = \mathrm{ht}(i)$，因此 $i = k$。所以，$i \le j$。

最后，由于 ρ的像是向下封闭的，要证明 ρ 是满射，只需证明 $\mathbb{P}X$ 中的每个元素都小于某个形如 $\rho(k)$ 的元素，其中 $k \in T$。但利用上述推理，并结合路径是树连通的这一事实，即可得到这一点。□

有人可能会问，是否可以加强定理 26，断言 $\mathbb{P}$是 [13, 第 21] 章意义下的拓扑函子。下面的例子表明这是不可能的。

例 *27.* 令 $\mathscr{A} := \mathrm{EM}(\mathbb{P}_k)$，其中 $k \ge 2$。回顾第 3.1 节，该范畴中的对象可以表示为元组 $(A, \le, p)$，其中 $(A, \le)$ 是一个森林序结构，且 $p\colon A \to \{1,2\}$ 是一个 pebbling 函数。考虑配备了 $p\colon A_i \to \{1,2\}$ 且满足 $p(\star) = i$ 的、定义在 $\{\star\}$ 上的 A_1, A_2 离散结构。那么，$\mathbb{P}A_1$ 和 $\mathbb{P}A_2$ 都同构于二元链 $\mathbf{2} = (\bot < \top)$，其底元素分别对应于 A_1 和 A_2的空子路径。

然而，森林态射的跨度（$f_i\colon \mathbf{2} \to \mathbb{P}A_i)_{i=1,2}$ 在 $\mathscr{T}$中无法提升为跨度（$g_i\colon X \to A_i)_{i=1,2}$ 在 $\mathscr{A}$中，使得 $\mathbb{P}(g_i) = f_i$，因为 X 必须是一个结构（$\{\star\}, \le, p$），满足 $p\colon \{\star\} \to \{1,2\}$ 将 $\star$同时映射到 1 和 2。特别地，由 f_i组成的跨度不存在初始提升，因此 $\mathbb{P}\colon \mathrm{EM}(\mathbb{P}_k) \to \mathscr{T}$不是拓扑的。

哪些树范畴 $\mathscr{T}$上的 Street 纤维化源自树状范畴，仍然是一个未解决的问题。最后，我们给出一个旧意义下是树状的范畴示例，但其路径函子不是纤维化。

例*28.* 设 σ 是一个非空的关系签名，仅由一元关系构成，我们将它们视为颜色。设 $\mathscr{A}$ 为范畴 $\mathrm{Str}(\sigma)$，并配备分解系统（正则满射，单射），而非前文讨论的分解系统（满射，正则单射）。那么 $\mathscr{A}$ 在旧意义下是树状的，而路径函子 $\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$不是纤维化。

为便于说明本例，假设 σ 包含两种颜色，蓝色 和红色。 $\mathscr{A}$ 中的非空路径是至多带有一种颜色的单元素结构。因此，在同构意义下，高度为0的路径有一条（空结构），高度为1的路径有一条（不带颜色的单元素结构），高度为2的路径有两条 P_{blue} 和 P_{red}，每种颜色各一条。不存在高度为3或更高的路径。范畴 $\mathscr{A}$ 在旧意义下是树状的，但在新意义下不是，因为路径树图 $P_{blue} \leftarrow \{\star\} \rightarrow P_{blue}$ 的余极限是 P_{blue}，但恒等态射 $P_{blue} \to P_{blue}$ 不能经由一个极小元素分解。

此外，路径函子 $\mathbb{P}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{T}$ 不是纤维化，因为 $\mathbb{P}$ 的像中的树是下列形状的树的余积。



如果 T 是一棵由一个根和三个子节点组成的树，则不存在满足 $T \cong \mathbb{P}(Y)$ 的 Y。因此，形如 $T \to \mathbb{P}\,X$ 的态射均不具有笛卡尔提升。

未来工作。我们提及一些当前的研究方向，它们以新近定义的意义促进了树状范畴的结构理论发展。

– 相同的作者正在致力于具体树状范畴的表示定理，[7] 据此每个这样的范畴都等价于一个“带标记的树”范畴。– 树状范畴中的双模拟等价与行为等价之间的关系，正在第一作者关于模型论类型的持续研究中得到探讨。如果对象 X 和 Y 之间存在开态射的余跨 $X \to Z \leftarrow Y$，则称它们在行为上等价 。– 第一作者、Henning Urbat 和 Thorsten Wißmann 正在一项持续开展的工作中研究某些自函子的余代数范畴是否存在树状余反射。

致谢。第一作者获得了欧盟“地平线欧洲”研究与创新计划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议，编号为 101111373。作者谨此感谢 Henning Urbat 鼓励他们发表这项工作，并提出了这样的问题：$\mathbb{P}$是否是拓扑函子；该问题已在例 27 中得到回答。

参考文献

1. Abramsky, S., Dawar, A., Wang, P.：有限模型论中的卵石博弈余单子。载于：第36届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS（2017） 2. Abramsky, S., Laure, T., Reggio, L.：存在博弈与正博弈：一种余单子式的公理化视角（2025），预印本见 https://arxiv.org/abs/2503.01247

[7] 如果路径函子是忠实的，那么树状范畴就是（关于树的）具体的。

3. Abramsky, S., Marsden, D.：守卫片段的余单子语义。载于：第36届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集。LICS '21，IEEE出版社（2021） 4. Abramsky, S., Marsden, D.：混合逻辑的余单子语义。载于：Szeider, S., Ganian, R., Silva, A.（编）第47届国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS 2022）。莱布尼茨信息学国际论文集（LIPIcs），第241卷，第7:1–7:14页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，德国达格施图尔（2022） 5. Abramsky, S., Montacute, Y., Shah, N.：线性树状范畴。理论信息学与计算机科学电子札记，MFPS XL论文集，414830 6 2024 10 46298 ( )。https://doi.org/ . /entics. . Abramsky, S., Reggio, L.：树状范畴与资源。载于：第48届自动机、语言与编程国际学术讨论会论文集，ICALP。莱布尼茨信息学国际论文集，第198卷，第115:1–115:20页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik（2021） 7. Abramsky, S., Reggio, L.：树状范畴：资源的公理化理论。计算机科学中的逻辑方法**19**(3)，14:1–14:36（2023）。https://doi.org/ 10 2023 8 46298 19 3 14 . /lmcs- (:)。Abramsky, S., Reggio, L.：树状范畴与等资源同态保持定理。纯粹与应用逻辑年刊**175**(6)，103423（2024）。https://doi.org/10 103423 9 1016 2024 . /j.apal. . Abramsky, S., Shah, N.：关联结构与能力：计算资源的余单子语义。载于：第27届EACSL计算机科学逻辑年会，CSL。第2:1–2:17页（2018） 10. Abramsky, S., Shah, N.：关联结构与能力：计算资源的余单子语义。逻辑与计算杂志**31**(6)，1390–1428（2021） 11. Abramsky, S., Jakl, T., Paine, T.：离散稠密余单子与图参数。载于：Hansen, H.H., Zanasi, F.（编）计算机科学中的余代数方法。CMCS 2022。计算机科学讲义，第13225卷，第23–44页。施普林格国际出版公司（2022） 12. Abramsky, S., Tzevelekos, N.：范畴与范畴逻辑导论。载于《物理学的新结构》，第3–94页。施普林格（2010） 13. Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G.：抽象范畴与具体范畴。《范畴之乐》。在线版（2004） 14. Awodey, S.：范畴论。牛津大学出版社（2010） 15. Bednarczyk, B., Urbanczyk, M.：描述逻辑博弈的余单子语义。载于：第35届描述逻辑国际研讨会（DL 2022）论文集，与联合逻辑会议（FLoC 2022）同期举行。CEUR研讨会论文集，第3263卷。CEUR-WS.org（2022） 16. Blackburn, P., van Benthem, J., Wolter, F.（编）：《模态逻辑手册》，逻辑与实践推理研究，第3卷。爱思唯尔公司，阿姆斯特丹（2007） 17. Carboni, A., Janelidze, G., Kelly, G., Paré, R.：论分解系统的局部化与稳定化。应用范畴结构**5**(1)，1–58（1997） 18. Dawar, A., Jakl, T., Reggio, L.：Lovász型定理与博弈余单子。载于：第36届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS（2021） 19. Figueira, S., Goren-Roig, G.：带有路径上关系的模态逻辑：通过余单子语义展开的理论发展。逻辑与计算杂志**35**(6)，exae082（01 2025）。https://doi.org/10.1093/logcom/exae082

20. Freyd, P., Kelly, G.：连续函子范畴 I。纯粹与应用代数杂志 **2**(3), 169–191（1972）21. Grädel, E., Kolaitis, P.G., Libkin, L., Marx, M., Spencer, J., Vardi, M.Y., Venema, Y., Weinstein, S.：有限模型论及其应用。理论计算机科学丛书。EATCS丛书，施普林格（2007）。https://doi.org/10.1007/ 3-540-68804-8 22. Hennessy, M., Milner, R.：关于观察非确定性与并发。载于：自动机、语言与程序设计。第299–309页。施普林格柏林海德堡（1980）23. Jakl, T., Marsden, D., Shah, N.：逻辑中组合方法的范畴论描述（扩展版）。计算机科学中的逻辑方法 **21**(4), 10（2025年10月 2025 24 10 46298 21 4 10 ）。https://doi.org/ . /lmcs- (:) 。Joyal, A., Nielsen, M., Winskel, G.：基于开映射的互模拟。信息与计算 **127**(2), 164–185（1996）25. Joyal, A., Nielson, M., Winskel, G.：互模拟与开映射。载于：第8届IEEE计算机科学逻辑年度研讨会论文集。第418–427页（1993）26. Libkin, L.：有限模型论基础。理论计算机科学丛书。EATCS丛书，施普林格出版社，柏林（2004）27. Linton, F.E.：代数范畴中的余等化子。载于：三元组与范畴同调理论研讨会。第75–90页。施普林格（1969）28. Montacute, Y., Shah, N.：有限模型论中的卵石关系余单子。载于：第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年度研讨会论文集。LICS '22，IEEE出版社（2022）29. Ó Conghaile, A., Dawar, A.：博弈余单子与广义量词。载于：第29届EACSL计算机科学逻辑年度会议，CSL。LIPIcs，第183卷，第16:1–16:17页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心（2021）30. Reggio, L., Riba, C.：有限可达树状伴随与Hintikka公式（2023 12709 31 2304），预印本见 https://arxiv.org/abs/ 。. Reggio, L.：多元集与同态计数。数学进展 **410**, 108712 108712 32 2022 10 1016 2022 （）。https://doi.org/ . /j.aim. . 。Riehl, E.：范畴同伦论。新数学专著，剑桥大学出版社（2014）33. Schindling, G.：受限合取与重新量化下的同态不可区分性和博弈余单子。载于：第50届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2025）。LIPIcs，第345卷，第89:1–89:19页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik（2025）。https: // doi.org/10.4230/LIPIcs.MFCS.2025.89