arXiv:2603.21893v1 [math.RT] 23 Mar 2026

超 immanant 与 Littlewood 对应

NAIHUAN JING、YINLONG LIU 和 JIAN ZHANG

Abstract. 本文提出了超交换代数上的超矩阵的超 immanant 概念。利用超 Schur–Weyl 对偶性，我们证明超 immanant 在一般线性李超代数的协变张量表示中发挥着重要作用。在诸多结果中，我们得到了超 immanant 的超迹公式，将 Kostant 迹公式推广到了超情形。此外，我们证明，超 immanant 与超对称多项式之间的 Littlewood 对应在它们各自的代数之间建立了同构。

1. Introduction

超交换代数上的超矩阵已用于超流形、李超群和李超代数的研究 [Ber87，Ko77，Kac77，Le80，KN84]。它们的引入与各种物理问题密切相关 [Man88，DM99]。

immanant 的经典概念可追溯至 Schur 的开创性工作 [Sc18]。Littlewood [Li40，LR34] 将这些矩阵函数作为行列式和永久式的推广引入，以建立 Littlewood 对应。这些对应在基的层面上，建立了一般线性群与对称群的表示之间的完备对应，其程度可与 Schur-Weyl 对偶相媲美。Littlewood 对应不仅补充了 Schur-Weyl 对偶，还揭示了它与 Gelfand-Tsetlin 基之间的密切关系。本文利用对称群的本原幂等元，研究与对称群任意表示相关的超矩阵的超 immanant，从而为量子 Okounkov 特征标式的完全推广提供一种实用方法。

本文的主要结果之一，是通过一般线性李超代数协变张量表示的权空间来诠释超 immanant，并推导出超迹公式 $\mathfrak{gl}_{m|n}$。在我们先前的工作 [JLZ25], 中，我们在量子坐标代数的框架下，将 Kostant 的迹公式 [Ko95] 从 0 权空间推广到了特殊线性群 SL($n, \mathbb{C}$) 的任意权空间。

MSC（2020）：主分类：17A70；次分类：17B35、15A15、05E05、05E10 关键词：超 immanant，李超代数，Schur-Weyl 对偶，Littlewood 对应。1

本文通过构造 [JLZ25] 中的方法，将不可约协变张量表示 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的 Gelfand-Tsetlin 型基与对称群不可约表示的 Young 正交基建立精确对应。

众所周知，Schur 对称多项式是对称群和一般线性群不可约表示的特征标。由于 Schur 多项式与 im- manant 之间存在密切联系，这种联系被称为 Littlewood 对应 [Li40], ，因此可以从对称群和一般线性群的表示论中推导出许多 immanant 恒等式。另一方面，immanant 恒等式为表示论提供了精确的数值关系，其思想与 Schur-Weyl 对偶类似。

因此，本文的第二个目的是构造超 immanant 与 Schur 超对称多项式之间的对应，将 Littlewood 对应 I-III 推广到超代数。我们还引入超矩阵坐标超代数的一个交换子代数，并证明它与超对称多项式代数同构。

值得注意的是，Littlewood 对应 III 指出，以矩阵 X的特征根为变量的 Schur多项式，可以通过 X中恰当选取的广义子矩阵所对应的归一化 immanant 显式表示。这在超矩阵的情形下则截然不同。关于超矩阵的特征函数（Berezinian）和特征值，相关研究见 [KN88，KN90]。Urrutia 和 Morales[UM81，UM94] 证明了超 Cayley–Hamilton 定理，而 [KT94，KT99]则提出了另一种版本的超 Cayley–Hamilton 定理。后来，Gurevich、Pyatov 和 Saponov [GPS06，GPS06'] 将这一结果推广到了量子超 Cayley–Hamilton 定理。运用超矩阵特征函数（Berezinian）的这些技巧以及超 Cayley–Hamilton 定理，我们得到了 Littlewood 对应 III 的一个完全对应的超版本。

作为应用，我们利用超 Littlewood 对应得到了若干经典 immanant 恒等式的超类比。特别是，我们得到了 Littlewood–Merris–Watkins 恒等式的超版本[Li40，MW85] 以及 Goulden-Jackson 恒等式 [GJ92]。值得注意的是，Goulden-Jackson 恒等式 [GJ92] 还为 Littlewood 对应、MacMahon 定理 [Ma60，VJ83]，以及 Young 幂等元提供了新的诠释。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍超 immanant 的概念，并给出超 immanant 的表示论解释。第 3 节探讨 Littlewood 对应 I–III 的超类比。我们还证明了超 Littlewood–Merris–Watkins 恒等式和超 Goulden-Jackson 恒等式。

2. Super-immanants and super Schur-Weyl duality

2.1. 超 immanant。 令 $\mathbb{C}^{m|n}$ 为由其 $\mathbb{Z}_2$分次基 $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$张成的复超向量空间。对于任意 $1 \le i \le m+n$，e_i 的宇称定义为

$$\bar{i} = \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \le i \le m, \\ 1 & \text{if } m < i \le m+n. \end{cases}$$

设 $R = R_0 \oplus R_1$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的自由超交换代数（例如 Grassmann 代数）。我们用 $\mathrm{End}(R) = \mathrm{End}(R)_0 \oplus \mathrm{End}(R)_1$ 表示 $R^{m|n} := R \otimes \mathbb{C}^{m|n}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$-分次端同态集合。

相对于 $\mathbb{C}^{m|n}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次基，偶超代数 $\mathrm{End}(R)_0$ 可与维数为 $(m+n) \times (m+n)$、系数取自 R 的所有偶方超矩阵等同，因此也将其记作 $\mathrm{Mat}^{m|n}(R)$。$R^{m|n}$ 的所有偶自同构构成的群记作 $\mathrm{GL}^{m|n}(R)$。坐标超代数 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 由 x_{ij}，$1 \le i,\ j \le m+n$ 生成，其中 x_{ij} 是 $\mathrm{Mat}^{m|n}(R)$ 上宇称为 $\bar{i}+\bar{j}$ 的坐标函数。

超矩阵 $Y = (y_{ij})$ 的超迹 str 为

$$str(Y) = \sum_{i=1}^{m+n} (-1)^{\bar{i}} y_{ii}.$$

对于任意 $a \in \{1, 2, \ldots, r\}$，我们将作用于超代数 $\mathrm{End}((\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r})$ 上的相应超迹记为 str_a；它在 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{m|n})$ 的第 a 个副本上作用为 str，在所有其他张量因子上则作用为恒等映射。

对于作用在 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 的标准基上的偶算子 $A \in R \otimes \mathrm{End}((\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r})$，使用标准记法表示其矩阵系数 $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r}$ 将很方便。我们记

$$A = \sum_{I,J} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r} \otimes e_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r j_r}, \tag{2.1}$$

其中 e_{ij} 是 $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{m|n})$ 的标准基。设 $\{e_i^* \mid 1 \le i \le m+n\}$ 是与 $\mathbb{C}^{m+n}$ 的基 $\{e_i \mid 1 \le i \le m+n\}$ 对偶的 $(\mathbb{C}^{m|n})^*$ 的基，那么我们可以分别写出 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 的基及其在 $((\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r})^*$ 中的对偶基：

$$|\, i_1, \ldots, i_r \rangle = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, \qquad \langle i_1, \ldots, i_r \,| = (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r})^*, \tag{2.2}$$

宇称为 $I = i_1 + \ldots + i_r$。那么，偶算子A的矩阵系数为

$$A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r} = (-1)^{\gamma(I,J)} \langle i_1, \ldots, i_r \mid A \mid j_1, \ldots, j_r \rangle, \tag{2.3}$$

其中 $\gamma(I,\ J) = \sum_a i_a(j_a+1) + \sum_{a<b} j_b(i_a + j_a)$。特别是，

$$\begin{aligned} A^{i_1,\ldots,i_r}_{i_1,\ldots,i_r} &= \langle i_1, \ldots, i_r \mid A \mid i_1, \ldots, i_r \rangle, \\ str_{1,\ldots,r}(A) &= \sum_I (-1)^{\bar{I}} \langle i_1, \ldots, i_r \mid A \mid i_1, \ldots, i_r \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

设 $\mathfrak{S}_r$ 为 r 阶对称群。存在一个 $\mathfrak{S}_r$ 在 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 上的表示 ρ，其定义为

$$\sigma \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} = (-1)^{\bar{I}_\sigma} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(r)}}, \tag{2.5}$$

对于任意的 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$，其中

$$\bar{I}_\sigma = \sum_{\substack{k<l,\\ \sigma(k)>\sigma(l)}} \bar{i}_k \bar{i}_l.$$

对于任意的 $1 \leq a < b \leq r$，我们定义

$$P_{(a,b)} = \sum_{i,j=1}^{m+n} (-1)^{\bar{j}} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{ji} \otimes 1^{\otimes(r-b)}, \tag{2.6}$$

则 $\rho((i,\ i+1)) = P_{(i,i+1)}$，并记 $\rho(\sigma) = P_\sigma$。

设 $I = (i_1, \ldots\ldots, i_k)$ 和 $J = (j_1, \ldots\ldots, j_k)$ 是 $[m+n]$ 的两个多重集（k 元组）。我们用 X_J^I 表示 X 的广义子矩阵，其行（分别为列）指标属于 I（分别为 J）。若 $I = J$，则简记为 X_I。

设 V 是 $\mathfrak{S}_r$ 的任意表示，其特征标为 χ^V。与表示 V 相关联的 X_J^I 的超不变量定义为

$$\mathrm{Imm}_{\chi^V}(X_J^I) = (-1)^{\sum_{k=1}^r \bar{i}_k \bar{j}_k} \langle i_1, \ldots, i_r \mid \chi^V X_1 \cdots X_r \mid j_1, \ldots, j_r \rangle. \tag{2.7}$$

分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{m+n})$ 是一个非负整数的非递增序列。若 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m+n} = r$，我们称 λ 是 r 的一个分拆，记作 $\lambda \vdash r$。用 $H(m,\ n)$ 表示满足 $\lambda_{m+1} \leq n$ 的分拆 λ 的集合，并令

$$H(m,n;r) = \{\lambda \in H(m,n) \mid \lambda \vdash r\}. \tag{2.8}$$

形状为 λ 的标准杨表 $\mathcal{T}$ 的集合记作 $\mathrm{SYT}(\lambda)$。令 $c_k(\mathcal{T}) = j - i$ 表示 λ 中由 k 在 $\mathcal{T} \in \mathrm{SYT}(\lambda)$ 中占据的方格 $(i,\ j)$ 的内容。并记 $d_i(\mathcal{T}) = c_{i+1}(\mathcal{T}) - c_i(\mathcal{T})$。

命题 2.1。设 $I = (i_1, \ldots, i_r)$ 是 $[m+n]$ 的一个有序多重集，且 X 是 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 的生成元超矩阵。那么对于任意 $\lambda \vdash r$，(2.9)

$$\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I) = (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \langle i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda X_1 \cdots X_r \mid i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)} \rangle,$$

其中，$\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda$是与形状为 λ的标准杨表 $\mathcal{T}$相关联的 $\mathfrak{S}_r$ 的本原幂等元。此外，当 $\lambda \notin H$（m、n；r）时，$\mathrm{Imm}\chi^\lambda$（X_I）$= 0$。

证明。由于 $\chi^\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sigma \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda \sigma^{-1}$，根据定义可得 (2.10)

$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I) &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \langle i_1, \ldots, i_r \mid P_\sigma \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda P_{\sigma^{-1}} X_1 \cdots X_r \mid i_1, \ldots, i_r \rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \langle i_1, \ldots, i_r \mid P_\sigma \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda X_1 \cdots X_r P_{\sigma^{-1}} \mid i_1, \ldots, i_r \rangle.\end{aligned}$$

注意

$$P_{\sigma^{-1}} \mid i_1, \ldots, i_r\rangle = (-1)^{\bar{I}_{\sigma^{-1}}} \mid i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}\rangle,$$
$$\langle i_1, \ldots, i_r \mid P_\sigma = (-1)^{\bar{I}_{\sigma^{-1}}} \langle i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)} \mid .$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I) &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \langle i_1, \ldots, i_r \mid P_\sigma \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda X_1 \cdots X_r P_{\sigma^{-1}} \mid i_1, \ldots, i_r\rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \langle i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda X_1 \cdots X_r \mid i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}\rangle.\end{aligned}$$

若 $\lambda \notin H(m,\ n;\ r)$，即 $\lambda_{m+1} > n$。取标准杨表 $\mathcal{T}_0$，其中方格按行从上到下编号，每行从左到右。于是

(2.11)
$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I) &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \langle i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{T}_0}^\lambda X_1 \cdots X_r \mid i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}\rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} (\mathcal{E}_{\mathcal{T}_0}^\lambda X_1 \cdots X_r)_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}} \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r} (\mathcal{E}_{\mathcal{T}_0}^\lambda)_{i_{\tau(1)},\ldots,i_{\tau(r)}}^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}} x_{i_{\tau(1)},i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\tau(r)},i_{\sigma(r)}}.\end{aligned}$$

因此，只需证明对于 $I = (i_1 \le \ldots \le i_r)$ 及任意 $\tau \in \mathfrak{S}_r$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}_0}^\lambda \cdot e_{i_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\tau(r)}} = 0. \tag{2.12}$$

首先，我们证明

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}_0}^\lambda \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} = 0. \tag{2.13}$$

由于 $\lambda_{m+1} > n$，但 $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$ 中至多有 m 个不同的偶因子和 n 个不同的奇因子，因此有以下两种情况：(i) 存在 $1 \le k < j \le r$，使得 $1 \le i_k = i_j \le m$，且 $\mathcal{T}_0$ 中由 k 和 j 占据的这些方格位于同一列的相邻两行；(ii) 存在 $1 \le k < r$，使得 $m+1 \le i_k = i_{k+1} \le m+n$，且 $\mathcal{T}_0$ 中由 k, $k+1$ 占据的这些方格位于同一行。

对于情况 (i)，回顾本原幂等元的融合过程 $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda$[Jucy66]:

$$h(\lambda)\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^\lambda = \phi(z_1, \ldots, z_r)|_{z_1=c_1} \cdots |_{z_r=c_r}, \tag{2.14}$$

其中 $h(\lambda)$ 是钩长，并记

$$\phi(z_1, \ldots, z_r) = \prod_{1\le a<b\le r}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(a,b)}}{z_a - z_b}),$$

其中，乘积按有序对集合 $(a,\ b)$ 上的字典序取值。由本原幂等元的融合过程和递推关系可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\&=Y_r\cdots Y_{j+1}\mathcal{E}^{\mu}_{\mathcal{T}^-}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\&=Y_r\cdots Y_{j+1}\frac{1}{h(\mu)}\phi(z_1,\ldots,z_j)|_{z_1=c_1}\cdots|_{z_j=c_j},\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中，Y_k 是 $\mathfrak{S}_r$ 的 Jucys-Murphy 元 y_k 中的一个有理函数，$j+1\leq k\leq r$，而 $\mathcal{T}^-$ 是从 $\mathcal{T}_0$ 中移除由 $j+1$、.....、r 占据的方格后得到的标准杨氏表，记 $\mathcal{T}^-$ 的形状为 μ。

接着考虑 $\phi(z_1,\ .....,\ z_j)|_{z_1=c_1}\cdots|_{z_j=c_j}$ 中最后的 $j-k$ 个因子，我们有

$$\begin{aligned}\prod_{k\leq t\leq j-1}^{\rightarrow}(1-\frac{P_{(t,j)}}{c_t-c_j})\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}&=const.(1-P_{(k,j)})\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\&=0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

对于情形（ii），利用以下来自 [Mo18，引理 1.1。1]

$$\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}\cdot(P_{(a,a+1)}-\frac{1}{d_a(\mathcal{T})})=\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}P_{(a,a+1)}\mathcal{E}^{\lambda}_{(a,a+1)\cdot\mathcal{T}},\tag{2.17}$$

并且当杨氏表 $(a,\ a+1)\cdot\mathcal{T}$ 不是标准杨氏表时，$\mathcal{E}^{\lambda}_{(a,a+1)\cdot\mathcal{T}}=0$。于是

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\=&-\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}P_{(k,k+1)}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\=&-\frac{1}{d_k(\mathcal{T}_0)}\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\=&-\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

结合情形（i）和（ii），$\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=0$。

通过相同的论证，我们可以证明，对于任意的 $\mathcal{T}\in$标准杨氏表(λ),

$$\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=0.\tag{2.19}$$

接下来我们通过以下方式证明方程（2.12）：

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}\cdot e_{i_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\tau(r)}}\\=&(-1)^{\bar{l}_{\tau^{-1}}}\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}_0}P_{\tau^{-1}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

利用恒等式（2.17），上述方程可以用 $\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes$表示 $\cdots\otimes e_{i_r}$，对于某个 $\mathcal{T}\in$标准杨氏表(λ)，因此它为零。由此得到，当 $\lambda\notin H(m,\ n;\ r)$ 时，$\mathrm{Im}m^{\lambda}(X_I)=0$。□

2.2. **超 Schur–Weyl 对偶性**。 我们回顾 Berele 和 Regev [BR83、BR87] 和 Sergeev [Ser84、Ser85]所给出的对称群与一般线性李超代数之间的双中心化子性质。更多信息请参见 [CW12]。

一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 由标准基元素 $E_{ij}, 1 \le i,j \le m+n$ 张成。$\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-分次定义为$_\quad_E_{ij} \mapsto i+j$。交换关系为

$$[E_{ij},\ E_{kl}] = \delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}(-1)^{(\bar{i}+\bar{j})(\bar{k}+\bar{l})}. \tag{2.21}$$

我们用 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 表示 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的包络代数。

超向量空间 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 给出了 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的如下表示 π： 对所有 $x \in \mathfrak{gl}_{m|n}$,

$$x\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r} = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{\bar{x}(\bar{i}_1+\ldots+\bar{i}_{j-1})}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{j-1}}\otimes xe_{i_j}\otimes e_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},$$

它是基本表示的张量表示。

根据 [BR83，BR87，Ser84，Ser85], $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$是一个无重数的 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})\times\mathfrak{S}_r$- 模，并且存在张量空间的一个分解

$$(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r} \cong \bigoplus_{\lambda\in H(m,n;r)} U^{\lambda}\otimes V^{\lambda}, \tag{2.22}$$

其中（π_λ, U^λ）是 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$对应于分拆 λ 的不可约协变张量表示，而（ρ_λ, V^λ）是 $\mathfrak{S}_r$的不可约表示。根据 Kac 定理 [Kac78], ，必定存在一个整 dominant 权 $\boldsymbol{\lambda}$ ，使得最高权模 $L(\boldsymbol{\lambda})$与 U^λ同构。这样的最高权 $\boldsymbol{\lambda}$ 称为协变最高权。协变最高权与$H(m,n)$中的分拆之间的一一对应关系（参见（2.8））如下所示。对于 $H(m,n)$中的任意分拆 λ，相应的协变最高权 $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_m \mid \boldsymbol{\lambda}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\lambda}_{m+n})$为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_i &= \lambda_i,\ 1\le i\le m,\\ \boldsymbol{\lambda}_{m+i} &= \max\{0,\lambda'_i - m\},\ 1\le i\le n, \end{aligned} \tag{2.23}$$

其中， λ'是与 λ共轭的分拆。反之，若 $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\lambda}_m \mid \boldsymbol{\lambda}_{m+1},\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\lambda}_{m+n})$是协变最高权，则 λ的分量可明确写为

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \boldsymbol{\lambda}_i,\ 1\le i\le m,\\ \lambda_{m+i} &= \sharp\{j \mid \boldsymbol{\lambda}_{m+j}\ge i,\ 1\le j\le n\},\ 1\le i\le n. \end{aligned} \tag{2.24}$$

令 $\{v_{\mathcal{T}} \mid \mathcal{T}\in \mathrm{SYT}(\lambda)\}$ 为 V^λ的 Young 正交基。在 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 上定义非退化对称双线性型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$：

$$\langle e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\rangle = \prod_{1\le k\le r}\delta_{i_k,j_k}. \tag{2.25}$$

我们分别为 $\mathfrak{S}_r$ 和 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$引入 $*$-运算。令 $\sigma^* = \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_r$。并且 $E_{ij}^* = E_{ji}$, $1 \leq i$, $j \leq m+n$属于 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$。它们是对合反自同构。

引理 2.2。 $*$-运算对于 $\mathfrak{S}_r$ 和 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 给出一个逆变双线性形式，即

$$\begin{aligned} &\langle x \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, x^* \cdot e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle, \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 x 是 $\mathfrak{S}_r$ 或 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$中的任意元素。

证明。 我们记 $I = (i_1, \ldots, i_r)$ 和 $J = (j_1, \ldots, j_r)$。

对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$， 有

$$\begin{aligned} &\langle P_\sigma \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}_\sigma} \langle e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(r)}}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}_\sigma} \prod_{1 \leq k \leq r} \delta_{i_{\sigma^{-1}(k)}, j_k}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, P_{\sigma^{-1}} \cdot e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= (-1)^{\bar{J}_{\sigma^{-1}}} \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{j_{\sigma(r)}} \rangle \\ &= (-1)^{\bar{J}_{\sigma^{-1}}} \prod_{1 \leq k \leq r} \delta_{i_k, j_{\sigma(k)}}. \end{aligned}$$

由于当 $J = \sigma(I)$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^{\bar{I}_\sigma} &= \prod_{\substack{k<t, \\ \sigma(k)>\sigma(t)}} (-1)^{\bar{i}_k \bar{i}_t} = \prod_{\substack{k>t, \\ \sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(t)}} (-1)^{\bar{i}_{\sigma^{-1}(k)} \bar{i}_{\sigma^{-1}(t)}} \\ &= \prod_{\substack{k>t, \\ \sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(t)}} (-1)^{\bar{j}_k \bar{j}_t} = (-1)^{\bar{J}_{\sigma^{-1}}}, \end{aligned}$$

因此，$(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 上的双线性形式对于 $\mathfrak{S}_r$是逆变的。

对于 $x = E_{ji} \in \mathfrak{gl}_{m|n}$, 若 $i \notin I$ 或 $j \notin J$, 则（2.26）的左边为零。并且 E_{ji}^* 在（2.26）右边的作用也平凡。除非，对于任意$1 \leq s$, $t \leq r$,

$$\begin{aligned} &\langle E_{j_s, i_t} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{(\bar{j}_s + \bar{i}_t)(\bar{i}_1 + \ldots + \bar{i}_{k-1})} \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{k-1}} \otimes E_{j_s, i_t} \cdot e_{i_k} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{(\bar{j}_s + \bar{i}_t)(\bar{i}_1 + \ldots + \bar{i}_{k-1})} \delta_{i_t, i_k} \delta_{j_s, j_k} \prod_{p \neq k} \delta_{i_p, j_p}. \end{aligned}$$

And

$$\langle e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},(-1)^{\bar{i}_t+\bar{j}_s}E_{i_t,j_s}\cdot e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\rangle$$
$$=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{(\bar{j}_s+\bar{i}_t)(\bar{j}_1+\ldots+\bar{j}_{k-1})}\langle e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{k-1}}\otimes E_{i_t,j_s}\cdot e_{j_k}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\rangle$$
$$=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{(\bar{j}_s+\bar{i}_t)(\bar{j}_1+\ldots+\bar{j}_{k-1})}\delta_{j_s,j_k}\delta_{i_k,i_t}\prod_{p\neq k}\delta_{i_p,j_p}.$$

因此，$(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 上的双线性形式对于 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 是逆变的。 □

2.3. 协变表示的 Gelfand-Tsetlin 型基。 形状为 $\lambda\in H(m,\ n;\ r)$ 的超表 Λ 是半标准的，当且仅当满足以下条件:

(a) 每一行和每一列中的元素从左到右、从上到下弱递增;

(b) $\{1,\ldots,m\}$ 中的元素沿每一列严格递增;

(c) $\{m+1,\ldots,m+n\}$ 中的条目沿每一行从左到右严格递增。

我们用 $SSYT(\lambda)$ 表示形状为λ的半标准超杨表集合。我们称超杨表 Λ 的权为 μ ，如果 μ_i 等于Λ中 $i's$的数量。

Molev [构造了一个基 11] ，该基由所有形如 ξ_Λ 的半标准超杨表参数化 Λ ，其中形状为 λ ，对应于不可约协变张量表示 $U^\lambda\cong L(\lambda)$，并给出了生成元 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 在该基下的显式作用。另一方面，Stoilova 和 van der Jeugt [SJ10] 构造了 Gelfand-Tsetlin 型基，并给出了生成元 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 在该基下的不同矩阵元公式。具体而言，他们证明了满足条件（ 2 $\zeta_\Lambda=(\lambda_{ij})$ $_{1\leq j\leq i\leq m+n}$ 的向量集合

.27)

(1) $\lambda_{m+n,j}=\lambda_j,\ 1\leq j\leq m+n$; (2) $\lambda_{pi}-\lambda_{p-1,i}\equiv\theta_{p-1,i}\in\{0,1\}$, $1\leq i\leq m, m+1\leq p\leq m+n$; (3) $\lambda_{pm}\geq\#\{i:\ \lambda_{pi}>0,$ $m+1\leq i\leq p\},\ m+1\leq p\leq m+n$; (4) 若 $\lambda_{m+1,m}=0$，则 $\theta_{mm}=0$; (5) $\lambda_{pi}-\lambda_{p,i+1}\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leq i\leq m-1, m+1\leq p\leq r-1$; (6) λ_i, $_j-\lambda_{i-1,j}\in\mathbb{Z}_+$ 以及 $\lambda_{i-1,j}-\mu_{i,j+1}\in\mathbb{Z}_+, 1\leq j\leq i\leq m$ 或 $m+1\leq j\leq i\leq m+n.$

构成了 $L(\lambda)$ 中的一组基。

在 [Mo11], Molev 证明，每个半标准超杨表都与一对满足介于（或交错）条件的模式一一对应。

此外，Stoilova 和 van der Jeugt 定义的这些 Gelfand-Tsetlin 型基 ζ_Λ 也与半标准超杨表Λ 一一对应，使得对于任意 $1\leq i\leq m+n$,

若 $1 \le j \le m$,

(2.28) $\lambda_{ij} =$ Λ第 j行中 $\le i$ 项的数量;

若 $1 \le k \le i-m \le n$, $\lambda_{i,\ m+k} =$则 Λ 从第$m+1$行到最后一行的第 k列中 $\le i$ 项的数量。

Let E 是一个系数取自 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$的$(m+n) \times (m+n)$矩阵，其第 ij个元素等于$\hat{} \ E_{ij} = (-1)^{\bar{j}} E_{ij}$。 *Berezinian* 是$U(\mathfrak{gl}_{m|n})[[t]]$ 中的一个元素，定义如下:

(2.29)
$$B_{m+n}(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)(1+t\hat{E})_{\sigma(1),1} \cdots (1+t(\hat{E}-m+1))_{\sigma(m),m}$$
$$\times \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} sgn(\tau)(1+t(\hat{E}-m+1))^{-1}_{m+1,m+\tau(1)} \cdots (1+t(\hat{E}-m+n))^{-1}_{m+n,m+\tau(n)}.$$

Nazarov 证明，Berezinian 的系数属于 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ [Na91]的中心。事实上，根据 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$，它们生成 [Gow07]的中心。

令 $l_i = \boldsymbol{\lambda}_i - i + 1$对于 $i = 1, \dots, m$, $l_j = -\boldsymbol{\lambda}_j + j - 2m$对于 $j = m+1, \dots, m+n$. 则 $B_{m+n}(t)$通过标量 $L(\boldsymbol{\lambda})$作用于 [Mo98, MR04]

(2.30)
$$\frac{(1+tl_1)\cdots(1+tl_m)}{(1+tl_{m+1})\cdots(1+tl_{m+n})}.$$

记 $l_{ij} = \lambda_{ij} - j + 1$对应于 $j = 1, \dots, m$, $l_{ij} = -\lambda_{ij} + j - 2m$对应于 $j = m+1, \dots, m+n$。由 $L(\boldsymbol{\lambda})$ 的分支规则，我们可以得到

(2.31)
$$B_k(t)\zeta_\Lambda = (1+tl_{k1})\cdots(1+tl_{kk})\,\zeta_\Lambda \quad \text{for } 1 \le k \le m,$$
$$B_k(t)\zeta_\Lambda = \frac{(1+tl_{k1})\cdots(1+tl_{km})}{(1+tl_{k,m+1})\cdots(1+tl_{kk})}\zeta_\Lambda \quad \text{for } m+1 \le k \le m+n.$$

2.4. **超 immanant 的权空间解释**。 我们可以将（2.22）分解为基向量:

(2.32)
$$(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r} \cong \sum_{\lambda \in H(m,n;r)} \sum_{(\Lambda,\mathcal{T})} \mathbb{C}\zeta_\Lambda \otimes v_{\mathcal{T}}.$$

根据引理2.2，分解（2.32）中的这些基向量是归一化正交的，即

$$\langle \zeta_\Lambda \otimes v_{\mathcal{T}}, \zeta_{\Lambda'} \otimes v_{\mathcal{T}'} \rangle = \delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}$$

对于任意半标准超杨表 Λ, Λ' 和标准杨表$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$。

$m+n$ 元组 $(a_1, \dots\dots, a_{m+n})$ 中，若 $\mathbb{Z}^{m+n}_{\ge 0}$ 中满足 $a_1 + \cdots + a_{m+n} = r$ 的元组，则称其为 r 的一个分为 $(m+n)$ 部分的弱合成，或称为 r 的一个弱 $(m+n)$-合成。显然， $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 在 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 中的权恰好是 r 的弱 $(m+n)$-合成。对于 r 的任意弱 $(m+n)$-合成 $\boldsymbol{\mu}$ ，定义投影算子

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}} : (\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r} \to ((\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r})_{\boldsymbol{\mu}},$$

于是 $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}$： $L(\boldsymbol{\lambda}) \to L(\boldsymbol{\lambda})_{\boldsymbol{\mu}}$，其中 $((\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r})_{\boldsymbol{\mu}}$ 和 $L(\boldsymbol{\lambda})_{\boldsymbol{\mu}}$ 是权为 $\boldsymbol{\mu}$ 的子空间，分别作为 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$-模。

由 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 与 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 之间的双代数对偶性，超张量空间 $(\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$ 具有一个由 2.33 给出的 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$-余模结构

$$\Delta : (\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r} \to A(\mathrm{Mat}_{m|n}) \otimes (\mathbb{C}^{m|n})^{\otimes r}$$

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \mapsto \sum_{(i_1,\ldots,i_r)} (-1)^{\sum_{a<b} \bar{i}_a(\bar{i}_b+\bar{j}_b)} x_{i_1,j_1} \cdots x_{i_r,j_r} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r},$$

其中，求和遍及 $[m+n]$ 的所有序列 $(i_1 \ldots, \ i_r)$。

现在我们给出一般 Kostant 定理的超类比 [Ko95], ，它为超 immanant 提供权空间解释。方便起见，记作$I = (1^{\alpha_1}, \ldots\ldots, (m+n)^{\alpha_{m+n}})$，以表示 α_i 在 i 非递减多重集 $I = (i_1 \le \ldots \le i_r)$ 中的重数。这里 $\alpha_i = \alpha_i(I) =$基数$\{j \in I \mid j = i\}$。

Let

$$\alpha(I) = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_{m+n}!$$

记

$$\mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \mathfrak{S}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\alpha_{m+n}}$$

$\mathfrak{S}_r$的杨子群，以及当 $\alpha_j = 0$时的 $\mathfrak{S}_{\alpha_j} = 1$ 。

定理 2.3。 设 $\lambda \in H(m,n;r)$， $\boldsymbol{\mu}$ 是 r的弱$(m+n)$-合成，并假设 $[m+n]$的多重集 $I = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \ldots, (m+n)^{\mu_{m+n}})$。那么

$$\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)} = str(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}} \otimes 1) \circ \Delta \circ \mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}|_{L(\boldsymbol{\lambda})}. \tag{2.34}$$

在证明此定理之前，我们先给出 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$的协变表示的 Gelfand-Tsetlin 型基与 $\mathfrak{S}_r$的不可约表示的 Young 正交基之间的一个显式对应。

给定任意权 $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{m+n})$，它可以写成多重集$I = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \ldots, (m+n)^{\mu_{m+n}}) = (i_1, \ldots, i_r)$。我们定义如下映射

$$\theta_{\boldsymbol{\mu}} : SYT(\lambda) \to YT(\lambda) \tag{2.35}$$

该映射将任意标准杨表 $\mathcal{T}$映射为杨表 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})$，后者将 $\mathcal{T}$中的每个节点 k替换为 $1 \le k \le r$对应的 i_k。注意， $SSYT(\lambda)$包含于 $YT(\lambda)$中。

引理 2.4. 设 $\lambda \vdash r$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 是 r 的一个弱$(m+n)$-*composition*，写作多重集 $I = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \ldots, (m+n)^{\mu_{m+n}}) = (i_1 \le \ldots \le i_r)$； 设 $\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}$ 是与 $\mathcal{T}$ 相关联的 $\mathfrak{S}_r$ 的本原幂等元。那么作为一个$U(\mathfrak{gl}_{m|n}) \times \mathfrak{S}_r$-模

$$\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}} \mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} = \begin{cases} c \cdot \zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})} \otimes v_{\mathcal{T}} & \text{if } \theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}) \in SSYT(\lambda), \\ 0 & \text{if } \theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}) \notin SSYT(\lambda), \end{cases} \tag{2.36}$$

其中 $h(\lambda)$ 是钩长， c 是一个非零常数。具体而言，若 $\mathcal{T}$是 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})$的唯一原像，则 $c=1$。并且对于 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}_1) =$，有 $\sum_{i=1}^{s}||c_i||^2=1$ $\cdots=\theta_{\boldsymbol{\mu}}$（$\mathcal{T}_s$） （$s>1$）。特别地，假设 $r\leq m+n$，则

$$\sqrt{h_\lambda}\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r=\zeta_{\mathcal{T}}\otimes v_{\mathcal{T}}. \tag{2.37}$$

证明。（i）我们首先证明恒等式（2.37）。显然，当 $\lambda\in H$（m， n； r）时 $r\leq m+n$。由超 Schur–Weyl 对偶性，$\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}$是从（$\mathbb{C}^{m|n}$）$^{\otimes r}$ 到 L（$\boldsymbol{\lambda}$）的投影算子。由于

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r,\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}'}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r\rangle\\&=\langle\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}'}\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r,e_1\otimes\cdots\otimes e_r\rangle\\&=\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}\langle\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r,e_1\otimes\cdots\otimes e_r\rangle\\&=\frac{1}{h(\lambda)}\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

因此 $\sqrt{h(\lambda)}\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r\subset L(\boldsymbol{\lambda})\otimes v_{\mathcal{T}}$。

此外，由恒等式（2.31）， B_k（t） $r\leq k\leq m+n$ 在$\sqrt{h}$（λ）$\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r$ 上的作用是标量乘法，且仅取决于最高权$\boldsymbol{\lambda}$。考虑 B_k（t） $1\leq k<r$的作用，由$\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}$的递推关系可得

$$\begin{aligned}&B_k(t)\cdot\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}e_1\otimes\cdots\otimes e_r\\&=Y_r\cdots Y_{k+1}B_k(t)\cdot\mathcal{E}^\nu_{\mathcal{T}^-}e_1\otimes\cdots\otimes e_r,\end{aligned} \tag{2.39}$$

其中 Y_j 是 $\mathfrak{S}_r$的 Jucys-Murphy 元y_j 的有理函数， $k+1\leq j\leq r$，而 $\mathcal{T}^-$ 是由 $\mathcal{T}$ 移除由 $k+1,..,r$占据的方格后得到的标准杨氏表，用 ν表示 $\mathcal{T}^-$的形状。

$B_k(t)\cdot\mathcal{E}^\nu_{\mathcal{T}^-}e_1\otimes\cdots\otimes e_r$ 的作用是标量，且仅取决于标准杨氏表 $\mathcal{T}^-\in SYT(\nu)\subset SSYT(\nu)$，由恒等式 (2.31)和对应关系 (2.28)可知。因此

$$\sqrt{h(\lambda)}\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r=\zeta_{\mathcal{T}}\otimes v_{\mathcal{T}}. \tag{2.40}$$

(ii) 为证明 (2.36)，我们首先注意到，命题 2.1的论证意味着，若 $\lambda\notin H(m,n;r)$,

$$\mathcal{E}^\lambda_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=0. \tag{2.41}$$

考虑下文中的 $\lambda\in H(m,n;r)$。若 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})\notin$半标准杨氏表$(\lambda)$，则以下两种情况之一或两者同时成立：

$$\begin{aligned}&\text{(i) } p,q \text{ are in the same column of } \mathcal{T} \text{ and } i_p=i_q \text{ with } \bar{i}_p=0;\\&\text{(ii) } s,t \text{ are in the same row of } \mathcal{T} \text{ and } i_s=i_t \text{ with } \bar{i}_s=1.\end{aligned} \tag{2.42}$$

我们只证明第二种情况。其证明与命题2.1的证明类似。我们可以假设 $1\leq s<t\leq r$ 且内容 $c_s(\mathcal{T})-c_t(\mathcal{T})=-1$。

因此 $i_s = i_{s+1} = \ldots = i_t$。此外，根据 $\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}$ 的递推关系和融合过程，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \\
&= Y_r \cdots Y_{t+1} \mathcal{E}^{\mu}_{\mathcal{T}^-} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \\
&= Y_r \cdots Y_{t+1} \frac{1}{h(\mu)} \phi(z_1, \ldots, z_t)|_{z_1=c_1} \cdots |_{z_t=c_t} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

由于

$$\phi(z_1, \ldots, z_t) = \prod_{1 \le a < b \le t}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(a,b)}}{z_a - z_b}),$$

我们可以将融合过程改写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\mu}_{\mathcal{T}^-} =& \frac{1}{h(\mu)} \phi(z_1, \ldots, z_{t-1}) \prod_{1 \le a \le t-1}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(a,t)}}{z_a - z_t})|_{z_1=c_1} \cdots |_{z_t=c_t} \\
=& \frac{1}{h(\mu)} \phi(z_1, \ldots, z_{t-1}) \prod_{1 \le a \le s-1}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(a,t)}}{z_a - z_t})|_{z_1=c_1} \cdots |_{z_t=c_t} \\
&\times \prod_{s \le b \le t-1}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(b,t)}}{c_b - c_t}),
\end{aligned} \tag{2.44}$$

其中 $\phi(z_1, \ldots\ldots, z_{t-1})$ 是 $\phi(z_1, \ldots\ldots, z_t)$ 的前部，下标从 1 到 $t-1$。注意到

$$(1 - \frac{P_{(s,t)}}{c_s - c_t}) = 1 + P_{(s,t)},$$

and

$$\begin{aligned}
&\prod_{s \le b \le t-1}^{\rightarrow} (1 - \frac{P_{(b,t)}}{c_b - c_t}) \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \\
&= const \cdot (1 + P_{(s,t)}) \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} = 0$ 当且仅当 $\theta_{\mu}(\mathcal{T})$ 属于半标准杨氏表(λ)。

最后，我们考虑 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}) \in$ 半标准杨氏表(λ)。由恒等式 (2.37) 可知，对于 $r \le m+n$ 和 $\boldsymbol{\mu} = (1^r)$,

$$\sqrt{h_{\lambda}} \mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}} \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes e_r = \zeta_{\mathcal{T}} \otimes v_{\mathcal{T}}. \tag{2.45}$$

只需证明方程 (2.36) 在 $r \le m+n$ 的情形下成立。事实上，对于 $r > m+n$，由于 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 是 $U(\mathfrak{gl}_{m|r-m})$ 的子代数，因此将 $B_1(t) \ldots, B_{m+n}(t)$ 限制到 $U(\mathfrak{gl}_{m|r-m})$ 上时，作用保持不变 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$。

对于 $r \leq m+n$ 和 $I=(i_1 \leq \ldots \leq i_r)$，我们将 $E_i = E_{i,i+1}, F_i = E_{i+1,i}$ 记作 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$。注意

$$\begin{aligned}(2.46)\qquad &\left(\prod\nolimits^{\rightarrow}_{i_s>s} F_{i_s-1}\cdots F_s\right)\left(\prod\nolimits^{\leftarrow}_{i_t<t} E_{i_t}\cdots E_{t-1}\right)\cdot e_1\otimes\cdots\otimes e_r\\ &= c\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\end{aligned}$$

其中，c 是某个非零常数。

此外，假设 t_0 是使 $i_{t_0} < t_0$ 成立的最小值，则 $i_{t_0-1} \geq t_0-1$。由于

$$\begin{array}{ccccc}\cdots & t_0-1 & < & t_0 & \cdots\\ & \wedge| & & \vee & \\ \cdots & i_{t_0-1} & \leq & i_{t_0} & \cdots\end{array}$$

因此 $i_{t_0-1} = i_{t_0} = t_0-1$。根据对应的（2.28）以及 Gelfand-Tsetlin 型公式 [SJ10]，$E_{t_0-1}\zeta_{\mathcal{T}} = \underline{0\text{ 若 }} t_0-1=0$ 和 $\overline{t_0-1}$，t_0 在 $\mathcal{T}$ 或 $t_0-1=1$ 和 t_0-1，t_0 位于同一行 $\mathcal{T}$。否则，

$$(2.47)\qquad E_{t_0-1}\zeta_{\mathcal{T}} = c'\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}_0}(\mathcal{T})},$$

其中 c' 是某个非零常数，$\boldsymbol{\mu}_0 = (1^{t_0-2},\ 2,\ 0,\ 1^{r-t_0},\ 0^{m+n-r})$ 和 $\theta_{\boldsymbol{\mu}_0}(\mathcal{T})$ 是形状为 λ、权为 $\boldsymbol{\mu}_0$ 的唯一半标准超杨表，它由将 $\mathcal{T}$ 中的 t_0 替换为 t_0-1 得到。于是

$$\begin{aligned}&\sqrt{h(\lambda)}E_{t_0-1}\cdot\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}e_1\otimes\cdots\otimes e_r\\ &= \sqrt{h(\lambda)}\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}e_1\otimes\cdots\otimes e_{t_0-1}\otimes e_{t_0-1}\otimes e_{t_0+1}\otimes\cdots\otimes e_r.\end{aligned}$$

另一方面，

$$E_{t_0-1}\cdot\zeta_{\mathcal{T}}\otimes v_{\mathcal{T}} = const\cdot\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}_0}(\mathcal{T})}\otimes v_{\mathcal{T}},$$

这里这些常数非零。因此，

$$\sqrt{h(\lambda)}\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}e_1\otimes\cdots\otimes e_{t_0-1}\otimes e_{t_0-1}\otimes e_{t_0+1}\otimes\cdots\otimes e_r = const\cdot\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}_0}(\mathcal{T})}\otimes v_{\mathcal{T}}.$$

一般而言，若 $i_t < t$，考虑作用的顺序 $E_{i_t}\cdots E_{t-1}$，且这些作用并非平凡，我们有：唯一的 Gelfand-Tsetlin 型向量ζ_Λ 和 Λ 由上一步的半标准超杨表将 t 替换为 i_t得到。

$\rightarrow$ $\leftarrow$由于 $\prod_{i_s>s}F_{i_s-1}\cdots F_s$ 和 $\prod_{i_t<t}E_{i_t}\cdots E_{t-1}$ 的两种作用超对易，当 $i_s > s$ 时，我们可以证明类似的结果。因此

$$\begin{aligned}(2.48)\qquad &\left(\prod\nolimits^{\rightarrow}_{i_s>s} F_{i_s-1}\cdots F_s\right)\left(\prod\nolimits^{\leftarrow}_{i_t<t} E_{i_t}\cdots E_{t-1}\right)\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}e_1\otimes\cdots\otimes e_r\\ &= const\cdot\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.49)\qquad &\left(\prod\nolimits^{\rightarrow}_{i_s>s} F_{i_s-1}\cdots F_s\right)\left(\prod\nolimits^{\leftarrow}_{i_t<t} E_{i_t}\cdots E_{t-1}\right)\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}\cdot\zeta_{\mathcal{T}}\otimes v_{\mathcal{T}}\\ &= const\cdot\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})}\otimes v_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

两个常数均非零。因此

$$(2.50)\qquad \sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=c\cdot\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})}\otimes v_{\mathcal{T}}.$$

具体而言，我们考察它们之间的双线性形式。若 $\mathcal{T}$ 是 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})$ 的唯一原像 $^-$（即若 $i_s=i_t$，其中 $i_s=0$ 属于 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})$，则 s，t 位于 $\mathcal{T}$ 的同一行；或者若 $i_s=1$ 属于 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})$，则 s，t 位于 $\mathcal{T}$ 的同一列），那么

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\mathcal{E}_{\mathcal{T}'}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\langle\mathcal{E}_{\mathcal{T}'}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}\langle\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ (2.51)\qquad &=\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}\frac{1}{h(\lambda)}\langle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\langle\sigma^{-1}v_{\mathcal{T}},v_{\mathcal{T}}\rangle P_\sigma\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}\frac{1}{h(\lambda)}\langle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_I}\langle\sigma^{-1}v_{\mathcal{T}},v_{\mathcal{T}}\rangle P_\sigma\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle.\end{aligned}$$

因此，

$$(2.52)\qquad \langle\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\mathcal{E}_{\mathcal{T}'}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle=\delta_{\mathcal{T}\mathcal{T}'}\frac{\alpha(I)}{h(\lambda)}.$$

由于分解（2.32）中的这些基向量是归一化正交的，

$$(2.53)\qquad \sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T})}\otimes v_{\mathcal{T}}.$$

此外，如果存在 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}_1)=\cdots=\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}_s)$ $(s>1)$，其中 $\mathcal{T}_1$、……、$\mathcal{T}_s$ 是形状相同的标准杨表 λ，那么

$$\begin{aligned}&\langle\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\sum_{k=1}^{s}\mathcal{E}_{\mathcal{T}_k}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\sum_{k=1}^{s}\mathcal{E}_{\mathcal{T}_k}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}\langle\sum_{k=1}^{s}\mathcal{E}_{\mathcal{T}_k}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\frac{1}{\alpha(I)}\langle\sum_{k=1}^{s}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\langle\sigma^{-1}v_{\mathcal{T}_k},v_{\mathcal{T}_k}\rangle P_\sigma\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\ &=\frac{1}{\alpha(I)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_I}\sum_{k=1}^{s}\langle\sigma^{-1}v_{\mathcal{T}_k},v_{\mathcal{T}_k}\rangle\langle P_\sigma\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle.\end{aligned}$$

由于子空间 $V=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_{\mathcal{T}_k},1\leq k\leq s\}$ 是 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}=\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}_r}$ 的有限维模，并且它同构于 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}_i}$、 $1\leq i\leq r$ 的斜表示的张量积$V_1\otimes\cdots\otimes V_r$。由于 $\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}_k)\neq 0$，该斜分拆是不连通的，因此它是一个置换模。于是它以重数一包含平凡表示 $1_{\mathfrak{S}_\mu}$。根据特征标内积的定义，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha(I)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_I}\sum_{k=1}^{s}\langle\sigma^{-1}v_{\mathcal{T}_k},v_{\mathcal{T}_k}\rangle\langle P_\sigma\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\&=\langle\chi^{V_1\otimes\cdots\otimes V_r},1_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}}\rangle\\&=1.\end{aligned}\tag{2.54}$$

因此，对于 $1\leq k\leq s$

$$\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}_k}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}=a_k\zeta_{\theta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathcal{T}_1)}\otimes v_{\mathcal{T}_k},\tag{2.55}$$

其中 $\sum_{k=1}^{s}||a_k||^2=1$。

□

定理 *2.3* 的证明。 根据超 immanant 的定义，式（2.34）的左端等于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\langle i_1,\ldots,i_r\mid\chi^\lambda X_1\cdots X_r\mid i_1,\ldots,i_r\rangle\\&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}(\chi^\lambda X_1\cdots X_r)^{i_1,\ldots,i_r}_{i_1,\ldots,i_r}\\&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\chi^\lambda(\tau)(P_\tau)^{i_1,\ldots,i_r}_{i_{\tau(1)},\ldots,i_{\tau(r)}}x_{i_{\tau(1)},i_1}\cdots x_{i_{\tau(r)},i_r}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

根据引理 2.4，(2.34) 的右端等于

$$\begin{aligned}&str(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}|_{L(\boldsymbol{\lambda})}\\&=(-1)^{\bar{I}}\langle\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\sum_{\mathcal{T}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\\&\sqrt{\frac{h(\lambda)}{\alpha(I)}}\sum_{\mathcal{T}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle\\&=\frac{(-1)^{\bar{I}}h(\lambda)}{\alpha(I)}\langle(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\sum_{\mathcal{T}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle.\end{aligned}$$

根据对称群的特征标与本原幂等元之间的关系，可得

(2.57)

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{\bar{I}}h(\lambda)}{\alpha(I)}(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\sum_{\mathcal{T}}\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\
&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\chi^{\lambda}(\sigma)P_{\sigma}\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\
&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\chi^{\lambda}(\sigma)P_{\sigma}\circ(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\sum_{(j_1,\ldots,j_r)}(-1)^{\sum\limits_{a<b}\bar{j}_a(\bar{i}_b+\bar{j}_b)}x_{j_1,i_1}\cdots x_{j_r,i_r}\\
&\quad\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\\
&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{\sum\limits_{a<b}\bar{i}_{\tau(a)}(\bar{i}_b+\bar{i}_{\tau(b)})}\chi^{\lambda}(\sigma)x_{i_{\tau(1)},i_1}\cdots x_{i_{\tau(r)},i_r}\\
&\quad\otimes P_{\sigma}\cdot e_{i_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\tau(r)}}.
\end{aligned}$$

因此，与 $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$ 取双线性形式时，上述方程中的这些项除非满足 $\sigma=\tau$，否则均为零。于是

$$\begin{aligned}
&str(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}|_{L(\boldsymbol{\lambda})}\\
&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}(-1)^{\overline{\tau^{-1}(I)}_{\tau}+\sum\limits_{a<b}\bar{i}_{\tau(a)}(\bar{i}_b+\bar{i}_{\tau(b)})}\chi^{\lambda}(\tau)x_{i_{\tau(1)},i_1}\cdots x_{i_{\tau(r)},i_r}.
\end{aligned}\tag{2.58}$$

由于

$$\begin{aligned}
&P_{\tau}\cdot e_{i_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\tau(r)}}\\
&=(-1)^{\overline{\tau^{-1}(I)}_{\tau}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\\
&=(-1)^{\sum\limits_{a<b}\bar{i}_{\tau(a)}(\bar{i}_b+\bar{i}_{\tau(b)})}(P_{\tau})^{i_1,\ldots,i_r}_{i_{\tau(1)},\ldots,i_{\tau(r)}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&str(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes 1)\circ\Delta\circ\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mu}}|_{L([\Lambda^{\lambda}])}\\
&=\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\chi^{\lambda}(\tau)(P_{\tau})^{i_1,\ldots,i_r}_{i_{\tau(1)},\ldots,i_{\tau(r)}}x_{i_{\tau(1)},i_1}\cdots x_{i_{\tau(r)},i_r}\\
&=\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^{\lambda}}(X_I)}{\alpha(I)}.
\end{aligned}\tag{2.59}$$

□

3. Super Littlewood correspondences

3.1. **超 Littlewood 对应 I 和 II。** 我们建立了超 immanant 与 Schur 超对称多项式之间的关系，这些关系可视为 Littlewood 对应的超类比[李40]。

我们首先回顾超对称多项式的一些定义。

设 $\mathcal{X}_m = (x_1, \ldots, x_m)$ 和 $\mathcal{Y}_n = (y_1, \ldots, y_n)$ 是两组不定元，对称群 $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ 作用于多项式环 $\mathbb{C}[\mathcal{X}_m, \mathcal{Y}_n] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$。对于 $f \in \mathbb{C}[\mathcal{X}_m, \mathcal{Y}_n]$ 和 $t \in \mathbb{C}$，我们用 $f(x_1 = t, y_1 = -t)$ 表示将 $x_1 = -y_1 = t$ 代入 f 所得到的多项式。

若 $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$-不变多项式 f 满足 $f(x_1 = t, y_1 = -t)$ 是一个与 t 无关的多项式，则称其为超对称的。所有超对称多项式构成的集合称为关于 $\mathcal{X}_m$, $\mathcal{Y}_n$ 的超对称多项式代数。我们将其记为 $\mathbf{Sym}^{(m|n)}$。

第 r 个幂和超对称多项式定义为

$$p^{(r)}_{m,n}(\mathcal{X}_m, \mathcal{Y}_n) = (x_1^r + \ldots + x_m^r) + (-1)^{r-1}(y_1^r + \ldots + y_n^r). \tag{3.1}$$

Schur 超对称多项式可以用不同方式定义，例如参见 [Pra91、PT92、Rem84、Mac95、Mus12]。首先，我们通过生成函数定义多项式 $\mathbb{S}_k = \mathbb{S}_k(\mathcal{X}_m、\ \mathcal{Y}_n)$

$$S_{m,n}(t) = \prod_{i=1}^{m}(1 - x_i t)^{-1} \prod_{j=1}^{n}(1 + y_j t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{S}_k(\mathcal{X}_m, \mathcal{Y}_n) t^k. \tag{3.2}$$

注意，如果 $n = 0$，那么 $\mathbb{S}_k(\mathcal{X}_m,\ \mathcal{Y}_n)$ 是齐次对称多项式 $h_k(\mathcal{X}_m)$；而如果 $m = 0$，那么 $\mathbb{S}_k(\mathcal{X}_m,\ \mathcal{Y}_n)$ 是初等对称多项式 $e_k(\mathcal{Y}_n)$。

于是，对于任意长度为 l的分拆 λ，我们将 *Schur* 超对称多项式 $\mathbb{S}_\lambda = \mathbb{S}_\lambda(\mathcal{X}_m,\ \mathcal{Y}_n)$ 定义为 Jacobi–Trudi 矩阵 $(\mathbb{S}_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i \text{的行列式} j \leq l}$

$$\mathbb{S}_\lambda = \det(\mathbb{S}_{\lambda_i - i + j}). \tag{3.3}$$

我们有 Littlewood 对应 I 和 II 的超类比[Li40][第 118 页，第 120]。

定理 3.1。对于总阶为 $m + n$ 的 *Schur* 超对称多项式之间的任意关系，我们可以将每个 *Schur* 超对称多项式替换为生成矩阵 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 的互补主子式的相应超不变量，前提是每个乘积都对 $[m + n]$ 的所有两两不相交子集序列求和。

一般而言，

定理 3.2. 对于 *Schur* 超对称多项式之间的任意关系，只要对所有适当阶数的主子式求和，且求和所用的多重集 $[m + n]$ 按非递减顺序排列，我们就可以将每个 *Schur* 超对称多项式替换为生成矩阵 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$主子式对应的（归一化）超不变量。

我们只证明定理3.2，定理 3.1 可视为定理 3.2的特例。

定理 3.2 的证明。我们只需证明两个 Schur 超对称多项式的乘积这一情形，假设 $|\mu|+|\nu|=k$ 且

$$\mathbb{S}_\mu \mathbb{S}_\nu = \sum_{\lambda \vdash k} c_{\mu\nu}^\lambda \mathbb{S}_\lambda.$$

接着，我们考虑不可约表示的张量积的诱导表示 V^μ，V^ν。根据特征标与本原幂等元之间的关系，我们得到

$$\chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma \mathcal{E}^\mu \mathcal{E}^\nu \sigma^{-1} = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda \chi^\lambda.$$

因此，由命题 2.1 可知，对于任意非递减有序多重集 $I=($ $1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le m+n)$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Imm}_{\chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)}}(X_I) \\ &= (-1)^{\bar{I}} \langle i_1, \ldots, i_k \mid \chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)} X_1 \cdots X_k \mid i_1, \ldots, i_k \rangle \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \langle i_{\sigma_1}, \ldots, i_{\sigma_k} \mid \mathcal{E}^\mu \mathcal{E}^\nu X_1 \cdots X_k \mid i_{\sigma_1}, \ldots, i_{\sigma_k} \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

对于每个由 I_1、I_2构成的非递减有序多重集序列 $[m+n]$，满足 $|I_1|=|\mu|$，$|I_2|=|\nu|$，且 I_1 与 I_2 的不交并为 I，存在最短陪集代表元 $\sigma \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_{|\mu|} \times \mathfrak{S}_{|\nu|})$，使得 $\sigma^{-1}(I)=(I_1, I_2)$。因此，由命题 2.1 可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Imm}_{\chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)}}(X_I) \\ &= (-1)^{\bar{I}} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{|\mu|} \times \mathfrak{S}_{|\nu|}, \\ \sigma \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_{|\mu|} \times \mathfrak{S}_{|\nu|})}} \langle i_{\tau\sigma_1}, \ldots, i_{\tau\sigma_k} \mid \mathcal{E}^\mu \mathcal{E}^\nu X_1 \cdots X_k \mid i_{\tau\sigma_1}, \ldots, i_{\tau\sigma_k} \rangle \\ &= \sum_{(I_1, I_2)} \frac{\alpha(I)}{\alpha(I_1)\alpha(I_2)} \mathrm{Imm}_{\chi^\mu}(X_{I_1}) \mathrm{Imm}_{\chi^\nu}(X_{I_2}), \end{aligned}$$

其中求和遍历 $[m+n]$ 的所有非递减有序多重集序列 (I_1, I_2)，且 I_j，$j=1, 2$ 的不交并为 I。

另一方面，

$$\begin{aligned} \mathrm{Imm}_{\chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)}}(X_I) &= (-1)^{\bar{I}} \langle i_1, \ldots, i_k \mid \chi^{\mathrm{Ind}(V^\mu \otimes V^\nu)} X_1 \cdots X_k \mid i_1, \ldots, i_k \rangle \\ &= \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda (-1)^{\bar{I}} \langle i_1, \ldots, i_k \mid \chi^\lambda X_1 \cdots X_k \mid i_1, \ldots, i_k \rangle \\ &= \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda \mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I). \end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，

$$\sum_{(I_1, I_2)} \frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\mu}(X_{I_1}) \mathrm{Imm}_{\chi^\nu}(X_{I_2})}{\alpha(I_1)\alpha(I_2)} = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda \frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}.$$

□

特别地，对于超矩阵，我们有一般的 Littlewood-Merris-Watkins 恒等式 [KS11、MW85]。设 ψ^μ （分别 ϕ^μ）为抛物子群 $\mathfrak{S}_\mu$ 的$\mathfrak{S}_k$的符号特征（分别为平凡特征）所诱导的特征。它们可以分解为不可约 $\mathfrak{S}_k$-特征标:

$$\psi^\mu = \sum_\lambda K_{\lambda^T,\mu}\chi^\lambda, \quad \phi^\mu = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu}\chi^\lambda,$$

其中 $K_{\lambda,\ \mu}$ 是 Kostka 数。

推论 3.3。 设 $I=(1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq m+n)$ 是由 $[m+n]$ 构成的多重集。固定一个 k 的分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$。那么

(3.6)

$$\mathrm{Imm}_{\psi^\lambda}(X_I) = \sum_{(I_1,\ldots,I_l)} \frac{\alpha(I)}{\alpha(I_1)\cdots\alpha(I_l)}\mathrm{Imm}_{\chi^{(1^{\lambda_1})}}(X_{I_1})\cdots\mathrm{Imm}_{\chi^{(1^{\lambda_l})}}(X_{I_l}),$$

$$\mathrm{Imm}_{\phi^\lambda}(X_I) = \sum_{(I_1,\ldots,I_l)} \frac{\alpha(I)}{\alpha(I_1)\cdots\alpha(I_l)}\mathrm{Imm}_{\chi^{(\lambda_1)}}(X_{I_1})\cdots\mathrm{Imm}_{\chi^{(\lambda_l)}}(X_{I_l}),$$

其中，各求和遍历所有满足 $|I_j|=\lambda_j$ 且I_j、$1\leq j\leq l$ 的不交并为 I 的 $[m+n]$ 的非递减有序多重集序列 $(I_1,\ldots,I_l)$。

3.2. **MacMahon 主定理**。 定义 $\alpha_0=\beta_0=1$，其中 $k<0$ $\alpha_k=\beta_k=0$；并对 $k>0$,

$$\begin{aligned}\alpha_k &= str_{1,\ldots,k}\mathcal{E}^{(1^k)}X_1\cdots X_k = \sum_{|I|=k}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^{(1^k)}}(X_I)}{\alpha(I)},\\ \beta_k &= str_{1,\ldots,k}\mathcal{E}^{(k)}X_1\cdots X_k = \sum_{|I|=k}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^{(k)}}(X_I)}{\alpha(I)},\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，各求和遍历所有含有 k 个元素且满足 I 的非递减多重集。注意，$\{\alpha_k\mid k\in\mathbb{Z}^+\}$ 在 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 中两两交换。$A(\mathrm{Mat}^{m|n})$ 的交换子代数 $\mathfrak{B}_{m|n}$ 由 $\{\alpha_k,\mid k\in\mathbb{Z}^+\}$ 生成。

我们定义

$$\lambda(t)=\sum_{k=0}^\infty t^k\alpha_k, \qquad \sigma(t)=\sum_{k=0}^\infty t^k\beta_k. \tag{3.8}$$

以下内容可视为 [MR14] 中 MacMahon 主定理的超版本。

定理 3.4。 $\lambda(-t)\times\sigma(t)=1.$

令 Y，$Z\in\mathrm{Mat}^{m|n}(R)$。记 $Y*Z=str_1PY_1Z_2$。令 $X^{[k]}$ 为 X 在乘法 $*$ 下的 k 次幂，即

$$X^{[0]}=1,\ X^{[1]}=X,\ X^{[k]}=X^{[k-1]}*X,\ k>1. \tag{3.9}$$

我们记

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\gamma_{k+1}, \tag{3.10}$$

其中 $\gamma_k=strX^{[k]}$。

以下牛顿恒等式可由超 MacMahon 主定理推出，参见 [MR14]。

定理 3.5 （牛顿恒等式）。

$$\partial_t\lambda(-t)=-\lambda(-t)\psi(t), \tag{3.11}$$

$$\partial_t\sigma(t)=\psi(t)\sigma(t). \tag{3.12}$$

3.3. **超 Goulden-Jackson 恒等式与超 Littlewood 对应 III**。 固定一个分拆 $\lambda\vdash r$。在由 $\mathfrak{B}_{m|n}$生成的交换代数 α_i 或 β_i (3.7) 上，我们记

$$A=(\alpha_{\lambda_i^T-i+j})_{\lambda_1\times\lambda_1},\qquad B=(\beta_{\lambda_i-i+j})_{\lambda_1^T\times\lambda_1^T}.$$

于是我们得到 $\mathfrak{B}_{m|n}$ 中的以下两个特殊元素：

$$\det(A)=\sum_{\mu}K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\alpha_{\mu_1}\cdots\alpha_{\mu_{\lambda_1}},$$
$$\det(B)=\sum_{\mu}K^{-1}_{\lambda,\mu}\beta_{\mu_1}\cdots\beta_{\mu_{\lambda_1}}.$$

以下是 Goulden-Jackson 恒等式在超情形下的推广，该恒等式见 [GJ92]中的定理 2.1，以及 [KS11]中的定理 3.2。它也可视为 Schur 超对称多项式的 Jacobi-Trudi 恒等式的推广。

定理 3.6。我们有

$$\det(A)=\det(B)=str_{1,\dots,r}(\mathcal{E}^{\lambda}_{\mathcal{T}}X_1\cdots X_r)=\sum_{I}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}, \tag{3.13}$$

其中，求和遍及所有满足 $|I|=r$ 的 $[m+n]$ 的非递减有序多重集 I 。

证明。根据定义，

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{\mu\vdash r}K^{-1}_{\lambda^T,\mu}str_{1,\dots,r}\mathcal{E}^{(1^{\mu_1})}\cdots\mathcal{E}^{(1^{\mu_{\lambda_1}})}X_1\cdots X_r\\&=\sum_{\mu\vdash r}\sum_{J}(-1)^{\bar{J}}\langle j_1,\dots,j_r\mid K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\mathcal{E}^{(1^{\mu_1})}\cdots\mathcal{E}^{(1^{\mu_{\lambda_1}})}X_1\cdots X_r\mid j_1,\dots,j_r\rangle,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&str_{1,\dots,r}(\mathcal{E}^{\lambda}_{T}X_1\cdots X_r)\\
&=\sum_{J}(-1)^{\bar{J}}\langle j_1,\dots,j_r\mid \mathcal{E}^{\lambda}_{T}X_1\cdots X_r\mid j_1,\dots,j_r\rangle\\
&=\sum_{I}\frac{(-1)^{\bar{I}}}{\alpha(I)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\langle i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_r}\mid \mathcal{E}^{\lambda}_{T}X_1\cdots X_r\mid i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_r}\rangle\\
&=\sum_{I}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^{\lambda}}(X_I)}{\alpha(I)},
\end{aligned}$$

其中，第一行的求和遍历所有含有 r 个元素的序列 J，第二行的求和遍历所有满足 $|I|=r$ 的 $[m+n]$ 的非递减多重集 I。

根据命题2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\det(A)&=\sum_{\mu}\sum_{J}(-1)^{\bar{J}}\langle j_1,\dots,j_r\mid K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\mathcal{E}^{(1^{\mu_1})}\cdots\mathcal{E}^{(1^{\mu_{\lambda_1}})}X_1\cdots X_r\mid j_1,\dots,j_r\rangle\\
&=\sum_{\mu}\sum_{J'}\frac{(-1)^{\bar{J'}}}{\alpha(J')}\langle j'_1,\dots,j'_r\mid K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}P_{\sigma}\mathcal{E}^{(1^{\mu_1})}\cdots\\
&\quad\cdots\mathcal{E}^{(1^{\mu_{\lambda_1}})}P_{\sigma^{-1}}X_1\cdots X_r\mid j'_1,\dots,j'_r\rangle\\
&=\sum_{\mu}\sum_{J'}\frac{(-1)^{\bar{J'}}}{\alpha(J')}\langle j'_1,\dots,j'_r\mid K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\psi^{\mu}X_1\cdots X_r\mid j'_1,\dots,j'_r\rangle\\
&=\sum_{J'}\frac{(-1)^{\bar{J'}}}{\alpha(J')}\langle j'_1,\dots,j'_r\mid \chi^{\lambda}X_1\cdots X_r\mid j'_1,\dots,j'_r\rangle\\
&=\sum_{J'}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^{\lambda}}(X_{J'})}{\alpha(J')},
\end{aligned}$$

其中，第二行的第二个求和遍历 $[m+n]$的所有非递减多重集 $J'=(j'_1\le\cdots\le j'_r)$，第四行则是因为$\sum_{\mu}K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\psi^{\mu}=\chi^{\lambda}$。我们可以用相同的方法处理 $\det(B)=str_{1,\dots,r}\mathcal{E}^{\lambda}X_1\cdots X_r$。□

设 $A(\mathrm{Mat}^{m|n})$的生成元超矩阵 $X=(x_{ij})$具有如下分块形式

$$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中，子矩阵 A，B，C，D分别是 $m\times m$、$m\times n$、$n\times m$、$n\times n$维矩阵。子矩阵 A、D 和 B、C分别具有偶宇称和奇宇称。

我们考虑由域 $A_{ij},D_{kl},1\le i,j\le m,1\le k,l\le n$ 生成的整环的分式域的代数闭包上的特征多项式 $a(t)=\det(tI-A)$ 和 $d(t)=\det(tI-D)$ 的解，并将

特征根分别记为 $a_1, \ldots, a_m$ 和 $d_1, \ldots, d_n$。我们有如下关于在 [KN88] 中对超矩阵 X 进行对角化的引理。

引理 3.7. 在上述假设下，存在一个可逆超矩阵 U，使得

$$U^{-1}XU = diag(\omega_1, \ldots, \omega_m, \varpi_1, \ldots, \varpi_n), \tag{3.14}$$

其中 $\omega_i = a_i + \mu_i$、$\varpi_j = d_j + \nu_j$ 使得 $\mu_i^2 = \nu_j^2 = 0$。

证明。首先，存在具有偶元素的可逆矩阵 V_1 和 V_2，使得 $V_1^{-1}AV_1 = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$，且 $V_2^{-1}DV_2 = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$。令 $V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ 和 $X' = V^{-1}XV = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$。接下来我们断言，存在 X' 的特征值 $\omega_i = a_i + \mu_i$ 和 $\varpi_j = d_j + \nu_j$，使得

$$X'z_i = \omega_i z_i, \quad X'w_j = \varpi_j w_j, \tag{3.15}$$

其中 $\mu_i^2 = \nu_j^2 = 0$ 和 $z_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)^T$（分别为 $w_j = (p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_{j-1}, \mathbf{1}, q_{j+1}, \ldots, q_n)^T$）称为 [KN88] 中的偶（分别为奇）特征向量。

我们只考虑一个方程 $X'z_1 = (a_1 + \mu_1)z_1$，并且可以用相同的方法得到其他特征值及其对应的特征向量。由方程 $X'z_1 = (a_1 + \mu_1)z_1$，我们得到以下方程组：

$$\begin{cases} B_1'y = \mu_1, \\ a_2x_2 + B_2'y = (a_1 + \mu_1)x_2, \\ \cdots\cdots \\ a_mx_m + B_m'y = (a_1 + \mu_1)x_m, \\ C_1'x + d_1y_1 = (a_1 + \mu_1)y_1, \\ \cdots\cdots \\ C_n'x + d_ny_n = (a_1 + \mu_1)y_n, \end{cases} \tag{3.16}$$

where let $B' = \begin{pmatrix} B_1' \\ \vdots \\ B_m' \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Hence from the first m 方程 we get

$$x_i = -(a_i - a_1 - B_1'y)^{-1}B_i'y, \ 2 \le i \le m. \tag{3.17}$$

通过代入 x_i 和 μ_1 到第 $m+1$ 个方程中，并依此继续下去，我们得到 y_j 可表示为关于 y_{j+1}、……、y_n 的多项式，其中 $1 \le j \le n$ 利用了事实 $y_i^2 = 0$。因此，方程组（3.16）得解。最后，令 $Q = (z_1$、……、z_m，w_1、……、$w_n)$，并令 $U = VQ$，则

$$U^{-1}XU = \mathrm{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_m, \varpi_1, \ldots, \varpi_n).$$

□

命题 3.8。对于 $k>0$,

$$\alpha_k = \mathbb{S}_{(1^k)}(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n). \tag{3.18}$$

证明。由恒等式（3.14）结合 Berezinian 的乘法性质和 Schur 超对称多项式的定义可知，特征函数（（$tI-X$）的 Berezinian）可用超对称多项式表示:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ber}(tI-X) &= \frac{\sum_{i=0}^{m}(-1)^i e_i(\omega_1,\dots,\omega_m)t^{m-i}}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j(\varpi_1,\dots,\varpi_n)t^{n-j}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathbb{S}_{(1^k)}(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n)t^{m-n-k}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

另一方面，Berezinian Ber($tI-M$) 可以写作

$$\mathrm{Ber}(tI-X) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \alpha_k t^{m-n-k}, \tag{3.20}$$

参见 [Ber87、KV05、Sch82]。一般而言，Molev 和 Ragoucy 在 [MR14] 中证明了超 Manin 矩阵的非交换类比。□

与经典情形类似，坐标超代数的生成元超矩阵的超 immanant 可表示为在特定参数取值下的 Schur 超对称多项式。具体而言，超情形的 Littlewood 对应 III [Li40][第 121] 节。

定理 3.9。设 $\lambda\vdash r$ 和 $\omega_1,\dots,\omega_m,\varpi_1,\dots,\varpi_n$ 是生成元超矩阵 M的特征值，则

$$\mathbb{S}_\lambda(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n) = str_{1,\dots,r}\mathcal{E}^\lambda X_1\dots X_r = \sum_{|I|=r}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}, \tag{3.21}$$

其中求和遍及所有满足 $|I|=r$ 的非递减有序多重集 I 的 $[m+n]$。特别地，

$$\begin{aligned}\beta_r &= \mathbb{S}_r(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n),\\ \alpha_r &= \mathbb{S}_{(1^r)}(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n),\\ \gamma_r &= strX^{[r]} = p^{(r)}_{m,n}(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n).\end{aligned} \tag{3.22}$$

证明。 根据命题 3.8，我们有

$$\alpha_r = \mathbb{S}_{(1^r)}(\omega_1,\dots,\omega_m,-\varpi_1,\dots,-\varpi_n).$$

因此，我们可以利用超 Goulden-Jackson 恒等式（3.21）（3.13）以及 Schur 超对称多项式的定义来化简：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}_\lambda(\omega_1,\ldots,\omega_m,-\varpi_1,\ldots,-\varpi_n)\\
&=\sum_\mu K^{-1}_{\lambda,\mu}\beta_{\mu_1}\cdots\beta_{\mu_{\lambda_1}}\\
&=\sum_\mu K^{-1}_{\lambda^T,\mu}\alpha_{\mu_1}\cdots\alpha_{\mu_{\lambda_1}}\\
&=\sum_I \frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

最后，根据定理 3.5中的牛顿恒等式，$\gamma_r = strX^{[r]}$ 可以表示为与 $p_m^{(r)}$, $_n$相同的 $^\alpha\mu, \mu\vdash r$ 线性组合。□

注 3.10. Littlewood 对应 III 对此处定义的可分超矩阵也成立：[KN84,KN88]。事实上，任意可分超矩阵 X 都可以通过引理3.7中的相同论证对角化。

考虑代数同态 $\Phi: A(\mathrm{Mat}^{m|n}) \to \mathbb{C}[\mathcal{X}_m,\mathcal{Y}_n]$ 定义 d as

$$\begin{aligned}
&x_{ij}\mapsto 0, \quad i\neq j,\\
&x_{ii}\mapsto x_i, \quad 1\le i\le m,\\
&x_{jj}\mapsto -y_j, \quad 1\le j\le n.
\end{aligned}$$

定理 3.11. Φ的限制：

$$\Phi|_{\mathfrak{B}_{m|n}}:\mathfrak{B}_{m|n}\to \boldsymbol{Sym}^{(m|n)}$$

是一个代数同构。而 $\{\sum_I \mathrm{Imm}^{\chi^\lambda}(X_I)\ \alpha(I) \mid \lambda\in H(m,n)\}$ 是$\mathfrak{B}_{m|n}$的一个基。

证明。容易看出，$\Phi(\alpha_k)=\mathbb{S}_{(1^k)}(\mathcal{X}_m,-\mathcal{Y}_n)$。因此，根据超对称多项式基本定理，映射 $\Phi|_{\mathfrak{B}_{m|n}}$是满射。由超Littlewood对应III可知，$\Phi|_{\mathfrak{B}_{m|n}}$ 是一个同构。因此，$\{\sum_I \mathrm{Imm}^{\chi^\lambda}(X_I)\ \alpha(I) \mid \lambda\in H(m,n)\}$ 是 $\mathfrak{B}_{m|n}$的一个基。□

下面的定理可以看作是 Schur多项式与Li40].中的幂和多项式之间关系的推广。

定理3.12。设 $\lambda\vdash r$，则

$$\sum_{|I|=r}\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)}=\frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(\Gamma_r)}{r!},$$

其中，右侧的 *immanant* 是非超矩阵的经典 *immanant*，而下 *Hessenberg* 矩阵 Γ_r 为

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 1 & & & \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 2 & & \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \gamma_r & \gamma_{r-1} & \cdots & \cdots & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

证明。 根据定理 3.5中的牛顿恒等式和克莱姆法则，我们有

$$\alpha_r = \frac{\det(\Gamma_r)}{r!}.$$

此外，Schur 超对称多项式可以写成

$$r!\, \mathbb{S}_\lambda = \mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(\mathfrak{P}_r),$$

其中，矩阵 $\mathfrak{P}_r$ 是将矩阵 Γ_r中的幂和超对称多项式 $p^{(i)}_{m|n}$ 替换 γ_i 后得到的。根据同构$\Phi|_{\mathfrak{B}_{m|n}}$ 和超 Goulden-Jackson 恒等式，我们有

$$\sum_{|I|=r} \frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(X_I)}{\alpha(I)} = \sum_{\mu} K^{-1}_{\lambda^T,\mu} \alpha_{\mu_1} \cdots \alpha_{\mu_{\lambda_1}} = \frac{\mathrm{Imm}_{\chi^\lambda}(\Gamma_r)}{r!}.$$

□

References

[BR83] A. Berele, A. Regev, 《钩杨图、组合学与李超代数表示》，美国数学会通报（新系列），8，第 2 期（1983），337-339。7[BR87] A. Berele, A. Regev, 《钩杨图及其在组合学和李超代数表示中的应用》，《数学进展》 64 1987 118 175 7 ( ), - .

[87] Ber F. A. Berezin, 《超分析导论》，数学物理与应用数学，第 9 卷，D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1987。MR 914369。A. A. Kirillov 编，并撰写序言；附录由 V. I. Ogievet- sky 撰写。J. Niederle 和 R. Kotecky 从俄文翻译。24Dimitri Leites 校订译文。

[12] CW S.-J. Cheng, W. Wang, 《李超代数的对偶与表示》，GTM 144，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012。7[DM99] P. Deligne, J. Morgan, 《超对称、量子场与弦：数学家课程》，第 1, 1999 1 美国数学会，. GJ I.P. Goulden, D.M. Jackson, 《immanant、Schur 函数与 MacMahon 主定理》，美国数学会会刊, 115 1992 605 612 2, 21 ( ), - . Gow L.

[07] Gow, 《杨扬子代数的高斯分解》，《数学物理通讯》 276 2007 799 825 10 ( ), - .

GPS D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, 《GL($m|n$) 型量子矩阵代数的 Cayley-Hamilton 定理》，《圣彼得堡数学杂志》第 17 卷，第 1 期（2006），119-135。2[GPS06’]D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, 《GL($m|n$) 型量子矩阵代数 II：特征子代数的结构及其谱参数化》，《理论与数学物理》第 147 卷，第 1 期（2006），460-485。2

[JLZ25] N. Jing, Y. Liu, J. Zhang, 《量子 Littlewood 对应》, arXiv: 2505 00406 1 1, 2 。v . Jucys A. A. Jucis, 《对称群的杨算子》（俄文，附立陶宛文和英文摘要）, Litovsk. Fiz. Sb. [66] 6 1966 163 180 5 ( ), - . Kac V. G. Kac, 《李超代数》, 《数学进展》( ), - . [77] 26 1977 8 96 [78] Kac V. G. Kac, 《经典李超代数的表示》, 载于《数理物理中的微分几何方法 II》, 《数学讲义》第 676, 597 626, 1978 7 - Springer-Verlag, 柏林, . KT I. Kantor, I. Trishin, [94] 《超情形下的行列式概念》, Comm. Algebra 22 1994 3679 3739 2 ( ), - . KT I. Kantor, I. Trishin, 《超情形下的凯莱-哈密顿方程》, Comm. Algebra [99] 27 1999 233 259 2 ( ), - . KV H. M. Khudaverdian, T. T. Voronov, 《贝列齐宁式、外幂与递归数列》, 《数学物理快报》 [05] 74, 2 2005 201 228 24 第 ( ), - . KN Y. Kobayashi, S. Nagamachi, 《具有广义超对称参数的李群与李代数》, 《数学物理杂志》 [84] 25 12 1984, 3367 3374 1, 25 ( ) - . KN Y. Kobayashi, S. Nagamachi, 《超矩阵的特征值与特征向量》, Proc. Japan Acad., [88] 64, 1988 249 252 2, 23, 25 Ser. A ( ), - . KN Y. Kobayashi, S. Nagamachi, 《超矩阵的特征函数与不变量》, 《数学物理杂志》 [90] 31 1990 2726 2730 2 ( ), - . KS M. Konvalinka, M. Skandera, 《赫克代数特征的生成函数》, Canad. J. Math, [11] 63 2011 413 435 20, 21 ( ), - . Ko B. Kostant, 《分次流形、分次李理论与预量子化》, Springer LNM [77] 570 1977 1 ( ). Ko B. Kostant, 《immanant 不等式与零权空间》, J. Amer. Math. Soc. 8 ([95] 1995 181 186 1, 11), - . Le D. A. Leites, 《超流形理论导论》, Russian Math. Surveys [80] 35 1 1980 1 64 1 ( ) ( ), - . Li D. E. Littlewood, 《群特征与群的矩阵表示理论》, Oxford University Press, 纽约, [40] 1940 1, 2, 17, 18, 24, 25 。LR D. E. Littlewood, A. R. Richardson, 《群特征与代数》, Philosophical Transactions of the Royal Society A. [34] 233 1934 721 730 99 124 1 ( ), (-): - . Mac I. G. Macdonald, 《对称函数与霍尔多项式》, 第 nd 版, Oxford University Press, [95] 1995 18 。Ma P. A. MacMahon, 《组合分析》, 2 卷, Cambridge University Press, [60] 1915 1916 1960 2 及; Chelsea 于纽约合为一卷再版, . Man Yu. Manin, 《规范场论与复几何》, Springer Verlag, 1988。1[MW85] R. Merris, W. Watkins, 《广义矩阵函数的不等式与恒等式》, Linear Algebra Appl. [88] 64 1985 223 242 2, 20 ( ), - . Mo A. Molev, 《阶乘超对称舒尔函数与超卡佩利恒等式》, American Mathematical Translations ([98] 1998 109 138 10), - . Mo A. Molev, 《李超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的协变表示的组合基》, [11] 6 2011 415 462 9 ( ) Bull. Inst. Math. Acad. Sin.(N.S.) ( ), - . Mo A. Molev, 《经典李代数的管原算子》, Math. Survey and Monographs, [18] 229, 2018 6 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, . MR A. I. Molev, E. Ragoucy, 《右量子超代数的 MacMahon 主定理及 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的高阶管原算子》, Moscow Math. J. [14] 14 2014 1, 83 119 20, 21, 24 ( ), 第 - 期。MR A. Molev, V. Retakh, 《一般线性李超代数的拟行列式与卡西米尔元》, Int. Math. Res. Not. [04] 2004 2004 611 619 10 ( ), - . Mus I. Musson, 《李超代数与包络代数》, Grad. Stud. Math., [12] 第 131 卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2012。18

[Na91] M.L. Nazarov，量子 Berezinian 与经典 Capelli 恒等式，《数学物理快报》 21， 2 1991 123 131 10 第（ ）期，- 。Pra P. Pragacz，Schur S 多项式和 Q 多项式的代数几何应用，《不变理论专题》（巴黎，1989/1990），《数学讲义》第 1478 卷，Springer，柏林， 1991, 130 191 18 - 。PT P. Pragacz、A. Thorup，关于超对称多项式的 Jacobi-Trudi 恒等式，《数学进展》 95， 1 1992 8 17 18 第（ ）期，- 。Rem J. B. Remmel，（ ）钩 Schur 函数的组合学，《组合学与代数》（科罗拉多州博尔德，1983），《当代数学》第 34 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， 1984, 253 287 18 - 。Sch T. Schmitt，关于 Berezin 函数的一些恒等式，《分析学研讨班》，1981/82，德意志民主共和国科学院，柏林，1982，146-161。24[Sc18] I. Schur，关于有限群和厄米形式，《数学杂志》1，第 2-3 期（ 1918 184 207 1），- 。Ser A. N. Sergeev，李超代数 $\mathfrak{gl}(n,m)$ 和 $Q(n)$ 在张量空间中的表示，《泛函分析及其应用》18，第 1 期（1984），80-81（俄文）。7[Ser85] A. N. Sergeev，恒等表示的张量代数作为李超代数 Gl(n, m) 和 Q(n) 上的模，《数学文集》（新系列）123 3，422 165 1984 430 51，2 1985 419 427（ ），第 – 期（俄文）。译载于《苏联数学》。第（ ）期，- 。7[SJ10] N. I. Stoilova、J. van der Jeugt，李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 协变表示的 Gel'fand-Zetlin 基和 Clebsch–Gordan 系数，《数学物理杂志》 51, 093523 2010 9, 14 （ ）。UM L. F. Urrutia、N. Morales，超矩阵的 Cayley-Hamilton 定理，《物理学杂志 A：数学与一般》， 27 1981 2 （ ）。UM L. F. Urrutia、N. Morales，将 Cayley-Hamilton 定理推广到超矩阵的情形，《数学物理快报》， 32 1994 211 219 2 （ ），- 。VJ D. Vere-Jones，永久式、行列式、玻色子和费米子，《新西兰数学会通讯》29（1983），18-23。2

Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh,NC 27695, USA*Email address*: jing@ncsu.edu

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China
Email address: yinlongliu@shu.edu.cn

School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan, Hubei 430079, China
Email address: jzhang@ccnu.edu.cn