arXiv:2603.21961v1 [math.AP] 23 Mar 2026

逆　　奇异径向 AKNS 算子的谱分析　　S

Damien Gobin、Benoît Grébert、Bernard Helffer 和 François Nicoleau

摘要

我们基于与两个不同的有效角动量参数 κ 相关联的谱数据，研究奇异 AKNS 算子的逆谱问题。我们主要关注零势附近的局部逆问题。对于各对 $(\kappa_1, \kappa_2) = (0, 1)$、$(1, 2)$ 和 $(0, 3)$，我们证明了局部唯一性。对于 $(0, 2)$，我们证明谱映射在原点处的弗雷歇微分是单射，但其值域是否闭仍是一个未解决的问题。

1 引言

一维奇异微分算子的逆谱理论自然源于径向对称量子系统的分析。其经典例子是径向薛定谔算子，它由三维薛定谔方程在球坐标下分离变量后得到。对于实值平方可积势 $q \in L^2(0, 1)$，径向方程可写为

$$H_\ell(q)u := -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}u + q(x)u = \lambda u\,, \qquad x \in (0,1)\,, \quad \ell \in \mathbb{N}\,. \tag{1.1}$$

正则性条件为 $u(x) = O(x^{\ell+1})$，当 $x \to 0$ 时成立，同时满足狄利克雷边界条件$u(1) = 0$。对于每个角动量 ℓ，这定义了 $L^2(0, 1)$ 上的一个自伴算子，其谱离散、简单且为实数。

逆谱问题旨在根据谱数据确定势 $q(x)$。Pöschel–Trubowitz [28], 、Carlson [11], 、Guillot–Ralston [16] 以及 Zhornitskaya–Serov [38] 的一项经典结果表明，对于每个固定的 ℓ，狄利克雷谱与适当的定标常数共同构成 $L^2(0, 1)$ 上的实解析坐标系。最近，在具有不同角动量的径向薛定谔算子的背景下，我们在 [14] 中证明：若无穷多个 ℓ 满足 Müntz 型条件，则相应的狄利克雷谱唯一确定势；并且在零势的某个邻域内，仅知道两组谱（对应于 $(\ell_1, \ell_2) = (0, 1)$，$(1, 2)$ 或 $(0, 3)$）便足以保证唯一性。这些结果依赖于特征函数以贝塞尔函数表示的显式结构，具体形式为

$$u_{\ell,n}(x) = c_{\ell,n}\, x^{1/2} J_\nu(j_{\nu,n}x)\,, \qquad \nu = \ell + \tfrac{1}{2}\,, \tag{1.2}$$

以及特征函数平方的精细完备性性质，沿袭 Rundell 和 Sacks [29] 早期的研究。

本文旨在研究奇异径向 AKNS 算子的这一谱问题的类似问题。这里考虑的数学模型源自某些物理模型，其推导过程在附录中作了简要说明。分离变量后，可得到一族由我们称为有效角动量参数 $\kappa \in \mathbb{Z}$的参数化的奇异径向 AKNS 算子。我们

强调，参数 κ 通常并不对应真正的角动量，这与薛定谔情形不同。在三维狄拉克框架中，$-\kappa$ 是自旋–轨道算子 K的一个特征值；而在二维模型中，它可以解释为有效角动量（参见 [36] 中的式（7.97）以及本文附录 A）。

相应的奇异 AKNS 算子为

$$H_\kappa(V)\,Z = H_\kappa(p,q)\,Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z' + \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\kappa}{x} \\ -\dfrac{\kappa}{x} & 0 \end{pmatrix} Z + V(x)\,Z\,, \qquad Z = (Z_1, Z_2)^{\mathsf{T}}\,. \tag{1.3}$$

这里，势矩阵 V 由下式给出

$$V(x) = \begin{pmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{pmatrix}, \qquad p, q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\,. \tag{1.4}$$

我们施加以下边界条件。令 $(\theta_1,\ \theta_2) \in \mathbb{R}^2$。

- 当 $\kappa = 0$时，

$$Z(0)\cdot u_{\theta_1} = 0\,, \qquad Z(1)\cdot u_{\theta_2} = 0\,, \qquad u_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \sin\theta_j \\ \cos\theta_j \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

- 当 $\kappa \neq 0$时，

$$Z(1)\cdot u_{\theta_2} = 0\,. \tag{1.6}$$

AKNS 方程组具有与泡利矩阵相关的对称性

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

直接计算可得

$$\sigma_1 H_\kappa(p,q)\sigma_1 = -\,H_{-\kappa}(-p,q), \tag{1.8}$$
$$\sigma_2 H_\kappa(p,q)\sigma_2 = \ H_{-\kappa}(-p,-q), \tag{1.9}$$
$$\sigma_3 H_\kappa(p,q)\sigma_3 = -\,H_\kappa(p,-q). \tag{1.10}$$

特别地，若 Z 是 $H_\kappa(p,q)Z = \lambda Z$ 的解，则根据 (1.8)–(1.10)，$\sigma_1 Z$、$\sigma_2 Z$ 和 $\sigma_3 Z$ 是对应变换后方程组的解，其谱参数相同或相反。

在 $p = 0$ 的情形下，σ_1-对称性表明，关于 κ 和 $-\kappa$ （具有相同边界条件 $\theta_2 = 0$）的谱信息，经过重新编号后，等价于关于 H_κ 的 $\theta_2 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi/2$ 所对应的两个谱的信息。因此，只要所得序列满足 [3]，中定理 1.1 所要求的技术性交错性质，势 q 就能被唯一确定。

基于这些原因，　以及其他技术上的困难[1]，，本文将研究范围限制在以下情形

$$\kappa \geq 0 \text{ and } \theta_2 = 0\,.$$

[1]研究一般情形其实很有意思，但除了 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 这一情形外，这在技术上确实会复杂得多。

在 $\kappa = 0$ 的情形下，我们还设定 $\theta_1 = 0$。如附录中所述，在作为研究动机的狄拉克径向模型中， $\theta_2 = 0$ 对应所谓的之字形条件，而 MIT 袋边界条件对应 $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{4}$。

算子的区域定义如下：

$$D(H_0) = \left\{ Z = (Z_1, Z_2) \in L^2(0,1)^2 \ : \ H_0 Z \in L^2(0,1)^2 \, , \ Z_2(0) = 0 \, , \ Z_2(1) = 0 \right\} . \tag{1.11}$$

对于 $\kappa > 0$，我们设

$$D(H_\kappa) = \left\{ Z = (Z_1, Z_2) \in L^2(0,1)^2 \ : \ H_\kappa Z \in L^2(0,1)^2 \, , \ Z_2(1) = 0 \right\} . \tag{1.12}$$

如 [32], 所示，这实现了一个自伴算子，其谱纯离散且简单，可写成一个双向无穷序列

$$\{\lambda_{\kappa,n}(p,q)\}_{n\in\mathbb{Z}} \, , \tag{1.13}$$

排列如下

$$\cdots < \lambda_{\kappa,-2}(p,q) < \lambda_{\kappa,-1}(p,q) < \lambda_{\kappa,0}(p,q) < \lambda_{\kappa,1}(p,q) < \lambda_{\kappa,2}(p,q) < \cdots \, . \tag{1.14}$$

标记由渐近行为唯一确定（见 [32], 定理 3.1）：

$$\lambda_{\kappa,n}(p,q) = \left(n + \operatorname{sgn}(n) \, \tfrac{\kappa}{2} \right) \pi + \ell^2(n) \, , \ \text{as} \ |n| \to \infty \, , \tag{1.15}$$

它决定了序列的两端。这里，记号 $\alpha_n = \beta_n + \ell^2(n)$、 $n \in \mathbb{Z}$ 表示序列 $(\alpha_n - \beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 属于 $\ell^2(\mathbb{Z})$。

除了特征值外，Serier 还引入了适当的定标常数，它们与谱一起构成一组完备的谱坐标。更确切地说，这些组合数据（特征值和定标常数）为势提供了局部稳定的参数化，并得出了 Borg–Levinson 型唯一性结论（见 [32]）。

然而，这些经典结果在很大程度上依赖于定标常数的可用性。从物理和反问题的角度来看，这类量通常不可观测。这自然引出了一个不同且更具挑战性的问题：能否仅凭谱数据而不使用任何定标常数，唯一确定势?

与径向薛定谔算子的相应反问题一样，单个有效角动量对应的谱数据不足以保证唯一性。因此，自然需要结合至少两个不同有效角动量 κ的信息。更确切地说，我们考虑两个不同有效角动量 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 对应的谱，并研究这些纯谱信息在不使用任何定标常数的情况下，能否确定势。

现在陈述我们的第一个主要结果，它给出了若干种情形：只需两个谱，便足以在平凡构型附近局部恢复势。

定理 1.1 （关于以下组对的局部唯一性：（0，1）、（1，2）和（0，3））。设（κ_1，κ_2）=（0，1）、（1，2）或（0，3）。则，与有效角动量 κ_1和 κ_2相关的谱能够唯一确定邻域内的势 $V =$（p，q）$\in L^2$（0，1）$\times L^2$（0，1），该邻域包含零势 $V_0 = 0$。

定理 1.1 的证明依赖于对零势处相关谱映射的弗雷歇微分进行分析。我们证明该微分是单射且具有闭值域，由此得到所需的局部唯一性结果。

现在简要介绍这个谱映射。令 $\lambda_{\kappa,n}(p,q)$ 表示重整化特征值，它们由渐近公式 (1.15) 隐式定义，并可显式表示为

$$\widetilde{\lambda}_{\kappa,n}(p,q) = \lambda_{\kappa,n}(p,q) - \left(n + \operatorname{sgn}(n)\,\tfrac{\kappa}{2}\right)\pi\,.$$

我们选取两个不同的有效角动量 $\kappa_1 \neq \kappa_2$，它们是固定整数，并考虑相应的谱映射

$$\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2} : L^2(0,1)\times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\times\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\,,$$

定义为

$$\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2}(p,q) = \left(\big(\widetilde{\lambda}_{\kappa_1,n}(p,q)\big)_{n\in\mathbb{Z}},\ \big(\widetilde{\lambda}_{\kappa_2,n}(p,q)\big)_{n\in\mathbb{Z}}\right). \tag{1.16}$$

现在陈述本文的第二个主要结果，该结果讨论了三个有效角动量对下，零势处谱映射的弗雷歇微分的单射性。

定理 1.2 (谱映射微分的性质**).** 设 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 为两个不同的整数，并考虑谱映射

$$\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2} : L^2(0,1)\times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\times\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\,.$$

那么，在零势 $V=0$处，$\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2}$ 的弗雷歇微分满足:

- 对于$(\kappa_1,\kappa_2) = (0,1)$、$(1,2)$或$(0,3)$，微分是单射的且具有闭值域。
- 对于$(\kappa_1,\kappa_2) = (0,2)$，微分是单射的。

定理 1.2 的证明见第 6–7 节。(0,2) 的情形仍未解决，因为我们尚无法证明微分具有闭值域。因此，定理 1.1 可由命题 7.2 中陈述的局部单射性结果推出。

在附录中，我们将说明这些问题如何出现在二维和三维中径向狄拉克算子（可能附加阿哈罗诺夫–玻姆势）的逆谱问题分析中，并提出一些尚待解决的问题。

2 未扰动情形 $V = 0$ 下的特征值分析

本节分析未扰动情形 $V = 0$ 下的谱问题，该情形是后文扰动分析和逆问题分析所采用的参考构型。

当 $V = 0$ 时，AKNS算子化简为一阶矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\kappa}{x} \\ -\dfrac{\kappa}{x} & 0 \end{pmatrix} Z(x) = \lambda Z(x), \qquad x\in(0,1), \tag{2.1}$$

满足边界条件

$$Z_2(0) = 0\,,\ Z_2(1) = 0 \quad \text{for } \kappa = 0\,, \qquad Z_2(1) = 0\,, \quad \text{for } \kappa \neq 0\,. \tag{2.2}$$

2.1 $\lambda = 0$的情形

$\lambda = 0$的情形　需要进行专门讨论。在未扰动的狄拉克方程中令 $\lambda = 0$，可得

$$Z_1' = \frac{\kappa}{x} Z_1 , \qquad Z_2' = -\frac{\kappa}{x} Z_2 .$$

因此，一般解为

$$Z_1(x) = C_1 \, x^{\kappa} , \qquad Z_2(x) = C_2 \, x^{-\kappa} .$$

对于 $\kappa = 0$，边界条件 $Z_2(0) = 0$迫使 $C_2 = 0$。对于 $\kappa \geq 1$，条件 $Z_2 \in L^2(0,\ 1)$在$x = 0$ 附近再次迫使 $C_2 = 0$。因此

$$Z(x) = \begin{pmatrix} C_1 \, x^{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

满足 $x = 1$ 处的边界条件，因此 0 是 $H_{\kappa}(0)$的一个特征值。相应的特征函数为

$$Z_{\kappa,0}^{(0)}(x) = c_{\kappa,0} \begin{pmatrix} x^{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad c_{\kappa,0} > 0 ,$$

而归一化条件 $\| Z_{\kappa}^{(0)}{}_{,\ 0} \|_{L^2(0,\ 1)^2} = 1$，给出

$$c_{\kappa,0} = \sqrt{2\kappa + 1} , \qquad \text{so that} \qquad Z_{\kappa,0}^{(0)}(x) = \sqrt{2\kappa+1} \begin{pmatrix} x^{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

2.2 $\lambda \neq 0$的情形

现在考虑 $\lambda \neq 0$的情形，此时方程组（2.1）解耦为关于 Z_1和 Z_2的两个标量方程:

$$\begin{cases} Z_1''(x) + \left(\lambda^2 - \dfrac{\kappa(\kappa-1)}{x^2} \right) Z_1(x) = 0 , \\ Z_2''(x) + \left(\lambda^2 - \dfrac{\kappa(\kappa+1)}{x^2} \right) Z_2(x) = 0 . \end{cases} \tag{2.3}$$

令 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$。经过标准代换 $Z_j(x) = \sqrt{x} \, u_j(\lambda x)$后，该方程组化为阶数分别为 $\nu - 1$ 和 ν的贝塞尔方程。因此，其一个基本解系为

$$Z^{(0)}(x,\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda x}{2}} \begin{pmatrix} J_{\nu-1}(\lambda x) \\ -\, J_{\nu}(\lambda x) \end{pmatrix} , \qquad W^{(0)}(x,\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda x}{2}} \begin{pmatrix} -\, Y_{\nu-1}(\lambda x) \\ Y_{\nu}(\lambda x) \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

其中， J_ν 和 Y_ν 表示第一类和第二类贝塞尔函数（见 [21]）。我们回顾一下，对于$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,\ 0]$ 以及任意实数或复数参数 ν，有

$$J_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\left(\frac{z^2}{4} \right)^k}{k! \, \Gamma(\nu + k + 1)} . \tag{2.5}$$

对于 $\nu \notin \mathbb{Z}$，函数 Y_ν 由 [2] 给出

[2]对于整数 n，函数 $Y_n(z)$定义为极限 $Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z)$。

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\,\cos(\nu\pi) \;-\; J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}\,. \tag{2.6}$$

我们强调，对于半整数阶 $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$，函数 $\sqrt{z}\,J_\nu(z)$ 是整函数，而 $\sqrt{z}\,Y_\nu(z)$ 通常是亚纯的，因为它在 $z = 0$ 处有奇点。

作为 $x \to 0$，这些函数满足经典渐近式：

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \qquad Y_\nu(x) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}, \qquad \nu > 0\,. \tag{2.7}$$

因此，J_ν 在原点处正则，而 Y_ν 是奇异的。特别地，在 (2.4) 中的两个基本解里，只有 $Z^{(0)}(x,\ \lambda)$ 在原点附近平方可积，并满足正则性条件。对于未扰算子的每个特征值 $\lambda = \lambda_{\kappa,\,n}(0,\ 0)$，我们定义相应的特征函数如下：

$$Z^{(0)}_{\kappa,n}(x) = c_{\kappa,n}\begin{pmatrix} Z^{(0)}_{1,\kappa,n}(x) \\ Z^{(0)}_{2,\kappa,n}(x)\end{pmatrix} = c_{\kappa,n}\,\sqrt{\lambda_{\kappa,n}(0,0)x}\,\begin{pmatrix} J_{\nu-1}\big(\lambda_{\kappa,n}(0,0)\,x\big) \\ -\,J_\nu\big(\lambda_{\kappa,n}(0,0)\,x\big)\end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

其中 $c_{\kappa,\,n} > 0$ 是一个将在后文指定的归一化常数。利用 $x = 1$ 处的边界条件，我们得到 $H_\kappa(0)$ 的特征值是 J_ν 的单零点，具体将在下文段落中详述。

2.3 对称性

本段回顾 $V = 0$ 的未扰谱的对称性性质。

对于半整数阶数 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$，当 $-\kappa$ 是奇函数时，整函数 $z \mapsto \sqrt{z}\,J_\nu(z)$ 是偶函数；当 κ 是偶函数时，它是奇函数。这一奇偶性立即给出非零特征值的如下对称性：

$$\lambda_{\kappa,-n}(0,0) = -\,\lambda_{\kappa,n}(0,0)\,,\ \text{for } n \geq 1\,. \tag{2.9}$$

我们回顾一下，边界条件导出特征方程 $J_\nu(\lambda) = 0$。若 $\{j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$表示 J_ν 的正零点序列，则 $H_\kappa(0)$ 的非零特征值为

$$\lambda_{\kappa,\pm n}(0,0) = \pm j_{\nu,n}\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.10}$$

此外，我们已 看到 $\lambda = 0$ 是一个特征值。因此，完整谱关于原点对称，且按如下顺序排列：

$$\cdots < -\,j_{\nu,2} < -\,j_{\nu,1} < 0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \cdots\,, \tag{2.11}$$

我们将 $\lambda = 0$ 赋予双向无限枚举 $\{\lambda_{\kappa,n}(0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 中的指标 $n = 0$。

2.4 总结与记号

未扰算子 $H_\kappa(0)$ 的谱由简单特征值 $\lambda_{\kappa,\,0}(0) = 0$ 以及非零特征值 $\lambda_{\kappa,\,\pm n}(0) = \pm j_{\nu,\,n}$（$n \geq 1$ 时）构成，它们形成一个由 $n \in \mathbb{Z}$ 编号的对称双无限序列（见 (2.11)）。这一编号与渐近公式 (1.15) 一致（见 [26], 10.21 (vi)）。

相应的特征函数由正则解 $Z_{\kappa}^{(0),\,n}$ 给出。对于零特征值，有

$$Z_{\kappa,0}^{(0)}(x) = \sqrt{2\kappa+1}\binom{x^{\kappa}}{0},$$

而对于 $n \neq 0$，它们可用贝塞尔函数表示。

由对称性可知，对应于 $\lambda_{\kappa,\,n}$(0) 和 $\lambda_{\kappa,\,-n}$(0) 的特征函数，其振荡分量仅相差一个符号。特别地，归一化常数仅取决于 $|n|$，并且

$$c_{\kappa,-n} = c_{\kappa,n}\,,\ \text{for } n \geq 1\,.$$

因此，我们用 $n \in \mathbb{Z}$ 对谱进行编号，其中 $n = 0$ 对应于零特征值 .

注 2.1 (归一化常数**)**。 我们需要这些归一化常数在 $n \to \infty$ 时的渐近行为（见第 *3.3* 节）。事实上，常数$c_{\kappa,\,n}$ 可利用下面这个标准的有限区间恒等式显式计算（通常称为Lommel 型公式，见（*[26], 10.22.5*））：对于任意 α、 $\mu \in \mathbb{R}^{+}$,

$$\int_0^1 x\,J_{\mu}(\alpha x)^2\,dx = \frac{1}{2}\Big(J_{\mu}(\alpha)^2 - J_{\mu-1}(\alpha)\,J_{\mu+1}(\alpha)\Big)\,. \tag{2.12}$$

将 $\alpha = j_{\nu,\,|n|}$ 和 $\mu = \nu$ 代入(2.12)，并结合 $J_{\nu}(j_{\nu,\,|n|}) = 0$ 以及递推关系

$$J_{\nu-1}(\alpha) + J_{\nu+1}(\alpha) = \frac{2\nu}{\alpha}J_{\nu}(\alpha)\,,$$

我们得到

$$J_{\nu-1}(j_{\nu,|n|}) = -J_{\nu+1}(j_{\nu,|n|})$$

因此

$$\int_0^1 x\,J_{\nu}\big(j_{\nu,|n|}x\big)^2\,dx = \frac{1}{2}\,J_{\nu+1}\big(j_{\nu,|n|}\big)^2\,.$$

类似地，将(2.12) 应用于 $\mu = \nu - 1$ 可得

$$\int_0^1 x\,J_{\nu-1}\big(j_{\nu,|n|}x\big)^2\,dx = \frac{1}{2}\,J_{\nu-1}\big(j_{\nu,|n|}\big)^2 = \frac{1}{2}\,J_{\nu+1}\big(j_{\nu,|n|}\big)^2\,.$$

代入 这些恒等式代入归一化条件 $\|Z_{\kappa}^{(0),n}\|_{L^2(0,1)^2} = 1$ （见(2.8)）可得 s

$$c_{\kappa,n} = \frac{1}{\sqrt{j_{\nu,|n|}}\,\big|J_{\nu+1}(j_{\nu,|n|})\big|}\,,\ as\ n \neq 0\,. \tag{2.13}$$

贝塞尔函数及其正零点 $j_{\nu,n}$ 的经典渐近展开（例如参见 *Watson [37]*）给出

$$c_{\kappa,n}^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\nu^2-1}{16\pi\,\big(n+\nu/2-1/4\big)^2} + O\big(n^{-4}\big)\,,\qquad n \to \infty\,. \tag{2.14}$$

最后，在零特征值情形下，我们回顾归一化条件给出

$$c_{\kappa,0} = \sqrt{2\kappa+1}\,.$$

我们以对特殊情形 $\kappa = 0$ 的显式分析结束本节。在这种情形下，计算尤为简单，因此可以用完全显式的方式展示前面构造的过程。

2.5 $\kappa = 0$的情形

现在考虑情形 $\kappa = 0$，此时 $\nu = \frac{1}{2}$，方程组中的奇异项 κ/x 消失。对这一特殊情形的分析尤其有趣（参见第 3.4 节）。在这种情况下，狄拉克系统 (2.1) 化为

$$Z_1' = \lambda\, Z_2\,, \qquad Z_2' = -\lambda\, Z_1\,,$$

正则解由条件 $Y_2(0)$ {v₂}刻画，其表达式为

$$Z^{(0)}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ -\sin(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

在 $x = 1$ 处施加边界条件，得到特征方程 $\sin(\lambda) = 0$，因此非零特征值可显式表示为

$$\lambda_{0,n}(0,0) = n\pi\,, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,. \tag{2.15}$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，相应的特征函数为

$$Z^{(0)}_{0,n}(x) = \begin{pmatrix} \cos(n\pi x) \\ -\sin(n\pi x) \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

因为这个向量值函数的 $L^2(0,1)^2$-范数等于 1。

备注 **2.2.** 回顾一下，阶数为1 2 的贝塞尔函数具有如下初等表示

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z\,, \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z\,. \tag{2.17}$$

3 $V = 0$处的谱映射与线性化问题。

本节介绍谱映射，并分析未扰动构型 $V = 0$ 处的线性化。此线性化分析为后文建立的局部逆结果提供了关键工具。

3.1 $\lambda_{\kappa,\,n}(p,\ q)$ 的微分与谱映射

本小节回顾特征值对 AKNS 势 $V = (p,\ q)$ 的解析依赖性，并描述其弗雷歇微分。

根据 Serier [32, 命题 3.1], ，对每个固定的数对 $(\kappa,\ n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$，映射

$$(p,q) \in L^2(0,1) \times L^2(0,1) \longmapsto \lambda_{\kappa,n}(p,q)$$

是实解析的。此外，如果 $\lambda_{\kappa,\ n}(p,\ q)$ 是 $H_\kappa(V)$ 的一个单特征值，其归一化特征函数

$$Z_{\kappa,n}(x;p,q) = \begin{pmatrix} Z_{1,\kappa,n}(x;p,q) \\ Z_{2,\kappa,n}(x;p,q) \end{pmatrix}, \qquad \|Z_{\kappa,n}(\cdot;p,q)\|_{L^2(0,1)^2} = 1\,,$$

那么在方向 $(v_1,\ v_2)$ 上，$(p,\ q)$ 处的弗雷歇微分 $\in L^2(0,\ 1)\ \times L^2(0,\ 1)$ 由下式给出

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(p,q)\cdot(v_1,v_2)=\int_0^1\Big(2\,Z_{1,\kappa,n}(x;p,q)\,Z_{2,\kappa,n}(x;p,q)\,v_1(x) \\ +\big(Z_{2,\kappa,n}(x;p,q)^2-Z_{1,\kappa,n}(x;p,q)^2\big)\,v_2(x)\Big)\,dx\,. \tag{3.1}$$

因此，关系式 (3.1) 使我们能够计算式 (1.16) 中引入的谱映射的微分。

3.2 $V=0$ 处的线性化问题

现在我们研究谱映射在未扰势 $V=0$ 处的弗雷歇导数，由此得到线性化反问题的表述。我们的目标是确定，对于两个不同的有效角动量 $\kappa_1\neq\kappa_2$，相应的映射

$$V=(p,q)\longmapsto\big(\lambda_{\kappa_1,n}(p,q)\,,\,\lambda_{\kappa_2,n}(p,q)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

在 $V=0$ 处是否局部单射。等价地，也可以通过重整化后的特征值 $\lambda_{\kappa,n}$ 来表述同一问题，因为重整化是减去一个关于 n 的显式函数，而该函数独立于 (p,q)，因此不会影响 $V=0$ 处的弗雷歇微分。

由一般变分公式 (3.1) 可得

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=\int_0^1\Big(2\,Z^{(0)}_{1,\kappa,n}(x)\,Z^{(0)}_{2,\kappa,n}(x)\,v_1(x)+\big[\big(Z^{(0)}_{2,\kappa,n}(x)\big)^2-\big(Z^{(0)}_{1,\kappa,n}(x)\big)^2\big]\,v_2(x)\Big)\,dx\,, \tag{3.2}$$

其中

$$Z^{(0)}_{\kappa,n}(x)=\begin{pmatrix}Z^{(0)}_{1,\kappa,n}(x)\\ Z^{(0)}_{2,\kappa,n}(x)\end{pmatrix}\,,$$

是与特征值 $\lambda_{\kappa,n}(0,0)$ 对应的 $H_\kappa(0)$ 的归一化特征函数。

我们先讨论非零特征值的情形。利用前几节的结果以及未扰谱的对称性，对于每个 $n\in\mathbb{Z}^{\pm}$，我们得到

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=c^2_{\kappa,|n|}\int_0^1 j_{\nu,|n|}\,x\,\Big(\mp2\,J_{\nu-1}\big(j_{\nu,|n|}x\big)\,J_\nu\big(j_{\nu,|n|}x\big)\,v_1(x) \\ +\big[J_\nu\big(j_{\nu,|n|}x\big)^2-J_{\nu-1}\big(j_{\nu,|n|}x\big)^2\big]\,v_2(x)\Big)\,dx\,. \tag{3.3}$$

接下来考虑零特征值。回忆

$$Z^{(0)}_{\kappa,0}(x)=c_{\kappa,0}\begin{pmatrix}x^\kappa\\0\end{pmatrix}\,,\qquad c_{\kappa,0}=\sqrt{2\kappa+1}\,,$$

将此表达式代入 (3.1)，得到

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,0}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=-\,(2\kappa+1)\int_0^1 x^{2\kappa}\,v_2(x)\,dx\,. \tag{3.4}$$

方程组 (3.3) 的结构表明，v_1 和 v_2 的贡献可以分离。现在，我们通过在目标空间上引入一个有界同构来形式化这一观察，该同构能够将谱映射的微分精确地解耦。

3.3 通过连续同构解耦微分算子

我们证明，在目标空间上的一个有界同构作用下，谱映射的微分可以化为一个完全解耦的方程组。这使我们能够分别研究 v_1和 $\mathbf{v_2}$ 的贡献。我们将此微分记为

$$S := D_{(p,q)}\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2}(0,0)\,.$$

记号。 对于每个 $\kappa \in \{\kappa_1, \kappa_2\}$ 和每个 $n \geq 1$ （满足 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$），我们在 $L^2(0,1)$ 上引入有界线性泛函

$$A_{\kappa,n}(v_1) := \int_0^1 2j_{\nu,n}x\, J_{\nu-1}\big(j_{\nu,n}x\big)\, J_\nu\big(j_{\nu,n}x\big)\, v_1(x)\, dx\,,$$

$$B_{\kappa,n}(v_2) := \int_0^1 j_{\nu,n}x\Big(J_\nu\big(j_{\nu,n}x\big)^2 - J_{\nu-1}\big(j_{\nu,n}x\big)^2\Big)\, v_2(x)\, dx\,.$$

采用上述记号，对于 $n \geq 1$,

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,\pm n}(0,0)\cdot(v_1,v_2) = c_{\kappa,n}^2\big(\mp A_{\kappa,n}(v_1) + B_{\kappa,n}(v_2)\big)\,,$$

而对于零模，有

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,0}(0,0)\cdot(v_1,v_2) = -\,c_{\kappa,0}^2\int_0^1 x^{2\kappa}\, v_2(x)\, dx\,, \qquad c_{\kappa,0} = \sqrt{2\kappa+1}\,. \tag{3.5}$$

对于 $\kappa \in \{\kappa_1, \kappa_2\}$，定义

$$d_\kappa(v) := \big(d_{\kappa,n}(v)\big)_{n\in\mathbb{Z}} := \big(D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot v\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\,, \qquad v = (v_1,v_2)\,,$$

于是

$$S(v) = (d_{\kappa_1}(v),\, d_{\kappa_2}(v)) \in \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

现在，对固定的 κ，定义线性映射

$$\mathcal{U}_\kappa : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \ell^2(\mathbb{N}^*) \times \ell^2(\mathbb{N}^*)$$

by

$$\mathcal{U}_\kappa(a) = \left(\frac{a_0}{c_{\kappa,0}^2}\,,\, \Big(\frac{a_{-n}-a_n}{2\,c_{\kappa,n}^2}\Big)_{n\geq1}\,,\, \Big(\frac{a_{-n}+a_n}{2\,c_{\kappa,n}^2}\Big)_{n\geq1}\right)\,, \tag{3.6}$$

其中 $\mathbb{N}^* := \{1,2,3,\dots\}$ 表示正整数集。利用 **(2.14)**，可知 $(c_{\kappa,n})_{n\in\mathbb{Z}}$一致有界且具有正下界，因此 $\mathcal{U}_\kappa$ 是一个有界同构。将 $\mathcal{U}_\kappa$ 作用于 $d_\kappa(v)$，并使用上述公式，可得精确的解耦

$$\mathcal{U}_\kappa\big(d_\kappa(v)\big) = \left(-\int_0^1 x^{2\kappa}v_2\,,\, \big(A_{\kappa,n}(v_1)\big)_{n\geq1}\,,\, \big(B_{\kappa,n}(v_2)\big)_{n\geq1}\right)\,. \tag{3.7}$$

最后，令 $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{\kappa_1} \times \mathcal{U}_{\kappa_2}$，它是 $\ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})$ 上的有界同构。然后

$$(\mathcal{U} \circ S)(v_1, v_2) = \Big(\mathcal{M}(v_2),\ \mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_1),\ \mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_2) \Big)\,, \tag{3.8}$$

其中

$$\mathcal{M}(v_2) = \left(-\int_0^1 x^{2\kappa_1} v_2\,,\ -\int_0^1 x^{2\kappa_2} v_2 \right) \in \mathbb{R}^2\ ,$$

and

$$\mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_1) = \Big((A_{\kappa_1,n}(v_1))_{n\geq 1}\,,\ (A_{\kappa_2,n}(v_1))_{n\geq 1} \Big)\,, \qquad \mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_2) = \Big((B_{\kappa_1,n}(v_2))_{n\geq 1}\,,\ (B_{\kappa_2,n}(v_2))_{n\geq 1} \Big)\,.$$

特别地，$\mathcal{U} \circ S$ 是分块对角的：v_1 只作用于 $\mathcal{A}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$，而 v_2 只作用于（$\mathcal{M}$，$\mathcal{B}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$）。

3.4 单射性问题的重新表述

现在，我们重新表述谱映射 $\mathcal{S}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$ 在（p，q）$=(0,\ 0)$ 处的弗雷歇微分的单射性。根据定义，单射性问题等价于刻画所有满足下式的扰动（v_1，v_2）：

$$S(v_1, v_2) = 0\,, \qquad S = D_{(p,q)}\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2}(0,0)\,.$$

由于 $\mathcal{U}$ 是目标空间上的有界同构，该条件等价于

$$(\mathcal{U} \circ S)(v_1, v_2) = 0\,.$$

利用 th 分块对角结构 (3.8) 使核条件化为解耦系统

$$\mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_1) = 0\,, \qquad \mathcal{M}(v_2) = 0\,, \qquad \mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_2) = 0\,. \tag{3.9}$$

这种解耦也体现了边界条件的选择，而边界条件编码在特征函数的结构中。因此，核的研究可分为两个独立问题：一个只涉及分量 v_1，由 $\mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}$ 控制；另一个只涉及分量 v_2，由 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2})$ 控制。

对于固定的有效角动量 κ，上述条件化为

$$A_{\kappa,n}(v_1) = 0, \quad n \geq 1\,, \qquad B_{\kappa,n}(v_2) = 0, \quad n \geq 1\,, \qquad \int_0^1 x^{2\kappa} v_2(x)\,dx = 0\,. \tag{3.10}$$

作为示例，考虑简单情形 $\kappa = 0$。利用阶数为 $\pm\frac{1}{2}$ 的贝塞尔函数的显式表达式，可得

$$x\,J_{-1/2}(n\pi x)\,J_{1/2}(n\pi x) = \tfrac{1}{2}\sin(2n\pi x)\,, \qquad x\big(J_{1/2}(n\pi x)^2 - J_{-1/2}(n\pi x)^2\big) = -\cos(2n\pi x)\,.$$

因此，(3.10) 化为

$$\int_0^1 \sin(2n\pi x)\,v_1(x)\,dx = 0\,, \qquad n \geq 1,$$

and

$$\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,v_2(x)\,dx = 0\,, \qquad n \geq 1, \qquad \int_0^1 v_2(x)\,dx = 0\,.$$

这些关系表明，v_1 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为偶函数，而 v_2 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为奇函数。反过来，如果 v_1 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为偶函数，且 v_2 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为奇函数，那么上述所有积分都为零。因此，在 $\kappa = 0$ 的情形下，这些奇偶性条件是 $S(v_1, v_2) = 0$ 的充要条件。

4 Kneser–Sommerfeld 型展开

经典的 Kneser–Sommerfeld 恒等式给出了关于 J_ν的零点 $j_{\nu,n}$ 的级数展开。其正确形式最早由 Buchholz [9]给出，随后由 Hayashi [17] 和 Martin [23], 加以澄清；该形式不同于 Watson 所述的公式，后者遗漏了一个关键的积分项。有效展开式 (4.1) 在我们先前对径向薛定谔算子的分析中发挥了核心作用：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{J_\nu(j_{\nu,n}x)\, J_\nu(j_{\nu,n}X)}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\,[J'_\nu(j_{\nu,n})]^2} = \frac{\pi}{4\, J_\nu(z)}\, J_\nu(xz)\left[J_\nu(z)\, Y_\nu(Xz) - Y_\nu(z)\, J_\nu(Xz)\right], \tag{4.1}$$

对于 $0 < x \leq X \leq 1$。

在当前的 AKNS 框架中，线性化系统 (3.3) 同时涉及平方贝塞尔函数乘积和混合贝塞尔函数乘积。相关组合如下，其中 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$，

$$J_\nu(j_{\nu,n}x)^2\,, \quad J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)^2 \quad \text{and} \quad J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)\, J_\nu(j_{\nu,n}x)\,.$$

然而，最后两个表达式超出了经典 Kneser–Sommerfeld 展开的框架，因为经典展开只处理形如 $J_\nu(xj_{\nu,\ n})$ $J_\nu(Xj_{\nu,\ n})$ 的对角乘积。

为处理 AKNS 结构，我们因此需要修正的 Kneser–Sommerfeld 型恒等式。下面我们陈述三个同类型的附加恒等式。为简便起见，假设$\nu \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$，尽管这些公式也可推广到 ν 的任意复数值。[3]

命题 4.1。设 $\nu \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$、$z \neq 0$、$z \neq j_{\nu,\ n}$ 以及 $0 < x \leq X \leq 1$。下列 *Kneser–Sommerfeld* 型恒等式成立：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)\, J_{\nu-1}(j_{\nu,n}X)}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\left[J'_\nu(j_{\nu,n})\right]^2} &= -\frac{\nu}{z^2}\,(xX)^{\nu-1} \\ &\quad + \frac{\pi}{4J_\nu(z)}\, J_{\nu-1}(xz)\left(J_\nu(z)\, Y_{\nu-1}(Xz) - Y_\nu(z)\, J_{\nu-1}(Xz)\right),\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)\, J_\nu(j_{\nu,n}X)}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\, j_{\nu,n}\left[J'_\nu(j_{\nu,n})\right]^2} &= \frac{1}{2z^2}\, x^{\nu-1}(X^{-\nu} - X^\nu) \\ &\quad + \frac{\pi}{4z\, J_\nu(z)}\, J_{\nu-1}(xz)\left(J_\nu(z)\, Y_\nu(Xz) - Y_\nu(z)\, J_\nu(Xz)\right),\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{J_{\nu-1}(j_{\nu,n}X)\, J_\nu(j_{\nu,n}x)}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\, j_{\nu,n}\left[J'_\nu(j_{\nu,n})\right]^2} &= -\frac{1}{2z^2}\, x^\nu X^{\nu-1} \\ &\quad + \frac{\pi}{4z\, J_\nu(z)}\, J_\nu(xz)\left(J_\nu(z)\, Y_{\nu-1}(Xz) - Y_\nu(z)\, J_{\nu-1}(Xz)\right).\end{aligned} \tag{4.4}$$

证明。我们逐步沿用 Watson 对 Kneser-Sommerfeld 公式的围道积分论证（见 [37]），采用 Buchholz、Hayashi 和 Martin 后来澄清的修正版。我们首先给出 (4.2) 的证明。

[3]此处我们采用上文回顾过的 $Y_n(z)$ 的定义。

令 $z \in \mathbb{C}$，例如取 $\Re z > 0$ 和 $z \neq j_{\nu,\,n}$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。按照 Watson 的方法，对于 $w \in \mathbb{C}$ 且固定的 $0 < X \leq 1$，我们引入辅助函数

$$W_\nu(w, X) := J_\nu(w)\, Y_{\nu-1}(Xw) \;-\; Y_\nu(w)\, J_{\nu-1}(Xw)\,. \tag{4.5}$$

利用 J_ν 和 Y_ν 在小 w 时的渐近式（见 (2.7)），可直接得到

$$W_\nu(w, X) = \frac{2X^{\nu-1}}{\pi w} \;+\; O(1)\,, \qquad w \to 0\,. \tag{4.6}$$

回顾汉克尔函数

$$H_\nu^{(1)}(w) = J_\nu(w) + i\, Y_\nu(w)\,, \qquad H_\nu^{(2)}(w) = J_\nu(w) - i\, Y_\nu(w)\,. \tag{4.7}$$

经过简单计算，可得等价表示

$$W_\nu(w, X) = -\,\frac{1}{2i}\Big[H_\nu^{(1)}(w)\, H_{\nu-1}^{(2)}(Xw) - H_\nu^{(2)}(w)\, H_{\nu-1}^{(1)}(Xw)\Big]\,. \tag{4.8}$$

最后，由适用于 $|\arg\, w| \leq \pi - \delta$、$\delta \in (0,\ \pi)$ 的大 w 渐近式（[21], (5.11.4)-(5.11.5)），

$$H_\nu^{(1)}(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\, e^{i\left(w - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\,, \qquad H_\nu^{(2)}(w) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\, e^{-i\left(w - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\,, \tag{4.9}$$

当 $|w|$ 较大且满足 $\Re w > 0$ 时，我们得到：

$$|W_\nu(w, X)| \lesssim \frac{e^{(1-X)|\Im w|}}{|w|}\,, \qquad 0 < X \leq 1\,. \tag{4.10}$$

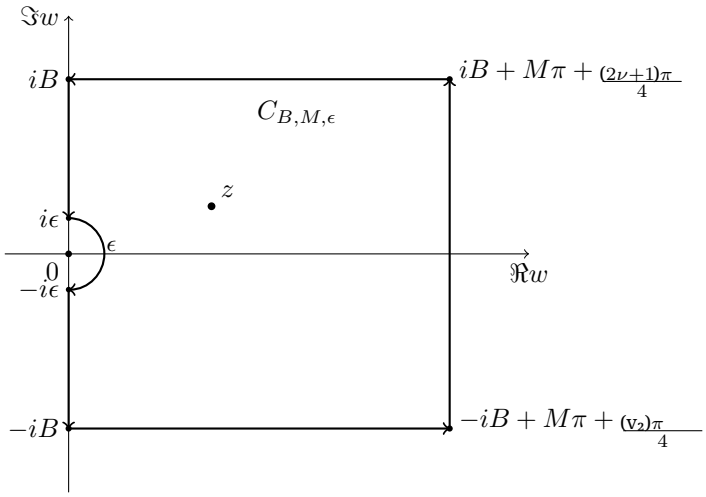
我们考虑围道积分

$$I_{B,M,\epsilon} = \oint_{C_{B,M,\epsilon}} \frac{W_\nu(w, X)}{w^2 - z^2}\, \frac{w\, J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)}\, dw\,, \tag{4.11}$$

其中，$C_{B,M,\epsilon}$ 是半平面 $\Re w \geq 0$ 内的矩形，其顶点为

$$\pm iB, \qquad \pm iB + M\pi + \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\,,$$

当 $B > 0$ 和 $\mathbf{v_2}$ 足够大时，在半平面 $\Re w > 0$ 内以半径 $\epsilon > 0$ 的半圆在原点处缩进：



再次利用 J_ν 和 Y_ν 的小-w 渐近行为（见 (2.7)），可直接得到

$$\frac{W_\nu(w,X)}{w^2-z^2}\,\frac{w\,J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)} = -\frac{4\nu}{\pi z^2 w}(xX)^{\nu-1} + O(1)\,, \quad w\to 0\,. \tag{4.12}$$

利用奇偶恒等式

$$H_\nu^{(1)}(-w) = e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(w)\,, \quad H_\nu^{(2)}(-w) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(w)\,,$$

对虚轴上的所有 w 均成立，我们注意到，$W_\nu(w,X)$ 是关于该轴上 w 的奇函数。此外，映射

$$w \mapsto \frac{w\,J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)}$$

关于 w 是偶函数。因此，区间 $[-iB,-i\epsilon]\cup[i\epsilon,iB]$ 的竖直并集所产生的贡献相互抵消。

令

$$f(w) = \frac{W_\nu(w,X)}{w^2-z^2}\,\frac{w\,J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)}\,. \tag{4.13}$$

利用 (4.12)，以原点为圆心、半径为 ϵ 的小圆（沿逆时针方向遍历）上的积分贡献在 $\epsilon\to 0$ 极限下收敛至

$$\frac{4i\nu}{z^2}\,(xX)^{\nu-1}\,. \tag{4.14}$$

利用贝塞尔渐近式 ([21], (5.11.6))

$$J_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\left[\cos\Big(w-\tfrac{\nu\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{e^{|\Im w|}}{|w|}\Big)\right], \quad |\arg w|\le \pi-\delta\,,\ |w|\to+\infty\,, \tag{4.15}$$

由于 $\delta\in(0,\ \pi)$，我们推得竖直线段上没有贝塞尔零点 $j_{\nu,\ n}$，而在另外三条边上，

$$\left|\frac{H_\nu^{(1)}(w)\,H_{\nu-1}^{(2)}(Xw) - H_\nu^{(2)}(w)\,H_{\nu-1}^{(1)}(Xw)}{w^2-z^2}\,\frac{w\,J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)}\right| \lesssim \frac{e^{(x-X)|\Im w|}}{|w|^2}\,. \tag{4.16}$$

由于命题中的假设 $x \le X$，被积函数在这些边上按 $|w|^{-2}$ 的速度衰减。令$B,\ M \to \infty$，所有这些贡献均趋于零。因此，根据留数定理，在 (4.11) 中令 $B,\ M \to \infty$，并令 $\epsilon \to 0$，可得

$$\frac{4i\nu}{z^2}\,(xX)^{\nu-1} = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f)\,, \tag{4.17}$$

其中求和遍及围道内的极点，即

$$w = z \quad \text{and} \quad w = j_{\nu,n}, \qquad n \ge 1\,.$$

a. 在 $w = j_{\nu,n}$ 处的留数：被积函数有一个简单极点，因此

$$\operatorname*{Res}_{w=j_{\nu,n}}(f) = \frac{J_{\nu-1}(Xj_{\nu,n})\, j_{\nu,n}\, J_{\nu-1}(xj_{\nu,n})\, Y_\nu(j_{\nu,n})}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\, J'_\nu(j_{\nu,n})}\,. \tag{4.18}$$

我们使用恒等式

$$Y_\nu(j_{\nu,n}) = \frac{Y_\nu(j_{\nu,n})J'_\nu(j_{\nu,n}) - J_\nu(j_{\nu,n})Y'_\nu(j_{\nu,n})}{J'_\nu(j_{\nu,n})}\,,$$

以及朗斯基公式（[21], (5.9.2)）

$$J_\nu(z)Y'_\nu(z) - J'_\nu(z)Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}\,,$$

从而得到

$$Y_\nu(j_{\nu,n}) = -\frac{2}{\pi\, j_{\nu,n}\, J'_\nu(j_{\nu,n})}\,.$$

将其代入（4.18）得

$$\operatorname*{Res}_{w=j_{\nu,n}}(f) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{J_{\nu-1}(Xj_{\nu,n})\, J_{\nu-1}(xj_{\nu,n})}{(z^2 - j_{\nu,n}^2)\,[J'_\nu(j_{\nu,n})]^2}\,. \tag{4.19}$$

b. $w = z$ 处的留数：直接计算可得：

$$\operatorname*{Res}_{w=z}(f) = \frac{1}{2J_\nu(z)}\, J_{\nu-1}(xz)\left[J_\nu(z)\, Y_{\nu-1}(Xz) - Y_\nu(z)\, J_{\nu-1}(Xz)\right]. \tag{4.20}$$

Summ代入留数（4.19）和（4.20），并调用（4.17），恰好得到恒等式（4.2).

为证明恒等式（4.3），我们引入一个新的辅助函数

$$\tilde{W}_\nu(w, X) := J_\nu(w)\, Y_\nu(Xw) - Y_\nu(w)\, J_\nu(Xw)\,, \tag{4.21}$$

并考虑围道积分

$$I_{B,M,\epsilon} = \oint_{C_{B,M,\epsilon}} \frac{\tilde{W}_\nu(w, X)}{w^2 - z^2}\,\frac{J_{\nu-1}(xw)}{J_\nu(w)}\,dw\,, \tag{4.22}$$

其中 $C_{B,\ M,\ \epsilon}$ 是与上文相同的矩形，在原点处向内凹入一个半径为 $\epsilon > 0$ 的半圆。我们以完全相同的方式得出结论。

同样，为了证明恒等式 (4.4)，我们再次使用辅助函数 (4.5)，并考虑围道积分

$$I_{B,M,\epsilon} = \oint_{C_{B,M,\epsilon}} \frac{W_\nu(w,X)}{w^2-z^2}\,\frac{J_\nu(xw)}{J_\nu(w)}\,dw\,, \tag{4.23}$$

其中$C_{B,\ M,\ \epsilon}$ 是与之前相同的围道。证明过程类似。 □

以下结果可直接得到：

推论 4.2. 设 $\nu \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$，且 $x \in (0,1]$。那么，对所有 $z \notin \{0, j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$，

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{x\,J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)\,J_\nu(j_{\nu,n}x)}{(z^2-j_{\nu,n}^2)\,j_{\nu,n}\left[J'_\nu(j_{\nu,n})\right]^2} &= \frac{1}{4z^2}\,(1-2x^{2\nu}) \\ &\quad + \frac{\pi\,x}{8z\,J_\nu(z)}\,\Big[J_\nu(z)\left(J_{\nu-1}(zx)\,Y_\nu(zx)+Y_{\nu-1}(zx)\,J_\nu(zx)\right) \\ &\quad -2Y_\nu(z)\,J_{\nu-1}(zx)\,J_\nu(zx)\Big]\,.\end{aligned} \tag{4.24}$$

证明. 将 (4.3) 和 (4.4) 与 $x = X$ 相加，再乘以 $\frac{x}{2}$，即可得到该结果。 – □

5 克内瑟-索末菲表示的应用

5.1 预备知识

我们已经看到，对于固定的有效角动量 κ，线性化条件

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2) = 0\,, \qquad \text{for all } n\in\mathbb{Z}\,,$$

等价于以下关系（见（3.10））

$$\int_0^1 x\,J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)\,J_\nu(j_{\nu,n}x)\,v_1(x)\,dx = 0\,, \qquad n\geq 1\,, \tag{5.1}$$

and

$$\int_0^1 x\left[J_\nu(j_{\nu,n}x)^2 - J_{\nu-1}(j_{\nu,n}x)^2\right]v_2(x)\,dx = 0\,, \qquad n\geq 1\,, \tag{5.2}$$

并满足附加约束

$$\int_0^1 x^{2\kappa}\,v_2(x)\,dx = 0\,. \tag{5.3}$$

我们首先考察条件 (5.2)-(5.3)。利用经典的克内瑟-索末菲展开 (4.1) 以及与 $x = X$ 的关系 (4.2)。我们将 (5.2) 乘以

$$\frac{1}{(z^2-j_{\nu,n}^2)\left[J'_\nu(j_{\nu,n})\right]^2}$$

与 $z \notin \{0, j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$。对 n 求和，并利用 $2\nu - 1 = 2\kappa$，对于这样的 z，我们得到

$$-\frac{\nu}{z^2}\int_0^1 x^{2\nu-1}v_2(x)\,dx + \frac{\pi}{4J_\nu(z)}\int_0^1 x\Big(J_\nu(zx)\left[J_\nu(z)Y_\nu(zx) - Y_\nu(z)J_\nu(zx)\right] \\ - J_{\nu-1}(zx)\left[J_\nu(z)Y_{\nu-1}(zx) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(zx)\right]\Big)v_2(x)\,dx = 0\,. \quad (5.4)$$

由于 $2\nu - 1 = 2\kappa$，根据约束 (5.3)，(5.4) 中的第一个积分为零。因此我们得到简化后的恒等式：

$$\int_0^1 x\Big(J_\nu(zx)\left[J_\nu(z)Y_\nu(zx) - Y_\nu(z)J_\nu(zx)\right] \\ - J_{\nu-1}(zx)\left[J_\nu(z)Y_{\nu-1}(zx) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(zx)\right]\Big)v_2(x)\,dx = 0\,, \quad (5.5)$$

对于 $z \notin \{0, j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$，可将其改写为

$$\begin{aligned} &J_\nu(z)\int_0^1 x\Big(J_\nu(zx)Y_\nu(zx) - J_{\nu-1}(zx)Y_{\nu-1}(zx)\Big)v_2(x)\,dx \\ &\quad - Y_\nu(z)\int_0^1 x\Big(J_\nu(zx)^2 - J_{\nu-1}(zx)^2\Big)v_2(x)\,dx = 0\,. \end{aligned} \quad (5.6)$$

根据关于 z 的连续性，恒等式 (5.6) 可延拓至 $z \in \mathbb{C}^*$。

同样地，利用推论 4.2，由 (5.1) 可得，对于 $z \notin \{0, j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$

$$\int_0^1 (1 - 2x^{2\nu})\,v_1(x)\,dx + \frac{\pi}{2J_\nu(z)}\int_0^1 (zx)\Big(J_\nu(z)\big[J_{\nu-1}(zx)Y_\nu(zx) + Y_{\nu-1}(zx)J_\nu(zx)\big] \\ - 2Y_\nu(z)J_{\nu-1}(zx)J_\nu(zx)\Big)v_1(x)\,dx = 0\,. \quad (5.7)$$

因此，结合贝塞尔函数在大-w 下的渐近式 (4.15) 以及 $Y_\nu(w)$ 的渐近式（见 [21], (5.11.7)），

$$Y_\nu(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\left[\sin\Big(w - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{e^{|\Im w|}}{|w|}\Big)\right], \qquad |\arg w| \leq \pi - \delta\,, \quad |w| \to +\infty\,, \quad (5.8)$$

利用黎曼-勒贝格引理，我们推出 (5.7) 中的积分为 $o(1)$，当 $z \to +\infty$ 远离点 $j_{\nu,\,n}$ 时成立。因此，

$$\int_0^1 \left(1 - 2x^{2\nu}\right)v_1(x)\,dx = 0\,. \quad (5.9)$$

因此，对于所有 $z \notin \{0, j_{\nu,n}\}_{n\geq 1}$，我们得到

$$\begin{aligned} &J_\nu(z)\int_0^1 x\big(J_{\nu-1}(zx)Y_\nu(zx) + Y_{\nu-1}(zx)J_\nu(zx)\big)v_1(x)\,dx \\ &\quad + Y_\nu(z)\int_0^1 x\big(-2J_{\nu-1}(zx)J_\nu(zx)\big)v_1(x)\,dx = 0\,, \end{aligned} \quad (5.10)$$

并且这个恒等式可推广到所有 $z \in \mathbb{C}^*$。

现在，我们使用 Serier 引入的向量函数：

$$\Phi_\kappa(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{\kappa,1}(x) \\ \Phi_{\kappa,2}(x) \end{pmatrix} = \frac{\pi x}{2} \begin{pmatrix} -2\, J_{\nu-1}(x)\, J_\nu(x) \\ J_\nu(x)^2 - J_{\nu-1}(x)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_\kappa(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{\kappa,1}(x) \\ \Psi_{\kappa,2}(x) \end{pmatrix} = \frac{\pi x}{2} \begin{pmatrix} J_{\nu-1}(x)Y_\nu(x) + J_\nu(x)Y_{\nu-1}(x) \\ J_{\nu-1}(x)Y_{\nu-1}(x) - J_\nu(x)Y_\nu(x) \end{pmatrix},$$

其中 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$。采用这一记号，前面的计算可概括为以下命题。

命题 5.1. 设(v_1, v_2) 满足线性化谱条件(5.1)–(5.2) 以及约束(5.3)。则以下结论成立。

1. 函数 v_1 满足

$$\int_0^1 (1 - 2x^{2\nu})\, v_1(x)\, dx = 0\,. \tag{5.11}$$

此外，对所有 $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\int_0^1 \left[J_\nu(z)\, \Psi_{\kappa,1}(zx) + Y_\nu(z)\, \Phi_{\kappa,1}(zx) \right] v_1(x)\, dx = 0\,. \tag{5.12}$$

2. 对所有 $z \in \mathbb{C}^*$，函数 v_2 满足

$$\int_0^1 \left[J_\nu(z)\, \Psi_{\kappa,2}(zx) + Y_\nu(z)\, \Phi_{\kappa,2}(zx) \right] v_2(x)\, dx = 0\,. \tag{5.13}$$

5.2 一个初步的单射性结果

我们在上一小节中看到，线性化条件蕴含积分约束

$$\int_0^1 \left(1 - 2x^{2\nu}\right) v_1(x)\, dx = 0\,, \qquad \nu = \kappa + \frac{1}{2}, \tag{5.14}$$

而零特征值的存在还带来以下限制（见（3.10））

$$\int_0^1 x^{2\nu-1}\, v_2(x)\, dx = 0\,. \tag{5.15}$$

我们在 AKNS 框架下关于弗雷歇微分的第一个单射性结果，基于经典的闵茨–萨斯定理 [24, 25, 34]。

定理 5.2. 设$(v_1, v_2) \in L^2(0,1)^2$ 是一个满足 *AKNS* 线性化约束(5.14)–(5.15) 的实值向量函数，对应于一个无限递增序列 $\{\kappa_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}^*$，其中 $\nu_k := \kappa_k + \frac{1}{2}$. 此外，假设

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_k} = +\infty\,.$$

那么，$(v_1, v_2) = (0,0)$ 在$(0, 1)$ 上几乎处处成立。

证明。 由恒等式

$$\int_0^1 \left(1 - 2x^{2\nu_k}\right) v_1(x)\, dx = 0\,, \tag{5.16}$$

令 $k \to \infty$ ，可得

$$\int_0^1 v_1(x)\, dx = 0\,.$$

将其代回 (5.16)，得到矩恒等式

$$\int_0^1 x^{2\nu_k}\, v_1(x)\, dx = 0\,, \qquad \text{for all } k \geq 1\,.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_k} = +\infty\,,$$

经典 Müntz-Szász定理适用于 (0，1) 上的函数族 $\{x^{2\nu_k}\}_{k\geq 1}$，并推出

$$v_1 = 0 \quad \text{almost everywhere on } (0,1)\,.$$

对 v_2 的论证完全相同，只需使用约束 (5.15)。因此，$(v_1,\ v_2) = (0,\ 0)$ 几乎处处成立，从而完成证明。 □

5.3 变换算子与格林恒等式

我们回顾 Serier 工作中引入的变换算子的定义。这类算子最早出现在 Guillot 和 Ralston 的开创性论文中 [16] ，与径向薛定谔算子的逆谱问题（ $\kappa = 1$ 的情形）有关。随后，Rundell 和 Sacks 将其推广到一般整数κ 情形 [29], ，并在 [31]中进一步加以改进。

在 AKNS 框架中，Serier 构造了适用于一阶矩阵结构的类似算子。与薛定谔情形相比，一个关键区别在于，逆算子的结构更为有利。
在本小节中，我们始终使用上一节引入的向量值函数 Φ_κ 和 Ψ_κ ，并沿用记号

$$\Phi_\kappa(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{\kappa,1}(x) \\ \Phi_{\kappa,2}(x) \end{pmatrix}\,, \qquad \Psi_\kappa(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{\kappa,1}(x) \\ \Psi_{\kappa,2}(x) \end{pmatrix}\,.$$

下一个引理取自 [32] ，对于分析 AKNS 框架中的反问题至关重要。首先，给出一些记号[4]。

记号 5.1. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 U_n 和 V_n 定义如下

$$U_n(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V_n(x) = \begin{bmatrix} x^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad x \in [0,1]\,.$$

[4]我们采用 Serier 引入的相同记号 [32] .

引理 5.3。 对于每个 $\kappa \in \mathbb{N}$，定义算子

$$S_{\kappa+1}:\ L^2(0,1)^2 \longrightarrow L^2(0,1)^2\,, \qquad S_{\kappa+1}[p,q] := \big(S_{\kappa,1}[p],\, S_{\kappa,2}[q]\big)\,,$$

其中

$$S_{\kappa,1}[p](x) = p(x) - 2(2\kappa+1)x^{2\kappa}\int_x^1 \frac{p(t)}{t^{2\kappa+1}}dt\,, \qquad S_{\kappa,2}[q](x) = q(x) - 2(2\kappa+1)x^{2\kappa+1}\int_x^1 \frac{q(t)}{t^{2\kappa+2}}dt\,.$$

我们还定义 $S_0 :=\mathrm{Id}$。这些算子 $\{S_\kappa\}_{\kappa\geq 0}$ 满足:

(i) 伴随算子由下式给出

$$S^*_{\kappa+1}[f,g] = \big(S^*_{\kappa,1}[f],\, S^*_{\kappa,2}[g]\big)\,,$$

with

$$S^*_{\kappa,1}[f](x) = f(x) - \frac{2(2\kappa+1)}{x^{2\kappa+1}}\int_0^x t^{2\kappa} f(t)\,dt\,, \qquad S^*_{\kappa,2}[g](x) = g(x) - \frac{2(2\kappa+1)}{x^{2\kappa+2}}\int_0^x t^{2\kappa+1} g(t)\,dt\,.$$

(ii) 这一族 $\{S_\kappa\}$ 满足交换律:

$$S_\kappa S_m = S_m S_\kappa \qquad \forall\,\kappa, m \in \mathbb{N}\,.$$

(iii) 每个 S_κ 在 $L^2(0,1)^2$ 上有界。

(iv) 令 $N_{\kappa+1} :=\ker S^*_{\kappa+1}$，则有

$$N_{\kappa+1} = \mathrm{Vect}(U_{2\kappa},\, V_{2\kappa+1})\,.$$

(v) $S_{\kappa+1}$ 是从 $L^2(0,\ 1)^2$ 到 $N^\perp_{\kappa+1}$的同构，其逆算子为

$$A_{\kappa+1}[f,g] := \big(S^*_{\kappa,2}[f],\, S^*_{\kappa,1}[g]\big)\,.$$

(vi) 函数 Φ_κ 和 Ψ_κ 满足约化关系

$$\Phi_{\kappa+1} = -S^*_{\kappa+1}[\Phi_\kappa]\,, \qquad \Psi_{\kappa+1} = -S^*_{\kappa+1}[\Psi_\kappa]\,.$$

我们还需要以下补充结果，它与 [29]中的引理 3.4 类似。

引理 5.4。 设 $\kappa \geq 0$，且 f、$g \in L^2(0,\ 1)$。则:

1. 若 $g = S_{\kappa,\ 1}[f]$，则在 $(0,\ 1)$ 上的分布意义下，

$$g^{(2\kappa+1)}(x) = \frac{4\kappa+2}{x}\,f^{(2\kappa)}(x) + f^{(2\kappa+1)}(x)\,. \tag{5.17}$$

2. 若 $g = S_{\kappa,2}[f]$，则在 $(0,\ 1)$ 上的分布意义下，

$$g^{(2\kappa+2)}(x) = \frac{4\kappa+2}{x}\,f^{(2\kappa+1)}(x) + f^{(2\kappa+2)}(x)\,. \tag{5.18}$$

证明。 我们调整 [29]对第一个恒等式 (5.17) 的论证。从

$$g(x) = f(x) - 2(2\kappa+1)\, x^{2\kappa} \int_x^1 s^{-2\kappa-1} f(s)\, ds\,, \tag{5.19}$$

求导一次即可得到

$$g'(x) = f'(x) - 4\kappa(2\kappa+1)\, x^{2\kappa-1} \int_x^1 s^{-2\kappa-1} f(s)\, ds + \frac{2(2\kappa+1)}{x} f(x)\,. \tag{5.20}$$

为消去积分项，考虑

$$2\kappa\,(5.19) \;-\; x(5.20)\,,$$

由此得到

$$2\kappa g(x) - x g'(x) = -(2\kappa+2) f(x) - x f'(x)\,.$$

再求导一次,

$$(2\kappa-1) g'(x) - x g''(x) = -(2\kappa+3) f'(x) - x f''(x)\,,$$

重复此过程 k 次，可得

$$(2\kappa-k)\, g^{(k)}(x) - x g^{(k+1)}(x) = -(2\kappa+k+2)\, f^{(k)}(x) - x f^{(k+1)}(x)\,.$$

令 $k \quad = 2\kappa$ 并除以 x ，恰好得到 (5.17)。(5.18) 的证明完全类似 s. □

现在考虑复合算子 T_κ，它由指标约化算子S_1、.....、 S_κ 复合而成，可将贝塞尔核变为三角函数核。

引理 5.5。 对每个 $\kappa \in \mathbb{N}$，定义

$$T_\kappa = (-1)^{\kappa+1} S_\kappa S_{\kappa-1} \cdots S_1\,, \qquad T_0 := -S_0\,.$$

记为 $T_\kappa[p,q] = (T_\kappa^1[p], T_\kappa^2[q])$。则:

(i) T_κ 有界且为单射，并且对所有 p、 q 以及所有 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^1 \Phi_\kappa(\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(2\lambda t) \\ \cos(2\lambda t) \end{pmatrix} \cdot T_\kappa[p,q](t)\, dt\,,$$

$$\int_0^1 \Psi_\kappa(\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) \\ -\sin(2\lambda t) \end{pmatrix} \cdot T_\kappa[p,q](t)\, dt\,.$$

(*ii*) 伴随算子 T_κ^* 满足

$$\Phi_\kappa(\lambda x) = T_\kappa^* \begin{pmatrix} \sin(2\lambda\cdot) \\ \cos(2\lambda\cdot) \end{pmatrix}(x), \qquad \Psi_\kappa(\lambda x) = T_\kappa^* \begin{pmatrix} \cos(2\lambda\cdot) \\ -\sin(2\lambda\cdot) \end{pmatrix}(x).$$

and

$$\ker T_\kappa^* = \bigoplus_{k=1}^{\kappa} N_k\,.$$

（*iii*） T_κ 将 L^2（0，1）^{2} 映射到 $\big(\bigoplus_{k=1}^{\kappa} N_k\big)^{\perp}$上构成同构，其逆算子为

$$B_\kappa[f,g] = \big((T_\kappa^2)^*[f],\,(T_\kappa^1)^*[g]\big)\,.$$

注记 5.6. 例如，在引理 *5.5(i)* 中取$(p,q) = (p,0)$，可得对任意 p 和任意 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^1 \Phi_{\kappa,1}(\lambda t)\,p(t)\,dt = \int_0^1 \sin(2\lambda t)\,T_\kappa^1(p)(t)\,dt\,.$$

现在应用引理 5.5(i)。利用经典恒等式

$$Y_\nu(x) = (-1)^{\,\kappa+1}\,J_{-\nu}(x)\,,$$

命题 5.1 可改写为以下等价形式：对所有 $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \Big[J_\nu(z)\cos(2zx)\,T_\kappa^1[v_1](x) + (-1)^{\kappa+1}J_{-\nu}(z)\sin(2zx)\,T_\kappa^1[v_1](x)\Big]\,dx = 0\,, \\ \displaystyle\int_0^1 \Big[-J_\nu(z)\sin(2zx)\,T_\kappa^2[v_2](x) + (-1)^{\kappa+1}J_{-\nu}(z)\cos(2zx)\,T_\kappa^2[v_2](x)\Big]\,dx = 0\,. \end{cases} \tag{5.21}$$

为后续使用，我们回顾半整数阶贝塞尔函数的显式公式，以及 [6, 10.1.19–20] 中引入的相关多项式。当 $\kappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$ 且 $z \in \mathbb{C}$ 时，有经典表示式

$$J_{\kappa+\frac12}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\Big(P_\kappa\big(\tfrac1z\big)\,\sin z \;-\; Q_{\kappa-1}\big(\tfrac1z\big)\,\cos z\Big)\,, \tag{5.22}$$

$$J_{-\kappa-\frac12}(z) = (-1)^\kappa\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\Big(P_\kappa\big(\tfrac1z\big)\,\cos z \;+\; Q_{\kappa-1}\big(\tfrac1z\big)\,\sin z\Big)\,. \tag{5.23}$$

Th多项式 P_κ 和 Q_κ 均为 κ 次，由三项递推关系生成 s

$$P_{\kappa+1}(t) = (2\kappa+1)\,t\,P_\kappa(t) - P_{\kappa-1}(t)\,, \qquad \kappa \ge 1\,, \tag{5.24}$$

$$Q_{\kappa+1}(t) = (2\kappa+3)\,t\,Q_\kappa(t) - Q_{\kappa-1}(t)\,, \qquad \kappa \ge 0\,, \tag{5.25}$$

初始值为

$$P_0(t) = 1\,, \qquad P_1(t) = t\,, \qquad Q_{-1}(t) = 0\,, \qquad Q_0(t) = 1\,.$$

注意， P_κ 和 $\mathbf{v_2}$ 继承了 κ 的奇偶性：当 κ 为偶函数时，它们是偶函数；当 κ 为奇函数时，它们是奇函数。

举例来说，最低的半整数阶给出

$$J_{\frac12}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z\,, \qquad J_{-\frac12}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z\,. \tag{5.26}$$

下一对为

$$J_{\frac32}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big(\frac{\sin z}{z} - \cos z\Big)\,, \qquad J_{-\frac32}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big(-\frac{\cos z}{z} - \sin z\Big)\,. \tag{5.27}$$

利用递推关系，前几个多项式为

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1\,, & Q_{-1}(t) &= 0\,,\\ P_1(t) &= t\,, & Q_0(t) &= 1\,,\\ P_2(t) &= 3t^2-1\,, & Q_1(t) &= 3t\,,\\ P_3(t) &= 15t^3-6t\,, & Q_2(t) &= 15t^2-1\,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

汇总前述恒等式，我们得到以下命题。

命题 5.7。假设对于 $\kappa\in\mathbb{N}$，

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=0\,,\qquad \textit{for all } n\in\mathbb{Z}\,.$$

那么，对于任意 $z\in\mathbb{C}$ 以及任意整数 $\kappa\geq 0$，可得以下恒等式：对于所有 $z\in\mathbb{C}^*$，

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \Big[\Big(P_\kappa\big(\tfrac{1}{z}\big)\,\sin\big(z(2x-1)\big)+Q_{\kappa-1}\big(\tfrac{1}{z}\big)\,\cos\big(z(2x-1)\big)\Big)\,T_\kappa^1[v_1](x)\Big]\,dx=0,\\[2ex] \displaystyle\int_0^1 \Big[\Big(P_\kappa\big(\tfrac{1}{z}\big)\,\cos\big(z(2x-1)\big)-Q_{\kappa-1}\big(\tfrac{1}{z}\big)\,\sin\big(z(2x-1)\big)\Big)\,T_\kappa^2[v_2](x)\Big]\,dx=0. \end{cases} \tag{5.29}$$

证明。该恒等式可由 (5.21) 与半整数表示 (5.22)- (5.23) 直接推出，只需利用初等三角关系重写贝塞尔函数的乘积。 □

现在我们递归定义多项式序列 $\{A_\kappa(t)\}_{\kappa\in\mathbb{N}}$：

$$A_0(t)=1,\qquad A_1(t)=1-\frac{t}{2}\,,$$

并且，对于所有 $\kappa\geq 1$，

$$A_{\kappa+1}(t)=(2\kappa+1)\,A_\kappa(t)+\frac{t^2}{4}\,A_{\kappa-1}(t)\,.$$

注 5.8。 A_1 之后序列中的首批多项式可明确写为

$$A_2(t)=\tfrac{1}{4}t^2-\tfrac{3}{2}t+3\,,\qquad A_3(t)=-\tfrac{1}{8}t^3+\tfrac{3}{2}t^2-\tfrac{15}{2}t+15\,.$$

方程组 (5.29) 的第二个方程与 [14, 命题 5.1][5] 中已经研究过的方程一致。因此，我们可以直接应用 [14, 定理 6.6]。方程组 (5.29) 的第一个方程也可以用同样的方法处理，只需紧随 [14, 定理 6.6] 的证明。由此得到以下结果，其中 $D=\frac{d}{dx}\circ$

定理 5.9。 设 $(v_1,v_2)\in L^2(0,1)^2$。假设对于某个 $\kappa\in\mathbb{N}$，

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=0,\qquad \textit{for all } n\in\mathbb{Z}.$$

那么，在分布的意义下，函数

$$A_\kappa(D)\big[T_\kappa^j[v_j]\big],\qquad j\in\{1,2\},$$

关于中点 $x=\frac{1}{2}$，当 $j=1$ 时为偶函数，当 $j=2$ 时为奇函数。 –

[5]在 $q=-m$ 的情形下，其中 m 是一个解释为质量的常数，AKNS 系统与一个标量薛定谔方程密切相关（参见本文的 [3, 式 (1.4)] 和附录 A（开放问题））。因此，分析可归结为一个已在 [14] 中研究过的二阶薛定谔型问题。

6 弗雷歇微分的核

6.1 对于配对 $(\kappa_1,\kappa_2)=(0,1)$，微分的单射性

在本小节中　上，我们假设扰动（v_1，v_2）满足线性化谱条件

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2)=0\,,\qquad n\in\mathbb{Z},$$

对于两个有效角动量 $\kappa=0$ 和 $\mathbf{v_2}$，即 $\kappa=1$。

对于 $\kappa=0$，我们已经知道 v_1 是关于 $x=\frac{1}{2}$ 的偶函数，而 v_2 是奇函数。现在我们对$\kappa=1$应用定理 5.9，由此可得，对于 $j=1$，$A_1(D)\big[T_1^j[v_j]\big]$ 是偶函数；对于 $j=2$，它是奇函数，二者都相对于同一个中点。

我们从较简单的情形 $j=2$开始。直接计算可得

$$2A_1(D)\big[T_1^2[v_2]\big](x)=2A_1(D)\big[S_{0,2}[v_2]\big](x)=-v_2'(x)+\Big(2-\frac{2}{x}\Big)\,v_2(x)-(4x-2)\int_x^1\frac{v_2(t)}{t^2}\,dt\,.\tag{6.1}$$

令 $y(x):=v_2'(x)$，并在 $x=\frac{1}{2}$ 处计算（6.1），得到 $y(\frac{1}{2})=0$，因为 v_2 是奇函数。进一步计算

$$\begin{aligned}G(x)&:=D^2A_1(D)\big[T_1^2[v_2]\big](x)\\&=A_1(D)\big[D^2(S_{0,2}[v_2])\big](x)\\&=A_1(D)\big[\tfrac{2}{x}y+y'\big](x)\\&=-\tfrac{1}{2}y''(x)+\Big(1-\frac{1}{x}\Big)y'(x)+\Big(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)y(x)\,.\end{aligned}\tag{6.2}$$

wh第三行中我们使用了引理 5.4（2）。回想 G 是奇函数，恒等式

$$G(x)+G(1-x)=0\,,$$

对所有 $x\in(0,1)$ 都成立。由于 y 是偶函数，此恒等式表明 y 在 $(0,1)$ 上满足一个线性二阶微分方程，并满足条件

$$y\big(\tfrac{1}{2}\big)=0\,,\qquad y'\big(\tfrac{1}{2}\big)=0\,.$$

由柯西–利普希茨定理，我们得出 $y\equiv0$。因此 $v_2'=y=0$，所以 v_2 是常数。由于 v_2 关于 $x=\frac{1}{2}$ 为奇函数，该常数必为零，因此 $v_2\equiv0$。

现在　我们考察 $j=1$ 的情形。利用引理 5.4（1），经过直接计算可得　　s

$$G(x):=DA_1(D)\big[T_1^1[v_1]\big](x)=-\tfrac{1}{2}v_1''(x)+\Big(1-\frac{1}{x}\Big)v_1'(x)+\Big(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)v_1(x)\,.\tag{6.3}$$

函数 G 是奇函数。将 $G(x)+G(1-x)=0$ 代入，并利用 v_1 是偶函数这一事实，我们推知 v_1在 $(0,1)$ 上满足以下二阶线性常微分方程:

$$v_1''(x)+\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\Big)v_1'(x)-\Big(\frac{2}{x}+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\Big)v_1(x)=0\,,\qquad x\in(0,1)\,.\tag{6.4}$$

现在假设方程 (6.4) 存在一个关于中点 v_1 对称的解 $\{\mathbf{v_2}\}$，并施加归一化条件　–

$$v_1\big(\tfrac{1}{2}\big)=1\,,\qquad v_1'\big(\tfrac{1}{2}\big)=0\,.$$

利用 Mathematica，我们得到如下显式闭式表达式

$$v_1(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) - 1\,, \qquad x \in (0,1)\,. \tag{6.5}$$

特别地，v_1 当 $x \to 0^+$ 时按 $\frac{1}{2x}$ 的速度发散，因此不属于 $L^2(0,1)$。由此可知必有 $v_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，而柯西–利普希茨定理进而推出，在 $(0,1)$ 上 $v_1 \equiv 0$。

结合两种情形 $j = 1$ 和 $j = 2$ 的结论，我们得到

$$(v_1, v_2) = (0,0).$$

因此，对于有效角动量 $(\kappa_1, \kappa_2) = (0,1)$，零势处谱映射的弗雷歇微分的核是平凡的。由此我们证明了以下结果。

定理 6.1 (关于该对的单射性 $(0,1)$)。 对于 $(\kappa_1, \kappa_2) = (0,1)$，谱映射的弗雷歇微分

$$D_{(p,q)}\mathcal{S}_{0,1}(0,0) : L^2(0,1) \times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$$

是单射。

6.2 对 $(\kappa_1, \kappa_2) = (0, 2)$ 的微分的单射性

在本小节中，我们始终假设扰动 (v_1, v_2) 满足线性化谱约束

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0) \cdot (v_1, v_2) = 0\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

对有效角动量 $\kappa = 0$ 和 v_2 同时成立。

对于 $\kappa = 0$，与之前一样，v_1 关于中点 $x = \frac{1}{2}$ 是偶函数，而 v_2 是奇函数。 –

现在来考察 $\kappa = 2$ 的情形。根据定理 5.9，并令 $w_j := T_2^j[v_j]$, $j = 1,2$，我们有

$$A_2(D)\left[w_j\right] \quad \text{is even if } j = 1\,, \text{ and odd if } j = 2\,. \tag{6.6}$$

这里 $A_2(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + 3$ 和 $D = \frac{d}{dx}$。

我们首先研究情形 $j = 2$。引入以下记号。令 $f = S_{0,\,2}[v_2]$，使得 $w_2 = -S_{1,\,2}[f]$。将 (6.6) 求导四次，并应用引理 5.4（2），其中 $\kappa = 1$，得到

$$A_2(D)\left(f^{(4)}(x) + \frac{6}{x}f^{(3)}(x)\right) \quad \text{is odd.} \tag{6.7}$$

另一方面，由于 $f = S_{0,\,2}[v_2]$，再次应用引理 5.4（2），此时取 $\kappa = 0$，可得

$$f''(x) = \frac{2}{x}\,v_2'(x) + v_2''(x)\,. \tag{6.8}$$

令 $y(x) := v_2'(x)$（这是偶函数），化简后得到

$$\begin{aligned} G(x) &:= 4A_2(D)\left(f^{(4)}(x) + \frac{6}{x} f^{(3)}(x)\right) \\ &= y^{(5)}(x) + \left(\frac{8}{x} - 6\right) y^{(4)}(x) + \left(12 - \frac{48}{x} - \frac{8}{x^2}\right) y^{(3)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{96}{x} - \frac{24}{x^3}\right) y''(x) + \left(\frac{96}{x^2} + \frac{144}{x^3} + \frac{96}{x^4}\right) y'(x) \\ &\quad + \left(-\frac{96}{x^3} - \frac{144}{x^4} - \frac{96}{x^5}\right) y(x)\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

由于 (6.6) 断言 $A_2(D)[w_2]$ 为奇函数，而求导四次不会改变奇偶性，因此我们得出 $G(x)$ 本身为奇函数。令 $G(x) + G(1-x) = 0$，并利用 y 为偶函数这一事实，可知 y 满足一个四阶线性微分方程。我们记为

$$v_2(x) := \int_{1/2}^{x} y(t)\,dt \tag{6.10}$$

$y(x)$ 的唯一奇原函数。直接计算可得以下表达式：

$$w_2(x) = T_2^2[v_2](x) = -\,S_{1,2}\big[S_{0,2}[v_2]\big](x) = -\,v_2(x) - 4x\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^2}\,dt + 12x^3\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\,dt\,. \tag{6.11}$$

将微分算子 $4A_2(D) = D^2 - 6D + 12$ 作用于 $w_2(x)$，得到

$$\begin{aligned} 4A_2(D)\big[w_2\big](x) = &-\,v_2''(x) + \Big(6 - \frac{8}{x}\Big)v_2'(x) + \Big(-12 + \frac{48}{x} - \frac{24}{x^2}\Big)v_2(x) \\ &+ \big(24 - 48x\big)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^2}\,dt \\ &+ \big(72x - 216x^2 + 144x^3\big)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

在 $x = \frac{1}{2}$ 处计算此表达式，并利用 v_2 为奇函数这一事实，得到

$$4A_2(D)\big[w_2\big]\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\,v_2''\big(\tfrac{1}{2}\big) - 10\,v_2'\big(\tfrac{1}{2}\big) - 12\,v_2\big(\tfrac{1}{2}\big) = -10\,y\big(\tfrac{1}{2}\big)\,. \tag{6.13}$$

由于 $4A_2(D)\big[w_2\big](x)$ 为奇函数，因此我们得出 $y\big(\frac{1}{2}\big) = 0$。

以相同的方式继续，我们计算

$$\begin{aligned} 4\,D^2A_2(D)\big[w_2\big](x) = &-\,v_2^{(4)}(x) + \Big(6 - \frac{8}{x}\Big)v_2^{(3)}(x) + \Big(-12 + \frac{48}{x} - \frac{8}{x^2}\Big)v_2''(x) \\ &+ \Big(-\frac{96}{x} + \frac{96}{x^2} + \frac{8}{x^3}\Big)v_2'(x) + \Big(-\frac{288}{x^2} + \frac{144}{x^3}\Big)v_2(x) \\ &+ \big(-432 + 864x\big)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

回想一下， $y(x) = v_2'(x)$ 是偶函数，且 $y\big(\frac{1}{2}\big) = 0$，我们在 $x = \frac{1}{2}$ 处求值并得到

$$4\,D^2A_2(D)\big[w_2\big]\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\,y^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) - 10\,y''\big(\tfrac{1}{2}\big) + 52\,y'\big(\tfrac{1}{2}\big) + 256\,y\big(\tfrac{1}{2}\big) = -10\,y''\big(\tfrac{1}{2}\big)\ .$$

由于 $4\,D^2A_2(D)\big[w_2\big](x)$ 也是奇函数，我们如上所述得出 $y''\big(\frac{1}{2}\big) = 0$。总之， y 满足一个四阶线性微分方程，其初始条件为

$$y\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,, \qquad y'\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,, \qquad y''\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,, \qquad y^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,. \tag{6.15}$$

于是，柯西–利普希茨定理推出 $y \equiv 0$。由于 $y = v_2'$ 和 v_2 是奇函数，这又迫使$v_2 \equiv 0$。

现在我们转而分析 $j = 1$ 的情形。在这种情况下， $A_2(D)\,[w_1]$ 是偶函数。
我们引入

$$w_1(x) := -S_{1,1}\big[S_{0,1}[v_1]\big](x) = -\,v_1(x) - 4\int_x^1 \frac{v_1(t)}{t}\,dt + 12x^2\int_x^1 \frac{v_1(t)}{t^3}\,dt\,.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} DA_2(D)[w_1](x) = -\frac{1}{4}\,v_1^{(3)}(x) + \Big(\frac{3}{2} - \frac{2}{x}\Big)v_1''(x) + \Big(\frac{12}{x} - \frac{2}{x^2} - 3\Big)v_1'(x) \\ + \Big(\frac{2}{x^3} + \frac{24}{x^2} - \frac{24}{x}\Big)v_1(x) + 36(2x-1)\int_x^1 \frac{v_1(t)}{t^3}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

函数 $DA_2(D)[w_1]$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为奇函数。此外，在 $\kappa = 0$ 的情形下，我们回顾一下， v_1是偶函数。在 $x = \frac{1}{2}$ 处对 (6.16) 求值，得 $v_1'(\frac{1}{2}) = v_1^{(3)}(\frac{1}{2}) = 0$，且积分项消失，因为$2x - 1 = 0$。因此，

$$64\,v_1\big(\tfrac{1}{2}\big) - \frac{5}{2}\,v_1''\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,. \tag{6.17}$$

现在，按照通常的约定，我们引入

$$f = S_{0,1}[v_1]\,, \qquad \text{so that} \qquad w_1 = -\,S_{1,1}[f]\,.$$

在对其求三次导数 $A_2(D)\,[w_1]$ 并结合引理 5.4 (1)（取 $\kappa = 1$）后，我们得到

$$A_2(D)\bigg(f^{(3)}(x) + \frac{6}{x}f^{(2)}(x)\bigg) \quad \text{is odd.} \tag{6.18}$$

另一方面，由于 $f = S_{0,\,1}[v_1]$，再次应用引理 5.4 (1)，这次取 $\kappa = 0$，可得

$$f'(x) = \frac{2}{x}\,v_1(x) + v_1'(x)\,. \tag{6.19}$$

设定

$$G(x) := 4A_2(D)\bigg(f^{(3)}(x) + \frac{6}{x}f^{(2)}(x)\bigg)\,,$$

经过直接化简，得到如下微分表达式：

$$\begin{aligned} G(x) = v_1^{(5)}(x) &+ \Big(\frac{8}{x} - 6\Big) v_1^{(4)}(x) + \Big(-\frac{8}{x^2} - \frac{48}{x} + 12\Big) v_1^{(3)}(x) \\ &+ \Big(-\frac{24}{x^3} + \frac{96}{x}\Big) v_1''(x) + \Big(\frac{96}{x^4} + \frac{144}{x^3} + \frac{96}{x^2}\Big) v_1'(x) \\ &+ \Big(-\frac{96}{x^5} - \frac{144}{x^4} - \frac{96}{x^3}\Big) v_1(x)\,. \end{aligned}$$

因此，我们得到与前一种情形（其中 v_1 为偶函数）完全相同的奇函数 $G(x)$。令 $G(x) + G(1-x) = 0$，则有：

$$\begin{aligned} &\left(\frac{8}{x} + \frac{8}{1-x} - 12\right) v_1^{(4)}(x) \\ &+ \left(-\frac{8}{x^2} + \frac{8}{(1-x)^2} - \frac{48}{x} + \frac{48}{1-x}\right) v_1^{(3)}(x) \\ &+ \left(-\frac{24}{x^3} - \frac{24}{(1-x)^3} + \frac{96}{x} + \frac{96}{1-x}\right) v_1''(x) \\ &+ \left(\frac{96}{x^4} - \frac{96}{(1-x)^4} + \frac{144}{x^3} - \frac{144}{(1-x)^3} + \frac{96}{x^2} - \frac{96}{(1-x)^2}\right) v_1'(x) \\ &+ \left(-\frac{96}{x^5} - \frac{96}{(1-x)^5} - \frac{144}{x^4} - \frac{144}{(1-x)^4} - \frac{96}{x^3} - \frac{96}{(1-x)^3}\right) v_1(x) = 0\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

指标根与解的确定。使用 Mathematica，我们计算了方程 (6.20) 在奇点 $x = 0$ 处的指标方程。由此得到

$$8(\rho - 4)(\rho - 3)(\rho - 1)(\rho + 1) = 0\,,$$

因此，指标根为

$$\rho \in \{-1,\, 1,\, 3,\, 4\}\,.$$

现在我们来寻找满足归一化条件的方程 (6.20) 的解

$$v_1\big(\tfrac{1}{2}\big) = 1\,.$$

由于 v_1 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是偶函数，我们有

$$v_1'\big(\tfrac{1}{2}\big) = v_1^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,,$$

并且，由（6.17）可得

$$v_1''\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{128}{5}\,.$$

根据柯西–利普希茨定理，这些条件唯一确定了区间 (0,1) 上的一个解。利用 Mathematica，我们得到以下显式表达式：

$$v_1(x) = \frac{5}{3} - \frac{5}{8x} - \frac{5}{8(1-x)} - \frac{15}{8\,(2-3x+3x^2)} + \frac{25}{12\,(2-3x+3x^2)^2}\,. \tag{6.21}$$

该解在边界处呈现不可积的爆破。特别是，

$$v_1 \notin L^2(0,1)\,.$$

我们由此推得，必须施加

$$v_1\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,.$$

于是， v_1 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的所有三阶及以下导数均为零。由柯西问题解的唯一性可知，这意味着

$$v_1 \equiv 0 \qquad \text{on } (0,1)\,.$$

因此，我们在 (0，2) 的情形下得到了以下单射性结果：

定理 6.2 （关于$(0,2)$这一对的单射性**：** 对于（κ_1, κ_2）$=(0,2)$，谱映射的弗雷歇微分

$$D_{(p,q)}\mathcal{S}_{0,2}(0,0) \,:\, L^2(0,1)\times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$$

是单射。

6.3 对偶 (κ₁, κ₂) = (1, 2) 的微分的单射性

在本小节中，我们假设 $(v_1,\ v_2) \in L^2(0,\ 1)^2$ 满足线性化谱条件

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2) = 0\,, \qquad n\in\mathbb{Z},$$

对有效角动量 $\kappa = 1$ 和 $\kappa = 2$均成立。
应用定理 5.9，取 $\kappa = 1$ 和 $\kappa = 2$，可得 $A_\kappa(D)\big[T^j_\kappa[v_j]\big]$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 在 $j = 1$ 时为偶函数，在 $j = 2$时为奇函数。

We 首先考虑 $j = 2$ 且 $\kappa = 1$ 的情形。令 $f = S_{0,\ 2}[v_2]$。直接计算可得

$$2A_1(D)\big[T_1^2[v_2]\big](x) = 2A_1(D)\big[S_{0,2}[v_2]\big](x) = 2A_1(D)[f](x) = -f'(x) + 2f(x)\,. \tag{6.22}$$

将 f 分解为偶部和奇部，

$$f = f_e + f_o\,, \tag{6.23}$$

其中， f_e 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为偶函数， f_o 关于 $x = \frac{1}{2}$ 为奇函数，由此立即得到

$$f_e = \frac{1}{2}\,f_o'\,, \tag{6.24}$$

由于函数 $-f_o' + 2f_e$ 既是偶函数又是奇函数，因此

$$f = \frac{1}{2}\,f_o' + f_o\,. \tag{6.25}$$

现在我们利用 $\kappa = 2$ 这一情形。定义

$$g := S_{1,2}[f] = f(x) - 6x^3 \int_x^1 \frac{f(t)}{t^4}\, dt,$$

从而 $g = -T_2^2[v_2]$。根据假设，$A_2(D)\big[T_2^2[v_2]\big]$ 在分布意义下是奇函数，其中

$$A_2(t) = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{3}{2}t + 3\,.$$

直接计算可得

$$4A_2(D)[g](x) = f''(x) + 6\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)f'(x) + \Big(\frac{12}{x^2} - \frac{36}{x} + 12\Big)f(x) - 36x(1-x)(1-2x)\int_x^1 \frac{f(t)}{t^4}\, dt\,. \tag{6.26}$$

由于 $4A_2(D)[g]$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是奇函数，在 $x = \frac{1}{2}$ 处对 (6.26) 求值得

$$f''\big(\tfrac{1}{2}\big) + 6f'\big(\tfrac{1}{2}\big) - 12f\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,.$$

利用分解 $f = \frac{1}{2}f_o' + f_o$，其中 f_o 是奇函数，可得

$$f_o^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,. \tag{6.27}$$

类似地，对 (6.26) 求导两次可得

$$\begin{aligned} D^2\big(4A_2(D)[g]\big)(x) = {} & f^{(4)}(x) + 6\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)f^{(3)}(x) + \Big(12 - \frac{36}{x}\Big)f''(x) \\ & + \Big(\frac{72}{x} - \frac{36}{x^2}\Big)f'(x) + \Big(\frac{144}{x^2} - \frac{72}{x^3}\Big)f(x) \\ & + 216(1-2x)\int_x^1 \frac{f(t)}{t^4}\, dt\,. \end{aligned} \tag{6.28}$$

将恒等式 (6.28) 代入 $x = \frac{1}{2}$ 可得

$$f_o^{(5)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 48\, f_o^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,. \tag{6.29}$$

最后，通过类似的计算可得

$$\begin{aligned} G(x) := D^4\big(4A_2(D)[g]\big)(x) = {} & f^{(6)}(x) + 6\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)f^{(5)}(x) \\ & + \Big(12 - \frac{36}{x} - \frac{12}{x^2}\Big)f^{(4)}(x) + \Big(\frac{72}{x} + \frac{36}{x^2} + \frac{12}{x^3}\Big)f^{(3)}(x)\,. \end{aligned} \tag{6.30}$$

代入 $f = \frac{1}{2}f_o' + f_o$，得到

$$\begin{aligned} G(x) = {} & \frac{1}{2}\, f_o^{(7)}(x) + \Big(\frac{3}{x} - 2\Big)f_o^{(6)}(x) \\ & - \Big(\frac{12}{x} + \frac{6}{x^2}\Big)f_o^{(5)}(x) + \Big(12 + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3}\Big)f_o^{(4)}(x) \\ & + \Big(\frac{72}{x} + \frac{36}{x^2} + \frac{12}{x^3}\Big)f_o^{(3)}(x)\,. \end{aligned} \tag{6.31}$$

现在我们使用对称条件 $G(\{\mathrm{v}_2\}) + G(1-x) = 0$。由此得到以下微分方程:

$$\begin{aligned} 0 = {} & f_o^{(7)}(x) + 3\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\Big) f_o^{(6)}(x) \\ & - \Big(\frac{12}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{12}{1-x} + \frac{6}{(1-x)^2}\Big) f_o^{(5)}(x) \\ & + 6\Big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^3}\Big) f_o^{(4)}(x) \\ & + \Big(\frac{72}{x} + \frac{36}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{72}{1-x} + \frac{36}{(1-x)^2} + \frac{12}{(1-x)^3}\Big) f_o^{(3)}(x)\,. \end{aligned} \tag{6.32}$$

最后，引入

$$y(x) = f_o^{(3)}(x)\,,$$

我们得到一个由 y 满足的四阶微分方程。函数 v_2 关于$x = \frac{1}{2}$ 是偶函数，而前述恒等式意味着

$$y^{(k)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

由此，柯西–利普希茨定理可得 $y \equiv 0$。因此， f_o 必为次数至多为二的奇多项式，故其必然具有如下形式

$$f_o(x) = a\,(x - \tfrac{1}{2})\,. \tag{6.33}$$

再次利用关系 $f = \frac{1}{2} f_o' + f_o$，我们推出

$$f(x) = \frac{a}{2} + a\,(x - \tfrac{1}{2}) = a\,x\,. \tag{6.34}$$

由于 $f = S_{0,\ 2}[v_2]$，我们通过应用引理 5.3(v) 中给出的左逆 $S^*_{0,\ 1}$ ，恢复 v_2 ，即

$$v_2(x) = S^*_{0,1}[f](x) = f(x) - \frac{2}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

直接计算可得

$$v_2(x) = 0\,. \tag{6.35}$$

现在考察 $j = 1$的情形。由定理 5.9（取 $\kappa = 1$ and $\kappa = 2$），可知 $A_\kappa(D)\big[T^1_\kappa[v_1]\big]$ 是偶函数。设 $f = S_{0,\ 1}[v_1]$。与 $j = 2$ 的情形一样，对 $\kappa = 1$ 情形的分析可得

$$f = f_e + \frac{1}{2}\, f_e'\,. \tag{6.36}$$

（与前面一样， f_o 表示关于 $x = \frac{1}{2}$ 的 f 的奇部， f_e 表示其偶部。）现在我们利用 $\kappa = 2$这一情形。定义

$$g := S_{1,1}[f] = f(x) - 6x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t^3}\,dt\,,$$

使得 $g = -T_2^1[v_1]$。根据假设， $DA_2(D)\big[T_2^1[v_1]\big]$ 在分布意义下是奇函数。直接计算可得

$$\begin{aligned} 4DA_2(D)[g](x) = f^{(3)}(x) + 6\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)f''(x) + \Big(12 - \frac{36}{x}\Big)f'(x) + \Big(\frac{72}{x} - \frac{36}{x^2}\Big)f(x) \\ + 72(1-2x)\int_x^1 \frac{f(t)}{t^3}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.37}$$

由于 $4DA_2(D)[g]$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是奇函数，在 $x = \frac{1}{2}$ 处对 (6.37) 求值可得 –

$$f_o^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = 48 f_o'\big(\tfrac{1}{2}\big)\ . \tag{6.38}$$

类似地，对 (6.37) 求两次导数可得

$$\begin{aligned} H(x) := 4D^3A_2(D)[g](x) = f^{(5)}(x) + 6\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)f^{(4)}(x) \\ + \Big(12 - \frac{36}{x} - \frac{12}{x^2}\Big)f^{(3)}(x) \\ + \Big(\frac{72}{x} + \frac{36}{x^2} + \frac{12}{x^3}\Big)f''(x)\,. \end{aligned} \tag{6.39}$$

将 $f = f_e + \frac{1}{2}f_e'$ 代入 $H(x)$，并利用关系式 $f_o = \frac{1}{2}f_e'$，我们可以将 H 完全表示为 f_o 的形式。直接计算可得

$$\begin{aligned} H(x) = f_o^{(5)}(x) + \Big(\frac{6}{x} - 4\Big)f_o^{(4)}(x) - \Big(\frac{24}{x} + \frac{12}{x^2}\Big)f_o^{(3)}(x) \\ + \Big(24 + \frac{12}{x^2} + \frac{12}{x^3}\Big)f_o''(x) + \Big(\frac{144}{x} + \frac{72}{x^2} + \frac{24}{x^3}\Big)f_o'(x)\,. \end{aligned} \tag{6.40}$$

现在我们使用对称条件 $H(x) + H(1-x) = 0$。由此得到以下微分方程:

$$\begin{aligned} 0 = 2f_o^{(5)}(x) + \Big(\frac{6}{x} - \frac{6}{1-x}\Big)f_o^{(4)}(x) \\ - \Big(\frac{24}{x} + \frac{24}{1-x} + \frac{12}{x^2} + \frac{12}{(1-x)^2}\Big)f_o^{(3)}(x) \\ + \Big(\frac{12}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{12}{(1-x)^2} - \frac{12}{(1-x)^3}\Big)f_o''(x) \\ + \Big(\frac{144}{x} + \frac{144}{1-x} + \frac{72}{x^2} + \frac{72}{(1-x)^2} + \frac{24}{x^3} + \frac{24}{(1-x)^3}\Big)f_o'(x)\,. \end{aligned} \tag{6.41}$$

最后，引入 $y(x) = f_o'(x)$，我们得到一个由 y 满足的四阶微分方程:

$$\begin{aligned} 0 = 2y^{(4)}(x) + \Big(\frac{6}{x} - \frac{6}{1-x}\Big)y^{(3)}(x) \\ - \Big(\frac{24}{x} + \frac{24}{1-x} + \frac{12}{x^2} + \frac{12}{(1-x)^2}\Big)y''(x) \\ + \Big(\frac{12}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{12}{(1-x)^2} - \frac{12}{(1-x)^3}\Big)y'(x) \\ + \Big(\frac{144}{x} + \frac{144}{1-x} + \frac{72}{x^2} + \frac{72}{(1-x)^2} + \frac{24}{x^3} + \frac{24}{(1-x)^3}\Big)y(x)\,. \end{aligned} \tag{6.42}$$

直接计算可知，指标方程的根为 -2、0、2 和 3。

函数 y 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是偶函数。根据前面的计算，若通过选取 $f_o'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ 进行归一化，则

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1\,, \qquad y'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0\,, \qquad y''\left(\tfrac{1}{2}\right) = 48\,. \qquad y^{(3)}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0\,.$$

利用 Mathematica，可得唯一的解为

$$y(x) = -1 + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4x^2}\,. \tag{6.43}$$

回顾一下，$y = f_0''$。由于 f_0 是奇函数，我们得到

$$f_0(x) = -x + \frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2}\,,$$

并且，由于 $f_e' = 2f_0$，存在一个实常数 C，使得

$$f_e(x) = 2\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln(1-x) - \frac{1}{4}\ln(x) + \frac{x}{2}\right) + C\,.$$

因此，我们得到，

$$f(x) = f_e(x) + f_0(x) = -x^2 - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{4x} + C\,. \tag{6.44}$$

这导致矛盾，因为 $f = S_{0,1}[v_1]$ 必须属于 L^2(0,1)，而函数 (6.44) 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 附近并非平方可积。因此，初始条件必须满足

$$f_o'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0\,.$$

根据柯西–利普希茨定理，相应的微分方程解满足$y \equiv 0$。因此，f_o 是一个常数；由于 f_o 是奇函数，该常数必为零。因此，f 本身是一个常值函数。

由于$f = S_{0,\ 1}[v_1]$，我们通过应用引理 5.3(v)中给出的左逆$S^*_{0,\ 2}$ 来恢复 v_1，即

$$v_1(x) = S^*_{0,2}[f](x) = f(x) - \frac{2}{x^2}\int_0^x t\, f(t)\, dt\,.$$

直接计算得到

$$v_1(x) = 0\,. \tag{6.45}$$

因此，在(1，2)的情形下，我们得到了以下单射性结果：

定理 6.3 （关于该对的单射性 (1，2)）。 对于（κ_1, κ_2）$= (1，2)$，谱映射的弗雷歇微分

$$D_{(p,q)}\mathcal{S}_{1,2}(0,0) : L^2(0,1) \times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$$

是单射。

6.4 对于参数对 $(\kappa_1,\ \kappa_2) = (0,\ 3)$，微分的单射性

在整个过程中　在本小节中，我们考虑满足线性化谱约束的 $(v_1, v_2) \in L^2(0,1)^2$

$$D_{(p,q)}\lambda_{\kappa,n}(0,0)\cdot(v_1,v_2) = 0\,, \qquad n\in\mathbb{Z},$$

同时针对两个有效角动量 $\kappa = 0$ 和 $\kappa = 3$。

在 $\kappa = 0$ 的情形下，与上一节一样，v_1 关于中点 $x = \frac{1}{2}$ 是偶函数，而 v_2 是奇函数。

现在转向　情形 $\kappa = 3$。根据定理 5.9，并令 $w_j := T_3^j[v_j]$, $j = 1,\ 2$，我们有

$$A_3(D)\big[w_j\big] \quad \text{is even if } j = 1, \text{ and odd if } j = 2\,, \tag{6.46}$$

其中

$$A_3(t) = -\tfrac{1}{8}t^3 + \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{15}{2}t + 15\,, \qquad D = \tfrac{d}{dx}\,.$$

我们首先分析 $j = 2$ 的情形。相关的变换算子可以显式写出。对于 $\{v_2\}(0,1)$，有

$$T_3^2[v_2](x) = v_2(x) - 6x\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^2}\,dt + 48x^3\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\,dt - 60x^5\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^6}\,dt\,. \tag{6.47}$$

此外，引入微分算子 $D = \frac{d}{dx}$ 和多项式

$$A_3(t) = -\tfrac{1}{8}t^3 + \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{15}{2}t + 15\,, \qquad \text{so that} \qquad 8A_3(D) = -D^3 + 12D^2 - 60D + 120\,,$$

我们得到以下显式恒等式

$$\begin{aligned} F(x) &= 8A_3(D)\big[T_3^2[v_2]\big](x) \\ &= -v_2^{(3)}(x) + \Big(12 - \frac{18}{x}\Big)v_2''(x) + \Big(-60 + \frac{216}{x} - \frac{126}{x^2}\Big)v_2'(x) \\ &\quad + \Big(120 - \frac{1080}{x} + \frac{1728}{x^2} - \frac{624}{x^3}\Big)v_2(x) + 360(1-2x)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^2}\,dt \\ &\quad + 288\big(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1\big)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\,dt \\ &\quad - 3600x^2\big(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1\big)\int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^6}\,dt\,. \end{aligned} \tag{6.48}$$

在 $x = \frac{1}{2}$ 处计算 (6.48)，注意到左端关于 $\frac{1}{2}$ 是奇函数，因此在 $x = \frac{1}{2}$ 处为零。由于 v_2 也是奇函数，有

$$v_2\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,, \qquad v_2''\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,,$$

因此，

$$v_2^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) = -132\,v_2'\big(\tfrac{1}{2}\big)\ .$$

现在我们计算 $F(x) = 8A_3(D)\big[T_3^2[v_2]\big](x)$ 的二阶导数。将（6.48）求导两次，得到

$$\begin{aligned} F''(x) = &- v_2^{(5)}(x) + \Big(12 - \frac{18}{x}\Big) v_2^{(4)}(x) + \Big(-60 + \frac{216}{x} - \frac{90}{x^2}\Big) v_2^{(3)}(x) \\ &+ \Big(120 - \frac{1080}{x} + \frac{1296}{x^2} - \frac{156}{x^3}\Big) v_2''(x) \\ &+ \frac{36\big(60x^3 - 210x^2 + 124x - 9\big)}{x^4}\, v_2'(x) + \frac{1440\big(12x^3 - 26x^2 + 12x - 1\big)}{x^5}\, v_2(x) \\ &+ 17280(2x-1) \int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^4}\, dt - 7200\big(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1\big) \int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^6}\, dt\,. \end{aligned} \tag{6.49}$$

计算 (6.49)　　在 $x = \frac{1}{2}$ 处，并利用 F 和 v_2的奇性，所有非局部项均消失，从而得到

$$0 = 4608\, v_2'\big(\tfrac{1}{2}\big) + 12\, v_2^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) - v_2^{(5)}\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.$$

现在对 (6.49) 求两次导数，得到

$$\begin{aligned} F^{(4)}(x) = &- v_2^{(7)}(x) + \Big(12 - \frac{18}{x}\Big) v_2^{(6)}(x) + \Big(-60 + \frac{216}{x} - \frac{54}{x^2}\Big) v_2^{(5)}(x) \\ &+ \Big(120 - \frac{1080}{x} + \frac{864}{x^2} + \frac{168}{x^3}\Big) v_2^{(4)}(x) \\ &+ \Big(\frac{2160}{x} - \frac{5400}{x^2} - \frac{288}{x^3} + \frac{72}{x^4}\Big) v_2^{(3)}(x) \\ &+ \Big(\frac{12960}{x^2} - \frac{9360}{x^3} - \frac{1728}{x^4} - \frac{720}{x^5}\Big) v_2''(x) \\ &+ \Big(\frac{44640}{x^3} - \frac{19440}{x^4} + \frac{1728}{x^5} + \frac{720}{x^6}\Big) v_2'(x) + \Big(\frac{172800}{x^4} - \frac{86400}{x^5}\Big) v_2(x) \\ &+ 432000\,(1-2x) \int_x^1 \frac{v_2(t)}{t^6}\, dt\,. \end{aligned} \tag{6.50}$$

在 $x = \frac{1}{2}$ 处求值，由于 F 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是奇函数，有 $F^{(4)}\big(\frac{1}{2}\big) = 0$，且非局部项消失。此外，由于 v_2 关于 $x = \frac{1}{2}$ 也是奇函数，我们有 $v_2\big(\frac{1}{2}\big) = v_2''\big(\frac{1}{2}\big) = v_2^{(4)}\big(\frac{1}{2}\big) = v_2^{(6)}\big(\frac{1}{2}\big) = 0$。因此，

$$0 = - v_2^{(7)}\big(\tfrac{1}{2}\big) + 156\, v_2^{(5)}\big(\tfrac{1}{2}\big) - 18432\, v_2^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big) + 147456\, v_2'\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.$$

对 (6.50) 求导两次并合并各项，得到

$$\begin{aligned} F^{(6)}(x) = &- v_2^{(9)}(x) + \Big(12 - \frac{18}{x}\Big) v_2^{(8)}(x) + \Big(-60 + \frac{216}{x} - \frac{18}{x^2}\Big) v_2^{(7)}(x) \\ &+ \Big(120 - \frac{1080}{x} + \frac{432}{x^2} + \frac{348}{x^3}\Big) v_2^{(6)}(x) \\ &+ \Big(\frac{2160}{x} - \frac{3240}{x^2} - \frac{3312}{x^3} - \frac{1260}{x^4}\Big) v_2^{(5)}(x) \\ &+ \Big(\frac{8640}{x^2} + \frac{10080}{x^3} + \frac{5184}{x^4} + \frac{720}{x^5}\Big) v_2^{(4)}(x) \\ &+ \Big(-\frac{2880}{x^3} + \frac{4320}{x^4} + \frac{12096}{x^5} + \frac{9360}{x^6}\Big) v_2^{(3)}(x) \\ &+ \Big(-\frac{17280}{x^4} - \frac{43200}{x^5} - \frac{51840}{x^6} - \frac{30240}{x^7}\Big) v_2''(x) \\ &+ \Big(\frac{17280}{x^5} + \frac{43200}{x^6} + \frac{51840}{x^7} + \frac{30240}{x^8}\Big) v_2'(x)\,. \end{aligned} \tag{6.51}$$

令 $G(x) = F_{(6)}(x)$。由于 F 关于 $x = \frac{1}{2}$ 是奇函数， G 也同样如此，因此

$$G(x) + G(1-x) = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,.$$

利用 v_2 也是奇函数，并应用上述得到的降阶，我们可以将对称恒等式 $G(x) + G(1-x) = 0$ 改写为一个关于.....的线性常微分方程

$$w := v_2'.$$

由此得到以下八阶对称方程:

$$
\begin{aligned}
&-2\,w^{(8)}(x)\\
&-\left(\frac{18}{x}-\frac{18}{1-x}\right)w^{(7)}(x)\\
&+\left(-120+216\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\Big)-18\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\Big)\right)w^{(6)}(x)\\
&-\left(\frac{1080}{x}-\frac{1080}{1-x}-\frac{432}{x^2}+\frac{432}{(1-x)^2}-\frac{348}{x^3}+\frac{348}{(1-x)^3}\right)w^{(5)}(x)\\
&+\left(\frac{2160}{x}+\frac{2160}{1-x}-\frac{3240}{x^2}-\frac{3240}{(1-x)^2}-\frac{3312}{x^3}-\frac{3312}{(1-x)^3}-\frac{1260}{x^4}-\frac{1260}{(1-x)^4}\right)w^{(4)}(x)\\
&+\left(\frac{8640}{x^2}-\frac{8640}{(1-x)^2}+\frac{10080}{x^3}-\frac{10080}{(1-x)^3}+\frac{5184}{x^4}-\frac{5184}{(1-x)^4}+\frac{720}{x^5}-\frac{720}{(1-x)^5}\right)w^{(3)}(x)\\
&+\left(-\frac{2880}{x^3}-\frac{2880}{(1-x)^3}+\frac{4320}{x^4}+\frac{4320}{(1-x)^4}+\frac{12096}{x^5}+\frac{12096}{(1-x)^5}+\frac{9360}{x^6}+\frac{9360}{(1-x)^6}\right)w''(x)\\
&+\left(-\frac{17280}{x^4}+\frac{17280}{(1-x)^4}-\frac{43200}{x^5}+\frac{43200}{(1-x)^5}-\frac{51840}{x^6}+\frac{51840}{(1-x)^6}-\frac{30240}{x^7}+\frac{30240}{(1-x)^7}\right)w'(x)\\
&+\left(\frac{17280}{x^5}+\frac{17280}{(1-x)^5}+\frac{43200}{x^6}+\frac{43200}{(1-x)^6}+\frac{51840}{x^7}+\frac{51840}{(1-x)^7}+\frac{30240}{x^8}+\frac{30240}{(1-x)^8}\right)w(x)=0\,.
\end{aligned}
\tag{6.52}
$$

$x=0$ 处的指标根为

$$r\in\{7,6,5,3,1,-1\}\ \cup\ \{-1\pm i\sqrt{23}\}\,.$$

根据前面的分析，这个常微分方程的解由单个参数 $v_2'\big(\frac{1}{2}\big)$ 唯一确定。例如，施加归一化条件

$$w\big(\tfrac{1}{2}\big)=v_2'\big(\tfrac{1}{2}\big)=1$$

给出了一个解 $w=v_2'$，它满足 $x=\frac{1}{2}$ 处的微分约束 (6.52),

$$v_2^{(3)}\big(\tfrac{1}{2}\big)=-132\,,\qquad v_2^{(5)}\big(\tfrac{1}{2}\big)=3024\,,\qquad v_2^{(7)}\big(\tfrac{1}{2}\big)=3052224\,,$$

这些关系由上文推导出的对称关系得出。

为了进一步了解解的行为，我们使用 Mathematica 对方程 (6.52) 进行了数值积分。从归一化条件 $v_2'\big(\frac{1}{2}\big)=1$ 以及上述微分约束出发，所得函数 $w(x)=v_2'(x)$ 和 $v_2(x)$ 显示于图1中。

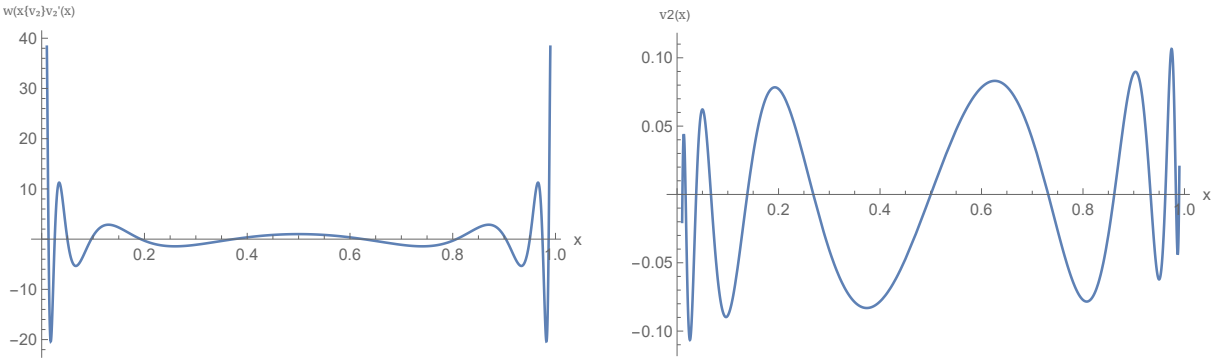


图1：使用 *Mathematica* 计算得到的数值解 $w(x)=v_2'(x)$（左）和 $v_2(x)$（右）。

w 的定性行为与指标根的结构一致。特别是，复共轭根对 $-1\pm i\sqrt{23}$ 会在奇异端点附近的局部行为中产生振荡分量。

在另一方 ，当 $\kappa=3$ 时，先前的分析（见（3.10））给出了附加约束

$$\int_0^1 v_2(x)\,x^6\,dx=0\,.$$

然而，利用与归一化条件 $v_2'\big(\tfrac12\big)=1$ 相对应的数值解，我们得到

$$\int_0^1 v_2(x)\,x^6\,dx\approx 1.6\times10^{-1}\,,$$

这显然非零，由此得到数值上的矛盾。因此，必有

$$v_2'\big(\tfrac12\big)=0\,.$$

由方程 (6.52) 应用柯西–利普希茨定理可知， $w\equiv0$。由于 $\{v_2\}$ 关于 $x=\tfrac12$ 是奇函数，因此可得 $v_2\equiv0$。

现在我们转向 $j=1$ 的情形。分析过程与 $j=2$ 的情形完全类似。由于 v_1 和 $A_3\,(D)\,\big[T_3^1[v_1]\big]$ 关于 $x=\tfrac12$ 是偶函数，在 $x=\tfrac12$ 处的连续对称恒等式确定了 v_1 的所有更高阶偶数阶导数，它们由两个参数 $v_1\big(\tfrac12\big)$ 和 $v_1''\big(\tfrac12\big)$ 决定，而所有奇数阶导数在 $x=\tfrac12$ 处均为零。也就是说，

$$v_1^{(4)}\big(\tfrac12\big)=12\,v_1''\big(\tfrac12\big)+4608\,v_1\big(\tfrac12\big)\,.$$

$$v_1^{(6)}\big(\tfrac12\big)=156\,v_1^{(4)}\big(\tfrac12\big)-18432\,v_1''\big(\tfrac12\big)+147456\,v_1\big(\tfrac12\big)\,.$$

然后，完全按照情形 $j=2$ 的处理方式，可得到与上文相同的八阶对称方程，只需将 w 替换为 v_1。因此，一旦固定两个参数 $v_1\big(\tfrac12\big)$ 和 $v_1''\big(\tfrac12\big)$，在 $x=\tfrac12$ 处的所有高阶导数便唯一确定，而柯西–利普希茨定理保证存在唯一的局部偶函数解。

我们 因此，引入与初始数据对应的两个基本偶解

$$u:\quad \big(v_1(\tfrac12),v_1''(\tfrac12)\big)=(1,0)\,,\qquad v:\quad \big(v_1(\tfrac12),v_1''(\tfrac12)\big)=(0,1)\,.$$

因此，任何对称方程的偶解都是一个线性组合

$$v_1 = \alpha\, u + \beta\, v\,.$$

为了理解这些解在 $x = 0$ 附近的行为，我们使用 Mathematica 进行了数值弗罗贝尼乌斯分析。从两个线性无关的偶解（u, v）出发，我们在 (0,1) 上对八阶方程进行数值积分。

我们此前　　已经看到，预期 $x = 0$ 附近的任意局部解都具有如下形式的展开

$$v_1(x) = x^{-1}\Big(A + B\cos(\sqrt{23}\log x) + C\sin(\sqrt{23}\log x)\Big) + O(x)\,.$$

对于这一对 (u, v)，Mathematica 得到以下数值三元组

$$(A_u, B_u, C_u) = (0.700136, -0.0937512, -0.0416037)\,,$$

$$(A_v, B_v, C_v) = (0.00529329, 0.00201729, -0.00117865)\,.$$

为了检验这些解的线性组合能否消去首项奇异行为，我们进行数值求解

$$\alpha(A_u, B_u, C_u) + \beta(A_v, B_v, C_v) = (0, 0, 0)\,.$$

计算只得到平凡解 $\alpha = \beta = 0$。因此，在两个端点 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处均为 L^2 的唯一解是平凡解。这一数值分析导出了以下定理。

定理 6.4 （针对 $(0, 3)$）。 对于$(\kappa_1, \kappa_2) = (0,3)$，谱映射的弗雷歇微分

$$D_{(p,q)}\mathcal{S}_{0,3}(0,0) \,:\, L^2(0,1)\times L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$$

是单射。

7 线性化谱映射的闭值域

本节研究零势处谱映射的弗雷歇微分，并证明当 $\kappa_2 - \kappa_1$ 为奇函数时，其值域是闭的。对于相应的径向薛定谔问题，Carlson-Shubin 和 Shubin-Christ 已证明其具有闭值域性质，参见例如 [10, 33]。

7.1 预备知识

Let

$$S := D_{(p,q)}\mathcal{S}_{\kappa_1,\kappa_2}(0,0).$$

我们简要回顾前面引入的记号。对于每个 $\kappa \in \{\kappa_1, \kappa_2\}$ 和 $n \geq 1$（其中 $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$），我们引入线性泛函

$$A_{\kappa,n}(v_1) := \int_0^1 2j_{\nu,n}x\, J_{\nu-1}\big(j_{\nu,n}x\big)\, J_\nu\big(j_{\nu,n}x\big)\, v_1(x)\, dx\,,$$

$$B_{\kappa,n}(v_2) := \int_0^1 j_{\nu,n}x\Big(J_\nu\big(j_{\nu,n}x\big)^2 - J_{\nu-1}\big(j_{\nu,n}x\big)^2\Big)\, v_2(x)\, dx\,,$$

它们在 $L^2(0,\,1)$ 上定义了有界线性泛函。

利用引理 5.5 和注记 5.6，这些线性形式可表示为以下变换算子形式：对于 $n \geq 1$,

$$A_{\kappa,n}(v_1) = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \Phi_{\kappa,1}\big(j_{\nu,n}x\big)\, v_1(x)\, dx \tag{7.1}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\big(2j_{\nu,n}x\big)\, T_\kappa^1(v_1)(x)\, dx\,, \tag{7.2}$$

$$B_{\kappa,n}(v_2) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \Phi_{\kappa,2}\big(j_{\nu,n}x\big)\, v_2(x)\, dx \tag{7.3}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\big(2j_{\nu,n}x\big)\, T_\kappa^2(v_2)(x)\, dx\,. \tag{7.4}$$

如第 3.3 节所示，存在一个有界同构

$$\mathcal{U} : \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \ell^2(\mathbb{N}^*)^2 \times \ell^2(\mathbb{N}^*)^2$$

使得 $\mathcal{U}\circ S$ 是分块对角的:

$$(\mathcal{U}\circ S)(v_1,v_2) = \big(\mathcal{M}(v_2),\ \mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_1)\,,\ \mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_2)\big)\,,$$

其中

$$\mathcal{A}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_1) = \big((A_{\kappa_1,n}(v_1))_{n\geq1},\ (A_{\kappa_2,n}(v_1))_{n\geq1}\big)\,,$$
$$\mathcal{B}_{\kappa_1,\kappa_2}(v_2) = \big((B_{\kappa_1,n}(v_2))_{n\geq1},\ (B_{\kappa_2,n}(v_2))_{n\geq1}\big)\,,$$
$$\mathcal{M}(v_2) = \left(-\int_0^1 x^{2\kappa_1}v_2,\ -\int_0^1 x^{2\kappa_2}v_2\right)\,.$$

由于 $\mathcal{U}$ 是同构，当且仅当 $\mathcal{U}\circ S$ 的值域闭合时， S 的值域才闭合。因此，闭值域性质归结为对 $\mathcal{M}$、$\mathcal{A}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$ 和 $\mathcal{B}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$ 的独立分析。

7.2 证明策略

现在，我们概述证明闭值域性质的策略。为简单起见，我们在模型情形（$\kappa_1,\ \kappa_2$）$=(0,\ 1)$ 中给出论证；一般情形完全相同。

我们用贝塞尔零点 $j_{\nu,\ n}$ 的首项渐近式替换它们，从而对算子 $\mathcal{A}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$ 进行近似，即

$$j_{\frac12,n} \sim n\pi \quad (\kappa=0)\,, \qquad j_{\frac32,n} \sim (n+\tfrac12)\pi \quad (\kappa=1)\,.$$

由此得到一个傅里叶型模型算子，其核涉及频率为$2n\pi$和 $2(n+\frac12)\pi$ 的纯正弦函数。我们证明该模型算子是单射且具有闭值域，因此是半弗雷德雷姆算子。

原算子与傅里叶模型算子之差是紧的。该结论的证明与 [14]，附录 B 中给出的证明完全相同，因此我们省略细节。由于半弗雷德雷姆性质在紧扰动下保持不变，可知$\mathcal{A}_{\kappa_1,\ \kappa_2}$ 具有闭值域。

对族 $(\mathcal{B}_{\kappa,\ n})_{n\geq1}$ 应用相同的论证可知，块算子 $(\mathcal{M},\ \mathcal{B}_{\kappa_1,\ \kappa_2})$ 也具有闭值域，由此证明微分 S 具有闭值域。

7.3 三角模型

利用正弦表示 (7.2)，我们引入一个与 $(\kappa_1,\ \kappa_2)=(0,\ 1)$ 对应的傅里叶型模型算子：

$$\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}(v_1)=\Big((\widetilde{A}_{0,n}(v_1))_{n\geq 1}\,,(\widetilde{A}_{1,n}(v_1))_{n\geq 1}\Big)\,,$$

其中

$$\widetilde{A}_{0,n}(v_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(2n\pi x)\,v_1(x)\,dx\,,$$

$$\widetilde{A}_{1,n}(v_1)=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\big((2n+1)\pi x\big)\,\big(S_{0,1}[v_1]\big)(x)\,dx\,.$$

同样，利用余弦表示（7.4），我们定义

$$\mathcal{B}_{0,1}^{(0)}(v_2)=\Big((\widetilde{B}_{0,n}(v_2))_{n\geq 1}\,,(\widetilde{B}_{1,n}(v_2))_{n\geq 1}\Big)\,,$$

with

$$\widetilde{B}_{0,n}(v_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,v_2(x)\,dx\,,$$

$$\widetilde{B}_{1,n}(v_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\big((2n+1)\pi x\big)\,\big(S_{0,1}[v_2]\big)(x)\,dx\,.$$

从现在起，我们聚焦于 $\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}$，并且为简单起见，我们用 v 代替 v_1。利用上述三角形式，我们考虑

$$\|\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}v\|^2_{\ell^2(\mathbb{N}^*)\times\ell^2(\mathbb{N}^*)}=\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{0,n}(v)|^2+\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{1,n}(v)|^2\,.$$

第一项对应于经典正弦傅里叶系数

$$\widetilde{A}_{0,n}(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(2n\pi x)\,v(x)\,dx\,.$$

由于 $\sin(2n\pi x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 是奇函数，因此只有 v 的奇部有贡献。根据帕塞瓦尔恒等式，

$$\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{0,n}(v)|^2=\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{0,n}(v_{\rm odd})|^2=\frac{2}{\pi^2}\,\|v_{\rm odd}\|^2_{L^2(0,1)}\,,$$

其中，$v_{\rm odd}(x):=\frac{1}{2}\big(v(x)-v(1-x)\big)$ 表示 v 关于 $x=\frac{1}{2}$ 的奇部。

第二项涉及移位正弦基和变换 $S_{0,\,1}$：

$$\widetilde{A}_{1,n}(v)=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\big((2n+1)\pi x\big)\,(S_{0,1}[v])(x)\,dx\,.$$

由于 $\sin((2n+1)\pi x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 是偶函数，因此只有 $S_{0,\,1}[v]$ 的偶部有贡献。计入模态 $n=0$ 后，由帕塞瓦尔恒等式可得

$$\sum_{n\geq 0}|\widetilde{A}_{1,n}(v)|^2=\frac{2}{\pi^2}\,\|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|^2_{L^2(0,1)}\,,$$

其中

$$(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}(x):=\tfrac{1}{2}\big((S_{0,1}[v])(x)+(S_{0,1}[v])(1-x)\big)\,.$$

如果求和从 $n=1$ 开始，就要减去模态 $\sin(\pi x)$ 的贡献，即

$$|\widetilde{A}_{1,0}(v)|^2=\frac{2}{\pi^2}\,\big|\langle (S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}},\,\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\,.$$

令 P 表示到子空间 $L^2_{\mathrm{even}}(0,\,1)$ 的正交投影（相对于 $x=\frac{1}{2}$）。那么

$$(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}=PS_{0,1}[v]\,.$$

因此，从 $n=1$ 开始求和，帕塞瓦尔恒等式给出

$$\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{1,n}(v)|^2=\frac{2}{\pi^2}\,\|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|^2_{L^2(0,1)}-\frac{2}{\pi^2}\,\big|\langle PS_{0,1}[v],\,\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\,.$$

我们可以利用 $PS_{0,\,1}$ 的伴随算子改写内积:

$$\langle PS_{0,1}[v],\,\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}=\langle v,\,(PS_{0,1})^*\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}\,.$$

因此

$$\sum_{n\geq 1}|\widetilde{A}_{1,n}(v)|^2=\frac{2}{\pi^2}\,\|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|^2_{L^2(0,1)}-\frac{2}{\pi^2}\,\big|\langle v,\,(PS_{0,1})^*\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\,.$$

综合这两部分贡献，我们得到

$$\|\mathcal{A}^{(0)}_{0,1}v\|^2_{\ell^2(\mathbb{N}^*)\times\ell^2(\mathbb{N}^*}=\frac{2}{\pi^2}\Big(\|v_{\mathrm{odd}}\|^2_{L^2(0,1)}+\|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|^2_{L^2(0,1)}-\big|\langle v,\,(PS_{0,1})^*\sin(\pi x)\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\Big)\,.$$

为了利用这一恒等式，我们关注 $S_{0,\,1}[v]$ 的偶函数分量，并引入相应的投影变换。

我们回顾一下，积分算子 $S_{0,\,1}$ 定义为

$$(S_{0,1}[v])(x):=v(x)-2\int_x^1\frac{v(t)}{t}\,dt\,,\qquad x\in(0,1)\,,\tag{7.5}$$

并定义

$$T:=P\circ S_{0,1}:\;L^2_{\mathrm{even}}(0,1)\longrightarrow L^2_{\mathrm{even}}(0,1)\,.$$

引理 7.1（T的有界左逆）。定义算子 $L\colon L^2_{\mathrm{even}}(0,\,1)\to L^2_{\mathrm{even}}(0,\,1)$ 如下

$$(Lg)(x)=g(x)-\frac{1}{x(1-x)}\int_0^x(1-2t)\,g(t)\,dt,\qquad 0<x<1.\tag{7.6}$$

那么:

1. L 是 T 的左逆：$= P \circ S_{0,\ 1}$ 在 $L^2_{\text{even}}(0,\ 1)$上，即

$$L\,Tv = v, \qquad \forall v \in L^2_{\text{even}}(0,1). \tag{7.7}$$

2. 算子 L 在 $L^2_{\text{even}}(0,1)$ 上有界。更准确地说，

$$\|Lg\|_{L^2(0,1)} \le 5\,\|g\|_{L^2(0,1)}, \qquad \forall\, g \in L^2_{\text{even}}(0,1).$$

证明。步骤 *1*：公式的推导。由稠密性，不失一般性，我们可以假设$v \in C^1([0,1])$。回顾一下，v是偶函数，并令 $g := Tv = PS_{0,\ 1}[v]$。根据 $S_{0,\ 1}$的定义以及对称性 $v(1-x) = v(x)$，对于 $x \in (0,\ 1)$ 可得

$$g(x) = v(x) - \int_x^1 \frac{v(t)}{t}\,dt - \int_0^x \frac{v(t)}{1-t}\,dt.$$

求导可得

$$g'(x) = v'(x) + \frac{v(x)}{x} - \frac{v(x)}{1-x} = v'(x) + \frac{1-2x}{x(1-x)}\,v(x),$$

因此

$$x(1-x)v'(x) + (1-2x)v(x) = x(1-x)g'(x), \qquad \text{i.e.} \qquad \big(x(1-x)v(x)\big)' = x(1-x)g'(x).$$

从 0 积分到 x，并进行一次分部积分，可得

$$x(1-x)v(x) = x(1-x)g(x) - \int_0^x (1-2t)\,g(t)\,dt,$$

也就是说，

$$v(x) = g(x) - \frac{1}{x(1-x)}\int_0^x (1-2t)\,g(t)\,dt, \qquad 0 < x < 1.$$

由于 g 关于$1\ 2$是偶函数，右侧也为偶函数，因此 v 也是偶函数。这正是定义左逆 L的公式。

步骤 *2*：在 $L^2_{\text{even}}(0,\ 1)$上的有界性。由于 Lg关于$1\ 2$是偶函数，只需在 $(0,\ 1\ 2)$ 上进行讨论：

$$\|Lg\|^2_{L^2(0,1)} = 2\|Lg\|^2_{L^2(0,1/2)}.$$

对于 $0 < x \le \frac{1}{2}$，

$$(Lg)(x) = g(x) - \frac{1}{x(1-x)}\int_0^x (1-2t)\,g(t)\,dt.$$

利用 $|1-2t| \le 1$ 和 $1-x \ge \frac{1}{2}$，可得

$$|(Lg)(x)| \le |g(x)| + \frac{2}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt.$$

根据 $(0,\ 1\ 2)$ 上的 Hardy不等式，

$$\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt\right)^2 dx \le 4\int_0^{1/2}|g(x)|^2 dx,$$

因此

$$\|Lg\|_{L^2(0,1/2)} \le \|g\|_{L^2(0,1/2)} + 4\|g\|_{L^2(0,1/2)} = 5\|g\|_{L^2(0,1/2)}.$$

因此，$\|Lg\|_{L^2(0,1)} \le 5\|g\|_{L^2(0,1)}$，且 L 在 $L^2_{\text{even}}(0,1)$ 上有界。 □

现在我们证明，下面恒等式右侧的两个非负贡献项已经能够控制 v 的完整 L^2 范数:

$$\|\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}v\|_{\ell^2(\mathbb{N}^*)\times\ell^2(\mathbb{N}^*)}^2 = \frac{2}{\pi^2}\Big(\|v_{\mathrm{odd}}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|_{L^2(0,1)}^2 - |\langle v, w\rangle_{L^2(0,1)}|^2\Big)\,, \tag{7.8}$$

其中

$$w := (PS_{0,1})^* \sin(\pi x) \in L^2(0,1)\,.$$

我们首先证明

$$\|v\|_{L^2(0,1)}^2 \lesssim \|v_{\mathrm{odd}}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|_{L^2(0,1)}^2\,. \tag{7.9}$$

由于 $v = v_{\mathrm{odd}} + v_{\mathrm{even}}$，我们有

$$(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}} = (P\circ S_{0,1})v = (P\circ S_{0,1})v_{\mathrm{even}} + (P\circ S_{0,1})v_{\mathrm{odd}}\,.$$

我们回顾一下，$T = P\circ S_{0,1}$ 在 $L^2_{\mathrm{even}}(0,1)$ 上成立。于是

$$Tv_{\mathrm{even}} = (P\circ S_{0,1})v_{\mathrm{even}} = (S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}} - (P\circ S_{0,1})v_{\mathrm{odd}}\,.$$

由于 L 是 T 在 $L^2_{\mathrm{even}}(0,1)$ 上的有界左逆，我们得到

$$v_{\mathrm{even}} = L\Big((S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}} - (P\circ S_{0,1})v_{\mathrm{odd}}\Big)\,,$$

因此，由于 $P\circ S_{0,1}$ 在 $L^2(0,1)$ 上有界，

$$\|v_{\mathrm{even}}\|_{L^2(0,1)} \le C\Big(\|(S_{0,1}[v])_{\mathrm{even}}\|_{L^2(0,1)} + \|v_{\mathrm{odd}}\|_{L^2(0,1)}\Big)\,.$$

将奇部平方后相加，得到 (7.9)。结合 (7.8) 和 (7.9)，得到

$$\|v\|_{L^2(0,1)}^2 \lesssim \|\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}v\|_{\ell^2(\mathbb{N}^*)\times\ell^2(\mathbb{N}^*)}^2 + |\langle v, w\rangle_{L^2(0,1)}|^2\,.$$

等价地,

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \lesssim \Big\|\big(\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}v,\ \langle v, w\rangle_{L^2(0,1)}\big)\Big\|\,.$$

特别地，增广算子

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \big(\mathcal{A}_{0,1}^{(0)},\ \langle\,\cdot\,, w\rangle_{L^2(0,1)}\big):\ L^2(0,1) \to (\ell^2(\mathbb{N}^*)\times\ell^2(\mathbb{N}^*))\times\mathbb{R}$$

是单射且具有闭值域。由于 $\langle\cdot,\ w\rangle$ 是一个秩一算子，$\widetilde{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}$ 的有限秩扩张。因此 $\mathcal{A}_{0,1}^{(0)}$ 是半弗雷德霍姆算子：其核至多为一维，且其值域是闭的。例如，这可由 [8, 命题 11.4]推出。

现在，我们回顾以下局部单射性结果；它是中值定理和开映射定理的直接推论（例如，参见 [1], 定理 2.5.10）。

命题 7.2 (局部单射性)。设 X 和 Y 是巴拿赫空间，并设

$$\mathcal{S} : U \subset X \longrightarrow Y$$

是定义在点 $x_0 \in X$ 的开邻域 U 上的 $\mathcal{C}^1$ 映射。假设弗雷歇微分$d_{x_0}\mathcal{S}:\ X \to Y$是单射且具有闭值域。那么存在 x_0 的一个邻域 $V \subset U$，使得$\mathcal{S}$ 在 V 上是单射。

定理 1.1 是命题 7.2、定理 6.1、6.3 和 6.4，以及 S 的值域是闭集的直接推论。

注 7.3（其他有效角动量）。 情形 $(\kappa_1,\kappa_2)=(0,2)$ 更为微妙。事实上，相应贝塞尔零点的渐近行为不会产生半整数相移，而这种相移正是情形 $(0,1)$ 中出现交错频率的原因。因此，相应的三角函数系不再完备：得到的只是一个部分函数族（正弦族或余弦族），而非完整的正弦—余弦系。特别是，基于三角模型强制性恒等式的论证无法直接应用，因为缺失的函数族使得我们无法直接控制整个 L^2 范数。因此，要在这种情形下恢复闭值域，还需要进行更精细的分析。

模型的物理解释：从径向狄拉克算子到 AKNS 系统

AKNS 系统出现在许多物理学模型中。下面我们选取了两个模型，在这些模型中，正文中建立的结果具有相关性。这也启发我们考虑许多其他问题。

A.1 三维狄拉克算子

按照 [36]（另见 [2] 和 [32]），我们回顾一下：在 $L^2(\mathcal{B},\ \mathbb{C}^4)$ 上的狄拉克算子的 MIT 实现（$\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^3$的单位球），其径向矩阵势为

$$V(x):=\phi_{el}(r)I_4+\phi_{sc}(r)\beta+i\beta\alpha\cdot e_r\phi_{am}(r)\,, \tag{A.1a}$$

其中

$$\beta=\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix},\ \alpha_i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix},\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,, \tag{A.1b}$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{A.1c}$$

σ_i 是泡利矩阵，

$$e_r:=\mathbf{x}/r\,, \tag{A.1d}$$

而 ϕ_{el}、ϕ_{sc} 和 ϕ_{am} 是具有物理解释的径向势。
尽管 ϕ_{el} 情形很有趣（ [36] 中可以找到对库仑情形的分析），本文关注的是 $\phi_{el}=0$的情形，并在正文中使用记号 $\phi_{sc}=p$ 和$\phi_{am}=q$。注意，当 ϕ_{el} 不为 0 时，已知根据 [22]（另见 [3]引言中的讨论），对于 AKNS 系统，即使在 $\kappa=0$时，反问题也是病态的。[36]中的定理 4.14 表明，狄拉克算子

$$\mathbb{D}_V:=\mathbb{D}_0+V\,, \tag{A.2a}$$

其中（m 为质量）

$$\mathbb{D}_0=\sum_i \alpha_i D_{x_i}+\beta m \tag{A.2b}$$

酉等价于所谓的“部分波”狄拉克算子的直和 $h_{m_j,\ \kappa_j}$

$$\bigoplus_{j=\frac12,\frac32,\cdots}^{+\infty}\ \bigoplus_{m_j=-j}^{j}\ \bigoplus_{\kappa_j=\pm(j+\frac12)} h_{m_j,\kappa_j}$$

其中，在基 $\{\Phi^+_{m_j,\kappa_j}, \Phi^-_{m_j,\kappa_j}\}$（参见 [36] 中的 (4.110)-(4.116)）下，$h_{m_j,\ \kappa_j}$ 是算子 H_{κ_j}，并在 $r=1$ 处满足适当的边界条件。

请注意，在这种分解中，我们只会遇到（在酉等价意义下）作用于L^2(0，1)上的狄拉克算子 H_κ，其中 $\kappa \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。这里将 $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 解释为某个自伴算子 K 在L^2(S^2，$\mathbb{C}^4$)上的特征值，其中 S^2 是 $\mathbb{R}^3$中的二维单位球面。我们强调，κ 并非角动量，尽管有时会被错误地这样写（例如在 [3]中）。

还请注意，在 [36] 的第4.6.6小节中，只考虑了 (0，$+\infty$) 中的情形，但这并不改变 L^2(S^2，$\mathbb{C}^4$)的“切向”分解。

因此，我们必须更仔细地分析可能的边界条件，回到 $\mathbb{R}^3$中单位球上的问题。根据 [4]，，区域 Ω 中的广义 MIT 条件为

$$\varphi = \frac{i}{2}(\lambda_e - \lambda_s\beta)(\alpha\cdot\nu)\varphi \text{ on } \partial\Omega\,,$$

with

$$\lambda_e^2 - \lambda_s^2 = -4\,.$$

请注意，标准 MIT 模型对应于 $\lambda_e = 0$、 $\lambda_s = \pm 2$。

对于球形区域的标准情形，我们得到

$$\varphi = -i\beta(\alpha\cdot e_r)\varphi \text{ on } S^2\,.$$

利用 [36], 中的引理 4.13，算子 β 和 $\alpha\cdot e_r$ 保持该分解，并且相对于基 $\{\Phi^+_{m_j,\kappa_j}, \Phi^-_{m_j,\kappa_j}\}$，可表示为 2×2 矩阵

$$\beta_{m_j,\kappa_j} = \sigma_3 \quad \text{and} \quad (-i\alpha\cdot e_r) = -i\sigma_2\,.$$

因此，边界条件可写为

$$(f^+, f^-)^T = \sigma_1(f^+, f^-)^T\,,\ \text{for } r=1\,,$$

or

$$f^+(1) + f^-(1) = 0\,.$$

用 AKNS 记号表示，这对应于 $\beta = \frac{\pi}{4}$。 –

现在考虑一般 MIT 条件。我们得到

$$(f^+, f^-)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_e - \lambda_s \\ \lambda_s + \lambda_e & 0 \end{pmatrix}(f^+, f^-)^T\,,\ \text{for } r=1\,,$$

其可写为

$$f^+(1) = \frac{1}{2}(\lambda_e - \lambda_s)f^-(1)\,.$$

如果令 λ_s 和 λ_e 符号相反，并取 $\lambda_e \to +\infty$，在极限下得到

$$f^-(1) = 0\,,$$

在 AKNS 形式中，这对应于 $\theta_2 = 0$。 [4] 对这一极限进行了分析，这也说明了考虑这一极限情形的合理性；它也称为 Zig-Zag 模型。

更直接地说， [18] 中分析了这个模型，其中引用了 [30]。 [5, 15]中讨论了径向狄拉克算子的其他性质。

A.2 带阿哈罗诺夫–玻姆势的二维狄拉克算子

自然也可以考虑二维情形下的同一问题。这里我们引用 [36] 中的另一节，或参见[4]。在这里，我们自然得到一个带有 $\kappa \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$的 AKNS 族。在这种情况下，狄拉克算子是一个 2×2方程组。自由狄拉克算子写作

$$\mathbb{D}_0 = \sigma_1 D_{x_1} + \sigma_2 D_{x_2} \,,$$

并且我们可以加入如下形式的势

$$V = \begin{pmatrix} -q & p \\ p & q \end{pmatrix} ,$$

正如 AKNS 系统中出现的那样。
径向情形下的分解描述比 $3D$ 情形更简单，我们只需考虑极坐标。Thaller 的著作对此有详细描述（[36], 第 7.3.3 小节），但有两点书中未提及，需要在此说明。首先，由于我们关注的是圆盘情形，因此必须说明边界条件的形式。例如， C^2 边界下的一般区域情形见 [7] （其中也列有相关参考文献）；最简单的条件就是所谓的 Zig-Zag 模型:

$$(\gamma v_1)_{|\partial\Omega} = 0 \,,$$

or

$$(\gamma v_2)_{|\partial\Omega} = 0 \,,$$

其中 γ 表示迹算子。
在利用 [36] 进行降阶时，我们得到边界条件 $Y_2(0) = 0$。也可以讨论其他条件。根据 [7],中的引理 2.3，一般条件为

$$(\gamma v_2)_{|\partial\Omega} = \frac{1 - \sin\eta}{\cos\eta} t(s) (\gamma v_2)_{|\partial\Omega} \,.$$

（其中，对于 $s \in \partial\Omega$， $t(s) := t_1(s) + i t_2(s)$，$(t_1(s)\ t_2(s)$ 是 $\partial\Omega$ 在 s 处的切向量，参见 [7] 第 2 页倒数第 3 行）。在 [7], 的定理 1.1 中，假设 $\cos\eta \neq 0$ ，以保证问题具有正则的自伴性质且其预解式紧（见注 2）。然而，在 Zig-Zag 情形下，也可以定义一个自然的自伴扩张。0 似乎属于本质谱。相关结果见近期论文 [13] ，该论文引用了 K. Schmidt 的一篇论文 [30]。相应的 AKNS 算子族由 $\kappa = \pm(1/2, 3/2, \cdots,$) 编号索引，其在 $r = 1$ 处的边界条件由 $\theta_2 = 0$ 给出。
遗憾的是，当 κ不属于 $\mathbb{Z}$时，我们不知道该如何处理这个问题。
如 [36], 中已观察到的，当磁势 $A_\phi(r) e_\phi$ （其中 $e_\phi = \frac{1}{r}(-x_2, x_1)$）对应于径向磁场 $B(r)$ 时，同样可以进行这种分解。只需在 AKNS 系统的定义中将 $\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}$ 替换为 $\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + A_\phi(r)$ 即可得到该分解（参见 [36]中的公式（7.103））。

我们想要考虑 $A_\phi(r) = \frac{\alpha}{r}$ 。分解的形式部分仍然成立，但 [36] 中采用的正则性假设并不满足，因为相应的磁场为 $2\pi\alpha\delta_0$ ，其中 δ_0 表示原点处的狄拉克测度。照常，我们可以将分析简化为 $\alpha \in [0, 1)$。情形 $\alpha = 0$ 是此前讨论过的不含磁势的情形，因此还需考虑 $\alpha \in (0,\ 1)$。因此，我们必须为这种所谓的阿哈罗诺夫–玻姆情形下的磁狄拉克算子定义区域。幸运的是，文献中对此已有讨论（[27, 35]）。作者在 $\mathbb{R}^2$ 的情形下，分类了从 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^2)$出发的极小实现的所有可能自伴扩张。如

在 [35], 中，我们选择与参数 $\zeta = 0$ 对应的条件，并且（同时考虑边界条件，这在 Tamura 的论文 [35]中并未出现）区域为

$$D(\mathbb{D}_{\alpha,V}) := \{u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega)^2, D_\alpha u \in L^2(\Omega)^2\,,\ \lim_{|x|\to 0} |x|^{1-\alpha} e^{-i\theta} u_2(x) = 0\,,\ (\gamma u_2)_{\partial\Omega} = 0\}\,.$$

对于单位圆盘 $\Omega = B^1$，我们得到 (0,1) 上的 AKNS 系统，其中 κ 被替换为 $\kappa_\alpha = \kappa + \alpha$。当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，我们得到 $\mathbb{Z}$ 中的一个整数序列，而正文中的分析适用于该序列。

A.3 开放问题

值得注意的是，更一般地说，研究不假设 κ为整数、并且在原点（对于相关的 κ）和 $r = 1$处采用任意边界条件的 AKNS 系统，也很有意思。
鉴于其在二维狄拉克算子中的应用，我们特别指出，即使不假设参数 κ_k 为整数，定理 5.2 仍然成立。研究具有质量 $m \neq 0$的情形也可能很有意思。在 AKNS 系统层面，这似乎对应于研究一个模型，其中考虑 ϕ_{el} 的变化，而其他势均为 0。关于这一方向，可参见 [20], ，其中为狄拉克算子建立了一个 Ambarzumian 型定理。该结果在未扰动点给出了唯一性结论，表明势ϕ_{el} 的消失由相应的谱数据唯一确定。

最后，鉴于 [3], ，研究具有罗宾边界条件的相应薛定谔问题是很自然的。这源于狄拉克与薛定谔框架之间的结构联系：在 [3], 中引入的狄拉克框架下，当标量势 $\phi_{sc} = 0$时，方程组可化为二阶薛定谔（贝塞尔型）方程，而边界条件也自然转化为相应薛定谔算子的罗宾型边界条件。

参考文献

[1] R. Abraham、J. E. Marsden 和 T. Ratiu，《流形、张量分析与应用》，应用数学科学丛书第 75 卷，Springer，1988 年。[2]S. Albeverio、R. Hryniv 和 Y. Mykytyuk，《具有可求和势的狄拉克算子的逆谱问题》，《俄罗斯数学物理杂志》12（2005）[3] S. Albeverio、R. Hryniv 和 Y. Mykytyuk，《由两个谱重构径向狄拉克算子与薛定谔算子》，《数学分析及其应用杂志》339（2008），N^{0}1, 45-57。[4] N. Arrizabalaga、A. Mas、T. Sanz-Perela 和 L. Vega。《广义 MIT 袋模型的特征值曲线》。arXiv: 2106.088348v3。2022 年 11 月 30 日。《数学物理通讯》397（2023），第 1 期，337–392。[5] N. Arrizabalaga、L. Le Treust、A. Mas 和 N. Raymond，《MIT 袋模型作为无限质量极限。》《综合理工学院数学杂志》第 6 卷（2019），329–365。[6] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表与数学表格》，美国国家标准局，《应用数学丛书》**55** （1964）。[7] R. D. Benguria、S. Fournais、E. Stockmeyer 和 H. Van den Bosh。《区域上二维狄拉克算子的自伴性。》《亨利·庞加莱年刊》18（2017），1371–1383。[8] H

. Brezis ，*F*泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程，Springer，2011 .

[9] H. Buchholz，合流超几何函数，施普林格 1947，.[10] R. Carlson 和 C. Shubin，《球对称势的谱刚性》，《微分方程杂志》113（1994），第 2 期，273–289.[11] R. Carlson，《贝塞尔算子的 Borg–Levinson 定理》，Pacific J. Math. 177（1997），第 1 期，1–26.[12] A. J. Durán、M. Pérez 和 J. L. Varona，《显式求和 Sneddon–贝塞尔级数》，Math. Meth. Appl. Sci. 47（2024），6590–6606.[13] J. Duran、A. Mas 和 T. Sanz-Perela。《形状优化问题背景下量子点狄拉克算子与 ∂- Robin 拉普拉斯算子之间的联系》。2026 年 1 月。[14] D. Gobin、B. Grébert、B. Helffer 和 F. Nicoleau，《给定不同有效角动量的狄利克雷谱时径向势的唯一性》，2025。[15] M. Griesemer、J. Lutgen。《径向狄拉克算子的离散特征值聚集》。Journal of Functional Analysis 162，120–134（1999）。[16] J. Guillot 和 J. Ralston，《奇异 Sturm–Liouville 算子的逆谱理论》，载于 *[0,1]*,《微分方程杂志》76（1988），第 2 期，353–373。[17] H. Hayashi，《Kneser–Sommerfeld 展开公式的修正》。《日本物理学会杂志》51（1982），第 4 期，1324–1324。[18] M. Holzmann。《具有锯齿型边界条件的三维狄拉克算子札记》。《复分析与算子理论》（2021），15–47。[19] M. Horváth，《论 Ambarzumian 定理》。《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》131（2001），899–907。[20] M. Kiss，《狄拉克算子的 n 维 Ambarzumian 型定理》。《逆问题》20（2004），1593–1597。[21] N. N. Lebedev，《特殊函数及其应用》，多佛出版社，1972。（原著于 1963 年以俄文出版。）[22] B. M. Levitan 和 I. S. Sargsjan，《Sturm–Liouville 算子与狄拉克算子》，《数学及其应用》（苏联丛书），第 59 卷，克鲁维尔学术出版社，多德雷赫特，1991。（由俄文译出。）[23] P. A. Martin，《论傅里叶–贝塞尔级数与 Kneser–Sommerfeld 展开》。《数学方法与应用科学》45（2022），1145–1152。[24] Ch. H. Müntz，《论魏尔斯特拉斯逼近定理》。《国际数学家大会会议录》，斯德哥尔摩国际数学家大会 1（1912），256–266。[25] Ch. H. Müntz，《论魏尔斯特拉斯逼近定理》，载于：C. Carathéodory、G. Hessenberg、E. Landau、L. Lichtenstein（编），《为庆祝 Hermann Amandus Schwarz 获博士学位五十周年而作的数学论文集》，Springer，柏林（1914），303–312。[26] NIST 数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/，2024-03-15 发布的 1.2.0 版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。

[27] M. Persson。《具有多个阿哈罗诺夫–玻姆螺线管的狄拉克算子与泡利算子。》数学物理快报，第 78 卷，139–156 页，（2006）。[28] J. Pöschel 和 E. Trubowitz，《逆谱理论》，纯粹与应用数学，第 130 卷，Academic Press，1987。[29] W. Rundell 和 P. Sacks，《由两列谱序列重构径向对称势》，《数学分析及其应用杂志》**264** （2001），354–381。[30] K.M. Schmidt。《关于狄拉克算子边值问题的一个注记。》《数学季刊》46（1995），509–516。[31] F. Serier，《径向薛定谔算子的逆谱问题，定义于 $[0,1]$，《微分方程杂志》**235** （2007），101–126。[32] F. Serier，《定义于 $[0,1]$，《逆问题》22（2006），1457–1484 上的奇异阿布洛维茨–考普–纽厄尔–塞格尔算子的逆谱问题。[33] C. Shubin Christ，《径向势下薛定谔方程的一个反问题》，《微分方程杂志》，103（1993），247–259。[34] O. Szász，《用幂函数的线性组合逼近连续函数》，数学年刊**77** （1916），482–496。[35] H. Tamura，《具有阿哈罗诺夫–玻姆场的狄拉克算子的预解算子范数收敛。》数学物理杂志 44（7）：2967–2993，（2003）。[36] B. Thaller，《狄拉克方程》。物理学丛书与专著。Springer，1992。[37] G. N. Watson，《贝塞尔函数理论论著》，第 2 版，剑桥大学出版社，1944。[38] L. A. Zhornitskaya 和 V. S. Serov，《定义于 $[0,1]$，《逆问题》10（1994），975–987 上的奇异 Sturm–Liouville 算子的逆特征值问题。

让·勒雷数学实验室，法国国家科学研究中心联合研究单位6629。南特大学，法国南特F-44000 电子邮箱地址：damien.gobin@univ-nantes.fr 让·勒雷数学实验室，法国国家科学研究中心联合研究单位6629。南特大学，法国南特F-44000 电子邮箱地址：benoit.grebert@univ-nantes.fr 让·勒雷数学实验室，法国国家科学研究中心联合研究单位6629。南特大学，法国南特F-44000 电子邮箱地址：Bernard.Helffer@univ-nantes.fr 让·勒雷数学实验室，法国国家科学研究中心联合研究单位6629。南特大学，法国南特F-44000 电子邮箱地址：francois.nicoleau@univ-nantes.fr