arXiv:2603.22010v1 [math.CO] 23 Mar 2026

Bollob´as–Meir TSP 猜想渐近成立

Alexey Gordeev

摘要

1992年，Bollob´as 和 Meir 证明，对于每个 $k \geq 1$，都存在一个常数 c_k，使得对于 k 维单位立方体 $[0,1]^k$ 中任意 n 个点，都可以找到一条巡回路线 $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 经过这些n 点，且满足 $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}|^k \leq c_k$；其中 $x_{n+1} = x_1$，$|x-y|$ 是 x 与 y 之间的欧氏距离。值得注意的是，这个上界与 n（即点的数量）无关。他们猜想最优常数为 $c_k = 2 \cdot k^{k/2}$，并证明它不可能更小。Balogh、Clemen 和 Dumitrescu 最近修正了关于 $k = 3$ 的这一猜想，并证明了 $c_3 \geq 2^{7/2} > 2 \cdot 3^{3/2}$。对于所有 $k > 2$，该问题仍未解决，目前已知的最佳上界为$c_k \leq 2.65^k \cdot k^{k/2} \cdot (1 + o_k(1))$。

我们大幅缩小了 c_k的下界与上界之间的差距，将其从指数级降至线性级。具体而言，我们证明了 $c_k \leq 2\mathrm{e}(k+1) \cdot k^{k/2}$和 $c_k = k^{k/2} \cdot (2 + o_k(1))$，后者渐近地证实了该猜想。我们还针对单位立方体中的哈密顿路径、生成树和完美匹配等相关问题，得到了类似的结果。我们的主要工具是对早期研究中所用球装填论证的一种新推广。

1 引言

全文中，k为正整数。对于点 $\mathsf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$、$\mathsf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$，$\in \mathbb{R}^k$ 记$\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle := \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ 为它们的点积，记 $|\mathsf{a}| := \sqrt{\langle \mathsf{a}, \mathsf{a} \rangle}$ 为 a 的欧氏长度。对于有限集$X \subseteq \mathbb{R}^k$，令 $K(X)$ 表示顶点集为 X的完全图。如果 E 是 X 上的边集，即E 是 $K(X)$的边集的子集，我们就称之为 X 上的边集。类似地，如果 E 是 X 上的哈密顿回路，即它是 $K(X)$中的一个哈密顿回路，我们就称之为 X 上的哈密顿回路。对于 X上的边集 E和边 $e = \mathsf{ab} \in E$，记 $|e| := |\mathsf{a} - \mathsf{b}|$为 e端点之间的欧氏距离；对于正整数 t，定义 $S_t(E) := \sum_{e \in E} |e|^t$。以下定理归功于 Newman [10, 问题 57]。

定理 1.1 (Newman)。对于单位正方形中的任意有限点集 $X \subseteq [0,1]^2$，都存在一条经过 X 中各点的哈密顿回路 H，其长度满足

$$S_2(H) = \sum_{e \in H} |e|^2 \leq 4.$$

值得注意的是，这个上界与集合大小 X无关。图 1 中的点集表明，常数 4 是最佳可能值。1987年，Meir [9, 备注 (ii)] 提出了定理 1.1 的高维类比问题；几年后，Bollob´ás 和 Meir 在 [4, 定理 3]中给出了答案。

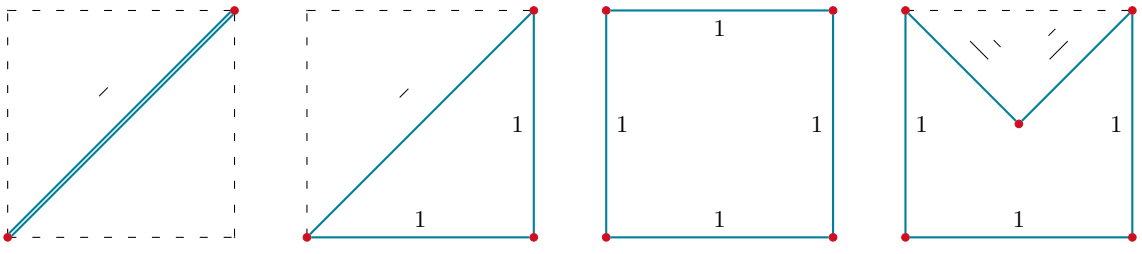

图 1：达到定理 1.1 上界的点集。

定理 1.2 (Bollob´as and Meir)。对于 k 维单位立方体中的任意有限集 $X \subseteq [0,1]^k$ 个点，存在一个哈密顿回路 H，其长度为 X

$$S_k(H) = \sum_{e \in H} |e|^k \leq \frac{2}{3} \cdot 9^k \cdot k^{k/2}.$$

与定理 1.1 类似，定理 1.2 中的上界不取决于 X 中点的数量，只取决于维数 k。对于有限集 $X \subseteq \mathbb{R}^k$，令 $S_k^{\mathrm{HC}}(X) := \min_H S_k(H)$，其中最小值取遍 X 上的所有哈密顿回路 H，并令

$$S_k^{\mathrm{HC}} := \sup\left\{S_k^{\mathrm{HC}}(X) : X \subseteq [0,1]^k,\ X \text{ is a finite set}\right\}.$$

分别将 $S_k^{\mathrm{HP}}(X)$、S_k^{HP}, $S_k^{\mathrm{ST}}(X)$ 和 S_k^{ST}, $S_k^{\mathrm{PM}}(X)$ 与 S_k^{PM} 定义为哈密顿路径、生成树 和完美匹配 （而非哈密顿回路）对应的类似概念，其中仅允许在 $S_k^{\mathrm{PM}}(X)$ 和 S_k^{PM} 的定义中使用偶数大小的集合 X。

注 1.3。 相关研究常使用类似 $s_k(E) := (S_k(E))^{\frac{1}{k}}$ 和 $s_k^{\mathrm{HC}}(X) := (S_k^{\mathrm{HC}}(X))^{\frac{1}{k}}$ 的记号，以避免处理界中的指数。我们发现直接使用 S_k 更方便，特别是在讨论本文的新结果时。为保持记号一致，我们用 S_k 来表述所有结果，无论新旧。

例 1.4. 设 $X = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subseteq [0,1]^k$，其中 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ 且 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$。则$S_k^{\mathrm{HC}} \geq S_k^{\mathrm{HC}}(X) = 2 \cdot k^{k/2}$, $S_k^{\mathrm{HP}} \geq S_k^{\mathrm{HP}}(X) = k^{k/2}$, $S_k^{\mathrm{ST}} \geq S_k^{\mathrm{ST}}(X) = k^{k/2}$, $S_k^{\mathrm{PM}} \geq S_k^{\mathrm{PM}}(X) = k^{k/2}$.

结合定理 1.2 和例 1.4，我们得到

$$2 \cdot k^{k/2} \leq S_k^{\mathrm{HC}} \leq \frac{2}{3} \cdot 9^k \cdot k^{k/2}. \tag{1}$$

在论文结尾， [4], Bollob´as 和 Meir 猜想，对于所有 k，都有 $S_k^{\mathrm{HC}} = 2 \cdot k^{k/2}$。情形$k = 1$ 是平凡的，并且根据定理 1.1，这对 $k = 2$也成立。对于任何 $k > 2$， S_k^{HC}的确切值尚不清楚。最近，Balogh、Clemen 和 Dumitrescu [2, 定理 1.3(i)] 通过给出以下例子，推翻了关于 $k = 3$ 的猜想。

例 1.5 （Balogh、Clemen 和 Dumitrescu）。 令 $X = \{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0)\} \subseteq [0,1]^3$。那么

$$S_3^{\mathrm{HC}} \geq S_3^{\mathrm{HC}}(X) = 4 \cdot 2^{3/2} > 2 \cdot 3^{3/2}.$$

他们提出了一个修订后的猜想 [2, 猜想 5.5], ，该猜想对所有 $k >$仍未解决 2.

猜想 1.6 (Bollob´as–Meir 猜想)。 对于任意有限点集 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一条经过 X 上各点的哈密顿回路 H，使得 $S_k(H) \leq 2 \cdot k^{k/2}$ 当 $k \neq 3$ 时成立，而 $S_3(H) \leq 2^{7/2}$ 当 $k = 3$ 时成立。换言之，

$$S_k^{\mathrm{HC}} = \begin{cases} 2 \cdot k^{k/2} & for\ k \neq 3, \\ 2^{7/2} & for\ k = 3. \end{cases}$$

定理 1.2 是以下两个不等式的直接推论：

$$S_k^{\mathrm{HC}} \leq \frac{2}{3} \cdot 3^k \cdot S_k^{\mathrm{ST}} \quad \text{and} \quad S_k^{\mathrm{ST}} \leq 3^k \cdot k^{k/2}. \tag{2}$$

第一个不等式可通过用生成树近似哈密顿回路得到，这一方法运用了 Sekanina 在 60年代 首创的思想。第二个不等式则通过球装填论证得出：可以证明，在最小生成树的每条边 e的中心放置一个半径为 $\frac{|e|}{4}$ 的球后，得到的球彼此不相交；对它们的总体积进行估计即可推出该不等式。尽管定理 1.2 中的上界后来有所改进，之后的研究仍继续依赖球装填论证与近似技术的结合。

在 [6, 定理 3.4 和 5.2], 中，本文作者运用球装填论证的改进变体，为 S_k^{ST}和 S_k^{PM}得出了迄今为止最精确的上界：

$$S_k^{\mathrm{ST}} \leq 2 \cdot 1.823^k \cdot k^{k/2} \quad \text{and} \quad S_k^{\mathrm{PM}} \leq 2 \cdot (\sqrt{2})^k \cdot k^{k/2}.$$

这些上界与借鉴度量旅行商问题的 Christofides 算法的近似思想相结合，得出了迄今为止最精确的上界；S_k^{HC} [6, 定理 6.1]:

$$S_k^{\mathrm{HC}} \leq 1.28 \cdot 5.059^k \cdot k^{k/2}.$$

Balogh、Clemen 和 Dumitrescu [2, 通过对某个贪心算法进行渐近分析（我们将在第 5 节重新讨论该算法），证明了定理 1.5] ： 对于较大的 k,

$$S_k^{\mathrm{ST}} \leq k^{k/2} \cdot (1 + o_k(1)).$$

注意到，根据例 1.4，这在渐近意义下是最优的。他们还利用近似方法得到了 S_k^{HC} 的渐近上界，该上界后来由 [6, 定理 6.2] to 改进

$$S_k^{\mathrm{HC}} \leq 2.65^k \cdot k^{k/2} \cdot (1 + o_k(1)).$$

1.1 新结果

这项工作的主要贡献是对球装填论证进行了新的推广。其核心思想是允许球以受控方式相交，而不是要求它们彼此不相交。这不仅带来了更好的界，更重要的是，还可以直接应用于哈密顿回路，从而无需近似。因此，我们可以证明 Bollob´as–Meir 猜想在渐近意义下成立。

定理 1.7。 对于任意有限集 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一个 X 上的哈密顿回路 H，使得如果 H的两条最长边为e_1、$e_2 \in H$，那么

$$\sum_{e\in H\setminus\{e_1,e_2\}} |e|^k = o_k(k^{k/2}), \quad so \quad S_k(H) = \sum_{e\in H} |e|^k \le k^{k/2}\cdot(2+o_k(1)).$$

特别地，

$$S_k^{\mathrm{HC}} = k^{k/2}\cdot(2+o_k(1)).$$

定理 1.7是以下关于哈密顿路径的结果的直接推论；该结果断言， [2], 中关于哈密顿路径的 Bollob´ás–Meir 猜想的类似结果——猜想 5.6——也渐近成立。

定理 1.8。 对于任意有限集 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一条 X 上的哈密顿路径 P，使得如果 P的最长边为$e_1 \in P$，那么

$$\sum_{e\in P\setminus\{e_1\}} |e|^k = o_k(k^{k/2}), \quad so \quad S_k(P) = \sum_{e\in P} |e|^k \le k^{k/2}\cdot(1+o_k(1)).$$

特别地，

$$S_k^{\mathrm{HP}} = k^{k/2}\cdot(1+o_k(1)).$$

使用定理 *1.8* 证明定理 *1.7*。 对于有限集 $X \subseteq [0,1]^k$，设定理 1.8 中的哈密顿路径 P 的端点为$\mathbf{a}$，$\mathbf{b} \in X$。那么 $H := P \cup \{\mathbf{ab}\}$ 就是所需的哈密顿回路。 □

通俗地说，定理 1.7 和定理 1.8 意味着，对于较大的 k，极值集$X \subseteq [0,1]^k$ 中的点若满足 $S_k^{\mathrm{HC}}(X) = k^{k/2}\cdot(2+o_k(1))$（或 $S_k^{\mathrm{HP}}(X) = k^{k/2}\cdot(1+o_k(1))$），则必定聚集在单位立方体 $[0,1]^k$的两个相对顶点附近。

接下来讨论精确界。我们证明以下定理，使 S_k^{HC}的上界与例 1.4 的下界相差不超过一个线性因子。

定理 1.9。 对于任意有限集 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一个定义在 X 上的哈密顿回路 H，使得

(a) for any integer $t \ge 1$, $S_k(H) = \sum_{e\in H} |e|^k \le 2(2t+1)\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{k/2}\cdot k^{k/2}$;

(b) S_k（H） $\le 2\mathrm{e}$（$k+1$） $\cdot k^{k/2}$，其中$\mathrm{e} = 2.718..$ 为欧拉数。

特别是，

$$S_k^{\mathrm{HC}} \le 2\mathrm{e}(k+1)\cdot k^{k/2}.$$

有限集 X 上的任何哈密顿回路都包含一个哈密顿路径，后者是 X 的子集。 X 上的任何哈密顿路径都是 X 上的一棵生成树；当 $|X|$为偶数时，它还包含一个完美匹配，后者是 X 的子集。因此，定理 1.8 和 1.9 立即推出以下新的上界。

推论 1.10。 以下结论成立，其中$\mathrm{e} = 2.718..$ 为欧拉数:

(a) $S_k^{\mathrm{HP}}, S_k^{\mathrm{ST}} \le 2\mathrm{e}(k+1)\cdot k^{k/2}$;

(b) $S_k^{\mathrm{PM}} = k^{k/2}\cdot(1+o_k(1))$.

完美匹 配方面，我们给出了一个精确上界，比定理 1.9 所蕴含的上界更强 .

定理 1.11。 对于任意偶数大小的集合 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一个 X 上的完美匹配 M，使得$S_k(M) \le 2(k+1)\cdot k^{k/2}$。换言之，

$$S_k^{\mathrm{PM}} \le 2(k+1)\cdot k^{k/2}.$$

1.2 概述

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们提出一个新的广义球堆积引理。我们首先将其应用于完美匹配情形，并在第 3 节利用 Rankin 关于负点积球面码最大规模的经典结果证明定理 1.11。第 4 节中，我们转而研究哈密顿回路，并通过一种基于有限点集质心性质的替代方法证明定理 1.9。第 5 节中，我们调整第 4] 节的渐近分析，以确立定理 1.8。最后，第 6 节讨论相关问题并作总结。

2 半球 t重打包引理

将以$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ 为中心、半径为 $r \ge 0$ 的开球记为 $\mathrm{B}_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < r\}$。对于边 $e = \mathbf{ab}$，其中 $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$，定义

$$\mathbf{m}_e := \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \quad \mathrm{B}^e_\alpha := \mathrm{B}_{\alpha|e|}(\mathbf{m}_e), \quad \mathrm{hB}^e_\alpha := \begin{cases} \{\mathbf{x} \in \mathrm{B}^e_\alpha : \langle \mathbf{x}, \mathbf{m}_e\rangle < |\mathbf{m}_e|^2\} & \text{if } \mathbf{m}_e \neq \mathbf{0}, \\ \{\mathbf{x} \in \mathrm{B}^e_\alpha : x_1 < 0\} & \text{if } \mathbf{m}_e = \mathbf{0}, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{0} = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^k$ 是原点。换言之，$\mathbf{m}_e$ 是 e的中点，B^e_α 是以$\mathbf{m}_e$为中心、半径为 $\alpha|e|$ 的开球，而 hB^e_α 是具有相同中心和半径、朝向原点的开半球；若$\mathbf{m}_e$ 本身就是原点，则它由第一坐标为负的点组成。

下　　一个定义遵循《离散与计算几何手册》 [15, 第 2.3 节].

定义 2.1. 设 t 为正整数。集合族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ 中的每个集合 $A_i \subseteq \mathbb{R}^k$的体积均有限；如果 $\mathbb{R}^k$ 中的每个点至多属于 $\mathcal{A}$中 t 个集合的内部，则称 t为重打包 。堆积 是 1 重打包。

设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 为有限集。对于 X上的边集 E，令 $\mathfrak{B}^E_\alpha := \{\mathrm{B}^e_\alpha\}_{e\in E}$，且 $\mathfrak{hB}^E_\alpha := \{\mathrm{hB}^e_\alpha\}_{e\in E}$。下面两个引理给出了 $S_k(E)$ 的上界，前提是已知 $\mathfrak{hB}^E_\alpha$ 是某个 α 和 t对应的 t 重打包。

引理 2.2. 设 $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, $e = \mathbf{ab}$ 为一条边，其中 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$，且 $|\mathbf{a}|$、$|\mathbf{b}| \le r$。则 $\mathrm{hB}^e_\alpha \subseteq \mathrm{B}_r(\mathbf{0})$。

证明。令 $\mathbf{x} \in \mathrm{hB}^e_\alpha$。如果 $\mathbf{m}_e = \mathbf{0}$，那么 $|\mathbf{x}| < \alpha|e| \le |\mathbf{a}-\mathbf{b}|/2 \le r$。否则，对于某个 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$，有 $\mathbf{x} = \mathbf{m}_e + \mathbf{z}$，且 $|\mathbf{z}| < \alpha|e|$ 和 $\langle \mathbf{m}_e + \mathbf{z},\ \mathbf{m}_e\rangle < \langle \mathbf{m}_e,\ \mathbf{m}_e\rangle$，即 $\langle \mathbf{z},\ \mathbf{m}_e\rangle < 0$。由此可得

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{m}_e + \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{m}_e|^2 + |\mathbf{z}|^2 + 2\langle \mathbf{z}, \mathbf{m}_e\rangle < |\mathbf{m}_e|^2 + |\mathbf{z}|^2,$$

so

$$|\mathbf{x}| < \sqrt{|\mathbf{m}_e|^2 + \alpha^2|e|^2} \le \sqrt{\left|\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2}{2}} \le r. \qquad \square$$

引理 2.3. 令 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$ 为有限集，E 为 X 上的边集。若 $\mathfrak{hB}^E_\alpha$ 是某个 $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ 和正整数 t 的 t 重打包，则

$$S_k(E) \le \frac{2t}{(2\alpha)^k} \cdot k^{k/2}. \tag{3}$$

证明。注意，对于所有 $\mathbf{a} \in X$，$|\mathbf{a}| \le \frac{\sqrt{k}}{2}$，因此，根据引理 2.2，对每条边 $e \in E$，$\mathrm{hB}^e_\alpha \subseteq \mathrm{B}_{\sqrt{k}/2}(\mathbf{0})$。由于 $\mathfrak{hB}^E_\alpha$ 是 t 重打包，半球 hB^e_α 的体积之和至多为 $\mathrm{B}_{\sqrt{k}/2}(\mathbf{0})$ 的体积的 t 倍。设 V_k 为 k 维单位球的体积，则有

$$\sum_{e\in E} \frac{V_k}{2}\alpha^k|e|^k \le t \cdot V_k \left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^k, \quad \text{so} \quad S_k(E) \le \frac{2t}{(2\alpha)^k} \cdot k^{k/2}. \qquad \square$$

备注 2.4。请注意，如果 $\mathfrak{B}^E_\alpha$是一个 t重打包，那么 $\mathfrak{hB}^E_\alpha$也是，因为根据定义，对于任意边 e，$\mathrm{hB}^e_\alpha \subseteq \mathrm{B}^e_\alpha$。在以下所有对引理 2.3 的应用中，$\mathfrak{B}^E_\alpha$ 都满足更强的条件。

使用半球这一思路由本文作者在 [6]中首次提出。早期研究直接将体积界应用于球的集合 $\mathfrak{B}_\alpha^E$，由此得到关于$S_k(E)$的界，其效果呈指数级减弱：例如， [2,引理 2.4]证明，当 E是 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^k$上的边集时，通常无法用半径小于 $\frac{\sqrt{5}k}{4}$ 的球覆盖$\mathfrak{B}_{1/4}^E$ 的球；在$t=1$ 且 $\alpha = 1/4$ 的情况下，这导致不等式 $S_k(E) \le (\sqrt{5})^k \cdot k^{k/2}$。在相同情况下，引理 2.3 给出$S_k(E) \le 2^{k+1}\cdot k^{k/2}$。

在此背景下使用 t-重堆积和 $t>1$是一个新想法。我们将在下一节看到，增大 t 通常能在相同的边集E上得到 t-重堆积 $\mathfrak{B}_\alpha^E$，且其 α 相对较大，从而使 $S_k(E)$ 的上界 (3) 得到指数级改进。在第 4 节中，我们将证明，对于给定点集 X，只要仔细选择 $t>1$、 α 以及其上的一个哈密顿回路 H，$\mathfrak{B}_\alpha^H$就是一个 t-重堆积。这样便可直接将引理 2.3 应用于哈密顿回路，而无需先用边结构较简单的对象来近似哈密顿回路。

3 完美匹配

本节的目标是证明定理 1.11。我们已经具备了第一个要素：引理 2.3。为了完成证明，对于任意偶数大小的点集 $X \subseteq [0,1]^k$，只需在 X 上找到一个完美匹配M，使得 $\mathfrak{B}_\alpha^M$ 对某个适当的 t 和 α而言是一个 t-重堆积。

暂且只考虑 $t=1$ 的情形。注意，对于任意 $e=\mathbf{ab}$ $f=\mathbf{cd}\in M$， $\mathfrak{B}_\alpha^M$ 是一个堆积，当且仅当不等式 $|\mathbf{m}_e-\mathbf{m}_f| \ge \alpha(|e|+|f|)$ 成立。我们可以利用以下四面体双中线长度的经典公式（例如参见 Altshiller-Court 教科书的 [1, 页 56]），用点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、$\mathbf{d}$ 之间的距离来表示距离$|\mathbf{m}_e-\mathbf{m}_f|$。

引理 3.1. 对于任意 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、$\mathbf{d}\in\mathbb{R}^k$,

$$\left|\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}\right|^2=\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{c}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{d}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{d}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2}{4}.$$

证明。 两边均等于

$$\frac{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2}{4}+\frac{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle+\langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle-\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle-\langle\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle-\langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}{2}.$$ □

完美匹配的以下关键引理可由该公式轻易推出。

引理 3.2。 设 $X\subseteq\mathbb{R}^k$ 是一个大小为偶数的集合，且 M 是 X 上可能的最小 $S_2(M)$ 完美匹配。那么，对于任意 e、$f\in M$，

$$|\mathbf{m}_e-\mathbf{m}_f|^2\ge\frac{|e|^2+|f|^2}{4}.$$

证明。 记 $e=\mathbf{ab}$、 $f=\mathbf{cd}$、 $M_1:=(M\setminus\{e,f\})\cup\{\mathbf{ac},\mathbf{bd}\}$、 $M_2:=(M\setminus\{e,f\})\cup\{\mathbf{ad},\mathbf{bc}\}$。注意，$M_1$ 和 M_2 也是 X上的完美匹配，因此 $S_2(M_1)\ge S_2(M)$ 且 $S_2(M_2)\ge S_2(M)$，或者

$$|\mathbf{a}-\mathbf{c}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{d}|^2\ge|e|^2+|f|^2\quad\text{and}\quad|\mathbf{a}-\mathbf{d}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2\ge|e|^2+|f|^2.$$

于是，由引理 3.1，

$$|\mathbf{m}_e-\mathbf{m}_f|^2=\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{c}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{d}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{d}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2-|e|^2-|f|^2}{4}\ge\frac{|e|^2+|f|^2}{4}.$$ □

结合引理 3.2 与不等式 $|e|^2+|f|^2\ge\frac{(|e|+|f|)^2}{2}$，我们可知集合 $\mathfrak{B}_\alpha^M$是 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$的一个堆积，并且任何定义在 X上的 S_2-极小完美匹配 M都满足这一点。结合引理 2.3，可得$S_k^{\mathrm{PM}}\le 2\cdot(\sqrt{2})^k\cdot k^{k/2}$，见定理 3.4。不过，通过考虑 $t>1$ 重打包而非t，我们可以得到一个强得多的界。具体而言，我们将证明，在与引理 3.2 相同的假设下， $\mathfrak{B}_{1/2}^M$是一个（$k+1$）重打包，这将用到具有负点积的球面码的性质。我们还将在第 4 节探讨另一种方法。

令 S_k 表示以原点为中心的 k 维单位球面，即 $\mathsf{S}_k:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k:\ |\mathbf{x}|=1\}$。维数为 k、大小为 n 且最大点积为 s 的 (k,n,s)-球面码 是由 n 个点组成的集合 $X\subseteq\mathsf{S}_k$，其中任意两个不同的点 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ 均满足 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\le s$。Rankin [12] 确定了 $s\le 0$ 时 (k,n,s)-球面码的最大可能大小 n。为方便起见，我们将此结果表述如下，它可由 [12, 定理 1]直接推出。

引理 3.3 (Rankin)。 若一个(k, n, s)-球面码满足 $s < 0$，则其有 $n \le k+1$。

命题 3.4。 设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个偶数大小的集合，并设 M 是 X 上具有可能的最小值 $S_2(M)$ 的完美匹配。则 $\mathfrak{B}^M_{1/2}$ 是一个 $(k+1)$ 重打包。

证明。 固定任意一点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$，并设它包含在球 $\mathrm{B}^{e_i}_{1/2}$ 中，该球对应于 n 条不同边 $e_1, \dots, e_n \in M$，即 $|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|^2 < |e_i|^2/4$，其中 $1 \le i \le n$。根据引理 3.2，对于任意 $i \ne j$，我们有

$$|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{m}_{e_j}|^2 \ge \frac{|e_i|^2 + |e_j|^2}{4} > |\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{m}_{e_j} - \mathbf{x}|^2,$$

因此

$$\langle \mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}, \mathbf{m}_{e_j} - \mathbf{x} \rangle = \frac{|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{m}_{e_j} - \mathbf{x}|^2 - |(\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}) - (\mathbf{m}_{e_j} - \mathbf{x})|^2}{2} < 0.$$

于是集合 $\left\{ \frac{\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}}{|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|} : 1 \le i \le n \right\}$ 是某个 $s < 0$ 的 (k, n, s)-球面码，因此根据引理 3.3，$n \le k+1$。 □

定理 *1.11* 的证明。 经过一次平移，我们可以假设 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$。设 M 是 X 上使 $S_2(M)$ 最小的完美匹配。根据命题 3.4，$\mathfrak{B}^M_{1/2}$ 是一个 $(k+1)$ 重打包，因此 $\mathfrak{hB}^M_{1/2}$ 也是如此。将引理 2.3 应用于 $E = M$、$t = k+1$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$，我们得到

$$S_k(M) \le \frac{2(k+1)}{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^k} \cdot k^{k/2} = 2(k+1) \cdot k^{k/2}.$$ □

4 个哈密顿回路

乍看之下，要证明哈密顿回路的引理 3.2 类似结果似乎是不可能的，因为一条（即使是最优的）回路中两条边的中点可以任意接近，甚至可能重合，例 1.4 就是如此。然而，事实证明，如果考虑四条边而不是两条边，这样的类似结果确实存在。

引理 4.1. 设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$，并令 H 为 X 上具有可能的最小 $S_2(H)$ 的哈密顿回路。那么，对于任意四条边 e_1、e_2、e_3、$e_4 \in H$，按它们在回路中出现的顺序编号，

$$|\mathbf{m}_{e_1} - \mathbf{m}_{e_3}|^2 + |\mathbf{m}_{e_2} - \mathbf{m}_{e_4}|^2 \ge \frac{|e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2 + |e_4|^2}{4}.$$

证明。令 $F := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，$e_i = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$，$1 \le i \le 4$，使得 $H = F \cup P_{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2} \cup P_{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_3} \cup P_{\mathbf{b}_3\mathbf{a}_4} \cup P_{\mathbf{b}_4\mathbf{a}_1}$，其中 $P_{\mathbf{xy}}$ 是一条端点为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的（可能为空）路径，见图2（左）。记 $F_1 := \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_2\mathbf{a}_4\}$，$F_2 := \{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_2\mathbf{b}_4\}$，$H_1 := (H \setminus F) \cup F_1$ 和 $H_2 := (H \setminus F) \cup F_2$。注意，$H_1$ 和 H_2 也是 X 上的哈密顿回路，见图2（中、右）。因此 $S_2(H_1) \ge S_2(H)$ 且 $S_2(H_2) \ge S_2(H)$，从而 $S_2(F_1) \ge S_2(F)$ 且 $S_2(F_2) \ge S_2(F)$。

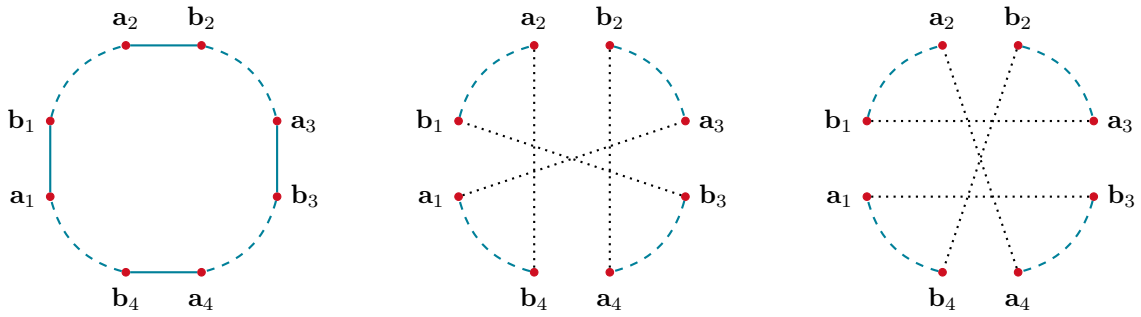

图2： 仅在两个端点都位于 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4\}$ 中的边不同的哈密顿回路。

A两次应用引理 3.1，对于点 $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{b}_1$,$\mathbf{a}_3$,$\mathbf{b}_3$，和点 $\mathbf{a}_2$,$\mathbf{b}_2$,$\mathbf{a}_4$,$\mathbf{b}_4$,，我们得到

$$|\mathbf{m}_{e_1}-\mathbf{m}_{e_3}|^2+|\mathbf{m}_{e_2}-\mathbf{m}_{e_4}|^2=\frac{S_2(F_1)+S_2(F_2)-S_2(F)}{4}\geq\frac{S_2(F)}{4}=\frac{|e_1|^2+|e_2|^2+|e_3|^2+|e_4|^2}{4}.\quad\square$$

根据引理 4.1，在相同记号下，要么 $|\mathbf{m}_{e_1}-\mathbf{m}_{e_3}|^2\geq\frac{|e_1|^2+|e_3|^2}{4}$，要么$|\mathbf{m}_{e_2}-\mathbf{m}_{e_4}|^2\geq\frac{|e_2|^2+|e_4|^2}{4}$，也就是说，要么 $|\mathbf{m}_{e_1}-\mathbf{m}_{e_3}|\geq\frac{|e_1|+|e_3|}{\sqrt{8}}$，要么 $|\mathbf{m}_{e_2}-\mathbf{m}_{e_4}|\geq\frac{|e_2|+|e_4|}{\sqrt{8}}$。由此可知，$\mathfrak{B}_\alpha^H$ 是 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$ 的三重装填，并且任意 S_2-极小哈密顿回路 H 都位于 X上。结合引理 2.3，我们已经得到 $S_k^{\mathrm{HC}}\leq 6\cdot 2^{k/2}\cdot k^{k/2}$，这比此前已知的关于 S_k^{HC}的所有上界（包括渐近上界）都强得多。

与上一节一样，通过考虑具有更大 t的 t重打包，我们可以进一步加强结果。一种做法是再次应用引理 3.3。不过，我们用另一种在某种意义上更为初等的方法证明定理 1.9。以下引理陈述了这种方法，它利用有限点集的质心的性质。为求完整，在附录 A 中，我们给出利用引理 3.3 得到 S_k^{HC}的精确上界以及利用引理 4.2 得到 S_k^{PM}的精确上界的另一种证明。结果发现，这两者都略弱于定理 1.9 和 1.11。

引理 4.2. 设 $n\geq 1$ 和$\mathbf{a}_1$，…，$\mathbf{a}_n\subseteq\mathbb{R}^k$。对于任意$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$，

$$\sum_{i=1}^n|\mathbf{a}_i-\mathbf{x}|^2\geq\frac{1}{n}\sum_{i<j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|^2,$$

等号仅当$\mathbf{x}=\mathbf{m}$时成立，其中$\mathbf{m}:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbf{a}_i$是点$\mathbf{a}_1$，…，$\mathbf{a}_n$的质心。

证明。 注意到

$$|\mathbf{m}|^2=\langle\mathbf{m},\mathbf{m}\rangle=\sum_{i=1}^n\frac{|\mathbf{a}_i|^2}{n^2}+\sum_{i<j}\frac{2\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle}{n^2}.$$

Then

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|\mathbf{a}_i-\mathbf{x}|^2-\frac{1}{n}\sum_{i<j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|^2&=n|\mathbf{x}|^2-2\sum_{i=1}^n\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{x}\rangle+\sum_{i=1}^n|\mathbf{a}_i|^2-\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^n|\mathbf{a}_i|^2+\sum_{i<j}\frac{2\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle}{n}\\&=n|\mathbf{x}|^2-2n\langle\mathbf{m},\mathbf{x}\rangle+n|\mathbf{m}|^2=n|\mathbf{m}-\mathbf{x}|^2\geq 0,\end{aligned}$$

等号仅当$\mathbf{x}=\mathbf{m}$时成立。 $\square$

命题 4.3. 设 $X\subseteq\mathbb{R}^k$ 为有限集，H 为 X 上可能的最小值为 $S_2(H)$的哈密顿回路，$t\geq 1$ 为正整数，且 $\alpha:=\sqrt{4^{\,t-(t+1)}}$。则 $\mathfrak{B}_\alpha^H$是一个$(2t+1)$重堆积。

证明。 任取一点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$，并设它包含在 $2n$ 个球 $\mathrm{B}_\alpha^{e_1}$，$\mathrm{B}_\alpha^{f_1}$，…，$\mathrm{B}_\alpha^{e_n}$，$\mathrm{B}_\alpha^{f_n}$中，这些球对应的边在回路上依次为 e_1，f_1，…，e_n，$f_n\in H$。我们有

$$\sum_{i=1}^n\left(|\mathbf{m}_{e_i}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{m}_{f_i}-\mathbf{x}|^2\right)<\sum_{i=1}^n\alpha^2\left(|e_i|^2+|f_i|^2\right)=\frac{t}{4(t+1)}\sum_{i=1}^n\left(|e_i|^2+|f_i|^2\right).$$

另一方面，对点集 $\{\mathbf{m}_{e_i}\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{m}_{f_i}\}_{i=1}^n$两次应用引理 4.2，然后对所有 $i<j$ 应用关于边 e_i,f_i,e_j,f_j 的引理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left(|\mathbf{m}_{e_i}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{m}_{f_i}-\mathbf{x}|^2\right)&\geq\sum_{i<j}\frac{|\mathbf{m}_{e_i}-\mathbf{m}_{e_j}|^2+|\mathbf{m}_{f_i}-\mathbf{m}_{f_j}|^2}{n}\\&\geq\sum_{i<j}\frac{|e_i|^2+|e_j|^2+|f_i|^2+|f_j|^2}{4n}=\frac{n-1}{4n}\sum_{i=1}^n\left(|e_i|^2+|f_i|^2\right).\end{aligned}$$

由此可得 $\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}=\frac{n-1}{4n}<\frac{t}{4(t+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(t+1)}$，这意味着 $n<t+1$，即没有任何点包含在 $\mathfrak{B}_\alpha^H$ 的 $2(t+1)$ 个球中。 $\square$

定理 *1.9(a)* 的证明。经过平移后，我们不妨假设 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$。设 H 是 X 上使 $S_2(H)$ 最小的哈密顿回路，并令 $\alpha = \sqrt{4^{\,t\,(t+1)}}$。由命题 4.3，$\mathfrak{B}_\alpha^H$ 是一个 $(2t+1)$ 重打包，因此 $\mathfrak{h}\mathfrak{B}_\alpha^H$ 也是如此。将引理 2.3 应用于 $E = H$，得到

$$S_k(H) \le \frac{2(2t+1)}{\left(2 \cdot \sqrt{\frac{t}{4(t+1)}}\right)^k} \cdot k^{k/2} = 2(2t+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{k/2} \cdot k^{k/2}. \qquad \square$$

引理 4.4。对于任意整数 $k \ge 1$，存在一个整数 $t \ge 1$，使得 $(2t+1) \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{k/2} \le (k+1)\mathrm{e}$，其中 $\mathrm{e} = 2.718..$ 是欧拉数。

证明。若 k 是偶数，利用不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \mathrm{e}$，对于 $t = k/2$，我们有 $(2t+1) \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \le (k+1)\mathrm{e}$。若 $k = 1$，对于 $t = 1$，我们有 $3\sqrt{2} \le 2\mathrm{e}$。若 $k \ge 3$ 是奇数，对于满足 $k = 2t-1$ 的 t，利用不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \mathrm{e} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$，

$$\begin{aligned}(2t+1) \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t-\frac{1}{2}} &\le (2t+1) \cdot \frac{k+1}{2t} \cdot \sqrt{\frac{t}{t+1}} \cdot \mathrm{e} \cdot \left(1 - \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t^2}\right) \\ &= (k+1)\mathrm{e} \cdot \frac{(2t+1) \cdot (2t^2 - t + 1)}{4t^2\sqrt{t(t+1)}}.\end{aligned}$$

由于 $k \ge 3$，我们有 $t \ge 2$，因此

$$\frac{(2t+1)(2t^2-t+1)}{4t^2\sqrt{t(t+1)}} = \frac{4t^3+t+1}{4t^2\sqrt{t(t+1)}} \le \frac{4t^3+t^2}{4t^2\sqrt{t(t+1)}} = \frac{4t+1}{4\sqrt{t(t+1)}} \le 1,$$

因为 $t+1 \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，并且 $(4t+1)^2 = 16t^2+8t+1 \le 16t^2+16t = \left(4\sqrt{t(t+1)}\right)^2$ 对于 $t \ge \frac{1}{8}$。 $\square$

定理 *1.9(b)* 的证明。应用定理 1.9(a)，其中 t 由引理 4.4 给出。 $\square$

5 渐近最优上界

下面定理 1.8 的证明与 [2] 中定理 1.5 和定理 1.6 的证明结构类似。下面两个引理分别对应于引理 3.3 中的情形 $m = 3$ 以及 [2] 中的引理 4.3。

引理 5.1 (Balogh、Clemen 和 Dumitrescu)。对于任意 $X \subseteq [0,1]^k$（满足 $|X| \ge 3$），存在两个不同的点 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q} \in X$（满足 $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \le \sqrt[k]{\frac{2}{3}}$）。

引理 5.2 (Balogh、Clemen 和 Dumitrescu)。存在 k_0，使得对于所有整数 $k \ge k_0$，以下结论成立。设 $0 < \alpha < 0.99$，并设 $Y \subseteq [0,1]^k$，满足对于任意两个不同的点 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in Y$，都有 $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| > \alpha\sqrt{k}$。那么 $|Y| \cdot \alpha^k \le 0.999^k$。

对于有限集 $X \subseteq \mathbb{R}^k$，我们将 X 上由边构成的集合 E 称为大小为 m 的路径族，如果 $|E| = m$，且 E 是一条或多条顶点不相交路径的并。

注记 5.3。X 上的哈密顿路径恰好是 X 上的、大小为 $|X|-1$的路径族。更一般地，对于 X上的哈密顿回路 H，任意满足 $|E| = m < |X|$ 的子集 $E \subsetneq H$ 都是 X 上的、大小为 m的路径族。

第 4 节中用于哈密顿回路的论证稍作修改后即可应用于固定大小的路径族。特别地，我们可以证明固定大小路径族的命题 4.3 类似结果。不过，对我们的目的而言，以下结论已经足够。

命题 5.4。设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$，且 E 是 X 上的一个大小为 m 的路径族，并且在 X 上的所有大小为 m 的路径族中，E 的 $S_2(E)$ 最小。那么 $\mathfrak{B}^E_{1/\sqrt{8}}$ 是一个三重装填。

证明。设 H 是 X 上的任意一个满足 $E \subseteq H$的哈密顿回路。设 E的任意四条不同边为 e_1，e_2，e_3，$e_4 \in E$，并按它们在回路 H上出现的顺序编号。只需证明，对于某个 $i \ne j$，球 $\mathrm{B}^{e_i}_{1/\sqrt{8}}$ 与球 $\mathrm{B}^{e_j}_{1/\sqrt{8}}$ 不相交。

令 $F := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$，$1 \le i \le 4$，使得 $H = F \cup P_{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2} \cup P_{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_3} \cup P_{\mathbf{b}_3\mathbf{a}_4} \cup P_{\mathbf{b}_4\mathbf{a}_1}$，其中 $P_{\mathbf{xy}}$ 是一条端点为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的（可能为空的）路径。记 $F_1 := \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_2\mathbf{a}_4\}$，

$F_2 := \{\mathsf{a}_1\mathsf{b}_3, \mathsf{b}_1\mathsf{a}_3, \mathsf{a}_2\mathsf{a}_4, \mathsf{b}_2\mathsf{b}_4\}$, $H_1 := (H \setminus F) \cup F_1$ 以及 $H_2 := (H \setminus F) \cup F_2$。由于 H_1 和 H_2 也是 X 上的哈密顿回路（见图2），根据注 5.3，可得 $E_1 := (E \setminus F) \cup F_1 \subseteq H_1$ 和 $E_2 := (E \setminus F) \cup F_2 \subseteq H_2$ 是 X 上大小为 m 的路径族。于是 $S_2(E_1) \geq S_2(E)$ 且 $S_2(E_2) \geq S_2(E)$，因此 $S_2(F_1) \geq S_2(F)$ 且 $S_2(F_2) \geq S_2(F)$。应用引理 3.1 两次，分别针对点 $\mathsf{a}_1, \mathsf{b}_1, \mathsf{a}_3, \mathsf{b}_3$, 和点 $\mathsf{a}_2, \mathsf{b}_2, \mathsf{a}_4, \mathsf{b}_4$, ，得到

$$|\mathbf{m}_{e_1} - \mathbf{m}_{e_3}|^2 + |\mathbf{m}_{e_2} - \mathbf{m}_{e_4}|^2 = \frac{S_2(F_1) + S_2(F_2) - S_2(F)}{4} \geq \frac{S_2(F)}{4} = \frac{|e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2 + |e_4|^2}{4}.$$

那么，对于 $i = 1$ 和 $j = 3$，或者对于 $i = 2$ 和 $j = 4$，我们有 $|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{m}_{e_j}|^2 \geq \frac{|e_i|^2 + |e_j|^2}{4} \geq \frac{(|e_i| + |e_j|)^2}{8}$，因此 $|\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{m}_{e_j}| \geq \frac{|e_i| + |e_j|}{\sqrt{8}}$。由此可知，球 $\mathrm{B}^{e_i}_{1/\sqrt{8}}$ 和 $\mathrm{B}^{e_j}_{1/\sqrt{8}}$ 不相交。 □

定理 *1.8* 的证明。设 k 充分大。对于 $0 \leq i < n$，令 E_i 为 X 上的一个大小为 i的路径族，使其在 X上所有大小为 i 的路径族中具有最小的 $S_2(E_i)$；令 i_0 为最小的 i，使得$S_2(E_{i+1}) - S_2(E_i) > \frac{1}{\sqrt{k}}$；若不存在这样的 i，则令 $i_0 = i_0 = n - 1$。

一方面，对于任意 $e \in E_{i_0}$，集合 $E_{i_0} \setminus \{e\}$ 是 X上的一个大小为 $i_0 - 1$ 的路径族，因此

$$S_2(E_{i_0}) - |e|^2 = S_2(E_{i_0} \setminus \{e\}) \geq S_2(E_{i_0 - 1}),$$

即，根据 i_0 的定义，

$$|e|^2 \leq S_2(E_{i_0}) - S_2(E_{i_0 - 1}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{for any } e \in E_{i_0}. \tag{4}$$

另一方面，对于 E_{i_0} 中不同路径的任意两个端点$\mathbf{u}$，$\mathbf{v} \in X$，集合 $E_{i_0} \cup \{\mathbf{uv}\}$ 是 X 上大小为 $i_0 + 1$ 的路径族，因此

$$S_2(E_{i_0}) + |\mathbf{uv}|^2 = S_2(E_{i_0} \cup \{\mathbf{uv}\}) \geq S_2(E_{i_0 + 1}),$$

因此，再次利用 i_0 的定义，

$$|\mathbf{uv}|^2 \geq S_2(E_{i_0 + 1}) - S_2(E_{i_0}) > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{for any two endpoints } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \text{ of different paths in } E_{i_0}. \tag{5}$$

Set

$$\ell := \left\lceil \log_{1 + \frac{1}{k}} \left(0.9 k^{\frac{3}{4}}\right) \right\rceil = O(k \log k), \quad a_i := \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^i}{k^{\frac{3}{4}}}$$

对整数 $0 \leq i \leq \ell$。注意，对于 $i < \ell$，有 $a_i < 0.9$，且 $a_\ell \geq 0.9$。

从 E_{i_0} 开始，依次添加连接两条不同路径端点的最短边，构造一条哈密顿路径 P。对于 $0 \leq i \leq \ell$，令 $P_i \subseteq P$ 为由所有满足 $|e| \leq a_i \sqrt{k}$ 的边 $e \in P$ 构成的路径族。于是 $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_\ell \subseteq P$，并且对于 P_i 中不同路径的任意两个端点$\mathbf{u}$，$\mathbf{v} \in X$，有 $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| > a_i \sqrt{k}$。

由 (4) 和 (5)，我们有 $P_0 = E_{i_0}$，因此 P_0 是所有大小为 i_0 的路径族中 S_2-最小的。于是，根据命题 5.4，$\mathfrak{B}^{P_0}_{1/\sqrt{8}}$ 是一个三重装填。众所周知，k 维单位球的体积 V_k 为

$$V_k = \begin{cases} \frac{\pi^{k/2}}{(k/2)!} & \text{if } k \text{ is even,} \\ \frac{2^k \cdot \pi^{(k-1)/2}((k-1)/2)!}{k!} & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

根据斯特林近似，$V_k \sim \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(\frac{2\pi \mathrm{e}}{k}\right)^{k/2}$。由于对任意 $e \in P_0$ 都有 $|e| \leq a_0 \sqrt{k} = k^{-1/4}$，因此我们有 $\bigcup_{e \in P_0} \mathrm{B}^e_{1/\sqrt{8}} \subseteq \left[-k^{-1/4}, 1 + k^{-1/4}\right]$，所以

$$\sum_{e \in P_0} V_k \cdot \left(\frac{|e|}{\sqrt{8}}\right)^k \leq 3 \cdot \left(1 + 2k^{-1/4}\right)^k, \quad \text{thus} \quad \sum_{e \in P_0} |e|^k \leq \frac{3 \cdot 8^{k/2} \cdot \left(1 + 2k^{-1/4}\right)^k}{V_k} \leq 0.69^k \cdot k^{k/2},$$

当 k 充分大时。

现在，对于 $0 \leq i < \ell$，令 X_i 为一个集合，其中包含路径族 P_i 中每条路径的一个端点，因此 $|X_i| = |X| - |P_i|$。那么，对于任意不同的 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v} \in X_i$，都有 $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| > a_i \sqrt{k}$，并且 $|P_{i+1} \setminus P_i| \leq |P| - |P_i| = (|X| - 1) - (|X| - |X_i|) < |X_i|$。根据引理 5.2，我们有 $|X_i| \cdot a_i^k \leq 0.999^k$。那么

$$\sum_{e \in P_{i+1} \setminus P_i} |e|^k < |X_i| \cdot \left(a_{i+1} \sqrt{k}\right)^k = |X_i| \cdot \left(a_i \sqrt{k}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq \mathrm{e} \cdot 0.999^k \cdot k^{k/2},$$

其中 e $=2.718..$ 是欧拉数。因此

$$\sum_{e\in P_\ell}|e|^k=\sum_{e\in P_0}|e|^k+\sum_{i=1}^{\ell-1}\sum_{e\in P_{i+1}\setminus P_i}|e|^k<0.69^k\cdot k^{k/2}+\mathrm{e}\ell\cdot 0.999^k\cdot k^{k/2}=o_k(k^{k/2})$$

当 k 足够大时，因为 $\ell=O(k\log k)$。

由于在 P_ℓ 中，任意两条不同路径的端点 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 均满足 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|>a_\ell\sqrt{k}\geq 0.9\sqrt{k}>\sqrt{\frac{2k}{3}}$，由引理 5.1 可知，$P_\ell$ 至多由两条路径组成，即 $|P\setminus P_\ell|\leq 1$，因此 P 就是所需的哈密顿路径。 □

6 总结

定理 1.7 和 1.9 是非构造性的，并未提供一种计算上高效的方法来寻找所讨论的哈密顿回路。为了得到构造性结果，我们可以将这些定理与一种近似算法结合起来。

顶点集为 X、边权为 $w(a,b)$、$a,b\in X$ 的完全图满足 τ-松弛三角不等式，当且仅当 $\tau\geq 1$ 若 $w(a,c)\leq\tau\cdot(w(a,b)+w(b,c))$ 对所有 $a,b,c\in X$ 均成立。Bender 和 Chekuri [3, 定理 1] 给出了一种多项式时间的 4τ- 近似算法，用于求解满足 τ-松弛三角不等式的图上的旅行商问题。根据 Hölder 不等式，对于任意 a、b、c $\in\mathbb{R}^k$，我们有

$$|\mathbf{a}-\mathbf{c}|^k\leq\left(|\mathbf{a}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{c}|\right)^k\leq\left(1^{\frac{k}{k-1}}+1^{\frac{k}{k-1}}\right)^{k-1}\left(|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^k+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^k\right)=2^{k-1}\left(|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^k+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^k\right).$$

换句话说，对于有限集 $X\subseteq\mathbb{R}^k$，带有边权 $w(\mathbf{a},\mathbf{b}):=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^k$,$\mathbf{a},\mathbf{b}\in X$ 的完全图 $K(X)$ 满足 2^{k-1}-松弛三角不等式，这意味着以下推论成立。

推论 6.1。对于任意 $X\subseteq[0,1]^k$、$|X|=n$，可以在关于 n 的多项式时间内在 X 上构造一条哈密顿回路 H，使得 $S_k(H)\leq 2^{k+2}\cdot\mathrm{e}(k+1)\cdot k^{k/2}$，或者 $S_k(H)\leq 2^{k+2}\cdot k^{k/2}\cdot(1+o_k(1))$。

在论文结尾，[2], Balogh、Clemen 和 Dumitrescu 提出了这个问题的一个变体，用另一项条件替代 $X\subseteq[0,1]^k$：他们要求确定所有满足 $\operatorname{diam}X\leq 1$ 的有限集 $X\subseteq\mathbb{R}^k$ 上 $S_k^{\mathrm{HC}}(X)$ 的极值。他们指出，单位单纯形 $\mathbb{R}^k$ 中由 X_k 个顶点组成的集合 $k+1$ 满足 $\operatorname{diam}X_k=1$ 且 $S_k^{\mathrm{HC}}(X_k)=k+1$，并询问这是否为最优结果。借助现有工具，我们可以证明以下上界。

定理 6.2. 对于任意满足 直径 $X\leq 1$ 的有限集 $X\subseteq\mathbb{R}^k$，存在一个在 X 上的哈密顿回路 H，使得

$$S_k(H)\leq 2\mathrm{e}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^{k/2}\cdot(k+1)\leq 2\mathrm{e}\cdot 2^{k/2}\cdot(k+1),$$

其中 $\mathrm{e}=2.718..$ 是欧拉数。

证明. 根据荣格定理 [8]（参见 [7, 定理 3.3], 了解较新的论述），存在一个半径为 $r:=\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$ 的闭球，其中包含 X。随后，经过平移，我们可以假设对任意 $\mathbf{a}\in X$，都有 $|\mathbf{a}|\leq r$。令 H 为 X 上使 $S_2(H)$ 最小的哈密顿回路，并令$\alpha=\sqrt{\frac{t}{4(t+1)}}$，其中 t 由引理 4.4 给出，于是

$$\frac{2t+1}{\alpha^k}\leq(k+1)\mathrm{e}\cdot 2^k.$$

根据命题 4.3，$\mathfrak{B}_\alpha^H$ 是一个（$2t+1$）重堆积，因此 $\mathfrak{hB}_\alpha^H$ 也是。由引理 2.2，对每条边 $e\in H$，$\mathfrak{hB}_\alpha^e\subseteq\mathrm{B}_r(\mathbf{0})$。记 V_k 为 k 维单位球的体积，则有

$$\sum_{e\in H}\frac{V_k}{2}\alpha^k|e|^k\leq(2t+1)\cdot V_k r^k,\quad\text{so}\quad S_k(H)\leq 2\cdot\frac{2t+1}{\alpha^k}\cdot r^k\leq 2\mathrm{e}(k+1)\cdot\left(\frac{2k}{k+1}\right)^{k/2}.$$ □

致谢

Alexey Gordeev 是 Momentum MSCA 计划的受资助者。该计划由欧盟委员会通过 HORIZON-MSCA-2023-COFUND 计划和匈牙利科学院秘书处（MTA）共同资助。

参考文献

[1] N. Altshiller-Court。《现代纯立体几何》。Macmillan，1935年。[2] J. Balogh、F. C. Clemen 和 A. Dumitrescu。《单位立方体中点的旅行商问题》。Algorithmica，86(9):3054–3078，2024年。[3] M. A. Bender 和 C. Chekuri。《带参数化三角不等式的旅行商问题的性能保证》。Information Processing Letters，73(1):17–21，2000年。[4] B. Bollob´as 和 A. Meir。《k维单位立方体中的旅行商问题》。Operations Research Letters，11(1):19–21，1992年。[5] N. Christofides。《旅行商问题新启发式算法的最坏情况分析》。报告388，卡内基梅隆大学工业管理研究生院，1976年。[6] A. Gordeev。《基于Christofides的方法解决单位立方体中的旅行商问题（扩展摘要）》。载于第13届欧洲组合学、图论与应用会议论文集 EUROCOMB'25（布达佩斯，2025年8月25日至29日），第559–565页，2025年。[7] P. M. Gruber。《凸几何与离散几何》。数学科学基础丛书第336卷。施普林格，柏林，2007年。[8] H. Jung。《包围空间图形的最小球》。Journal f ¨ur die reine und angewandte Mathematik（克雷尔杂志），123:241–257，1901年。[9] A. Meir。《涉及最近邻算法的几何问题》。Operations Research Letters，6(6):289–291，1987年。[10] D. J. Newman。《问题研讨班》。施普林格，纽约，1982年。[11] A. Proskurowski 和 M. M. Sys·lo。《外平面图的高效顶点着色与边着色》。SIAM代数离散方法杂志，7(1):131–136，1986年。[12] R. A. Rankin。《n维空间中球冠的最密堆积》。格拉斯哥数学学会会刊，2(3):139–144，1955年。[13] M. Sekanina。《图顶点的一种排序》。ˇCasopis pro pˇestov´an´i matematiky，88(3):265– 282，1963年。[14] M. Sekanina。《图排序算法》。加拿大数学通报，14(2):221– 224，1971年。[15] G. F. T´oth。《堆积与覆盖》。载于《离散与计算几何手册》，第27–66页。Chapman and Hall/CRC，第三版，2017年。

电子邮箱：gordeev.aleksei@renyi.hu 瑞典于默奥大学数学与数理统计系，大学广场4号，901 87 于默奥；匈牙利科学院—匈牙利研究网络阿尔弗雷德·雷尼数学研究所，Realtanoda utca 13–15号，H-1053 布达佩斯，匈牙利；匈牙利科学院—匈牙利研究网络“Momentum”算术组合学研究组，Realtanoda utca 13–15号，H-1053 布达佩斯，匈牙利。

A 替代的精确上界

本节利用球面码的性质（即引理 3.3），证明 S_k^{HC} 的一个精确上界；并利用质心的性质（即引理 4.2），证明 S_k^{PM} 的一个精确上界。由此得到的定理 A.2 和 A.4 分别略弱于定理 1.9 和 1.11。

命题 A.1. 设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 为一个有限集，且 H 是 X 上的一条哈密顿回路，使 $S_2(H)$达到可能的最小值。那么 $\mathfrak{B}_{1/2}^H$ 是一个$3(k+1)$重堆积。

证明。任取一点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$，设它包含在球 $\mathrm{B}_{1/2}^{e_i}$ 中，其中 n 条不同边按回路中的顺序依次为 $e_1, \dots, e_n \in H$。记 $\mathbf{m}_i := \mathbf{m}_{e_i}$，则对于 $1 \le i \le n$，有 $|\mathbf{m}_i - \mathbf{x}|^2 < |e_i|^2/4$。根据引理 4.1，对于任意 $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le n$，有

$$|\mathbf{m}_{i_1}-\mathbf{m}_{i_3}|^2+|\mathbf{m}_{i_2}-\mathbf{m}_{i_4}|^2 \ge \frac{|e_{i_1}|^2+|e_{i_2}|^2+|e_{i_3}|^2+|e_{i_4}|^2}{4} > |\mathbf{m}_{i_1}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{m}_{i_2}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{m}_{i_3}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{m}_{i_4}-\mathbf{x}|^2.$$

因此，要么 $|\mathbf{m}_{i_1}-\mathbf{m}_{i_3}|^2 > |\mathbf{m}_{i_1}-\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{m}_{i_3}-\mathbf{x}|^2$，于是

$$\langle \mathbf{m}_{i_1} - \mathbf{x}, \mathbf{m}_{i_3} - \mathbf{x} \rangle = \frac{|\mathbf{m}_{i_1} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{m}_{i_3} - \mathbf{x}|^2 - |(\mathbf{m}_{i_1} - \mathbf{x}) - (\mathbf{m}_{i_3} - \mathbf{x})|^2}{2} < 0,$$

或者，同理，$\langle \mathbf{m}_{i_2}-\mathbf{x}, \mathbf{m}_{i_4}-\mathbf{x} \rangle < 0$。

考虑一个辅助图 G，其顶点集为 $\{1, \dots, n\}$；每当$\langle \mathbf{m}_i - \mathbf{x}, \mathbf{m}_j - \mathbf{x} \rangle \ge 0$时，就在 $i \ne j$之间连一条边。将该图画在平面上，把顶点放在正 n 边形的各个顶点处，并将 G 的边画成线段。我们已经证明，对于任意 $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$，$i_1 i_3$ 和 $i_2 i_4$ 至多有一个是 G 的边，这意味着该图的画法没有相交边。因此，G 有一种使所有顶点都属于外部面的平面画法，也就是说，G 是外平面图。接着（例如，参见 Proskurowski 和 Sys-lo [11, 定理 1]），G 的顶点可以用三种颜色染色，使得没有一条边的两个端点颜色相同。取最大的颜色类，可得子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$，$|I| \ge \lceil \frac{n}{3} \rceil$，使得对于任意 $i, j \in I$，$i \ne j$，ij 都不是 G 的边，也就是说，$\langle \mathbf{m}_i - \mathbf{x}, \mathbf{m}_j - \mathbf{x} \rangle < 0$。于是，集合 $\{ \frac{\mathbf{m}_i - \mathbf{x}}{|\mathbf{m}_i - \mathbf{x}|} : i \in I \}$ 是某个 $s < 0$ 的 $(k, |I|, s)$ 球面码。因此，根据引理 3.3，$\lceil \frac{n}{3} \rceil \le |I| \le k+1$，即 $n \le 3(k+1)$。 □

定理 A.2. 对于任意有限集 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一个哈密顿回路 H，其位于 X 上，并满足$S_k(H) \le 6(k+1) \cdot k^{k/2}$。换言之，

$$S_k^{\mathrm{HC}} \le 6(k+1) \cdot k^{k/2}.$$

证明。经过平移后，不妨假设 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$。令 H 为 X 上使 $S_2(H)$ 最小的哈密顿回路。由命题 A.1，$\mathfrak{B}_{1/2}^H$ 是一个 $3(k+1)$ 重堆积，因此 $\mathfrak{H}\mathfrak{B}_{1/2}^H$ 也是如此。将引理 2.3 应用于 $E = H$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$，得到

$$S_k(H) \le \frac{2 \cdot 3(k+1)}{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^k} \cdot k^{k/2} = 6(k+1) \cdot k^{k/2}.$$ □

命题 A.3. 设 $X \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个偶数大小的集合，M 是 X 上关于$S_2(M)$ 取可能的最小值的完美匹配，$t \ge 1$ 和 $\alpha := \sqrt{4^{-t/(t+1)}}$ 则 $\mathfrak{B}_\alpha^M$ 是一个 t 重堆积。

证明。任取一点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$，并设其位于球 $\mathrm{B}_\alpha^{e_i}$中，该球对应于 n 条不同边 $e_1, \dots, e_n \in M$。于是

$$\sum_{i=1}^n |\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|^2 < \sum_{i=1}^n \alpha^2 |e_i|^2 = \frac{t}{4(t+1)} \sum_{i=1}^n |e_i|^2.$$

另一方面，利用引理 4.2，再利用引理 3.2，可得

$$\sum_{i=1}^n |\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{x}|^2 \ge \frac{1}{n} \sum_{i<j} |\mathbf{m}_{e_i} - \mathbf{m}_{e_j}|^2 \ge \sum_{i<j} \frac{|e_i|^2 + |e_j|^2}{4n} = \frac{n-1}{4n} \sum_{i=1}^n |e_i|^2.$$

由此可得 $\frac{1}{4} - \frac{1}{4n} = \frac{n-1}{4n} < \frac{t}{4(t+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(t+1)}$，这意味着 $n < t+1$，即 $n \le t$。 □

定理 A.4. 对于任意整数 $k \geq 2$ 以及任意偶数大小的集合 $X \subseteq [0,1]^k$，存在一个在 X 上的完美匹配M，使得

(a) for any integer $t \geq 1$, $S_k(M) \leq 2t \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{k/2} \cdot k^{k/2}$;

(b) $S_k(M) \leq k\mathrm{e} \cdot k^{k/2}$，其中 $\mathrm{e} = 2.718..$ 是欧拉数;

特别是，

$$S_k^{\mathrm{PM}} \leq k\mathrm{e} \cdot k^{k/2}.$$

证明。

(a) 平移后，我们可以假设 $X \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^k$。令 M为 X上的一个完美匹配，使 $S_2(M)$ 最小，并令 $\alpha = \sqrt{4^{\,t}}_{(t+1)}$。根据命题 A.3，$\mathfrak{B}_\alpha^M$是一个 ~~$t$ 重打~~包，因此 $\mathfrak{h}\mathfrak{B}_\alpha^M$也是。应用引理 2.3，并取 $E = M$，得到

$$S_k(M) \leq \frac{2t}{\left(2 \cdot \sqrt{\frac{t}{4(t+1)}}\right)^k} \cdot k^{k/2} = 2t \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{k/2} \cdot k^{k/2}.$$

(b) 若 k 为偶数，则使用 (a) 项并取 $t = k/2$，再利用不等式 $(1+\frac{1}{n})^n \leq \mathrm{e}$，

$$S_k(M) \leq 2 \cdot \frac{k}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot k^{k/2} \leq k\mathrm{e} \cdot k^{k/2}.$$

若 k 为奇数，则使用 (a) 项并取满足 $k = 2t+1$ 的 t，

$$S_k(M) \leq 2t \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}} \cdot k^{k/2} = 2\sqrt{t(t+1)}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot k^{k/2} \leq 2\sqrt{t(t+1)} \cdot \mathrm{e} \cdot k^{k/2}.$$

将此与不等式 $2\sqrt{t(t+1)} \leq 2^{t+}{}_{(t+1)_2}$ ~~$= k$~~结合起来，~~我们再次~~得到 $S_k(M) \leq k\mathrm{e} \cdot k^{k/2}$。 □