# 关系修改问题的描述复杂度

Florian Chudigiewitsch
fch@tcs.uni-luebeck.de 吕贝克大学理论计算机科学研究所，德国吕贝克

Marlene Gründel
mgruendel@ac.tuwien.ac.at
维也纳工业大学算法与复杂性组，奥地利维也纳

Christian Komusiewicz
c.komusiewicz@uni-jena.de
耶拿弗里德里希·席勒大学计算机科学研究所，德国耶拿

Nils Morawietz
nils.morawietz@uni-jena.de 耶拿弗里德里希·席勒大学计算机科学研究所，德国耶拿

Till Tantau
tantau@tcs.uni-luebeck.de
吕贝克大学理论计算机科学研究所，德国吕贝克

arXiv:2603.22043v1 [cs.LO] 23 Mar 2026

## 摘要

关系修改问题以一个逻辑结构和一个自然数 $k$ 作为输入，并询问对该结构进行 $k$ 次修改是否足以使其满足预先定义的性质。我们基于相应目标性质的描述复杂性，对关系修改问题的经典复杂性和参数化复杂性进行了完全分类；其中，后者以修改预算 $k$ 为参数。我们考察了进行修改的不同类型的逻辑结构：单子结构和不含自环的无向图各自呈现出不同的复杂性图景；而在量词模式方面，修改含自环的无向图、有向图或任意逻辑结构的难度则相同。

此外，我们发现，本文考察的所有问题类都具有强二分性：它们要么非常容易求解（即属于 para-$AC^{0\uparrow}$ 或 $TC^0$），要么难以处理（即包含 W[2]-困难或 NP-困难问题）。

## CCS 概念

• **计算理论** → 有限模型论；复杂性理论与逻辑；问题、归约与完全性。

## 关键词

图问题、描述复杂性、边修改、参数化复杂性、电路复杂性

**ACM 参考格式：**
Florian Chudigiewitsch、Marlene Gründel、Christian Komusiewicz、Nils Morawietz 和 Till Tantau。2018年。《关系修改问题的描述复杂性》。载于请从您的版权确认邮件中填写正确的会议名称（会议简称 *'XX*）。ACM，纽约州纽约，美国，18页。https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

允许免费为个人或课堂使用而制作本作品全部或部分内容的数字副本或纸质副本，前提是不得为营利或商业利益制作或分发副本，且副本须包含本声明以及首页上的完整引文。必须尊重本作品中由作者之外的其他人拥有版权的组成部分。注明出处后可以摘录。以其他方式复制、重新发布、发布到服务器或向列表重新分发，须事先获得特定许可和/或支付费用。请向 permissions@acm.org 申请许可。会议简称 *'XX*，纽约州伍德斯托克 © 2018年 版权所有归所有者/作者所有。出版权已授权给 ACM。ACM ISBN 978-1-4503-XXXX-X/2018/06 https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

## 1 引言

近年来，通过考察计算问题到平凡性的距离 [46]，极大地增进了我们对其固有复杂性的理论理解，也推动了实用算法工程的发展。为实现后者，我们可以探究：需要以多大程度（以及付出何种代价）修改给定的输入结构，才能使所得结构具备一种可供算法利用的特定（或多或少“平凡”的）性质。根据允许的修改类型，结构之间的距离可以有不同定义。例如，如果问题的输入是由一个论域和任意元数的关系构成的逻辑结构，我们可以允许向关系添加元组（称为添加或补全问题），删除元组（即删除问题），或者同时允许两者（即编辑问题）。

从历史上看，对这类元问题的研究一直由一种特殊情形主导：输入结构描述一个图，而元组对应边。人们对这类边修改问题 [69, 70] 感兴趣，原因在于，理论计算机科学中许多经过深入研究的问题都可以表述为这类问题。例如，簇删除（或簇编辑）问题 [49, 52] 询问能否通过删除（或添加或删除）输入图中至多 $k$ 条边，得到一个簇图，也就是若干个团的不相交并。类似地，三角形删除 [21, 64] 问题要求我们删除至多$k$ 条边，使图中不含三角形。另一个例子是反馈弧集 问题 [54]：它询问删除至多 $k$ 条边是否足以从给定的有向图中移除所有环。图修改问题在机器学习 [13],、网络分析 [40, 68],、社会学 [56, 58],、数据库 [42],、计算生物学 [16, 17, 62],、计算物理学 [14], 和工程学 [15, 28, 47, 51]等相关领域也有进一步的应用。相较于研究上述各个具体问题，分析将图修改为满足某种性质这一底层元问题，显然有一个优势：能够尽可能通用地（从而可复用地）制定求解流程。

对于密切相关的元问题顶点修改，Lewis 和 Yannakakis 已于 1980 年精确刻画了遗传性质的多项式时间可解性 [55],；而对边修改问题计算复杂性的分析则更为持久，并在过去几十年间成为众多出版物的研究主题，其中许多

内容可见综述 [23, 59, 61]。由于修改问题具有自然的修改预算 $k$，因此特别适合从参数化复杂性 [31, 32], 的角度进行研究：在这一框架下，算法的运行时间不仅根据输入规模 $|I|$来分析，也会考虑数值参数 $k$。从这一视角来看，图修改问题的复杂性也已得到广泛研究。概述请参阅 Crespelle 等人 [30]近期的综述。

系统分析边修改问题的计算复杂性，一种方法是根据目标图类的描述复杂性 [45, 50]对问题进行分组。这种方法基于这样一种期望：如果一个图类容易描述，那么相应的边修改问题——即试图将给定图转换为该图类中某个图的问题——也可能容易求解。衡量某个性质描述复杂性的一种自然方法，是分析在特定逻辑中表达该性质所需的量词模式 。Börger 等人开创了这一研究方向，他们根据量词模式对一阶逻辑中可判定片段进行了完全分类 [20]。后续研究采取了复杂性理论的方法，探讨二阶问题表述中的量词模式在多大程度上影响这些问题的经典 [34, 43, 66] 复杂性和参数化复杂性 [6] 。

与我们的工作最相关的是，Fomin 等人 [38] 研究了基于目标性质一阶形式化中量词交替次数的顶点和边修改问题的参数化复杂性。就边修改而言，他们发现， $\Sigma_2$-公式（以存在量词开头、后接全称量词的一阶公式）只能描述固定参数可解（*FPT*）问题——也就是说，这类问题可以通过算法在 $f(k)\cdot|I|^{O(1)}$ 的时间内求解，其中 $f$是一个可计算函数。另一方面，存在一些可表示为 $\Pi_2$-公式（以全称量词开头、后接存在量词的一阶公式）的W[2]-困难问题。

我们的研究设定。 本文基于目标性质的一阶量词模式，对边删除、边添加和边编辑问题的经典复杂性与参数化复杂性进行了全面而详尽的分类。我们拓展了 [38] 提出的问题设定，考虑三种不同类型的输入图：基本图（有时也称为简单图），即没有自环的无向图；无向图，以及有向图。由于我们确实观察到不同输入设定下的复杂性图景存在差异，因此我们通过允许以任意逻辑结构作为输入，更严格地考察修改问题对输入的敏感性。我们将这些元问题称为关系修改问题。

在表1中，我们概述了主要结果，其中使用了以下记号：对于词汇表 $\tau=\{R_1、\ldots\ldots、R_r\}$ 上的一阶公式，关系修改$^{\text{del}}$arb问题（简称RMdel $_{\text{arb}}$）要求我们判断：给定逻辑结构 $\mathrm{A}=(A、R_1^{\mathcal{A}}、\ldots\ldots、R_r^{\mathcal{A}})$ 和自然数 $k$，是否存在一个元组 $D=(D_1、\ldots\ldots、D_r)$，满足对于所有 $i\in\{1、\ldots\ldots、r\}$ 都有 $D_i\subseteq R_i^{\mathcal{A}}$，且满足 $\|D\|=\sum_{i=1}^{r}|D_i|\leq k$；从 A 中移除该元组后得到的结构 $\mathrm{A}'$ 满足 $\mathrm{A}'\models\phi$ 。我们用 RMadd arb 表示相关问题，即询问是否可以添加至多 $k$ 个元组，使新结构满足 $\phi$。最后，RMedit arb 问题允许添加和删除元组。对于修改操作$\otimes\in\{\text{del, add, edit}\}$，我们分别用 RM$^{\otimes}$ dir（RM$^{\otimes}$ undir 和 RM$^{\otimes}$ basic）表示将修改问题限制在输入和目标结构均为有向图（无向图和基本图）的情形。此外，令 RM$^{\otimes}$mon 表示限制输入结构仅包含一元关系符号的问题。对于无向图和基本图 $G=(V,E)$，其中在删除情形下仅有 $D=(D_1)$，而在添加和编辑情形下有 $D_1\subseteq E$，我们采用更自然的度量 $\|D\|=|\{\{u,v\}\mid(u,v)\in D_1\}|$。我们始终假设给定的一阶公式 $\phi$ 处于前束范式，即其中出现的所有量词都移至公式开头。 $\phi$ 开头处全称量词和存在量词的具体序列由（一阶）量词模式 $p\in\{a,e\}^*$刻画。例如，公式$\phi=\forall u\forall v\exists y(u=v\vee u\sim v\vee(u\sim y\wedge y\sim v))$的量词模式为 $p=aae$。对于所有修改操作 $\otimes\in\{\text{del, add, edit}\}$ 和所有结构类型 $\mathrm{T}\in\{\text{arb, dir, undir, basic, mon}\}$，我们用 RM$^{\otimes}$T ($p$) 表示所有问题 RM$^{\otimes}$T ($\phi$) 构成的类别，其中输入公式 $\phi$具有量词模式 $p$。最后，对于所有问题变体 RM$^{\otimes}$T，我们用 p-RM$^{\otimes}$T 表示该问题的参数化版本，并将修改预算 $k$作为参数。

表1给出了根据量词模式 $p\in\{a,\ e\}^*$（其中 $p\preceq q$表示 $p$是 $q$的子序列）对一阶公式的元组删除、添加和编辑问题进行的完整复杂性分类。请注意，para-AC$^{0\uparrow}$ ⊆包含于 para-P = FPT ⊆ W[2]，并且通常假设 para-AC$^{0\uparrow}$ ⊊ FPT 包含于 FPT ⊊ W[2] 也成立。我们简要介绍表1中的关键见解，并概述本文的主要贡献：

我们的贡献。首先，我们**细化**了 Fomin 等人 [38] 提出的**边修改问题的参数化复杂性**二分性，具体体现在以下几个方面：

(1) 首先，我们解答以下问题。该问题对于理解决定边修改问题计算复杂性的描述性特征至关重要：从可处理性到难处理性的转变，是否仅由量词**交替次数**驱动，还是这条界限取决于恰好具有特定交替次数的**短模式**？ 正如我们所证明的，确实是后者：所有难处理性结果都已适用于非常短且简单的模式。此前已知，可以用 $\Pi_2$ 中的公式定义一个难解问题（更具体地说，其量词模式为 *aeeee*）；而我们发现，仅 $\Pi_2$中最简单且有意义的模式 *ae*就足以确立难处理性。
(2) 我们通过证明所有（固定参数）可处理的修改问题类实际上都属于 para-AC$^{0\uparrow}$，**改进了已有上界** 。从算法视角来看，这意味着这些问题存在高效的**并行固定参数算法**。从逻辑视角来看，这带来了一个有趣的二分性，其中所有

**表1：关系修改问题的经典复杂性（上）和参数化复杂性（下）的完全分类。对于后者，修改预算被视为参数。**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{RM}^{\otimes}$ 无向 ($p$)、关系修改$^{\otimes}$ 有向($p$)和关系修改$^{\otimes}$ 任意($p$) | $\subseteq$ 近似计数$^0$,时<br>$\notin$ $\mathrm{AC}^0$ 但 $\subseteq$ $\mathrm{TC}^0$,当<br>$\cap$NP-困难 $\neq \emptyset$，当 | $p \preceq e^*$。<br>$a \preceq p \preceq e^*a$。<br>$aa$ 或 $ae \preceq p$。 |
| $\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本 ($p$) | $\subseteq$ $\mathrm{AC}^0$,当<br>$\notin$ $\mathrm{AC}^0$ 但 $\subseteq$ $\mathrm{TC}^0$,当<br>$\cap$NP-难 $\neq \emptyset$，当 | $p \preceq e^*$ 或 $a$。<br>$ea$ 或 $ae$ 或 $aa \preceq p \preceq e^*a$ 或 $aa$ 或 $ae$。<br>$aea$ 或 $aee$ 或 $aae$ 或 $eae$ 或 $eaa$ 或 $aaa$ $\preceq p$。 |
| $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{mon}}(p)$ | $\subseteq$ $\mathrm{AC}^0$,当<br>$\notin$ $\mathrm{AC}^0$ 但 $\subseteq$ $\mathrm{TC}^0$,当 | $p \preceq e^*$。<br>$a \preceq p$。 |
| p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 无向 （$p$）、p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 有向（$p$）和 p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 任意（$p$） | $\subseteq$ 参数化-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$，当<br>$\cap$W[2]-困难 $\neq \emptyset$，当 | $p \preceq e^*a^*$。<br>$ae \preceq p$。 |
| p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本 ($p$) | $\subseteq$ para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$，当<br>$\cap$W[2]-困难 $\neq \emptyset$，当 | $p \preceq e^*a^*$ 或 $ae$。<br>$aea$ 或 $aee$ 或 $aae$ 或 $eae$ $\preceq p$。 |
| p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{mon}}(p)$ | $\subseteq$ para-$\mathrm{AC}^0$。 | |

所考虑的问题类要么非常容易求解，要么包含难解问题。

(3) 我们发现了**新的难解问题**，它们本身也值得关注，例如 p-Edge-Adding To Radius $r$和 p-Edge-Editing To Radius $r$，对所有 $r \geq 2$均成立。
(4) 我们通过系统地研究边修改以满足一阶性质时的**经典复杂度**，将其参数化研究与之形成对照。在这里，通过采用细粒度的基于模式的方法，我们同样获得了有趣的见解：例如，对于基本图，我们发现 $\Sigma_2$ 和 $\Pi_2$ 都包含短小且非平凡的易解片段；而纯粹基于交替的研究则会将 $\Pi_1$ 中的整个公式类判定为难解。

我们的结果补充了 Bannach 等人 [7]关于**顶点删除问题**的复杂性图景。特别是，我们发现边修改问题的参数化复杂性要高得多：对于有向图，针对所有呈现 $e^*a^*e^*$ 模式的公式进行顶点删除都是易解的，而我们证明，对于边删除，已经存在可用呈现 $ae$模式的公式描述的难解问题。

超越边修改问题，本文首次指出，**关系修改问题的复杂性取决于允许作为输入的逻辑结构类型以及目标性质**。无论是在参数化情形还是经典情形下，我们都观察到，从基本图过渡到更一般的无向图时，复杂性会跃升。但有趣的是，进一步的所有泛化，即允许使用有向图甚至任意逻辑结构，都不会进一步增加相应问题的复杂性。另一方面，如果词汇表只包含单子符号，该问题总是可处理的。

最后，与人们可能预期的相反，我们证明，对于所有考察的片段，**元组删除、元组添加和元组编辑的复杂性相同**。

进一步的相关工作。 除了上述研究方向外，描述复杂性与参数化复杂性之间的相互作用近年来也引起了更多关注。例如，Fomin 等人 [39], 研究了针对一阶公式的图修改的参数化复杂性，其中修改限于某个消除距离以内。此外，Morelle、Sau 和 Thilikos [60] 最近研究了一大类图修改操作的复杂性，这些操作包括顶点删除、边删除、边收缩和独立集删除等，目标复杂性类为对小图封闭的复杂性类。

本文考虑的问题也曾在一阶逻辑中的遗传模型检验这一背景下得到研究。如果某个逻辑结构及其所有子结构都是一阶公式 $\phi$ 的模型，那么该逻辑结构就是该公式的一个模型。Bodirsky 和 Guzmán-Pro 最近刻画了遗传一阶模型检验具有可处理性的前缀类 [18]。而这个问题的复杂性又与外延存在二阶逻辑的复杂性相关 [19]。

另一项相关研究领域是数据库修复 [2], , 其中删除元组 [29] 和添加元组 [24] 这两种操作都已得到研究。尽管这些工作也针对特定问题探讨了算法和复杂性，但并未从更广泛的意义上严谨考察元组修改。一致查询回答（*CQA*）是一个相关问题：我们的目标并非依据某种规范修复数据库，而是确保针对每个查询检索到的答案都符合某些规范。该问题的经典复杂性在 [65] 中得到研究，其参数化复杂性则在 [57]中得到研究。在 [3], 中，研究了检查修复是否有效以及在给定完整性约束下进行一致查询回答的复杂性；最近， [53], 针对违反主键约束时的一致查询回答给出了四分分类：该问题要么可在$\mathrm{AC}^0$中求解，要么是NL完全、P完全或coNP完全。

并行参数化算法最早由 Cesati 和 Ianni [25]研究。Elberfeld、Stockhusen 和 Tantau [35] 随后为并行参数化复杂性类提供了一个通用框架。一项重要成果是，Chen 和 Flum 通过参数化电路下界证明，以解的大小为参数的 Cliqe 不属于 para-$\mathrm{AC}^0$ [27]。后续工作 [6, 8–12]进一步推进了这条研究路线，其中最令人意外的成果之一是：对于边的基数固定的超图，以解的大小为参数的击中集问题属于 para-$\mathrm{AC}^0$。Hegeman、Martens 和 Laarman [48]对参数化电路类的一致性进行了深入研究，并在 [1, 26]中设计了在并行随机存取机上实现并行参数化算法的实际方案。

本文结构。 我们在第 2 节回顾有限模型论和计算复杂性中的基本概念与术语，然后在第 3 节介绍基本图、无向图和有向图以及单元和任意逻辑结构的关系修改问题的参数化复杂性理论分类，并在第 4 节介绍其经典情形。由于篇幅限制而将证明移至附录的论述，会在正文中以“$\star$”标记。

## 2 描述复杂性、参数化复杂性与电路复杂性

有限模型论中的术语。 我们采用有限模型论中的标准术语。关于比下文更详尽的介绍，请参见例如 [33]。关系词汇表 $\tau$（也称为签名）是一个关系符号集合，并为其中每个符号指定一个正元数，用上标表示。例如，$\tau = \{P^1,\ E^2\}$是一个关系词汇表，其中包含一个一元关系符号 $P$和一个二元关系符号 $E$。在单元词汇表中，每个关系符号的元数均为一。一个有限 $\tau$-结构A由一个有限论域 $A$ 以及对每个元数为 $a_i$的关系 $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^{a_i}$的 $r$关系符号$R_i \in \tau$，$i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$各自对应的内容组成。我们将有限 $\tau$-结构的集合记作 $\mathrm{struc}[\tau]$。我们假设结构以合理的方式编码，例如参见 [44, 第 136]页。我们还假设所有结构都有序。

一阶 $\tau$-公式按通常方式定义。对于一个具有自由变量 $x_1, \ldots\ldots, x_\ell$ 的 $\tau$-公式 $\phi$，论域为 $S$ 的结构 $\mathsf{S} \in \mathrm{struc}[\tau]$，以及 $s_1, \ldots\ldots, s_\ell \in S$，当自由变量被解释为 $s_i$ 时，我们写作 $\mathsf{S} \models \phi[s_1, \ldots, s_\ell]$，表示 S 是 $\phi$ 的模型。如果 $\phi$ 没有自由变量，则我们用 $\mathrm{models}(\phi)$ 表示 $\phi$ 的有限模型类。判定问题 $P$ 是 $\mathrm{struc}[\tau]$ 的一个在同构下封闭的子集。若公式 $\phi$ 刻画 $P$，则 $\mathrm{models}(\phi) = P$。

对于论域分别为 $A$ 和 $B$ 的 $\tau$-结构 A 和 B，如果 $A \subseteq B$，并且对于所有 $r$ 元关系 $R \in \tau$，都有 $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^r$，则称 A 是 B 的一个诱导子结构 。对于集合 $S \subseteq B$，我们用 $\mathsf{B} \setminus S$ 表示由 $B \setminus S$诱导的子结构。

我们将有向图 $G = (V,\ E)$（它由一个非空顶点集 $V$和一个边关系 $E \subseteq V \times V$构成）视为词汇表 $\tau_{\mathrm{digraph}} = \{\sim^2\}$ 上的逻辑结构 G，其中 $V$是论域，且 $\sim^{\mathcal{G}} = E$。无向图是还满足 $\phi_{\mathrm{undirected}} := \forall x \forall y (x \sim y \rightarrow y \sim x)$ 的有向图，而基本图满足 $\phi_{\mathrm{basic}} := \forall x \forall y (x \sim y \rightarrow (y \sim x \wedge x \neq y))$。我们将 $u - v$用作 $\{(u,\ v), (v,\ u)\} \subseteq E$的简写。

对于一个处于前束范式（即所有量词都位于前面）的一阶公式，我们可以为其关联一个量词前缀模式（简称模式），它们是字母表 $\{e,\ a\}$ 上的词。例如，公式 $\phi_{\mathrm{basic}}$ 的模式为 $aa$，而公式 $\phi_{\mathrm{degree} \geq 2} := \forall x \exists y_1 \exists y_2 ((x \sim y_1) \wedge (x \sim y_2) \wedge (y_1 \neq y_2))$ 的模式为 $aee$。再举一例，类 $\Pi_2$中的公式（以全称量词开头且有一次交替）恰好是具有模式 $p \in \{a\}^* \circ \{e\}^*$ 的公式，我们将其简写为 $p \in a^* e^*$。若 $p$是 $q$ 的子序列，我们记作 $p \preceq q$。例如，$aaee \preceq aeaeae$。

当我们考虑对逻辑结构 $\mathsf{A} = (A,\ R_1^{\mathcal{A}},\ \ldots\ldots,\ R_r^{\mathcal{A}})$ 进行修改的预算时，我们有几种自由选择：首先，我们可以规定修改只能针对单个关系，也可以允许修改输入结构中的所有关系。我们将前一种变体称为统一修改，后一种称为不受限制的修改。本文中我们考虑不受限制的修改，但会在结论中讨论统一修改。其次，我们可以选择按添加或删除的每个元组计数（这对有向图和任意结构而言是更自然的衡量方式），也可以只计算我们修改关系时所涉及的不同元素集合的数量（这对基本图和无向图而言是更自然的衡量方式）。对于有向图和任意结构，我们采用前一种衡量方式；对于基本图和无向图，则采用后一种。不过，我们将在结论中讨论，采用相应的另一种计数方式会得到相同的复杂性图景。

设 $\mathsf{A} = (A,\ R_1^{\mathcal{A}},\ \ldots\ldots,\ R_r^{\mathcal{A}})$ 是一个逻辑结构，其中 $R_i$ 对所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$ 的元数均为 $a_i$。一个 调节器 $S = (S_1, \ldots\ldots, S_r)$ 包含集合 $S_i \subseteq A^{a_i}$。如果对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$，我们都有 $S_i \subseteq R_i^{\mathcal{A}}$，则称 $S$ 为一个删除调节器；如果对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, r\}$，我们都有 $S_i \cap R_i^{\mathcal{A}} = \emptyset$，则称 $S$ 为一个添加调节器。我们记作

$$\|S\| := \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \left|\left\{\{u,v\} \mid (u,v) \in S_i\right\}\right| & \mathcal{A} \text{ is an undirected or basic graph,} \\ \sum_{i=1}^{r} |S_i| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在，对于结构 $\mathsf{A} = (A,\ R_1^{\mathcal{A}},\ \ldots\ldots,\ R_r^{\mathcal{A}})$ 和调节器 $S = (S_1, \ldots\ldots, S_r)$，我们定义

$$\mathcal{A} \triangleright S := (A, R_1^{\mathcal{A}} \triangle S_1, \ldots, R_r^{\mathcal{A}} \triangle S_r).$$

为了说明这些概念，我们来考虑图这一特殊情况。对于一个基本图或无向图 $G = (V,\ E)$，删除问题的解只是一个集合 $S \subseteq E$，而添加或编辑问题的解则是一个集合 $S \subseteq V \times V$。

关系修改问题。 本文研究了各种各样的关系修改问题。作为一个入门示例，请考虑以下问题，其中 $\phi$ 是一个一阶 $\tau$-公式：

RM编辑任意 $(\phi)$ **输入：** 一个逻辑结构 $\mathsf{A} = (A,\ R_1^{\mathcal{A}},\ \ldots\ldots,\ R_r^{\mathcal{A}})$ 和一个数字 $k \in \mathbb{N}$。**问题：** 是否存在一个调节器 $S$，满足 $\|S\| \leq k$，使得 $\mathsf{A} \triangleright S \models \phi$?

类似地，我们将 RM添加 $\mathrm{arb}(\phi)$ 定义为这样一个问题：是否存在一个添加调节器 $\|S\| \leq k$，使得 $\mathsf{A} \triangleright S \models \phi$，并且

RM删除 arb($\phi$) 询问是否存在一个删除调节器 $\|S\| \le k$，使得 $\mathbb{A} \triangleright S \models \phi$。

我们通过考虑问题 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{dir}(\phi)$ 来定义对允许的输入和目标结构的限制，其中 $\otimes \in \{\mathrm{add}, \mathrm{del}, \mathrm{edit}\}$，且 $\phi$ 的词汇表仅由一个二元关系 $E$ 组成，从而强制输入和目标结构为有向图。类似地，我们用 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{basic}(\phi) = \mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{dir}(\phi \wedge \phi_{\mathrm{basic}}) \cap \mathrm{models}(\phi_{\mathrm{basic}})$ 表示元问题，其中输入和目标结构为基本图；$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(\phi) = \mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{dir}(\phi \wedge \phi_{\mathrm{undir}}) \cap \mathrm{models}(\phi_{\mathrm{undir}})$ 则强制输入和目标结构为无向图。对于模式 $p \in \{a, e\}^*$，复杂性类 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{arb}(p)$ 包含所有满足 $\phi$ 具有模式 $p$ 的问题 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{arb}(\phi)$。“basic”“undir”和“dir”下标对应的复杂性类也以类似方式定义。

Fomin 等人 [38]观察到，对于量词交替相同的每一类公式，在基本图上，边删除与边添加的复杂性相同。请注意，根据以下观察，在任意逻辑结构上，元组删除与元组添加也具有相同的性质：对于一个结构 $\mathbb{A} = (A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}})$，令 $\overline{\mathbb{A}} = (A, A^{a_1} \setminus R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, A^{a_r} \setminus R_r^{\mathcal{A}})$ 表示其补结构；对于一个公式 $\phi$，令 $\overline{\phi}$ 表示由 $\phi$ 得到的公式：在任意结构、有向图和无向图的情形下，将每个 $R_i(x_1, \ldots, x_{a_i})$ 替换为 $\neg R_i(x_1, \ldots, x_{a_i})$；而当输入限定为基本图时，则将每个 $(x \sim y)$ 替换为 $\neg(x = y) \wedge \neg(x \sim y)$。不难验证以下结论。

观察1. 对于每个一阶公式 $\phi$ 以及每种类型 $\mathrm{T} \in \{\mathrm{arb}, \mathrm{dir}, \mathrm{undir}, \mathrm{basic}\}$，$(\mathcal{A}, k)$ 是 $\mathrm{RM}_{\mathrm{addT}}(\phi)$ 的一个实例，当且仅当 $(\mathcal{A}, k)$ 是 $\mathrm{RM}_{\mathrm{delT}}(\phi)$ 的一个实例。

在后续各节中，我们会根据哪种表述更简洁而交替采用关系删除或关系添加，并运用这一观察。

（参数化）复杂性术语。为了确立经典情形下的可处理性，我们将证明相应问题属于电路类 $\mathrm{AC}^0$。该类包含能够由一族无界扇入电路定义的问题，这些电路具有常数深度和大小 $n^{O(1)}$，可以使用与门、或门和非门；或者属于 $\mathrm{TC}^0$ 类，该类的定义类似，但电路还可以使用阈值门。本文不再进一步讨论一致性问题，但要指出的是，所有情况下都可以实现对数时间一致性。此外，回顾一下，$\mathrm{TC}^0 \subseteq \mathrm{L} \subseteq \mathrm{P}$ 成立。

我们采用参数化复杂性的标准定义，参见例如 [31, 32, 37]。参数化问题 是字母表 $\Sigma$ 上的一个集合 $Q \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$。给定一个实例 $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，我们称 $x$ 为输入，称 $k$ 为参数。我们通过添加前缀 p- 来表示特定问题的参数化版本，例如，$\mathrm{RMdel}\,\mathrm{dir}(\phi)$ 变为 $\text{p-}\mathrm{RMdel}\,\mathrm{dir}(\phi)$。与经典情形类似，我们将通过证明某个参数化问题属于某个参数化电路类（称为 para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$）来确立其可处理性：形式上，para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$ 定义为这样一类参数化问题：它们可以由一族无界扇入电路 $(C_{n,\,k})_{n,\,k\in\mathbb{N}}$ 判定；这些电路可以使用与门、或门和非门，深度为 $f(k)$，大小为 $f(k) \cdot n^{O(1)}$，其中 $f$ 是某个可计算函数。para-$\mathrm{AC}^0$ 的定义类似，只是还要求电路的深度必须为 $O(1)$。注意，当阈值为参数 [9, 时，para-$\mathrm{AC}^0$ 电路可以模拟阈值门（引理 3.3]）。对于适当的统一性概念，有 para-$\mathrm{AC}^0 \subseteq \subseteq$ para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow} \subseteq \subseteq$ para-$\mathrm{P} = \subseteq \mathrm{FPT}$，参见 [9]。在经典情形中，我们使用 $\mathrm{AC}^0$-多对一归约，在参数化设置中则使用 para-$\mathrm{AC}^0$-多对一归约。这两种可归约性都非常弱，其优点是能够导出强有力的困难性结果。

## 3 关系修改问题的参数化复杂性

本节将根据目标性质的一阶量词模式，探讨关系修改问题的参数化复杂性。

### 3.1 无向图、有向图与任意结构

我们首先建立关系修改问题在无向图、有向图和任意结构上的可处理性图景。具体而言，我们将证明这些图景彼此一致，并呈现如下复杂性。

定理 3.1。设 $p \in \{a, e\}^*$ 是一个模式。对于每种修改操作 $\otimes \in \{\mathrm{del}, \mathrm{add}, \mathrm{edit}\}$，有

(1) $\text{p-}\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{arb}(p) \subseteq \text{para-}\mathrm{AC}^{0\uparrow}$，若 $p \preceq e^*a^*$。(2) $\text{p-}\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(p)$ 和 $\text{p-}\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{dir}(p)$ 均包含一个W[2]-困难问题，若 $ae \preceq p$。

我们通过分别证明相应的上界和下界来证明这一结论。请注意，针对任意逻辑结构的上界自然适用于限制更严格的基本图、无向图和有向图。反过来，针对无向图和有向图的困难性结果意味着更一般结构也具有相应的困难性。

上界。通过证明以下引理，我们确立该片段 $e^*a^*$ 对于所有参数化问题版本的可处理性。

引理 3.2。对于每种修改操作 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，都有 $\text{p-}\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{arb}(e^*a^*) \subseteq \text{para-}\mathrm{AC}^{0\uparrow}$。

证明。我们将 Fomin 等人给出的构造 [38]加以推广，使其 (a) 能够处理任意逻辑结构，且 (b) 能够并行化，从而证明这些问题包含于 para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$。

对于 $\text{p-}\mathrm{RMedit}\,\mathrm{arb}(\phi) \in \text{p-}\mathrm{RMedit}\,\mathrm{arb}(e^*a^*)$，设 $\phi$ 是词汇表 $\tau = \{R_1, \ldots, R_r\}$ 上的一阶 $\tau$- 公式，其中关系 $R_i$ 的元数为 $a_i$；进一步设 $\phi$ 具有如下形式：$\exists x_1 \cdots \exists x_c \forall y_1 \cdots \forall y_d(\psi)$，其中 $\psi$ 是无量词公式，且 $c, d \in \mathbb{N}$。我们的目标是设计一种算法：给定逻辑结构 $\mathbb{A} = (A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}})$ 和 $k \in \mathbb{N}$，在 para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$ 中判定是否存在一个调节器 $S$，满足 $\|S\| \le k$，使得 $\mathbb{A} \triangleright S \models \phi$。我们首先注意到以下内容：

设 $v_1, \ldots, v_c$ 是论域 $A$ 中元素的一个序列。那么，要么 $\mathbb{A} \models (\forall y_1 \cdots \forall y_d(\psi))[v_1, \ldots, v_c]$（此时我们接受该实例），要么 $\mathbb{A} \not\models (\forall y_1 \cdots \forall y_d(\psi))[v_1, \ldots, v_c]$。后一种情况下，必定存在论域 $A$ 中元素的一个序列 $u_1, \ldots, u_d$，使得由 $v_1, \ldots, v_c$ 和 $u_1, \ldots, u_d$ 的并集所诱导的结构违反 $\psi$ 所作的断言。如果我们能够

至多编辑 $k$ 个元组，以解决由 $v_1, \ldots, v_c$ 诱导的结构上的所有违反，以及全称变量的每个违反赋值，那么 $\mathrm{A} \triangleright S \models \phi$。否则，我们可以排除 $v_1, \ldots, v_c$ 是 $x_1, \ldots, x_c$ 的一种赋值。

基于这一观察，我们构造如下算法：并行考虑对变量 $x_1, \ldots, x_c$ 的所有 $|A|^c$ 种可能赋值 $(v_1, \ldots, v_c)$。对于每种赋值，我们依次并行考虑由 $\{v_1, \ldots, v_c\}$ 诱导的结构上的所有 $2^{\sum_{i=1}^{r} c^{a_i}}$ 种可能关系。对于每组这样的关系，都存在一个调节器 $S(0)$，使得 $\mathrm{A} \triangleright S(0)$ 恰好生成这组关系。根据定义，$S(0)$ 是一个元组，其中每个条目都是关于 $\{v_1, \ldots, v_c\}$（的子集）的元组集合，因此其大小有一个常数上界。现在，固定 $\{v_1, \ldots, v_c\}$ 上的一组关系及相应的调节器 $S(0)$。我们使用布尔电路的 $k$ 层来查找并解决由全称量化变量的赋值引起的所有违反情况。令 $S(0)$ 与第一层相关联，并在所有后续层 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 中按如下方式进行：我们检查是否存在对变量 $y_1, \ldots, y_d$ 的赋值 $(w_1, \ldots, w_d)$（例如，字典序最小的赋值），使得 $\mathrm{A} \triangleright S(i) \not\models \psi[v_1, \ldots, v_c, w_1, \ldots, w_d]$。如果找不到这样的赋值，我们就可以接受该实例，因为此时 $\mathrm{A} \triangleright S(i) \models \phi$。否则，我们必须编辑当前赋值所诱导的结构中的某个关系。我们遍历所有可能的编辑，并将每个分支关联到一个新的调节器 $S^{(i+1)}$；该调节器通过添加我们标记为待编辑的关系来扩展 $S(i)$。如果在第 $k$ 层，我们仍然找到对变量 $y_1, \ldots, y_d$ 的赋值 $(w_1, \ldots, w_d)$，使得 $\mathrm{A} \triangleright S(k) \not\models \psi[v_1, \ldots, v_c, w_1, \ldots, w_d]$，那么就拒绝该实例。

由于 $d$、$c$ 以及所有元数 $a_i$ 都是常数，因此搜索树每一层产生的分支数也都是常数。因此，搜索树的总规模至多为 $2^{\sum_{i=1}^{r} c^{a_i}} + g(r, c, d, a_1, \ldots\ldots, a_r)^k$，其中 $g$ 是描述分支数的常数函数。搜索树的深度受限于我们能够编辑的元组数量，也就是我们的参数。因此，我们得到一个 para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$-电路。□

下界。为了证明片段 $ae$ 在各种问题版本中的困难性，我们从 p-集合覆盖进行归约。p-集合覆盖是一个著名的W[2]-困难问题 [32, 第 464], 页，我们在此将其表述为输入集合族的关联图上的图问题。[1] 回想一下，我们用 $u - s$ 表示 $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq E$。

p-集合覆盖 **输入：** 一个无向二分图 $G = (S \dot\cup U, E)$，其两侧为 $S$ 和 $U$，另有一个数 $k$。**参数：** $k$ **问题：** 是否存在一个覆盖 $C \subseteq S$，其中 $|C| \leq k$ 个 $U$，这意味着对于每个 $u \in U$，都存在一个 $s \in C$ 满足 $u - s$?

我们所有基于集合覆盖问题归约的参数化困难性结果都由六个步骤组成：

(1) 我们首先证明将结构类型限制为无向图的问题版本是困难的。为此，我们先构造一个具有量词模式 $p$ 的公式 $\phi$，并希望证明该公式的困难性。

[1]该变体也称为参数化复杂性中的 p-红蓝支配集。

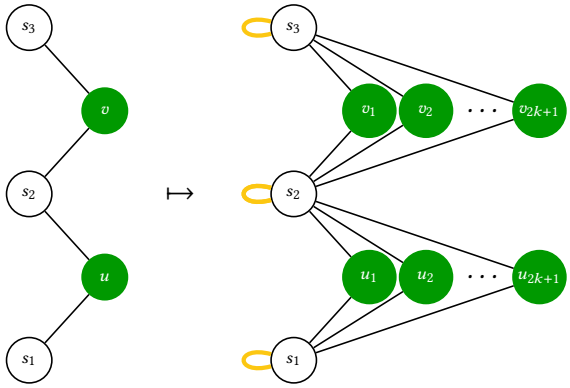



**图 1：引理 3.3 中归约的可视化示意图。**

(2) 我们描述一种构造，它通常通过添加新的顶点和边，将 p-集合覆盖的任意输入实例 $(G, k)$ 转化为参数化无向关系删除 $(\phi)$ 的实例 $(G', k')$（或参数化关系修改添加$(\phi)$ 的实例，视情况而定）。(3) 我们证明，若 $(G, k) \in$ p-集合覆盖成立，则 $(G', k') \in$ 参数化无向关系删除$(\phi)$ 成立（或 $(G', k') \in$ 参数化关系修改添加$(\phi)$ 成立，视情况而定）。我们将证明的这一部分称为正向。(4) 接下来，我们证明，若 $(G', k') \in$ 参数化无向关系删除$(\phi)$ 成立（或 $(G', k') \in$ 参数化关系修改添加$(\phi)$ 成立，视情况而定），则 $(G, k) \in$ p-集合覆盖成立。我们将证明的这一部分称为反向。(5) 我们证明，当考虑问题 p-RMedit undir$(\phi)$ 时，归约的正反两个方向仍然正确。(6) 最后，我们说明如何调整每个归约，为 p-RM$^{\otimes}$dir$(\phi)$ 提供一个下界，其中 $\otimes \in \{\text{del}, \text{add}, \text{edit}\}$，从而也为 p-RM$^{\otimes}$arb$(\phi)$ 提供下界。

根据观察1，边删除和边添加的复杂度相同，因此在证明中只需分析这两种问题版本中的一种。我们通常会选择最便于表述的一种，并在每个归约部分的开头说明我们的选择。

引理 3.3. 对于每种修改操作 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，p-RM$^{\otimes}$无向$(ae)$ 都包含一个 W[2]-困难问题。

证明。公式。考虑公式

$$\phi_{3.3} = \forall x \exists y \big(\neg x \sim x \rightarrow (x \sim y \wedge \neg y \sim y)\big),$$

它展现了模式 $ae$，并表达了每个没有自环的顶点都有一个没有自环的邻居。

归约。我们将 p-集合覆盖归约到边删除问题，即归约到 p-RM删除 无向$(\phi_{3.3})$。给定输入 $(S \dot\cup U, E, k)$。归约输出 $k' = k$ 以及按如下方式构造的无向图$G' = (V', E')$:

- 对每个 $s \in S$，将 $s$ 添加到 $V'$。将这组顶点称为 $S'$。
- 对每个 $u \in U$，将 $2k + 1$ 个 $u_1, \ldots, u_{2k+1}$的副本添加到 $V'$。将这组顶点称为 $U'$。
- 每当 $u - s$ 对 $u \in U, s \in S$成立时，就让所有 $u_i$ 在新图中与 $s$相邻；也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, 2k + 1\}$，令 $u_i - s$。
- 对于新图中的每个 $s \in S'$，添加自环 $s - s$。

一个示例性归约如图 1 所示，它将二部图 $G = (\{s_1, s_2, s_3\} \dot\cup \{u, v\} E)$ 映射为图 $G' = (V' E')$

（图中标出的颜色、数字和标签不属于输入或输出）。要满足公式 $\phi_{3.3}$，需要删除一些黄色边。对于集合 $U = \{u,\ v\}$ 中的每个元素，都会向新图中添加恰好 $2k+1$ 个顶点。每条无向边 $u - s$（分别是 $v - s$）都会被替换为 $2k+1$ 条无向边，即对所有副本 $u_i$，将 $u_i -' s$（分别是 $v_i -' s$）替换为对应的边。大小为 1 的集合覆盖 $C = \{s_2\}$ 对应于这样一个事实：删除 $G'$ 中的边 $s_2 -' s_2$ 后，所得图中每个没有自环的顶点都有一个没有自环的邻居。大小为 2 的集合覆盖 $C = \{s_1,\ s_3\}$ 也同样如此。相比之下，$C = \{s_1\}$ 不是集合覆盖，因为 $v$ 未被覆盖；事实上，如果我们既不删除 $s_2 -' s_2$ 也不删除 $s_3 -' s_3$，那么 $v_1$ 的所有邻居（即 $s_2$ 和 $s_3$）都有自环。请注意，我们的构造比删除情形所需的略复杂一些，但之后将结果推广到编辑情形时，这样做会有所帮助。

正向。给定 $(S \dot\cup U, E, k) \in$p-集合覆盖。我们需要证明 $(G', k') \in$ 参数化无向关系删除 $(\phi_{3.3})$ 成立。设 $C \subseteq S$with $|C| \le k$ 是 $U$ 的一个覆盖。不失一般性，假设 $C$ 中的每个顶点在 $U$ 中至少有一个邻居。令 $C' = \{(s,s) \mid s \in C\}$。我们声称 $(V'E' \setminus C') \models \phi_{3.3}$，也就是说，删除顶点 $s \in C$的所有自环后，每个没有自环的顶点都有一个没有自环的邻居，因此所得图满足 $\phi_{3.3}$。为此，将具有自环或有一个没有自环的邻居的顶点称为“幸运顶点”。显然，如果图 $(V', E' \setminus C')$ 中的每个顶点都是幸运顶点，那么 $(V'E' \setminus C') \models \phi_{3.3}$。注意，$S'$ 中的所有顶点都是幸运顶点，因为它们在 $U'$ 中至少有一个邻居，而且 $U'$ 中的顶点没有自环。此外，$U'$ 中的每个顶点在 $S'$ 中都有至少一个没有自环的邻居，因为我们假设 $C$ 是 $U$ 的一个覆盖。显然，$\|C'\| = |C| \le k$。

反向。反过来，假设对于 $G' = (V, E')$，给定一个集合 $D \subseteq E'$，满足 $\|D\| \le k$，且 $(V, E' \setminus D) \models \phi_{3.3}$。注意，每个 $u \in U$ 只与 $S$ 中带有自环的顶点相连。因此，由 $(V, E' \setminus D) \models \phi_{3.3}$，我们可以得出，对于每个 $u_i \in U$，都存在一个 $s \in S'$，满足 $s -' u_i$，且 $(s,s) \in D$。这意味着 $C = \{s \in S' \mid (s,s) \in D\}$ 是 $(S \dot\cup U, E)$ 和 $|C| \le \|D\| \le k$ 的一个集合覆盖。

边编辑。要看出该归约对边编辑同样适用，注意，只有另外两种修改可以使 $U'$ 中的顶点变得满意：(1) 我们可以给这些顶点添加自环；或者 (2) 让 $U'$ 中的顶点彼此相邻，其中可以在源自 $U$ 中同一顶点的顶点之间添加边，也可以在 $U$ 中两个不同顶点的副本之间添加边。然而，由于引入一个自环最多只能再使一个顶点满意，而在 $U'$ 中两个不同顶点之间添加一条边最多只能使两个顶点满意，这些操作不足以确保 $2k+1$ 个 $u$ 的副本都满意。因此，我们仍然必须删除 $u$ 的至少一个邻居的自环。

向有向情形的适配。我们选择

$$\phi_{3.3,\mathrm{dir}} = \forall x \exists y \big(\neg x \sim x \to (x \sim y \wedge \neg y \sim y)\big),$$

并以相同的方式进行归约，但将我们添加的每条边 $u_i -' s$都设为从 $u_i$指向 $s$的有向边。□

## 3.2 基本图

在上一节中，我们证明了关系修改问题在无向图、有向图和任意结构上的复杂性图景一致。现在，我们考虑将输入结构和目标结构限制为基本图，即不含自环的无向图。有趣的是，这会产生不同于先前问题版本的可处理性边界。

定理 3.4. 设 $p \in \{a, e\}^*$ 是一个模式。对于每个修改操作 $\otimes \in${删除,添加, 编辑}，我们有 (1) p-RM$^{\otimes}_{p}$ 基本$(p) \subseteq$ para-AC$^{0\uparrow}$[2]，如果 $p \preceq e^*a^*$ 或 $p \preceq ae$。(2) p-RM$^{\otimes}_{aea \preceq p\ \ eae \preceq p\ \ aee \preceq p\ \ aae \preceq p}$ 基本() 包含一个W-难解问题，如果,,,或。

上界。与上一节分析的更一般的结构不同，片段 $ae$ 在基本图上变得易处理。

引理 3.5. 对于每个修改操作 $\otimes \in${删除,添加, 编辑}，我们有 p-RM$^{\otimes}$ 基本$(ae) \subseteq$para-AC$^0 \subseteq$para-AC$^{0\uparrow}$。

证明。我们先给出边删除的证明，然后说明该结论对边编辑同样成立。设 $\phi$具有 $\forall x \exists y(\psi)$ 的形式，其中 $\psi$是无量词的。不失一般性，假设 $\psi$ 为析取范式，即

$$\phi = \forall x \exists y \bigvee (\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \cdots \wedge \ell_m),$$

其中每个 $\ell_i$ 都是形如 $x \sim y$、$x \nsim y$、$x = y$ 或 $x \neq y$的文字（注意，在基本图中，项 $x = x$、$y = y$、$x \neq x$、$y \neq y$、$x \sim x$、$y \sim y$、$x \nsim x$ 和 $y \nsim y$可替换为真或假，且 $\sim$和 $=$均为对称的）。还要注意，如果一个析取项同时包含文字 $\ell$ 及其否定，那么它不可能成立，因此也可以将其替换为假（从而删除）。由于可用的关系只有 $=$和 $\sim$，因此只需考虑单文字析取项以及四种不同的析取项 $x = y \wedge x \sim y$、$x = y \wedge x \nsim y$ $x \neq y \wedge x \sim y$ $x \neq y \wedge x \nsim y$、和 。其中，第一种在基本图中不可能成立，第二种等价于 $x = y$，第三种在基本图中等价于 $x \sim y$。因此，除四种单文字析取项外，只剩下 $x \neq y \wedge x \nsim y$。我们可以假设给定的图至少有两个顶点。

假设 $\psi$包含析取项 $x = y$或析取项 $x \nsim y$。由于量词前缀为 $\forall x \exists y$，将 $y$解释为与 $x$相同，会使该析取项为真，从而也使 $\phi$ 为真。接下来，如果 $x \neq y$作为析取项出现，我们也可以通过将$x$和 $y$解释为不同的值来满足该析取项，从而使 $\phi$为真。

接下来考虑仅由 $\psi$ $x \sim y$ $x \neq$、仅由 或 $y \wedge x \nsim y$ $x \sim y$由它们的析取构成的情形。如果 是唯一的析取项，那么当图中不存在孤立顶点时，公式为真；如果存在孤立顶点，删除边也无法改变这一事实。如果 $x \neq y \wedge x \nsim y$ 是唯一的析取项，那么公式表示不存在全邻接顶点，也就是说，不存在与所有其他顶点都相邻的顶点。如果尚未满足这一条件，我们可以通过删除 $k$ 边，将至多 $2k$个全邻接顶点“变成”非全邻接顶点；因此，我们需要检查全邻接顶点是否至多有 $2k$ 个，这可以通过一个para-AC$^0$- 电路完成。最后一种情形是 $\phi = \forall x \exists y((x \sim y) \vee (x \neq y \wedge x \nsim y))$，但这个公式显然为真（对于至少有两个顶点的图）。

我们可以很容易地将上述论证推广到编辑边的任务：除了一种情况外，所有情形都保持不变；如果孤立顶点至多有 $2k$ 个，现在也可以通过添加边来修复 $\forall x \exists y(x \sim y)$ 的违例。这同样可以用一个 para-AC$^0$-电路进行检查。□

下界。 现在我们继续证明基本图的下界。注意，由于我们已经证明，对于 $p \preceq e^* a^*$ 和 $p \preceq ae$，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(p)$ $\subseteq$para-AC$^{0\uparrow}$，接下来需要处理的更大量词模式是 $p \in \{aea, aee, aae, eae\}$。下文将证明，对于 $p$ 的所有这些取值，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(p)$ 都包含一个 W[2]-困难问题，方法是从 p-集合覆盖进行归约。

引理 3.6 (★)。 对于每个 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}$，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(aea)$ 都包含一个 W[2]-困难问题。

引理 3.7 (★)。 对于每个 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}$，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(aee)$ 都包含一个 W[2]-困难问题。

引理 3.8（★）。对于每个 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(aae)$ 包含一个 W[2]-困难问题。

引理 3.9。对于每个 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，p-RM$^{\otimes}$ 基本图$(eae)$ 包含一个 W[2]-困难问题。

证明。公式。我们考虑如下公式

$$\phi_{\text{radius-2}} = \exists c \forall x \exists y\big(x = c \vee x \sim c \vee (x \sim y \wedge y \sim c)\big),$$

该公式表达了图的半径至多为 2。

归约。我们将归约到边添加问题。给定 $(S \dot{\cup} U, E, k)$ 作为输入。该归约输出 $k' = k$ 以及一个按如下方式构造的基本图 $G' = (V', E')$：

- 对于每个 $s_i \in S$，向 $V'$ 添加名为 $s_i, s'_i$ 的顶点，并用一条边将它们连接起来。• 向 $V'$ 添加一个顶点 $c$，并将其连接到每个 $s'_i$。向 $c$ 添加 $2k + 1$ 个顶点 $c_i$，并将它们连接到 $c$；再向 $V'$ 添加 $2k+1$ 个顶点 $c'_i$，并将 $c'_i$ 连接到 $c_i$。
- 对于每个 $u \in U$，向 $V'$ 添加 $k + 1$ 个副本 $u_1, \ldots, u_{k+1}$。
- 每当 $u - s_i$ 成立时，就在新图中将所有 $u_i$ 连接到 $s_i$，也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, k + 1\}$，令 $u_i -' s_i$。

图 2 展示了归约的一个示例，采用的约定与前一幅图相同。对于每个 $s \in S$，我们添加顶点 $s, s'$，使其满足 $s -' s'$；对于 $U$ 中的每个元素，我们恰好添加 $k + 1$ 个副本。每条边 $s - u$ 都替换为连接 $s$ 与 $u$ 的每个副本 $u_i$ 的边。此外，还添加一个顶点 $c$ 并将其连接到每个 $s'$；添加顶点 $c_1, \ldots, c_{2k+1}$ 并将其连接到 $c$；还添加 $c'_1, \ldots, c'_{2k+1}$，使得对于所有 $i \in \{1, \ldots, 2k + 1\}$，都有 $c_i -' c'_i$。大小为 1 的集合覆盖 $C = \{s_2\}$ 对应这样一种情况：添加边 $c -' s_2$ 后，所得图中的每个顶点到 $c$ 的距离都至多为 2。大小为 2 的集合覆盖 $C = \{s_1, s_3\}$ 也同样如此。相反， $C = \{s_1\}$ 不是集合覆盖，因为 $v$ 未被覆盖；事实上，如果既不添加 $s_2 -' c$ 也不添加 $s_3 -' c$，那么 $v_1$ 到 $c$ 的距离为 3。在证明中给出了论证，说明 $c$ 是该图唯一可行的中心。

正向。 给定 $(S \dot{\cup} U,\ E,\ k)$ $\in$p-集合覆盖。我们证明 $(G',\ k') \in$ p-RM添加基本$(\phi_{\text{radius-2}})$ 成立。设 $C \subseteq S$with $|C| \leq k$是 $U$的一个覆盖，并设 $C' = \{(s,\ c) \mid s \in C\} \cup \{(c,\ s) \mid s \in C\}$。我们断言 $(V', E' \cup C') \models \phi_{\text{radius-2}}$，也就是说，将所有 $s -' c$添加到 $E'$ 中会得到一个半径为 2 的图。让我们检查 $V'$中的所有顶点：选择将$c$作为第一个存在量化顶点（中心）。于是，每个 $s'$ 都与 $c$相邻，并且每个 $s$ 到 $c$ 的距离至多为 2，路径经过 $s'$。此外，每个 $c_i$ 也与 $c$ 相邻，并且每个 $c'_i$ 到 $c$ 的距离至多为 2，路径经过 $c_i$。剩下要检查的是 $u \in U$。由于 $C$ 是一个覆盖，对于每个满足 $s -' c$的 $u \in U$，都存在一个 $s \in C$；根据构造， $U$中的每个顶点到 $c$ 的距离至多为 2，路径经过 $u_i -' s -' c$。

反向。 反过来，假设对于 $G' = (V',\ E')$，给定一个集合

$$A \subseteq V \times V \qquad \|A\| \leq k \qquad V \quad E' \cup A \quad \models '' \text{，满足 } (')\text{。}$$

$\phi_{\text{radius-2}}$ $c$

首先，假设它被赋值给第一个存在量化变量。然后，对于每个 $u \in U$，考虑 $u_i$的副本，其中 $i \in \{1,\ \ldots,\ k + 1\}$。由于我们只允许添加 $k$条边，因此无法直接将每个 $u_i$连接到 $c$、$s$或 $s'$。因此，我们不得不为某个满足 $u_i -' s$ 的 $s$ 添加 $s -' c$。因此，每个 $u \in U$都有一个邻居

$$s \in S \qquad s -' c \qquad C = \ s \mid s \in \text{，使得，于是，}$$

$S$ $s\ c \in A$

集合 { 和 (, ) } 是一个覆盖，其中 $|C| \leq \|A\| \leq k$。

现在，我们说明不能以不同方式指定第一个量化变量。假设我们选择将 $x$ 设为来自 $c_i$的一个顶点。那么，每个 $c'_j$满足 $i \neq j$时，与 $c_i$的距离都大于 2；由于这些 $c'_j$没有公共邻居，我们必须添加多于 $k$ 条边，才能使它们到 $c_i$的距离至多为 2。选择$x$为 $s$、 $s'$或 $u$ 之一时，论证类似。

边编辑。要看出该归约对边编辑同样适用，只需注意，删除边不会减小图的半径。

向有向情形的适配。 归约可以完全以相同的方式进行。现在，选择一个集合 $S_i$ 对应于添加一条从 $s_i$ 指向 $c$的有向边。□

作为引理 3.9 证明的推论，我们得到了两个此前未知的困难性结果。

推论 3.10。 问题p-边添加至半径 2 以及p-边编辑至半径 2 是 W[2]-困难的。

这些结论可以推广到任意固定半径。

引理 3.11。

(1) p-半径 1 加边 以及p-半径 1 编辑边 都属于 para-AC$^0$。(2) 对于每个固定的 $r \geq 2$，p-半径 $r$加边问题和p-半径 $r$编辑边问题都是W[2]-难的。

证明。为证明 (1)，注意到我们可以并行测试所有潜在中心 $c$，并针对每个 $c$统计有多少个顶点与其不相邻。这就得到一个 para-AC$^0$ 算法。

为证明 (2)，将引理 3.9 中的构造扩展为：把路径 $c -' c_i -' c'_i$ 替换为路径 $c -' c_i^1 -' c_i^2 -' \cdots -' c_i^{r-1}$，并且不再在 $u - s$ 时将 $u_i$ 直接连接到 $s$，而是添加路径 $u_i -' u_i^1 -' u_i^2 -' \cdots -' u_i^{r-2} -' s$。□

## 3.3 单子结构

为了完成对参数化复杂性的分类，我们最后转向单子词汇表上的结构。

定理 3.12. 令 $p \in \{a, e\}^*$ 为一个模式。对于每种修改操作 $\otimes \in \{$删除, 添加, 编辑$\}$，我们有 p-RM$^{\otimes}$单子$(p)$ $\subseteq$参数化-AC$^0$。

证明。对于固定的一元词汇表 $\tau = \{R_1^1,\ \ldots\ldots,\ R_r^1\}$ 和给定的结构 A $= (A,\ R_1^{\mathcal{A}},\ \ldots\ldots,\ R_r^{\mathcal{A}})$，将元素 $a \in A$ 的类型 定义为 type$(a)$ $:=$ $\{R_i \in \tau \mid a \in R_i\}$。令 $T_\tau$ 表示 A 中所有可能的元素类型的集合，并注意到 $|T_\tau| = 2^r$。

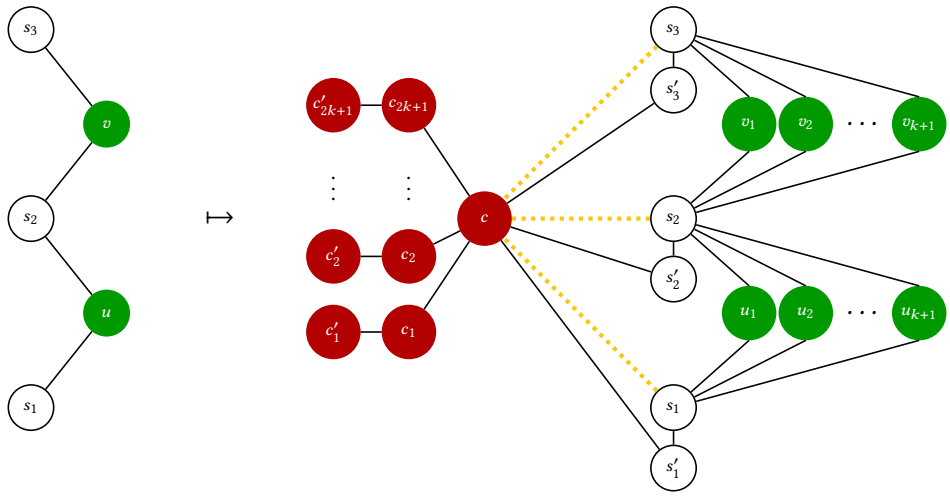



**图 2：引理 3.9 中归约的可视化。**

我们可以通过规定：若 $\sum_{R_i \in t_1} 2^{i-1} < \sum_{R_i \in t_2} 2^{i-1}$，则 $t_1 <_{\text{lex}} t_2$，对 $t_1$，$t_2 \in T_\tau$，对 $T_\tau$ 进行排序。于是，结构 A 的类型直方图 定义为 $\text{hist(A)} := (e_t)_{t \in T_\tau}$，其中 $e_t$ 是 A 中具有类型 $t$ 的元素数量。

类型调节器是由三元组 $(t_1, t_2, a)$ 组成的集合 $S_T$，表示我们将元素 $a$ 的类型从 $t_1$ 修改为 $t_2$。如果对于每个元组 $(t_1, t_2, a)$，元素 $a$ 在结构 A 中具有类型 $t_1$，且类型调节器中的每个元素至多出现在一个三元组中，则称类型调节器对结构 A 是可容许的。注意，每个可容许类型调节器 $S_T$ 都会产生一个调节器 $S$，反之亦然。因此，我们令 $\|S_T\| := \|S\|$，并将通过对 A 应用与类型调节器 $S_T$ 对应的调节器 $S$ 所得到的结构记为 $\text{A} \triangleright S_T$。我们可以在类型调节器上定义字典序：若 (1) $t_1 <_{\text{lex}} t'_1$，或 (2) $t_1 = t'_1$ 且 $t_2 <_{\text{lex}} t'_2$，或 (3) $t_1 = t'_1$、$t_2 = t'_2$ 且 $a < a'$，则称 $(t_1, t_2, a) <_{\text{lex}} (t'_1, t'_2, a')$，其中 $a < a'$ 是我们假定的论域上的序。若对于在序中处于相同位置的每一对 $(t_1, t_2, a) \in S_T$ 和 $(t'_1, t'_2, a') \in S'_T$，都有 $t_1 = t'_1$ 且 $t_2 = t'_2$，则称两个类型调节器 $S_T$、$S'_T$ 同余。现在，对于两个同余类型调节器 $S_T$ 和 $S'_T$，若对于序中处于相同位置的所有元组对 $(t_1, t_2, a) \in S_T$ 和 $(t'_1, t'_2, a') \in S'_T$，都有 $a < a'$，则有 $S_T <_{\text{lex}} S'_T$。

请注意，两个单子结构同构，当且仅当它们具有相同的类型直方图。这也意味着，两个同余类型调节器所产生的结构在同构意义下相同，因此只需考虑字典序最小的类型调节器。大小为 $k$的字典序最小类型调节器只有 $k^{|T_\tau|^2} = k^{2^{2r}}$个，因此需要考虑的候选调节器数量关于 $k$是多项式的。

现在，借助一个 para-$\text{AC}^0$-电路，我们可以并行检查这些候选项中是否存在满足 $\text{A} \triangleright S_T \models \phi$ 的情况。如果存在，则接受；否则，拒绝。□

## 4 关系修改问题的经典复杂性

上一节的结果在很大程度上也适用于经典情形，并帮助我们确立以下可处理性边界：关系修改问题要么可在$\text{TC}^0$ 中求解，要么包含难解问题。

### 4.1 无向图、有向图与任意结构

与参数化设置一样，我们首先给出无向图、有向图和任意结构中关系修改问题的可处理性图景。同样，我们发现这些图景一致，并呈现出以下复杂性。

定理 4.1。 设 $p \in \{a, e\}^*$ 是一个模式。对于每种修改操作 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，我们有
(1) $\text{RM}^{\otimes}{}_{\text{arb}}(p) \subseteq \text{AC}$，若 $p \preceq e^*$。(2) $\text{RM}^{\otimes}{}_{\text{arb}}(p) \subseteq \text{TC}$，若 $ea \preceq p \preceq e^*a$。(3) $\text{RM}^{\otimes}{}_{\text{undir}}(p)$ 和 $\text{RM}^{\otimes}{}_{\text{dir}}(p)$ 都包含一个NP-困难问题，若 $ae \preceq p$ 或 $aa \preceq p$。

上界。 我们证明，对于不受限输入，仅有的两个可处理片段分别可以用$\text{AC}^0$-电路或$\text{TC}^0$-电路求解。

引理 4.2. 对于每个 $\otimes \in \{\text{del}, \text{add}, \text{edit}\}$, $\text{RM}^{\otimes}\text{arb}(e^*) \subseteq \text{AC}^0$。

证明。设 $\tau = \{R_1^{a_1}, \ldots, R_r^{a_r}\}$，并设 $\phi$是一个形式为 $\exists x_1 \cdots \exists x_c \psi$ 的 $\tau$- 公式，其中 $\psi$ 是无量词的。给定一个结构 $\text{A} = (A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}})$，一个$\text{AC}^0$-电路可以并行考虑所有 $|A|^c$种对 $x_i$的赋值。对于每种赋值，我们可以遍历关系的所有可能解释，并对每种满足该公式的解释，确定到由 $x_i$诱导的结构的距离 $d$。由于 $d$是常数，我们可以用一个$\text{AC}^0$-电路检查：对于某个赋值的某种修改， $d \leq k$ 是否成立；若成立，则接受。□

引理 4 .3. 对于每个 $\otimes \in \{$删除、添加、编辑$\}$, $\text{RM}^{\otimes}\text{arb}(e^*a) \subseteq \text{TC}^0$ .

证明。我们证明一般情况下 $\otimes =$ 编辑的上界；更特殊的情形可通过将所有编辑操作限制为仅添加或删除，并调整计算修改次数的方式得出。

设 $\phi$具有如下形式：$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_c \forall y(\psi)$，其中 $\psi$是无量词的。我们构造一个 $\mathrm{TC}^0$电路，在输入 (A $k$) 后，正确判定是否能够编辑至多 $k$ 个元组，使得所得结构 $\mathrm{A}^\dagger$满足 $\mathrm{A}^\dagger \models \phi$。为此，我们并行考虑所有 $|A|^c$ 种对 $x_i$ 的可能赋值。我们将此类赋值中的元素集合 $A'$称为一个证书，并将由 $A'$诱导的子结构记为 $\mathrm{A}'$。对于每个证书 $A'$，我们并行考虑定义在 $A'$上的所有 $2^{\sum_{i=1}^{r} c^{a_i}}$个可能结构 $\mathrm{A}^* = (A', R_1^{\mathcal{A}^*}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}^*})$。令 $S$ 表示将 $\mathrm{A}'$ 变为 $\mathrm{A}^*$的调节器。接着，再次并行地考虑每个元素 $v \in A \setminus A'$。至多有 $2^{\sum_{i=1}^{r}((c+1)^{a_i} - c^{a_i})}$种可能方式，使 $v$与 $A'$ 中的元素相互作用，因此也就有同样多种可能结构 $\mathrm{A}_v = ((A' \times v) \cup (v \times A')\ R_1^{\mathcal{A}_v}, \ldots, R_r^{\mathcal{A}_v})$，以及相应的调节器 $S_v$，它们将由 $A'$和 $v$诱导的子结构变为 $\mathrm{A}_v$。现在，对于某个 $R_i^{\mathcal{A}_v}$，当我们将 $y$解释为 $v$，并将关系解释为在 $A'$ 上取值为 $R_i^{\mathcal{A}^*}$、而在包含来自 $A'$和 $v$的元素时取值为 $R_i^{\mathcal{A}_v}$时，公式 $\psi$ 可能成立。如果存在这样的结构 $\mathrm{A}_v$，就选取其中 $\|S_v\|$ 最小的一个，并注意到，关键在于，对于固定的证书 $A'$，所有 $S_v$彼此不相交，且可独立计算。这意味着，当且仅当存在某个证书 $A'$使得 $\|S\| + \sum_{v \in A \setminus A'} \|S_v\| \le k$时，我们才能接受 (A $k$)。这一计算可以通过使用多数门的 $\mathrm{TC}^0$电路完成。□

下界。 我们首先证明，引理 4.3 中考虑的片段不包含于 $\mathrm{AC}^0$。为此，我们将从多数问题归约：

> 多数**输入：** 一个位串 $s$。**问题：** $s$ 中至少一半的位是否设为 1?

已知多数问题不包含于 $\mathrm{AC}^0$ [67, 第 3] 章。

引理 4.4。 对于每个 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}, \mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(a) \not\subseteq \mathrm{AC}^0$。

证明。考虑公式 $\phi = \forall x(\neg x \sim x)$。我们将多数问题归约到 $\mathrm{RMdel\ undir}(\phi)$，方法如下：从给定的位串 $s$出发，对于其中每个值为 0 的位，添加一个顶点 $v$，并令其具有 $(v, v) \in E$，从而得到图$G = (V, E)$，并令 $k = |s|$为 $s/2$。显然，当且仅当 $s$ 中至少一半的位为 1 时，我们才能使该图满足此公式。□

既然我们已在引理 4.3 中证明，所有可用量词模式 $e^*a$ 表达的问题都是易处理的，那么接下来值得研究的自然候选模式就是 $aa$ 和 $ae$。我们将证明，这两种模式都足以表达NP困难问题。

引理 4.5。 对于每种修改操作 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}$，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{undir}}(aa)$ 和 $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{dir}}(aa)$ 各自都包含一个NP困难问题。

证明。我们可以将顶点覆盖归约到 $\mathrm{RM}_{\text{无向边添加}}(\phi_{4.5})$。这里，顶点覆盖是一个 NP-完全问题：给定一个基本图 $(V, E, k)$，询问是否存在一个集合 $C \subseteq V$with $|C| \le k$，使得对于所有 $(u, v) \in E$，都有 $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$；我们定义 $\phi_{4.5} = \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \sim x_2 \rightarrow (x_1 \sim x_1 \vee x_2 \sim x_2))$，它表示每条边都至少与一个带自环的顶点关联。要看出这一归约对边编辑也适用，请注意，我们可以将任何删除边 $(u, v)$ 的解，改为在 $v$ 处添加一个自环，且得到的解不会更大。□

引理 4.6。 对于每种修改操作 $\otimes \in \{$删除,添加, 编辑$\}$，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\text{无向}}(ae)$ 都包含一个 NP-困难问题。

证明。这可直接由引理 3.3 的证明得出。□

## 4.2 基本图

最后，我们考虑将输入和目标结构限制为基本图的情形，并证明以下可处理性边界。

定理 4.7。 设 $p \in \{a, e\}^*$ 是一个模式。对于每种修改操作 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}$，我们有
*(1) $\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic(p) $\subseteq AC0$，当 $p \preceq e^*$ 或 $p \preceq a$时。(2) $\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic(p) $\not\subseteq AC0$，但当 $aa \preceq p$或 $ae \preceq p$或 $ea \preceq p$且 $p \preceq e^*a$ 或 $p \preceq aa$或 $p \preceq ae$时，$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic(p) $\subseteq TC0$。(3) 当$aaa \preceq p$ 或 $aea \preceq p$或 $aee \preceq p$或 $aae \preceq p$或 $eae \preceq p$或$eaa \preceq p$时，$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic(p) 和 $\mathrm{RM}^{\otimes}$, dir(p) 各自都包含一个 NP困难问题。*

上界。 与参数化设置中一样，对于基本图而言，有些片段会变得平凡。造成这一现象的主要原因是，有些项（例如 $x \sim x$）现在可以直接求值为 false，而由剩余公式定义的问题也很容易求解。下文将逐一分析这些可处理片段。

引理 4.8. 对于每个 $\otimes \in \{\text{del,add,edit}\}$，$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{basic}(e^*) \subseteq \mathrm{AC}^0$ 且 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{basic}(a) \subseteq \mathrm{AC}^0$。

证明。第一个结论由引理 4.2 得出。对于第二个结论，由于基本图中不允许存在自环，因此只使用一个全称量词的所有公式都平凡地为真或为假。□

引理 4.9. 对于每个 $\otimes \in \{\text{del,add, edit}\}$，$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{basic}(ae) \subseteq \mathrm{TC}^0$。

证明。我们可以沿用引理 3.5 证明中的论证，当时我们证明了该片段的参数化版本属于 para-$\mathrm{AC}^0$。关键观察是，对于大多数公式，判定边编辑问题是平凡的；而对于非平凡的情形，我们只需借助 para-$\mathrm{AC}^0$ 的能力来统计全称量词和／或孤立顶点的数量。在非参数化设置中，可以使用 $\mathrm{TC}^0$ 电路完成这一计数。□

引理 4.10. 对于每个 $\otimes \in \{$del、add、edit$\}$，$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{basic}(aa) \subseteq \mathrm{TC}^0$。

证明。设 $\phi$具有 $\forall x \forall y(\psi)$ 的形式，其中 $\psi$是无量词的。下面，我们证明边编辑的情形——只允许相应操作后，我们的论证也适用于删除和添加版本（稍后会对此作更具体的说明）。同样，我们可以假设输入图至少有两个顶点，并且 $\psi$ 为析取范式，且不失一般性地，可以包含以下析取项，顺序如下：

(1) $x \neq y$,
(2) $x = y$,
(3) $x \sim y$,
(4) $x \nsim y$、(5) $x \neq y \wedge x \sim y$ 和 (6) $x \neq y \wedge x \nsim y$。

在以下各段中，我们论证当 $\psi$ 中的第一个析取项是上述特定项之一时，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\text{基本}}(\forall x \forall y(\psi)) \in \mathrm{TC}^0$ 成立。

假设 $x \neq y$ 是 $\psi$ 的第一个析取项。那么，对于赋给 $x$ 和 $y$ 的任意不同顶点， $\forall x \forall y(\psi)$ 都自动为真。当同一个顶点赋给 $x$ 和 $y$ 时，如果存在析取项 $x \nsim y$ 或 $x = y$，该公式的值就为真；否则其值为假，而且对基本图进行任何修改都无法改变这一事实。

假设 $x = y$ 是 $\psi$ 的第一个析取项。注意， $x = y \vee (x \neq y \wedge x \sim y) \equiv x = y \vee x \sim y$，并且 $x = y \vee (x \neq y \wedge x \nsim y) \equiv x = y \vee x \nsim y$，因此 $\psi$ 等价于 $x = y$ 与文字 $x \sim y$ 和 $x \nsim y$ 的某个子集构成的析取式。显然，如果 $\psi$ 只是 $x = y$，那么公式 $\phi$ 显然为假（对于至少有两个顶点的图）；如果 $\psi$ 是 $x = y \vee x \sim y \vee x \nsim y$，则显然为真。剩下的情形是 $x = y \vee x \sim y$ 和 $x = y \vee x \nsim y$。如果输入图是一个团（不含自环），或者可以通过添加 $k$ 条边将其变成一个团，那么第一个公式就成立（在删除情形下，当然不允许这种操作）。显然，计算缺失边的数量可以在 $\mathrm{TC}^0$ 中完成。若输入图没有边，或者可以通过删除至多 $k$ 条边使其变成无边图，那么第二个公式就成立（在添加情形下，当然不允许这种操作）。显然，检查输入图中是否至多有 $k$ 条边也可以在 $\mathrm{TC}^0$ 中完成。

假设 $x \sim y$是 $\psi$的第一个析取项。如果它是唯一的析取项，那么 $\phi$为假（不允许有自环），且无法通过修改图来修正。如果 $x \nsim y$ 也存在，那么 $\phi$ 显然为真。析取项 $x \neq y \wedge x \sim y$ 在逻辑上蕴含 $x \sim y$，因此可以将其删除。剩下的情况是 $\psi = x \sim y \vee (x \neq y \wedge x \nsim y) \equiv x \sim y \vee x \neq y$，而对于至少包含两个顶点的基本图，这始终为假。

假设 $x \nsim y$是 $\psi$的第一个析取项。这样，我们可以删除 $x \neq y \wedge x \nsim y$（如果存在），因为它在逻辑上蕴含 $x \nsim y$。剩下$\psi = x \nsim y$，这又是目标图必须没有边的情形，也就是说，输入图中至多可以有 $k$ 条边；以及 $\psi = x \nsim y \vee (x \neq y \wedge x \sim y)$，它在基本图中始终为真。

剩下的情况是， $\psi$是由 $x \neq y \wedge x \sim y$和 $x \neq y \wedge x \nsim y$的若干析取组合而成，但当 $x$和 $y$被解释为相同时，两者都无法为真。因此，对于这类组合， $\phi$的取值始终为假。□

下界。 我们再次从证明电路下界开始。

引理 4.11 (⋆)。对于每个 $\otimes \in$ {del、add、edit}，我们有 $\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(ae)$、$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(ea)$、$\mathrm{RM}^{\otimes}\,\mathrm{undir}(aa) \not\subseteq \mathrm{AC}^0$。

在上一节中，我们已经证明，对于基本图，量词模式 $e^*a$、$ae$和 $aa$ 是易处理的。现在，我们转而研究剩余的片段，并证明其中包含NP-困难问题。对于某些片段，我们可以重用第 3 节中给出的归约。

引理 4.12。 对于每种修改操作 $\otimes \in$ {del、add、edit}，$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本图$(aea)$、$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本图$(aee)$、$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本图$(aae)$ 和$\mathrm{RM}^{\otimes}$ 基本图$(eae)$ 均包含一个NP-困难问题。

证明。注意，从 p-集合覆盖到 p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic$(aea)$（引理 3.6）、p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic$(aee)$（引理 3.7）、p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic$(aae)$（引理 3.8）和 p-$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic$(eae)$（引理 3.9）中所用的归约，对于非参数化情形也同样成立，从而得出该结论。□

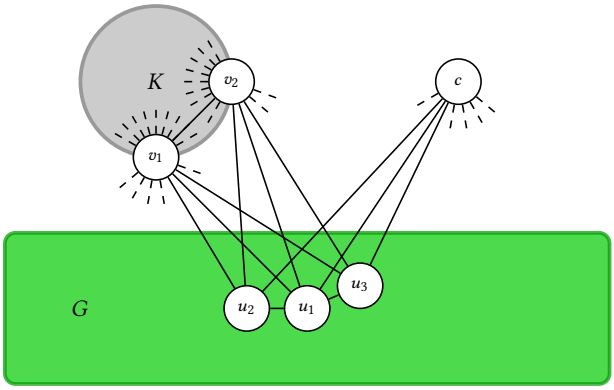



**图 3：引理 4.13 中归约的示例。**

剩下需要考虑的只有模式 $eaa$ 和 $aaa$。下面将证明，在这两种情况下，量词模式都足以表达NP-困难问题。

引理 4.13。 对于每种修改操作 $\otimes \in$ {删除,添加, 编辑}，$\mathrm{RM}^{\otimes}$ basic$(eaa)$ 和 $\mathrm{RM}^{\otimes}$ dir$(eaa)$ 都包含一个NP困难问题。

证明。 该公式。考虑公式

$$\phi_{4.13} = \exists c \forall x \forall y((x \sim y \wedge x \neq c \wedge y \neq c) \rightarrow (x \nsim c \vee y \nsim c)),$$

它表达的是，存在一个顶点，它与任意一条边的两个端点都不相邻。

归约。 我们将顶点覆盖问题归约到边删除问题，方法如下：给定输入 $(G, k)$，其中 $G = (V, E)$，我们通过从 $G$ 开始，并添加 (1) 一个单独的顶点 $c$，将其与 $V$ 中的每个顶点相连；以及 (2) 添加一个大小为 $k + 2$ 的团 $K$，同时将 $K$ 中的每个顶点与 $V$ 中的每个顶点相连，从而构造 $(G', k)$，其中 $G' = (V', E')$。我们声称，$(G, k) \in$ 是顶点覆盖，当且仅当 $(G', k) \in \mathrm{RMdel\,basic}(\phi_{4.13})$。

示例如图 3 所示。对于图 $G$ 和数$k \in \mathbb{N}$，我们显式展示 $u_1, u_2$ 和 $u_3$，并标出边 $u_1 -' u_2$ 和 $u_1 -' u_3$。我们添加一个顶点 $c$，并将其与 $G$ 中的所有顶点相连。与 $u_i$ 相连的边用实线表示，而与 $G$ 中其他顶点相连的边则用虚线表示。我们还添加一个大小为 $k + 2$ 的团 $K$，并将 $v_1$ 和 $v_2$ 画出作为示例顶点。它们也与 $G$中的每个顶点相连。

正向。 给定 $(V, E, k) \in$ 顶点覆盖。我们需要证明 $(G', k) \in \mathrm{RMdel\,basic}(\phi_{4.13})$ 成立。令 $C \subseteq V$ 满足 $|C| \leq k$ $G$ $D = v\ c\ |$，且它是 $v \in C$ $c\ v$ 的一个顶点覆盖。接着，删除边 $\{(,)\} \cup \{(,) \mid v \in C\}$。于是 $\|D\| = |C| \leq k$。我们说明，对于得到的图 $G'$，有 $G' \models \phi_{4.13}$：令存在量化变量取值为 $c$。根据构造，团 $K$ 中的每个顶点都不与 $c$ 相连；又因为 $C$ 是 $G$的顶点覆盖，所以对于 $G$中的每条边，其一端都不与 $c$相连。

反向。 反过来，假设给定 $G' = (V', E')$ 的一个集合 $D \subseteq E'$ $\|D\| \leq k$ $V$ $E'$ $D$ $\models$，使得 $\phi_{4.13}$ $c$ (\)。首先，假设选择该集合为存在量词变量的赋值。那么，必须至多删除 $k$ 条边，以确保 $G$ 中的每条边至少有一个顶点与 $c$ 不连通。因此，删除

$G$ 中的一条边没有意义，因为这只能解决一条冲突边；而删除某个顶点与 $c$ 之间的一条边，既能解决同一冲突，也能解决由与该顶点相连的边所引起的所有冲突。形式化地说，若 $(u,v) \in D$ 且 $(v,u) \in D$，其中 $c \notin \{u,v\}$，那么从 $D$ 中删除这两条边，并改为添加 $(v,c)$ 和 $(c,v)$；这不会增大 $D$ 的大小，且仍然满足该公式。现在，$C = \{v \mid (v,c) \in D\}$ 是 $G$ 的一个大小至多为 $k$ 的顶点覆盖。

最后，我们说明无法以不同方式选择存在量化变量。将变量选为其中一个 $v \in K$ 并不可行，因为我们必须断开团中其他每个顶点与 $v$的连接，这会导致至少 $k+1$ 次删除。对于顶点 $v \in V$，情况也相同。

边编辑。由于我们希望将一个顶点与每条边的至少一个端点断开，因此添加边毫无用处。□

引理4.14。 对于每种修改操作 $\otimes \in$ {删除,添加, 编辑}，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\text{基本}}(aaa)$ 都包含一个 NP难问题。

证明。考虑 $\phi_{\text{clusters}} = \forall x \forall y \forall z((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)$，所谓的簇图满足该条件，也就是说，这类图不包含诱导 $P_3$。因此，$\mathrm{RM}_{\text{删除 基本}}(\phi_{\text{clusters}})$ 和 $\mathrm{RM}_{\text{编辑 基本}}(\phi_{\text{clusters}})$ 分别刻画了簇删除和簇编辑问题，这两个问题都是 NP难问题 [63]。□

## 4.3 单子结构

最后，我们考虑基于单子词汇表的结构。

定理4.15。 令 $p \in \{a,e\}^*$ 为一个模式。对于每个修改操作 $\otimes \in$ {del,add, edit}，有

(1) $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{mon}}(p) \subseteq \mathrm{AC}^0$，若 $p \preceq e^*$。 (2) $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{mon}}(p) \not\subseteq \mathrm{AC}^0$，但 $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{mon}}(p) \subseteq \mathrm{TC}^0$，若 $a \preceq p$。

证明。第一条陈述直接由引理 4.2 得出。

对于第二条陈述中的下界，考虑公式 $\phi = \forall x \neg R(x)$。我们将 Majority 归约到 $\mathrm{RM}_{\text{del undir}}(\phi)$。对于 $s$ 中每个被设为 0 的位，添加一个元素 $e$，使其满足 $e \in R$，并将$k = |s|$设为 $/2$。现在，当且仅当 $s$中至多有 $|s|/2$ 个位被设为 0 时，我们可以通过删除 $R$ 中的元素来满足该公式。

第二个结论中的上界由定理 3.12 得出。请注意，我们考虑的调节器数量关于 $k$是多项式的，而检查某个调节器是否可接受，归结为检查论域中是否至多有 $k$ 个给定类型的元素；我们可以使用$\mathrm{TC}^0$-电路完成这一检查。□

## 5 结论与讨论

我们全面分类了针对可由一阶逻辑不同片段表达的目标性质的关系修改问题的参数化复杂性和经典复杂性。在分析中，我们考察了（1）不同的修改操作，即删除关系、添加关系和编辑关系；以及（2）不同的输入结构，即单子结构、基本图、无向图、有向图和任意结构。

虽然所有修改操作的可处理性边界都一致，但允许作为输入的结构类型不同，可处理性边界也会有所差异。更具体地说，在单子结构和基本图上，我们分别得到了不同的复杂性图景；而修改所有其他输入结构的难度则相同。

我们确立的分类具有“强”分离性，也就是说，所有片段要么导出相当容易求解的关系修改问题（即属于 para-$\mathrm{AC}^{0\uparrow}$ 或 $\mathrm{TC}^0$），要么导出难以处理的问题（即包含 W[2]-难或 NP-难问题）。我们的结果汇总见表1。

仔细检查我们的证明后，我们发现，对修改预算采用不同的限制和计数方式，会得到相同的复杂性图景。更具体地说，我们观察到以下结果：

观察 2. 对于每种修改操作 $\otimes \in$ {del,add,edit} 以及类型 T $\in$ {arb, dir, undir, basic, mon}，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$（p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$，分别）呈现出表1所示的复杂性图景，

- 当最多可以修改 $k$ 个元组（涵盖所有关系）时，
- 当单个关系中最多可以修改 $k$ 个元组时，以及当每个关系中最多可以修改 $k$ 个元组时。

此外，我们发现，对于T $\in$ {arb,dir} 和修改预算 $k$，以下问题版本的难度相同：

- $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$（或p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$，分别），其中我们统计被修改的有序元组数量，并将其与 $k$ 进行比较；以及$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$（或p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{T}}$，分别），其中我们统计被修改的无序元组数量，并将其与 $k$进行比较。

后者引出了以下问题：是否还存在其他值得关注的自然计数版本——例如数据库修复中的版本——在这些版本下，$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{arb}}$ 与 $\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{dir}}$（分别为 p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{arb}}$ 与 p-$\mathrm{RM}^{\otimes}_{\mathrm{dir}}$）的复杂性会出现分歧?

本文仅考虑了关系结构。将我们的框架扩展到包含函数符号的词汇表将很有意思。在这种情况下，诸如函数上的合理编辑概念是什么？或允许编辑函数后，我们还能定义哪些问题？这样的基础问题仍有待探索。

此外，本文考察的关系修改操作并不全面：图论还研究其他边修改操作，例如边收缩、边拆分或边翻转。边翻转的研究可能尤其值得关注，因为这一操作可用于定义反馈弧集问题的一个变体：该问题不是通过删除边使图变为无环，而是必须翻转边。最近，这个问题被用于在实际应用中高效求解单侧交叉最小化问题 [5]。

另一个有趣的研究方向是将我们的结果推广到高阶逻辑，例如单子二阶逻辑或存在二阶逻辑。虽然这些逻辑能够表达更多值得关注的性质，例如无环性，而这使我们能够将反馈弧集问题建模为边删除或边翻转问题，但即使是模型检验在这些逻辑中也可能变得难以处理。在这方面，一阶逻辑的标准扩展也值得关注，因为它们可能刻画更多性质，例如传递闭包、不动点算子或计数。

最后，值得进一步考察参数化设定下可处理的片段：根据我们的经典复杂性结果，可以立即得出，对于所有图类和修改操作，片段 $e^*a$ 都属于 para-$\mathrm{AC}^0$。至于片段 $a^*$ ——例如，它可用于描述有趣的元问题：针对固定图的 $H$-free 删除 $H$ ——

我们知道，相应的关系修改问题属于 para-$AC^{0\uparrow}$，但它们是否也能归入 para-$AC^0$，目前仍是一个开放问题（另见 [4,第 52]页）。

## 参考文献


[1] Kitsun, Michael A. Langston, Pushkar Shanbhag, and Christopher T. Symons. 2006. 适用于FPT问题的可扩展并行算法. *Algorithmica* 45, 3 ( 2006 269 284 10 1007 00453 006 1214 1 ), – . doi: . /S - - - Marcelo Arenas, [2] Leopoldo Bertossi, and Jan Chomicki. 1999. 不一致数据库中的一致查询答案. In 数据库系统原理第十八届 *ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART* 研讨会论文集(美国宾夕法尼亚州费城) *(PODS '99)*. 计算机协会, 纽约州纽约, 68 79 10 1145 303976 303983 – . doi: . / . Sebastian Arming, [3] Reinhard Pichler, and Emanuel Sallinger. 2016. 修复检查与一致查询回答的复杂性. In 第*19*届国际数据库理论会议（*ICDT 2016*）（莱布尼茨国际信息学会议论文集，第*48*卷）, Wim Martens and Thomas Zeume (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 德国达格斯图尔, 21:1–21:18. doi:10.4230/LIPIcs.ICDT.2016.21[4] Max Bannach. 2020. 并行参数化算法. 博士学位论文. 吕贝克大学, 德国. [5] Max Bannach, Florian Chudigiewitsch, Kim-Manuel Klein, and Marcel Wienöbst. 2024. PACE求解器说明：UzL 单侧交叉最小化精确求解器. In 第*19*届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2024*（*LIPIcs*，第*321*卷）, Édouard Bonnet and Pawel Rzazewski (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 28:1–28:4. doi:10.4230/ LIPICS.IPEC.2024.28[6] Max Bannach, Florian Chudigiewitsch, and Till Tantau. 2023. 图上的存在二阶逻辑：参数化复杂性. In 第*18*届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2023*（*LIPIcs*，第*285*卷）, Neeldhara Misra and Magnus Wahlström (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 3 1 3 15 10 4230 2023 3 : – : . doi: . / [7] LIPICS.IPEC. . Max Bannach, Florian Chudigiewitsch, and Till Tantau. . 关于顶点删除问题的描述复杂性. In 第*49*届计算机科学数学基础国际研讨会，*MFCS 2024*（*LIPIcs*，第*306*卷）, Rastislav Královic and Antonín Kucera (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 17 1 17 14 10 4230 2024 17 : – : . doi: . [8] /LIPICS.MFCS. . Max Bannach, Malte Skambath, and Till Tantau. . MaxSAT 变体的并行参数化复杂性. 人工智能研究杂志 78 2023 10 1613 1 14748 ( ). doi: . / [9] JAIR. . Max Bannach, Christoph Stockhusen, and Till Tantau. 2015. 通过颜色编码实现快速并行固定参数算法. In 第*10*届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2015*（*LIPIcs*，第*43*卷）, Thore Husfeldt and Iyad A. Kanj (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 224–235. doi:10.4230/LIPICS.IPEC.2015.224[10] Max Bannach and Till Tantau. 2016. 并行多变量元定理. In第*11*届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2016*（*LIPIcs*，第*63*卷）, Jiong Guo and Danny Hermelin (Eds.). 达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 4 1 4 17 10 4230 2016 4 : – : . doi: . / [11] LIPICS.IPEC. . Max Bannach and Till Tantau. . 并行计算核：下界与上界. In 第*13*届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2018*. 13:1–13:14. doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2018.13[12] Max Bannach and Till Tantau. 2020. 通过 $AC^0$-电路计算击中集核.《计算系统理论》64, 3 (2020), 374–399. doi:10.1007/s00224-019-09941-z[13] Nikhil Bansal, Avrim Blum, and Shuchi Chawla. 2004. 相关聚类. 机器学习56, 1-3 (2004), 89–113. doi:10.1023/B:MACH.0000033116.57574. 95[14] Peter W. Battaglia, Razvan Pascanu, Matthew Lai, Danilo Jimenez Rezende, and Koray Kavukcuoglu. 2016. 用于学习物体、关系和物理的交互网络. In 神经信息处理系统进展第*29*卷：*2016*年神经信息处理系统年会, Daniel D. Lee, Masashi Sugiyama, Ulrike von Luxburg, Isabelle Guyon, and Roman Garnett (Eds.). 4502–4510. [15] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia, and Ioannis G. Tollis. 1994. 图绘制算法：注释书目. 计算几何杂志4 (1994), 235–282. doi:10.1016/0925-7721(94)00014-X [16] Amir Ben-Dor, Ron Shamir, and Zohar Yakhini. 1999. 基因表达模式聚类. 计算生物学杂志6, 3/4 (1999), 281–297. doi:10.1089/ 106652799318274[17] Seymour Benzer. 1959. 论遗传精细结构的拓扑学. 美国国家科学院院刊 45, 11 (1959), 1607–1620.[18] Manuel Bodirsky and Santiago Guzmán-Pro. 2025. 遗传一阶逻辑：可处理的量词前缀类. arXiv:2411.10860 [ math.LO] https://arxiv. org/abs/2411.10860

[19] Manuel Bodirsk y 和 Santia go Guzmán Pro. 2025. 关于计 p算能力外延存在二阶逻辑。arXiv: 2511 08515 [ ] 2511 08515 。math.LO [20] https://arxiv.org/abs/。Egon Börger、Erich Grädel 和 Yuri Gurevich。《经典判定问题》。Springer。[21] Daniel Brügmann、Christian Komusiewicz 和 Hannes Moser。2009。关于生成无三角形图。《离散数学电子札记》32（2009），51–58。doi:10.1016/J.ENDM.2009.02.008[22] Csilla Bujtás、Akbar Davoodi、Laihao Ding、Ervin Györi、Zsolt Tuza 和 Donglei Yang。2025。用三角形覆盖图的边。《离散数学》348, 1 2025 114226 10 1016 2024 114226 （），。doi:。/J.DISC.。Pablo [23] Burzyn、Flavia Bonomo 和 Guillermo Durán。2006。边修改问题的 NP 完全性结果。《离散应用数学》154，13（ 2006 1824 1844 10 1016 2006 03 031 ），–。doi:。/J.DAM.。。Andrea Calì、Domenico Lembo 和 Riccardo Rosati。2003。关于不一致和不完整数据库上查询回答的可判定性与复杂性。载于第二十二届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART 数据库系统原理研讨会论文集（加利福尼亚州圣迭戈）（PODS ' 03）。计算机协会，纽约州纽约，美国, [24] 260 271 10 1145 773153 773179 –。doi:。/。[25] Marco Cesati 和 Miriam Di Ianni。。参数化并行复杂性。载于 Euro-Par '98 并行处理，第四届 Euro-Par 国际会议，英国南安普敦，1998年9月1日至4日，论文集（《计算机科学讲义》，第1470卷），David J. Pritchard 和 Jeff Reeve（编）。Springer，892–896。doi:10.1007/BFB0057945[26] James Cheetham、Frank K. H. A. Dehne、Andrew Rau-Chaplin、Ulrike Stege 和 Peter J. Taillon。2003。在粗粒度并行计算机上求解大型固定参数可处理问题。《计算与系统科学杂志》67，4（2003），691–706。[27] Yijia Chen 和 Jörg Flum。2019。参数化 $AC^0$中的一些下界。《信息与计算》267 2019 116 134 10 1016 2019 03 008 （），–。doi:。/J.IC.。。Hyeong-Ah Choi、Kazuo Nakajima 和 Chong S. Rim。。图二分化与通孔最小化。《SIAM 离散数学杂志》2，1（1989），38–47。doi:10.1137/0402004[29] Jan Chomicki 和 Jerzy Marcinkowski。2005。使用元组删除进行最小变更完整性维护。《信息与计算》197，1（2005），90–121。doi: 10 1016 2004 04 007 。/j.ic.。[28] [30] Christophe Crespelle、Pål Grønås Drange、Fedor V. Fomin 和 Petr Golovach。2023。参数化算法与边修改复杂性的综述。《计算机科学评论》48 2023 100556 10 1016 2023 100556 （），。doi:。/j.cosrev.。Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh。2015。《参数化算法》。Springer。doi: [31] 10 1007 978 3 319 21275 3 。/－－－－Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。。《参数化复杂性》。Springer。doi: [32] 10 1007 978 1 4612 0515 9 。/－－－－Heinz-Dieter Ebbinghaus 和 Jörg Flum。2005。《有限模型论》（第2版）。Springer。doi: [33] 10 1007 3 540 28788 4 。/－－－Thomas Eiter、Yuri Gurevich 和 Georg Gottlob。2000。字符串上的存在二阶逻辑。《ACM 杂志》47，1（2000），77–131。doi:10.1145/331605. 331609[35] Michael Elberfeld、Christoph Stockhusen 和 Till Tantau。2015。论参数化问题的空间与电路复杂性：复杂性类与完全性。Algorithmica 71, 3（2015），661–701。doi:10.1007/S00453-014-9944-Y [36] Paul Erdös、Tibor Gallai 和 Zsolt Tuza。1996。三角形结构中的覆盖与独立性。《离散数学》150，1-3（1996），89–101。doi:10.1016/0012-365X(95)00178-Y [37] Jörg Flum 和 Martin Grohe。2006。《参数化复杂性理论》。Springer。doi:10.1007/3-540-29953-X[38] Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach 和 Dimitrios M. Thilikos。2020。关于图修改至一阶逻辑性质的参数化复杂性。《计算系统理论》64，2（2020），251–271。doi:10.1007/s00224-019-09938-8[39] Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach 和 Dimitrios M. Thilikos。2022。到一阶逻辑性质的消除距离的参数化复杂性。载于《ACM 计算逻辑汇刊》，第 23 17 1 17 35 10 1145 3517129 卷。：–：。[40] doi:。/ Fedor V. Fomin、Saket Saurabh 和 Neeldhara Misra。《图修改问题：现代视角》。载于《算法学前沿》——第九届国际研讨会 FAW 2015（《计算机科学讲义》，第9130卷），Jianxin Wang 和 Chee-Keng Yap（编）。Springer, 3 6 10 1007 978 3 319 19647 3_1 –。doi:。/－－－ [41] 2013 —Yong Gao、Donovan R. Hare 和 James Nastos。。图直径增广的参数化复杂性。《离散应用数学》161，10-11（2013），1626 1631 10 1016 2013 01 016 –。doi:。/ J.DAM.。。Georges Gardarin 和 Stefano Spaccapietra。1976。数据库完整性：一种通用闭锁算法与死锁避免。载于《数据库管理系统建模》，IFIP 数据库管理系统建模工作会议论文集，德国弗罗伊登施塔特，G. M. Nijssen（编）。North-Holland，395–412。[43] [42] Georg Gottlob、Phokion G. Kolaitis 和 Thomas Schwentick。2004。图上的存在二阶逻辑：描绘可处理性边界。《ACM 杂志》51，2（2004），312–362。doi:。/。

[44] Erich Grädel、Phokion G. Kolaitis、Leonid Libkin、Maarten Marx、Joel Spencer、Moshe Y. Vardi、Yde Venema 和 Scott Weinstein。2007。《有限模型论及其应用》。Springer。doi: 10 1007 3 540 68804 8 。/－－－Martin [45] 2017 Grohe。。《描述复杂性、规范化与可定义图结构理论》。逻辑讲义，第47卷。剑桥大学出版社。doi:10.1017/9781139028868[46] Jiong Guo、Falk Hüffner 和 Rolf Niedermeier。2004。参数化问题的结构视角：距平凡性的距离。载于《参数化与精确计算》，第一届参数化与精确计算国际研讨会 IWPEC 2004（《计算机科学讲义》，第3162卷），Rodney G. Downey、Michael R. Fellows 和 Frank K. H. A. Dehne（编）。Springer, 162 173 10 1007 978 3 540 28639 4_15 –。doi:。/－－－－[47] 1987 Mohsen MD Hassan 和 Gary L Hogg。。图论在设施布局问题中的应用综述。Omega 15, 4（1987），291–300。doi:10.1016/0305-0483(87)90017-X [48] Steef Hegeman、Jan Martens 和 Alfons Laarman。2025。参数化电路类中的一致性。载于第二十届参数化与精确计算国际研讨会 IPEC 2025（LIPIcs，第358卷），Akanksha Agrawal 和 Erik Jan van Leeuwen（编）。达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心，27:1–27:16。doi:10.4230/LIPICS.IPEC.2025.27[49] Falk Hüffner、Christian Komusiewicz、Hannes Moser 和 Rolf Niedermeier。2010。簇顶点删除的固定参数算法。《计算系统理论》47, 1（2010），196–217。doi:10.1007/S00224-008-9150-X [50] Neil Immerman。1998。《描述复杂性》。Springer Verlag。[51] Michael Jünger 和 Petra Mutzel。1996。最大平面子图与良好嵌入：实用布局工具。Algorithmica 16，1（1996），33–59。doi:10.1007/BF02086607[52] Athanasios L. Konstantinidis 和 Charis Papadopoulos。2019。区间图与分裂相关图上的簇删除。载于第四十四届数学基础与计算机科学国际研讨会 MFCS 2019（LIPIcs，第138卷），Peter Rossmanith、Pinar Heggernes 和 Joost-Pieter Katoen（编）。达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 12 1 12 14 10 4230 2019 12 : – :。doi:。/[53] 2021 LIPICS.MFCS.。Paraschos Koutris、Xiating Ouyang 和 Jef Wijsen。。路径查询上主键的一致查询回答。载于第四十届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI 数据库系统原理研讨会论文集（线上活动，中国）（PODS'21）。计算机协会，纽约州纽约，美国, 215 232 10 1145 3452021 3458334 –。doi:。/。Robert Kudelic。。反馈弧集——问题与算法的历史。Springer。doi: 10 1007 978 3 031 10515 9 。/－－－－[54] 2022 John M. Lewis 和 Mihalis Yannakakis。1980。遗传性质的节点删除问题是 NP 完全的。《计算与系统科学杂志》20，2（1980），219–230。doi: 10 1016 0022 0000 80 90060 4 。/－（ ）－[55] Kun Liu 和 Evimaria Terzi。。面向图上的身份匿名化。载于2008年 ACM SIGMOD数据管理国际会议论文集（加拿大温哥华）（SIGMOD '08）。计算机协会，纽约州纽约，美国, 93 106 10 1145 1376616 1376629 –。doi:。/。Andrei Lopatenko [56] 2008 和 Leopoldo Bertossi。。基于基数和增量修复语义的数据库一致查询回答复杂性。载于《数据库理论——ICDT 2007》，Thomas Schwentick 和 Dan Suciu（编）。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林，179–193。[57] 2006 Xuesong Lu、Yi Song 和 Stéphane Bressan。2012。图上的快速身份匿名化。载于数据库与专家系统应用——第二十三届国际会议 DEXA 2012（《计算机科学讲义》，第7446卷），Stephen W. Liddle、Klaus-Dieter Schewe、A Min Tjoa 和 Xiaofang Zhou（编）。Springer, 281 295 10 1007 978 3 642 32600 4_21 –。doi:。/－－－－Frederico Mancini。《与图类相关的图修改问题》。博士学位论文。挪威卑尔根大学。[59] 2008 [60] Laure Morelle、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。2025。以与顶点删除同样快的速度，将有界规模图修改到小闭类。载于第三十三届欧洲算法研讨会 ESA 2025（LIPIcs，第351卷），Anne Benoit、Haim Kaplan、Sebastian Wild 和 Grzegorz Herman（编）。达格斯图尔城堡－莱布尼茨信息学中心, 7 1 7 18 10 4230 2025 7 : – :。doi:。/LIPICS.ESA.。Assaf Natanzon、Ron Shamir 和 Roded Sharan。[61] 2001 某些边修改问题的复杂性分类。《离散应用数学》113，1（2001），109 128 10 1016 0166 218 00 00391 7 –。doi:。/S-X( )- Romeo Rizzi、Vineet [62] Bafna、Sorin Istrail 和 Giuseppe Lancia。2002。单个个体 SNP 单倍型分型问题的实用算法与固定参数可处理性。载于第二届生物信息学算法国际研讨会论文集（WABI '02）。Springer-Verlag，德国柏林，29–43。[63] Ron Shamir、Roded Sharan 和 Dekel Tsur。2004。簇图修改问题。《离散应用数学》144，1（2004），173–182。doi:10.1016/j.dam. 2004.01.007《离散数学与数据挖掘》。[64] Zimo Sheng 和 Mingyu Xiao。2023。放电法：改进边三角形打包与覆盖的核。载于计算与组合数学——第二十九届国际会议 COCOON 2023（《计算机科学讲义》，第14423卷），Weili Wu 和 Guangmo Tong（编）。Springer，171–183。doi:10.1007/ 978-3-031-49193-1 13[65] Sławomir Staworko 和 Jan Chomicki。2010。存在全称约束时的一致查询答案。《信息系统》35，1（2010），1–22。doi:10. 1016 2009 03 004 /j.is. . . Till Tantau. . 图上的存在二阶逻辑：完整的复杂性理论分类。载于第*32*届国际理论计算机科学前沿研讨会，*STACS 2015*。703–715。doi:10.4230/LIPIcs.STACS. 2015.703[67] Heribert Vollmer。1999。电路复杂性导论——一种统一方法。Springer。[68] 徐少斌、孙明辉和秦军。2024。面向大规模网络的高可扩展性图修改系统。计算机图形论坛 43, 6（2024）。doi:10.1111/CGF.15191[69] Mihalis Yannakakis。1978。节点与边删除 NP 完全问题。载于第十届 *ACM* 年度计算理论研讨会（圣迭戈，加利福尼亚州，美国）（*STOC '78*）。计算机协会，纽约州纽约, 253 264 10 1145 800133 804355 – 。doi: . / . Mihalis [66] 2015 [70] 1981 Yannakakis。. 边删除问题。*SIAM* 计算杂志 10, 2（1981），297–309。doi:10.1137/0210021

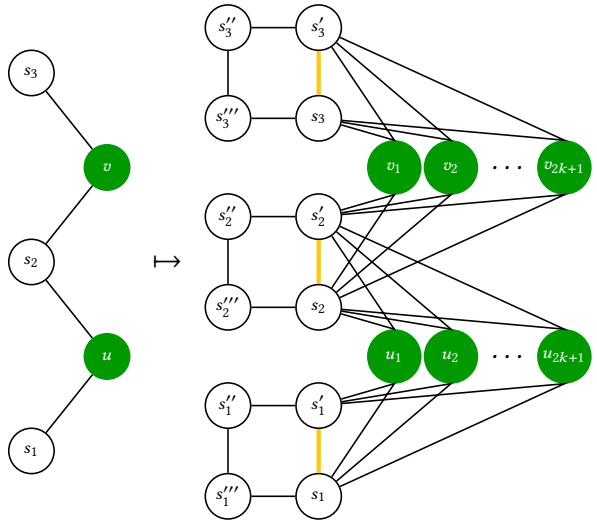



**图 4：引理 3.6 中归约的可视化。**

## 6 技术附录

以下给出正文中省略的证明。为方便读者，在每种情况下都会再次陈述定理或引理的结论。

### 6.1 第 3 节的证明

引理 3.6 的断言。 对于每种修改操作 $\otimes \in$ {删除，添加，编辑}，p-RM$^{\otimes}_{\text{基本}}(aea)$ 都包含一个W[2]-难问题。

证明。公式。 考虑公式

$$\phi_{3.6} = \forall x \exists y \forall z \big(x \sim y \wedge \neg(x \sim z \wedge y \sim z)\big),$$

它表达了这样一种性质：每个顶点都有一个邻居，使得它与该邻居不属于同一个三角形。我们将这样的邻居称为 $y$ 见证，对应于 $x$。

归约。 我们将归约到边删除问题。给定 $(S \dot\cup U, E, k)$ 作为输入。该归约输出 $k' = k$ 以及按如下方式构造的基本图 $G' = (V', E')$：

- 对于每个 $s \in S$，向 $V'$ 中添加 $s$，并再添加三个顶点 $s'$、$s''$、$s'''$，并将它们连成一个环，即 $s -' s' -' s'' -' s''' -' s$。
- 对于每个 $u \in U$，添加 $2k+1$ 个副本 $u_1, \ldots, u_{2k+1}$ 到 $V'$。
- 每当 $u - s$ 成立时，就让新图中的所有 $u_i$ 与 $s$ 和 $s'$ 构成一个三角形；也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$，令 $u_i -' s$ 和 $u_i -' s'$。

归约的一个示例如图 4 所示，采用与图 1 相同的约定。每个 $s \in S$ 都被纳入一个长度为 4 的环中；而对于 $U$中的每个元素，都会向新图中添加恰好 $2k+1$ 个副本。每条边 $s - u$ 都会被替换为 $4k+2$ 条边，即 $u_i -' s$ 和 $u_i -' s'$，适用于 $u$的所有副本 $u_i$。大小为 1 的集合覆盖$C = \{s_2\}$对应于这样一种情况：从右侧的图中恰好删除 $s_2 -' s_2'$ 后，所得图中的每个顶点都有一个邻居，且它与该邻居不构成三角形。大小为 2 的集合覆盖 $C = \{s_1, s_3\}$也同样如此。相比之下，$C = \{s_1\}$不是集合覆盖，因为 $v$ 是未被覆盖的；事实上，如果我们既不删除 $s_2 -' s_2'$ 也不删除 $s_3 -' s_3'$，那么 $v_1$ 的四个邻居（即 $s_2$、$s_2'$、$s_3$和 $s_3'$）都属于三角形。

正向。给定 $(S \dot\cup U, E, k) \in$ p-集合覆盖。我们需要证明 $(G', k') \in$ p-RMdel basic$(\phi_{3.6})$ 成立。设 $C \subseteq S$满足 $|C| \le k$，且是 $U$的一个覆盖。我们声称，对于$C' = \{(s, s') \mid s \in C\} \cup \{(s', s) \mid s \in C\}$，$(V' E' \setminus C') \models \phi_{3.6}$，也就是说，从 $E'$ 中移除所有 $s -' s'$，会得到满足 $\phi_{3.6}$ 的见证。下面检查这对 $V'$中的所有顶点是否成立：对于所有 $s \in S$，顶点 $s$、$s'$、$s''$、$s'''$各自在 $G'$ 中都有一个不属于三角形的邻居，也就是一个见证。对于 $(V' E' \setminus C')$ 中的 $s$、$s'$、$s''$、$s'''$，这一点仍然成立，因为它们彼此之间都有见证。

对于每个 $u \in U$ 和 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$，在 $(V', E' \setminus C')$ 中，$u_i$ 有一个不属于 $(V, E' \setminus C')$ 中任何三角形的邻居：由于 $C$ 是一个覆盖，因此必定存在一个 $s \in C$，使得 $u -' s$。但这样一来，不存在其他顶点能与 $u$ 和 $s$ 构成三角形，因为 $u$ 和 $s$ 唯一的公共邻居是 $s'$，而 $s - s'$ 已从 $E'$ 中删除。

反向。反过来，假设对于 $G' = (V' E')$，给定一个集合 $D \subseteq E'$，满足 $\|D\| \le k$，且 $(V' E' \setminus D) \models \phi_{3.6}$。对于每个 $u \in U$，考虑 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$ 对应的副本 $u_i$。对于每个满足 $s - u$ 的 $s \in S$，都存在一个三角形 $u_i -' s -' s' -' u_i$，但 $u_i$ 在 $G'$ 中的每个邻居都是这类三角形的一个 $s$ 或 $s'$。因此，为确保 $\phi_{3.6}$ 成立，我们必须 (1) 删除 $u_i -' s$ 或 $u_i -' s'$，或 (2) 删除 $s -' s'$。由于 $u$ 有 $2k+1$ 个副本，我们不能对 $u$ 的所有副本都采用选项 (1)，因此，对于每个 $u \in U$，都必须存在一个 $s \in S$，使得 $s - u$，并且 $s -' s'$ 从 $G'$ 中删除。然而，这意味着集合 $C = \{s \in S \mid (s, s') \in D\}$ 是 $(S \dot\cup U, E)$ 的一个集合覆盖，而且显然 $|C| \le \|D\| \le k$。

边编辑。添加边不会影响归约：如果一个顶点有一个邻居，使得它与该邻居不构成三角形，我们就称这个顶点是快乐的。自然地，$G \models \phi_{3.6}$ 如果每个顶点都是快乐的。在 $u_i$与$u_j$之间添加一条边，其中 $i \ne j$来自同一个 $u \in U$，不会使 $u_i$和$u_j$变得快乐，因为对于所有满足 $s - u$的 $s \in S$，我们都有一个三角形 $s -' u_i -' u_j -' s$。在 $u_i$与$v_j$之间添加一条边，其中两者分别是 $U$中不同顶点的副本，只有在不存在满足 $s -' u_i$和 $s -' v_j$的 $s$时，才会使 $u_i$和$v_j$变得快乐。无论哪种情况，这一操作最多只能使两个顶点变得快乐，不足以覆盖 $4k+2$ 个顶点 $u_i$ 和$v_j$，且只需 $k$ 次边添加。

适配有向情形。我们通过选择公式来调整上述归约

$$\phi_{3.6,\text{dir}} = \forall x \exists y \forall z \big(x \sim y \wedge \neg(x \sim z \wedge y \sim z) \wedge \phi_{\text{undir}}(x, z)\big),$$

其中 $\phi_{\text{undir}}(x,\ y) = x \sim y \to y \sim x$，并将修改预算设为 $2k$。由于我们将无向图定义为具有对称边关系的有向图，$\phi_{\text{undir}}$ 确保每次对一条边进行编辑时，也必须编辑方向相反的那条边。□

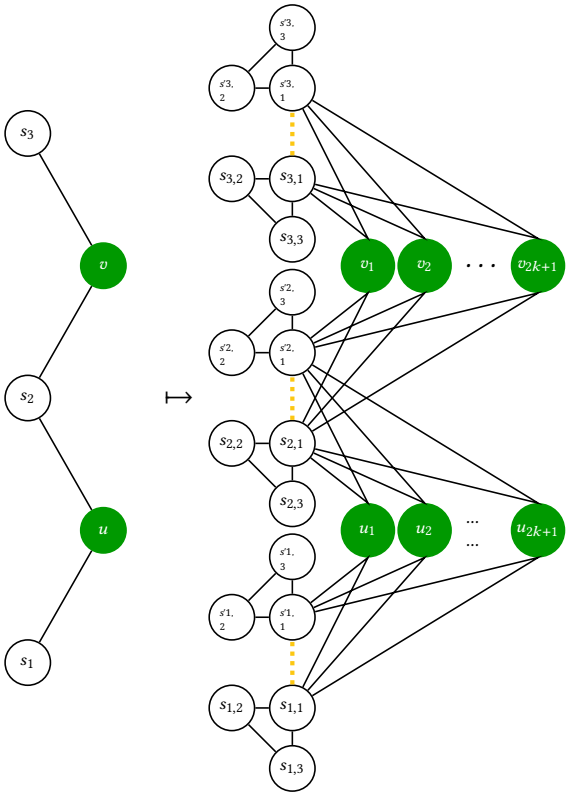
引理 3.7 的断言。对于每种修改操作 $\otimes \in$ {删除, 添加,编辑}，p-RM$^{\otimes}_{\text{basic}}(aee)$ 都包含一个 W[2]-困难问题。

证明。该公式。考虑公式

$$\phi_{3.7} = \forall x \exists y \exists y' (x \sim y \wedge x \sim y' \wedge y \sim y'),$$

它表达的是每个顶点都属于某个三角形。

归约。 我们将归约到边添加问题。给定输入 $(S \dot\cup U, E, k)$。该归约输出 $k' = k$ 以及一个按如下方式构造的基本图 $G' = (V', E')$：




**F图5：引理中的归约可视化** **a 3.7.**

- 对于每个 $s_i \in S$，向 $V'$ 中添加名为 $s_{i,j}, s'_{i,j}$ 的顶点，其中 $j \in \{1, 2, 3\}$，并添加边 $s_{i,1} - s_{i,2} - s_{i,3} - s_{i,1}$，以及 $s'_{i,1} - s'_{i,2} - s'_{i,3} - s'_{i,1}$。
- 对于每个 $u \in U$，向 $V'$ 中添加 $2k+1$ 个副本 $u_1, \ldots, u_{2k+1}$。
- 每当 $u - s$ 成立时，就将所有 $u_i$ 与 $s_{i,1}$ 和 $s_{i,1}$ 相连；也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$，令 $u_i - s_{i,1}$ 和 $u_i - s_{i,1}$。

图5展示了一个归约示例，采用与前面各图相同的约定。对于每个 $s \in S$，我们添加两个三角形；对于 $U$ 中的每个元素，恰好添加 $2k+1$ 个副本。每条边 $s_j - u$ 都被替换为 $4k+2$ 条边，即对 $u$ 的所有副本 $u_i$，分别添加 $u_i - s_{j,1}$ 和 $u_i - s'_{j,1}$。虚线黄色边并不存在，但可作为边添加的候选边。大小为 1 的集合覆盖 $C = \{s_2\}$ 对应于这样一个事实：向右侧的图添加边 $s_{2,1} - s'_{2,1}$ 后，所得图中每个顶点都属于一个三角形。大小为 2 的集合覆盖 $C = \{s_1, s_3\}$ 也同样如此。相反，$C = \{s_1\}$ 并非集合覆盖，因为 $v$ 未被覆盖；而且，如果不添加 $s_{2,1} - s'_{2,1}$ 或 $s_{3,1} - s'_{3,1}$，$v_1$ 确实不属于任何三角形。

正向。给定 $(S \dot\cup U, E, k) \in$ p-集合覆盖。我们证明 $(G', k') \in$ p-RMadd basic($\phi_{3.7}$) 成立。令 $C \subseteq S$ with $|C| \leq k$ 为 $U$ $C' = \{s_{i1}\, s'_{i1} \mid s_{i1} \in C\} \cup \{s'_{i1}\, s_{i1} \mid$ 的一个覆盖，并令 $s_{i1} \in C$ $V$ $E' \cup C' \models \phi_{3.7}$ {(, , ), } {(, , ), }。我们声称 ( ')，也就是说，将所有 $s_{i,1} - s'_{i,1}$（对 $s_{i,1} \in C$）添加到 $E'$，会得到一张图，其中每个顶点都属于一个三角形。我们来检查 $V'$ 中的所有顶点是否都满足这一点：对于所有 $s_i \in S$，$s_{i,j}$（对 $j \in \{1, 2, 3\}$）以及 $s'_{i,j}$（对 $j \in \{1, 2, 3\}$）都构成三角形。对于每个 $u \in U$ 和 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$，$u_i$ 在 $(V', E' \cup C')$ 中属于一个三角形：由于 $C$ 是一个覆盖，必定存在一个 $s_{i,\ 1} \in C$，满足 $u - s_{i,\ 1}$。那么，根据构造，我们也有 $u_i - s_{i,\ 1} - s'_{i,\ 1} - u_i$。

反向。假设对于 $G' = (V, E')$，给定一个集合 $A \subseteq V' \times V$，其中包含 $\|A\| \leq k$，且满足 $(V, E' \cup A) \models \phi_{3.7}$。给定 $A$，如有必要，我们按如下方式修改它：如果对于两个不同的 $s, t \in S$，$(s, t') \in A$，就从 $A$ 中移除 $(s, t')$ 和 $(t', s)$，并改为添加 $(s, s')$ 和 $(s', s)$。显然，这不会增大 $A$ 的规模。关键的是，如果 $(s, t')$ 原本属于某个 $u_i$ 的见证三角形，现在就会有一个新的见证三角形 $u_i - s - s' - u_i$。

现在，令 $C$ 包含所有满足 $(s, s') \in A$ 的 $s \in S$。显然，$|C| \leq \|A\| \leq k$。我们声称 $C$ 是一个覆盖：设给定 $u \in U$。其中的每一个 $2k+1$ 个 $u_i$ 都属于 $E' \cup A$ 中的一个三角形，但在 $E'$ 中，它们都不属于任何三角形。因此，对于每个 $u_i$，我们在 $A$ 中都有一条边，它要么与 $u_i$ 关联，要么连接 $u_i$ 的两个邻居。由于 $\|A\| \leq k$，$A$ 不可能包含分别与这 $2k+1$ 个 $u_i$ 关联的边。因此，$A$ 连接了 $u_i$ 的两个邻居，而对于 $s \in S$，仅有的候选项是 $s$ 和 $s'$。由于我们确保了 $A$ 中连接 $s$ 与 $t'$ 顶点的边只有在满足 $s = t$ 时才存在，因此得到 $s \in C$。因此，$u$ 被 $C$ 覆盖。

边编辑。要看出该归约对边编辑同样成立，只需注意，删除边不会产生新的三角形。

向有向情形的适配。我们选择

$$\phi_{3.7,\text{dir}} = \forall x \exists y \exists y' (x \sim y \wedge x \sim y' \wedge (y \sim y' \vee y' \sim y)),$$

并以相同方式进行归约。由于公式指出，$y$ 与 $y'$ 之间边的方向并不重要，因此只需在 $s_{i,1}$ 与 $s'_{i,1}$ 之间添加一条边。

□

引理 3.8 的断言。对于每种修改操作 $\otimes \in$ {删除, 添加, 编辑}，p-RM$^{\otimes}_{\text{basic}}(aae)$ 都包含一个W[2]-困难问题。

证明。该结论直接源于直径 2 边添加问题是W[2]-困难的这一事实 [41]。该问题可以表示为 p-RM添加基本($\phi_{\text{diam-2}}$)，其中

$$\phi_{\text{diam-2}} = \forall x \forall x' \exists y (x \nsim x' \rightarrow (x \sim y \wedge x' \sim y)).$$

这里，我们通过证明参数化三角形边覆盖边添加问题是W[2]-困难的，为该结论给出另一种证明。这个问题在离散数学中本身也很有研究价值 [22, 36],，可以表示为 p-RM添加基本($\phi_{\text{triangle-edge-cover}}$)。该问题询问，是否可以向一个图中添加至多 $k$ 条边，使得每条边都被一个三角形覆盖。

公式。考虑公式

$$\phi_{\text{triangle-edge-cover}} = \forall x \forall x' \exists y (x \sim x' \rightarrow (x \sim y \wedge x' \sim y)),$$

它表达的是每条边都属于一个三角形（注意与 $\phi_{\text{diam-2}}$ 的相似之处）。

归约。我们将归约到边添加问题。给定输入 $(S \dot\cup U,\ E,\ k)$。该归约输出 $k' = k$ 以及一个基本图 $G' = (V',\ E')$，其构造如下：

- 对于每个 $s_i \in S$，添加名为 $s_i$，$s_i$ 的顶点到 $V$，中，并用一条边将它们连接起来。
- 添加一个顶点 $c$ 到 $V$，中。
- 对于每个 $u \in U$，添加 $2k+1$ 个副本 $u_1$，……，$u_{2k+1}$，并将它们连接到 $c$。
- 每当 $u - s$ 成立时，就将所有 $u_i$ 连接到 $s$ 和 $s$；也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$，令 $u_i - s$ 和 $u_i - s$。

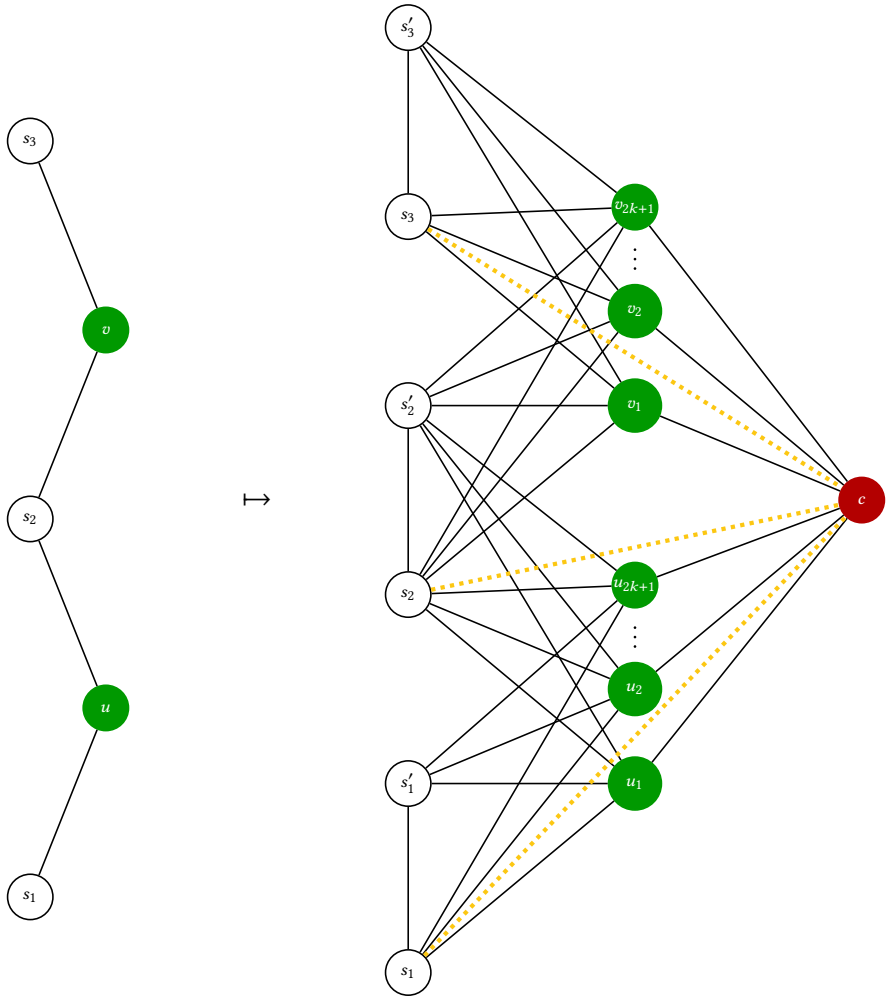



**图6：引理 3.8 中归约的可视化。**

图6展示了归约的一个示例，采用的约定与前面的图相同。红色突出显示的是既不依赖于 $S$ 也不依赖于 $U$ 的新增构件。对于每个 $s \in S$，我们添加顶点 $s, s'$，使其满足 $s -' s'$；对于 $U$ 中的每个元素，我们恰好添加 $k+1$ 个副本。每条边 $s - u$ 都被替换为连接 $s$ 和 $s'$ 与 $u$ 的每个副本 $u_i$ 的边。最后，添加一个顶点 $c$，并将其连接到所有 $u \in U$ 对应的 $u$ 的每个副本 $u_i$。大小为 1 的集合覆盖 $C = \{s_2\}$ 对应于这样一个事实：添加边 $c -' s_2$ 后，所得图中的每条边都属于一个三角形：边 $s -' s'$、$s -' u_i$ 和 $s' -' u_i$ 已经构成三角形，而现在，边 $c -' u_i$ 与 $s -' u_i$ 和 $s -' c$ 构成一个三角形。大小为 2 的集合覆盖 $C = \{s_1, s_3\}$ 也同样如此。相反，$C = \{s_1\}$ 不是集合覆盖，因为 $v$ 未被覆盖；而且，如果既不添加 $s_2 -' c$ 也不添加 $s_3 -' c$，那么 $v_1 -' c$ 不属于任何三角形。

正向。给定 $(S \cup U, E, k) \in$ p-集合覆盖。我们证明 $(G', k') \in$ p-RM添加基本 $(\phi_{\text{triangle-edge-cover}})$ 成立。设 $C \subseteq S$ 满足 $|C| \leq k$ $U$ $C' = \{s\ c \mid s \in C\} \cup \{c\ s \mid s \in$ 是 的一个覆盖。$C$ 设 $\{(,)\}\{(,)\}$。我们断言 $(, E' \cup C') \models \phi_{\text{triangle-edge-cover}}$，也就是说，将所有 $s -' c$（$s \in C$）添加到 $E'$ 后，得到的图中每条边都属于一个三角形。我们来检查 $G'$ 中的所有边：对于 $s_i$ 和 $u_j$ 之间的边，边 $s_i -' u_j$、$s'_i -' u_j$ 和 $s_i -' s'_i$ 构成一个三角形。此外，$u$ 的每个副本 $u_i$ 都与 $c$ 相连；由于 $C$ 是一个覆盖，根据构造，我们可以得到一个由边 $s -' u_i$、$s -' c$ $u_i -' c$ $i \in 1$ $2k+1$ 和 {、.....、} 组成的三角形。

反向。反过来，假设对于 $G' = (V', E')$，给定一个集合 $A \subseteq V \times V$ $\|A\| \leq k$ $V$ $E' \cup A \models$〃，使得 $(,)$。$\phi_{\text{triangle-edge-cover}}$ $A$ $c\ s' \in A$ 如有必要，我们按如下方式修改：如果 $(,)$，则从 $A$ 中移除 $(c, s')$ 和 $(s', c)$，并改为添加 $(c, s)$ 和 $(s, c)$。显然，这不会增加 $\|A\|$。关键的是，如果 $(c, s')$ 原本是某个 $u_i$ 的见证三角形的一部分，那么现在存在一个 $u_i$ 的见证三角形，其中使用了 $s -' c$、$s -' u_i$ 和 $s' -' u_i$。

现在，令 $C$ 包含所有满足 $(s \in S, s) \in A$ 的 $c$。显然，$|C| \leq \|A\| \leq k$。我们声称 $C$ 是一个覆盖：任取给定的 $u \in U$。这 $2k+1$ 条边 $u_i -' c$ 中的每一条都必须是 $E' \cup A$ 中某个三角形的一部分。由于它们都不属于 $E'$ 中的任何三角形，因此对每个 $u_i$，我们都必须在 $A$ 中有一条边，它要么与 $u_i$ 关联，要么将 $c$ 连接到 $u_i$ 的某个邻居。由于 $\|A\| \leq k$，$A$ 不可能包含分别与这 $2k+1$ 个 $u_i$ 关联的边。因此，$A$ 将 $c$ 连接到

$u_i$的一个邻居。不过，它唯一的邻居是 $s$和 $s'$，其中 $s \in S$。由于我们确保了在 $A$中 $c$与 $s'$之间没有边，因此得到 $s \in C$。因此， $u$被 $C$覆盖。

**边编辑。** 要看出该归约同样适用于边编辑，请注意，对于每个顶点 $u$，都有 $2k+1$条边 $u_i -' c$不属于任何三角形。由于我们最多只能删除其中的 $k$条，因此仍有 $k+1$条边 $u_i -' c$需要成为三角形的一部分。这迫使我们添加 一条边 $c -' s$，使得 $s - u$。

**适用于有向情形。** 与引理 3.6 类似，我们可以通过选择公式来调整该归约

$$\phi_{\text{tec, dir}} = \forall x \forall x' \exists y \big( (x \sim x' \rightarrow (x \sim y \wedge x' \sim y)) \wedge \phi_{\text{undir}}(x, y) \big),$$

其中 $\phi_{\text{undir}}(x, y) = x \sim y \rightarrow y \sim x$，并将修改预算设为 $2k$。

□

## 6.2 第 4 节的证明

引理 4.11 的断言。对于每个 $\otimes \in \{\text{del}, \text{add}、\text{edit}\}$，我们有 $\text{RM}^{\otimes}\text{undir}(ae)$，$\text{RM}^{\otimes}\text{undir}(ea)$，$\text{RM}^{\otimes}\text{undir}(aa) \not\subseteq \text{AC}^0$。

证明。对于每个前缀，我们都从多数问题归约而来。

对于 $p = ae$，考虑公式 $\phi_1 = \forall x \exists y (x \sim y)$。我们从多数归约到 $\text{RM}_{\text{添加无向边}}(\phi_1)$。根据位串 $s$，我们通过为每个值为 0 的位添加两个孤立顶点，并设置 $k = |s|/2$，构造一个基本图 $G = (V, E)$。现在显然，当且仅当 $s$ 中至少一半的位为 1 时，我们才能使该图满足该公式。

对于 $p = ea$，考虑公式 $\phi_2 = \exists x \forall y (x \sim y)$。我们将多数归约到 $\text{RM}_{\text{add undir}}(\phi_2)$。根据位串 $s$，我们通过为每一位添加一个顶点来构造基本图 $G = (V, E)$。接着，我们添加另一个顶点 $c$，并将其与所有表示值为 1 的位的顶点相连。同样，我们令 $k = |s|/2$。要满足该公式，必须将所有孤立顶点连接到 $c$；当且仅当 $s$ 中至少一半的位为 1 时，这才有可能。

对于 $p = aa$，考虑公式 $\phi_3 = \forall x \forall y (x \nsim y)$。我们将多数归约到 $\text{RM}_{\text{add undir}}(\phi_3)$。根据位串 $s$，我们通过为 $s$ 中每个值为 0 的位添加两个顶点 $v$，$u$（边数为 $v - u$）来构造基本图 $G = (V, E)$，并令 $k = |s|/2$。

□

收稿日期：2007年2月20日；修订日期：2009年3月12日；接受日期：2009年6月5日