arXiv:2603.22064v1 [quant-ph] 23 Mar 2026

色码、表面码与横向 CNOT：最小权重解码的 NP 困难性

Shouzhen Gu，[1] Lily Wang，[2] 以及 Aleksander Kubica[1]

[1] *Yale Quantum Institute & Department of Applied Physics、 Yale University、 New Haven、 CT、 USA*

[2] *CSE Division、 University of Michigan、 Ann Arbor、 MI、 USA*

解码问题是容错量子计算中无处不在的算法任务，高效解决该问题对于实现可扩展量子计算至关重要。在此，我们证明，在三个典型场景中，最小权重解码是 NP 困难的：(i) 具有 Pauli Z 错误的色码；(ii) 具有 Pauli X、Y 和 Z 错误的表面码；以及 (iii) 具有横向 CNOT 门、Pauli Z 和测量比特翻转错误的表面码。我们的结果表明，在量子存储器和逻辑电路实现所涉及的基本且具有实际意义的解码问题中，计算不可处理性已经出现，凸显了最小权重解码与其近似实现之间显著的计算复杂性差异。

I. 引言

解码问题是量子纠错（QEC） [1, 2]和容错量子计算 [3–6]中的核心算法任务之一。它可以表述如下：给定描述系统中可能发生哪些错误的错误综合征，找出能够减轻这些错误对编码信息造成的不利影响的恢复算符。在稳定子码 [7], 中，错误综合征通过测量奇偶校验获得；这些奇偶校验由一组彼此对易、用于定义码空间的 Pauli 算符构成。解码问题的两种典型情形是码容量噪声模型和唯象噪声模型[1], ，在这两种模型中，量子比特都会受到 Pauli 噪声的影响。前一种模型假设奇偶校验测量是完美的；而在后一种模型中，奇偶校验的测量结果可能受到干扰，通常是由相互独立的比特翻转噪声导致。因此，在唯象噪声设定下，可靠的量子纠错通常需要反复进行多轮综合征提取，以提高对奇偶校验结果的置信度，除非量子纠错方案具有单轮特性 [9–12]，或采用算法容错范式 [13, 14]。

高效的解码算法对于实现可扩展的量子计算至关重要——容错量子计算机持续生成综合征数据，因此相应的经典处理必须跟上；否则就会遇到积压问题，即经典后处理成为瓶颈 [15]。解码算法以测得的综合征和解码超图为输入，其中顶点和超边分别对应综合征和基本错误。在码容量场景中，这些基本错误通常是单量子比特 Pauli 错误；而在现象学场景中，还包括影响奇偶校验测量结果的测量比特翻转错误。解码算法还可以利用关于底层错误分布的先验信息。

一类尤为重要的解码算法是最小权重解码器，它们旨在寻找与测得的综合征相符且权重最小的恢复操作。这种范式的依据是独立同分布噪声这一标准假设；在这种假设下，最可能发生的错误通常就是最小权重错误。由于稳定子码具有简并性，也就是说，不同错误可能具有相同的综合征，因此最小权重解码器通常并不等同于最大似然解码器；后者应识别出概率最高的错误等价类。尽管如此，最小权重解码器仍是最成功且应用最广泛的解码算法之一。尤其是，最小权重解码器被视为表面码的黄金标准 [16–18]；它们也是其他拓扑量子码（包括色码 [19–22] ）以及更一般的二维平移不变码 [23, 24] 的高性能解码器的核心组成部分。

在本工作中，我们证明了最小权重解码在三种基本的量子纠错场景中是 NP 困难的：(i) 色码，(ii) 表面码，以及 (iii) 带有横向 CNOT 门的表面码。具体而言，对于 (i) 和 (ii)，我们分别考虑具有 Pauli Z 错误以及 Pauli X、Y 和 Z错误的码容量场景；对于 (iii)，我们则考虑具有 Pauli Z 和测量比特翻转错误的唯象噪声。我们关注的是寻找最小权重错误，或判定其逻辑效应。在每种情况下，我们都证明了

[1] 我们指出，电路噪声模型通过指定综合征提取电路引入了更多细节；然而，对于量子低密度奇偶校验码， [8], 这些细节可以由唯象噪声模型捕捉（可能包含权重较小的相关错误）。这就是我们不认为它会带来定性上不同的解码情形的原因。

通过从三维匹配问题（这是一个 NP 完全问题）归约得到 NP 困难性 [25, 26]；归约概览见图 1。我们的结果表明，在量子纠错中一些最基本且最具实际意义的解码问题里，计算难处理性已经出现。与此同时，这些结果也鲜明地区分了最小权重解码与其近似实现——在这三种场景中，都存在高效解码器，其输出的恢复权重至多是最小权重恢复的常数倍（两倍或三倍）；详情见附录 A。最后，我们指出，Walters 和 Turner [27]最近通过从 3-SAT 问题归约，证明了情形 (i) 的 NP 困难性。我们的工作超越了他们的研究范围，将类似论证扩展到了情形 (ii) 和 (iii)，针对的是典型且研究最广泛的量子纠错码——表面码。

II. 预备知识

我们先介绍一些复杂性理论的基本定义。复杂性类 NP 包含这样一些判定问题：其中 YES 实例的证明可以在多项式时间内验证。如果存在从任意 NP 问题到 A 的多项式时间归约，我们就称问题 A 为 NP 困难；也就是说，如果我们能解决 A，那么只需付出多项式时间开销，就能解决任意 NP 问题。如果一个问题是 NP 困难且属于 NP，那么它就是 NP 完全问题。

三维匹配问题（3DM）是 Karp 1972 年奠基性问题列表中的 21 个 NP 完全问题之一 [25, 26]。在一个 3DM 实例中，给定三个大小相等的有限集合 A、B、C，其大小为 r，以及一组超边 $T \subseteq A \times B \times C$。若子集 $M \subseteq T$ 满足：对于任意两个不同的 (a_1, b_1, c_1)，$(a_2, b_2, c_2) \in M$，都有 $a_1 \neq a_2$、$b_1 \neq b_2$ 和 $c_1 \neq c_2$，则称其为一个匹配。该判定问题是确定是否存在完美匹配，即大小为 r 且覆盖所有元素的匹配。问题规模定义为 $s = |T|$。

> **三维匹配（3DM）**
> **实例**：一个大小为 s 的集合 $T \subseteq A \times B \times C$，其中 A、B 和 C 是基数相同、均为 r 的集合。**问题**：T 是否包含一个完美匹配，即存在一个子集 $M \subseteq T$，使得 $|M| = r$ 成立，且 M 中任意两个元素在任何坐标上都不相同?

接下来，我们将介绍量子纠错码和解码问题的一些背景。由 n 个量子比特组成的稳定子码定义为泡利群 $\mathcal{P}_n$ 的阿贝尔子群 $\mathcal{S}$ 在 n 个量子比特上的 $+1$ 本征空间，其中 $-I \notin \mathcal{S}$。由于码空间是一个本征空间，任何与 $\mathcal{S}$ 中某个校验算符反对易的泡利错误都会使状态离开码空间，因此可以被检测到。为了纠正错误，我们首先测量 $\mathcal{S}$ 的稳定子校验，以获得 ± 1 个结果的综合征。随后可以利用综合征预测最可能发生的错误，并恢复原始编码态。

在最小权重解码问题中，输入为一个二进制矩阵 $H \in \mathbb{F}_2^{m \times n}$、一个综合征$\sigma \in \mathbb{F}_2^m$，以及定义在 $\mathbb{F}_2^n$ 中向量上的权重函数。任务是找出一个权重最低的错误 $e \in \mathbb{F}_2^n$，使得 $He = \sigma$（如果存在）。这里，我们考虑将错误支撑的大小作为权重的权重函数，并将 n 视为解码问题的规模。H 的列通常称为变量，行称为约束；对于 σ 中值为 0 或 1 的行，分别对应满足或不满足的约束。在量子纠错码的解码中，H 在码容量场景下称为校验矩阵，在唯象噪声场景下称为探测器校验矩阵 [28] 。我们将考虑以下三种情形。

1. 噪声下的色码 Z 。我们考虑定义在边长为 L 的六角晶格上的三角形色码 [29] ；示意图见图 12(a)(b)。在对偶晶格描述中，量子比特位于三角晶格的各个三角形上。X 和 Z 校验对应于顶点，其支撑由相邻三角形上的量子比特构成。在解码问题中，变量表示每个量子比特是否发生了 Z 错误，而 X 校验则是约束。因此，H 是对偶晶格上三角形与顶点之间的关联矩阵。错误的权重为汉明重量，即受损量子比特的数量。

> **色码的最小重量译码（ColorCodeZ）**
> **实例**：六角晶格上具有 n 个量子比特的三角形色码，以及一个 X 综合征 σ_X。**问题**：求一个具有综合征 σ_X 且权重最小的泡利 Z 错误 E_Z 。

2.*Pauli* 噪声下的表面码。我们考虑定义在正方形晶格上的表面码 [16, 30] ，其中量子比特、X 检查和 Z 检查分别放置在晶格的边、顶点和面上，

相应地。每个 X 或 Z 检查的支撑，是与该检查所在顶点或面相邻的边上的量子比特集合。在解码问题中，每个量子比特对应两个变量：第一个变量表示它是否发生了 X 错误，第二个变量表示它是否发生了 Z 错误（若发生了 Y 错误，则两个变量均为 1）。约束为 X 和 Z 检查。于是， H 是一个由边-顶点关联矩阵和边-面关联矩阵组成的分块对角矩阵。然而，我们无法独立解码这两个块，因为权重函数返回的是错误的支撑。

表面码的最小重量解码（SurfaceCodeXYZ）
实例：正方形晶格上的 2 量子比特表面码及综合征 σ。**问题**：找到一个具有综合征 σ、权重最小的泡利错误 E 。

3. 唯象噪声下表面码中的横向 *CNOT*。在此设置中 [31–34], 有两个正方形晶格表面码块，并在半整数时刻 $t = t_i - \frac{1}{2}$、……、$t_G - \frac{1}{2}$、$t_G + \frac{1}{2}$、……、$t_f + \frac{1}{2}$重复进行稳定子测量。在 $t = t_G$，从第一个表面码向第二个表面码施加一个横向逻辑 CNOT 门。约束是 X 探测器，即同一a表面码块上、时刻 $t - \frac{1}{2}$ 和 $t + \frac{1}{2}$ 的 X 稳定子 s 连续测量结果 $s^a_{t-1/2}s^a_{t+1/2}$ 的乘积。然而，由于横向 CNOT 门的作用，探测器 $s^1_{t_G-1/2}s^1_{t_G+1/2}$ 被$s^1_{t_G-1/2}s^1_{t_G+1/2}s^2_{t_G-1/2}$ 替代。从 t_i 到 t_f 的每个整数时间步，每个量子比特对应一个变量，表示该量子比特在该时刻是否发生了 Z 错误。具体而言，我们假设在 $t = t_G$ ，错误发生在施加 CNOT 门之后。此外，从 $t_i + \frac{1}{2}$ 到 $t_f - \frac{1}{2}$ 的每个测量结果都对应一个变量，表示测量是否出错。为简单起见，我们假设第一次和最后一次测量结果都是理想的。于是， H 由两个三维立方晶格的边-顶点关联矩阵组成，其中第二个晶格在时刻 $t = t_G - \frac{1}{2}$ 的边被超边替代；这些超边还连接到第一个晶格在时刻 t_G相同空间位置上的顶点。错误的权重即为其汉明重量。

横向 CNOT 门的最小权重解码（tCNOTZ）
实例：两个定义在 $L \times L$ 正方形晶格上的表面码，经过 $2L$ 轮测量，并且在 L 轮后施加横向逻辑 CNOT 门，得到一组触发的 X 探测器 σ。
问题：求一个最小权重错误 E，由 Z 量子比特错误和测量比特翻转错误组成，其综合征为 σ。

在量子纠错码中，我们将未满足的约束称为缺陷。为建立与三维匹配的联系，在三种解码情形中，我们分别用 A、 B、 C 标记三种类型的缺陷，使得对于任意错误，每种类型的缺陷数量都具有相同的奇偶性。对于色码，可以将三角晶格的顶点染成红色、绿色和蓝色，使任意两个相邻顶点颜色不同。这意味着单个错误会导致每种颜色各出现一个缺陷，我们将它们与三种缺陷类型对应起来。在表面码中，我们将被违反的 Z （X）奇偶校验视为一个 A （C）缺陷，也称为 X （Z）缺陷。请注意，缺陷类型由导致该缺陷的泡利错误类型决定，而非被违反的稳定子类型。如果一个 Z 缺陷位于某个顶点上，且该顶点与包含一个 X 缺陷的面相邻，我们就将这两个缺陷合并，并称其为一个 B 或 Y 缺陷。此操作可保持每种类型缺陷数量的奇偶性相同。在带有横向 CNOT 的表面码中，第一组表面码上的所有缺陷，无论其时间坐标如何，均标记为 B 类型。第二组表面码上时刻为 $t \geq t_G$ 的所有缺陷标记为 C，时刻为 $t \leq t_G - 1$ 的缺陷标记为 A。权重为一的错误会产生两个同类型缺陷，但第二组表面码在时刻 $t_G - \frac{1}{2}$发生的测量错误除外，它会产生每种类型各一个缺陷。因此，每种类型的缺陷数量都具有相同的奇偶性。

在解码问题中，我们可以构造一个*Tanner* 图 $\mathcal{G}$，它是一个二分图，顶点集为 $V \sqcup W$ ，用于刻画错误与缺陷之间的连通关系。具体而言， V 是错误位置的集合——包括 ColorCodeZ 和 SurfaceCodeXYZ 中的量子比特，以及 tCNOTZ 中每个时刻的量子比特和测量；而 W 是约束的集合。如果存在一个支撑在 v 上的错误违反了约束 w，我们就在 $v \in V$ 和 $w \in W$ 之间连边，并称 v 和 w 相邻。对于 E的子集，如果两个错误位置在 $\mathcal{G}$中是次近邻，我们就称它们相邻。 E的一个连通错误分量是指将 E 限制在度量意义下连通的集合上所得到的部分。我们可以将缺陷集合 g 的 k-邻域称为与 g的距离不超过 $2k - 1$ 的那些错误位置。

最后，我们指出，在 ColorCodeZ、SurfaceCodeXYZ 和 tCNOTZ 中，最小权重解码问题等价于：当错误分别从相互独立

且同分布的相位翻转噪声、退极化噪声，以及伴有测量比特翻转噪声的相位翻转噪声中抽样时，寻找给定综合征对应的最可能错误。

III. 将 三维匹配 归约为最小权重解码问题

本节中，我们证明以下定理。

定理 1. 以下三个解码问题均为 *NP* 困难。

1. `ColorCodeZ`：在六角晶格上的色码中，针对给定的X 综合征，寻找一个最小权重 Z 错误。 *2.* `SurfaceCodeXYZ`：在正方形晶格上的表面码中，针对给定的综合征，寻找一个最小权重泡利错误。 *3.* `tCNOTZ`：在具有横向逻辑 *CNOT* 门的两个正方形晶格表面码的情形下，针对给定的一组触发的 X 检测器，寻找一个最小权重泡利 Z 错误和测量比特翻转错误。

我们通过证明，在这三种情形下，判定是否存在权重至多为 w 且满足给定综合征的错误这一判定问题均为 NP 完全，来证明定理 1。该归约成立，是因为如果我们能找到最小权重错误，就能检查其权重是否至多为 w。该判定问题属于 NP，因为 YES 实例的见证只需是一个有效的低权重错误。

为了证明该判定问题是 NP 困难的，我们将其归约自 NP 完全问题三维匹配。也就是说，对于任意大小为 s 的三维匹配实例，在三种情形中的每一种情形下，我们都能找到一个规模为 poly(s) 的解码问题，使得存在完美匹配，当且仅当该解码问题存在权重足够低的解。图 1 展示了归约中的主要思路。如果将综合征置于足够大的晶格内部深处（例如，晶格的线性尺寸为综合征直径的两倍），那么量子纠错码的边界条件就无关紧要。

定义解码问题的综合征 σ 将被分解为若干构件；每个构件都是按非常特定的模式排列的一组缺陷，示例见图 1(c)。这些构件经过设计，使得任何具有综合征 σ 的错误，其权重至少为 w；而任何权重为 w 的有效错误，都被限制在每个构件周围若干特定配置中的一种，见引理 3。这些构件按照三维匹配实例所规定的方式排列，见图 1(e)(f)。因此，如果每个构件周围的错误都属于允许的配置，且相邻构件周围的配置彼此一致，就可以推断出该三维匹配实例存在完美匹配。反过来，三维匹配实例的一个解将使我们能够为每个构件选取彼此一致的最小错误配置，并将它们组合成权重为 w的有效全局错误。

形式上，构件 g 由以下部分组成：一组缺陷；一个选定的子集，称为节点；一组错误位置 R_g，称为邻域；以及一个整数 m_g，称为错误超额。为简便起见，我们通常将这组缺陷称为构件。缺陷的邻域定义如下：对于表面码中的 Y 缺陷，邻域为其二邻域；对于所有其他缺陷，邻域为其一邻域。构件 g 的邻域R_g 是其中所有缺陷 g 的邻域之并集。

这些构件具有某些性质，本节中将这些性质标记为假设。我们在假定这些性质成立的前提下证明该归约，并将构件构造的细节以及所需性质的证明推迟到第 IV 节。构件和节点的布置将满足以下条件。

假设 2（小工具间的分离）。 来自两个不同构件 g、 g' 的两个缺陷 p、p' 的邻域之间的距离至少为二；例外情况是两个节点的邻域可以相邻（但仍互不相交）。在这种情况下，我们称 p 和 p' 为配对节点。每个构件中的每个节点恰好有一个来自其他某个构件的配对节点，且两者属于相同的缺陷类型。

如果由 E_g 引起的综合征包含 g，我们就说错误 E_g 覆盖构件 g。整数 m_g 的选取满足

$$\min_{E_g\text{: cover of } g} |E_g \cap R_g| = |g| + m_g. \tag{1}$$

我们称任何在方程（1）中达到最小值且包含于 $R = \bigcup_g R_g$ 的 E_g 为 g 的最小覆盖。对于满足该综合征的全局错误 E，构件 g 的连通覆盖 E_g 是 E 中覆盖 g 的最小子集，且该子集是连通错误分量的并集。

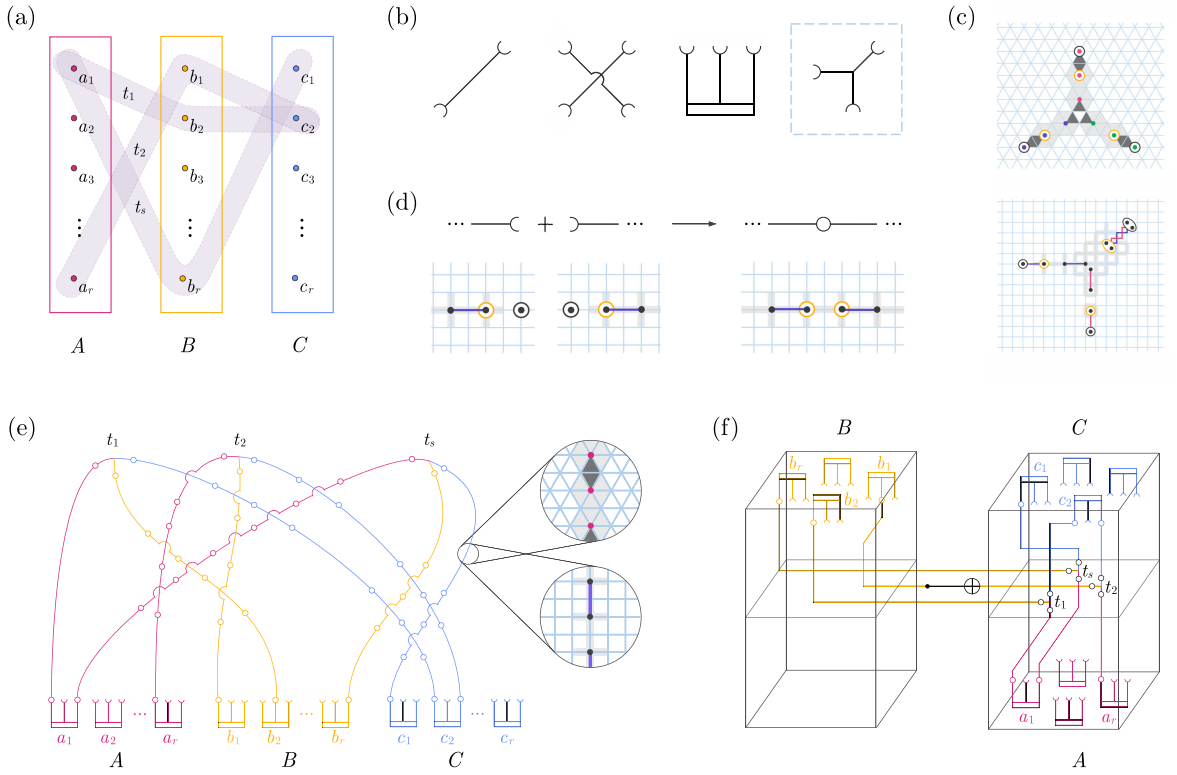

图 1. 定理 1 的证明概览。(a) 一个三维匹配实例，问题是判断是否存在一个互不相交的超边子集 t_i，覆盖 $A \cup B \cup C$ 中的所有元素。(b) 用于表示导线、交叉、元素和分裂构件的符号（从左到右）。(c) 色码（上）和表面码（下）中分裂构件的实现。圆点表示缺陷，其中节点用黄色圈出，配对节点（即另一个构件中的缺陷）用黑色圈出。构件的邻域以浅灰色突出显示。图中展示了色码中所有节点真值均为真的最小覆盖，以及表面码中所有节点真值均为假的最小覆盖。(d) 两个构件相连的示例。本例中，两个构件中的节点具有相同的真值，均为假。(e) 待解码综合征中构件布局的示意图。将三维匹配归约到 ColorCodeZ 或 SurfaceCodeXYZ 时，采用相同的粗粒度布局，但构件的实现有所不同。(f) 将三维匹配归约到 tCNOTZ 时，定义综合征的构件布局。

引理 3。如果这些构件满足假设 *2*（尤其是邻域彼此不相交），那么任何产生综合征 σ 的错误 E 的权重至少为 $|E| \geq |\sigma| + m$，其中 $m = \sum_g m_g$。若等号成立，则每个构件的连通覆盖都是最小覆盖。

证明。 我们可以将 E 的权重界定为

$$|E| \geq \left|\bigcup_g (E_g \cap R)\right| \geq \left|\bigcup_g (E_g \cap R_g)\right| = \sum_g |E_g \cap R_g| \geq \sum_g (|g| + m_g) = |\sigma| + m, \tag{2}$$

其中 E_g 是构件 g 的连通覆盖。这里，第一次等号用到了 R_g 的不相交性，最后一个不等式则用到了方程（1）。

假设 E 使这个不等式取等。在该界中，第一个不等式仅当 $E \subseteq R$ 时才取等，即对于所有构件 g，$E_g \subseteq R$。此时，最后一个不等式恰好在对于所有 g，E_g 是 g 的最小覆盖时取等。 □

虽然每个构件单独来看都存在极小覆盖，但未必存在一个全局一致的错误，使其在每个构件上的权重都达到可能的最小值。我们的目标是证明，当且仅当相应的三维匹配实例存在完美匹配时，才存在权重为 $|\sigma| + m$ 的错误。

我们所考虑构件的极小覆盖，其综合征不可能出现在 g之外的任意位置。通过检查第 IV 节所述的构件以及假设 2 中构件间的分离，我们将得出以下性质。

假设 4. 如果 E_g 是构件 g 的一个极小覆盖，那么由 E_g 引起的综合征包含于 g 及其配对节点中。

一个构件可能有多个极小覆盖。假设 4 促使我们为极小覆盖中构件的节点赋予真值。具体而言，如果某个节点的配对节点是由错误引起的缺陷，则将该节点赋值为真（例如，图 1(c)（上））；否则赋值为假（例如，图 1(c)（下））。因此，在全局极小错误中，通过配对节点相连的构件在这些节点处具有相同的真值；该真值取决于错误是连接这两个节点，还是分别支撑于各个构件内部；示例见图 1(d)。构件将限定其自身节点中只有某些真值组合才可能出现。

构件有四种不同类型：导线构件、交叉构件、元素小工具和分裂构件。现在我们来介绍这些构件的关键性质，包括它们的节点在不同极小覆盖中的真值。

假设 5（构件的性质）。这些构件具有以下性质。

- 一个导线构件有两个缺陷类型相同的节点，在极小覆盖中，它们必须同时为真或同时为假。
- 一个交叉构件有两对节点。每对节点的缺陷类型和真值都相同，且位于构件的相对两侧。
- 一个元素构件有 k 个节点，且所有节点的缺陷类型相同。在极小覆盖中，恰有一个节点为真，其余节点均为假。
- 一个分裂构件有三个节点，每个节点的缺陷类型各不相同。三个节点的真值都相同。

存在具有允许真值的极小覆盖。除导线构件外，其他所有构件的大小均为常数；导线构件的节点可以放置在任何容纳相应缺陷类型的位置。

现在我们说明如何如图 1(e)(f) 所示将各个构件彼此连接起来，从而得到从三维匹配出发的归约，并证明定理 1。

定理 *1* 的证明。对于 $x \in A \cup B \cup C$，令 k_x 表示包含 x的超边 $t \in T$的数量。对于每个$a \in A$，我们放置一个包含 k_a 个节点且节点全为 A 类型的元素构件 g_a；类似地，我们也为每个 $b \in B$ 和 $c \in C$放置相应的构件。对于每条超边 $t \in T$，我们放置一个分裂构件 g_t。我们通过导线构件将分裂构件连接到元素构件。导线构件可以看作在两个可能相距甚远的位置之间传递信息（即真值）。对于超边 $t = (a,\ b,\ c) \in T$，我们将 g_t 的 A类型节点连接到 g_a的一个节点，将 B类型节点连接到 g_b的一个节点，并将C类型节点连接到 g_c 的一个节点。由于 g_a 有 k_a 个节点（ g_b 和 g_c也同样如此），因此它们分别通过导线构件连接到不同的分裂构件。在二维几何中，例如 ColorCodeZ 或 SurfaceCodeXYZ 中，不同的导线可能需要彼此交叉。我们不能直接将两个导线构件叠加，因为重叠可能会导致组合构件的极小覆盖在导线两端交换真值。相反，我们使用交叉构件。tCNOTZ 不需要交叉构件，因为导线可以在三维几何中彼此交织绕行。[2]

假设三维匹配实例中存在完美匹配 M。对于匹配中选中的每条超边 $t \in M$，我们取最小覆盖 E_{g_t}，将 g_t 的所有节点赋值为真。对于所有其他超边$t \in T \setminus M$，我们使用 E_{g_t}，将 g_t 的所有节点赋值为假。存在一种一致的极小覆盖选择，适用于连接这些分裂构件的导线构件和交叉构件。由于 M 是一个完美

[2] 虽然这并非证明所必需，但我们注意到，以这种方式产生的综合征总能由某个 $some$ 错误满足。这是因为，将所有节点设为假时，最小覆盖可以在局部移除导线、交叉和分裂构件中的缺陷。在三种解码情形中，每个元素构件都包含奇数个同一类型的缺陷。由于每种类型都有 r 个元素构件，因此使用能产生各类型一个缺陷的错误，可以找到某个错误移除所有这些缺陷。

匹配，每个元素 $x \in A \cup B \cup C$ 恰好属于一个 $t \in M$。我们使用 g_x 的极小覆盖 E_{g_x}，将通过导线构件连接到分裂构件 g_t 的节点设为真，其余节点设为假。这是可行的，因为 x 只属于一条超边；所有设为假的节点必然通过导线构件连接到与 $T \setminus M$ 中超边对应的分裂构件。由于 $E = \bigcup_g E_g$ 在每个节点处都保持一致，其总权重为 $|E| = |\sigma| + m$。

反过来，假设存在一个权重为 $|E| \leq |\sigma| + m$ 的错误 E。根据引理 3，它的权重为 $|E| = |\sigma| + m$，且连通覆盖 E_g 是每个构件的极小覆盖。令 G_M 为节点被设为真的分裂构件集合，令 $M \subseteq T$ 为对应的超边子集。每个元素构件恰有一个节点被设为真，该节点必须通过导线构件与 G_M 中的某个分裂构件相连。这表明，$A \cup B \cup C$ 中的每个元素恰好属于 M 中的一条超边，即 M 是该三维匹配实例的完美匹配。

□

IV. 构件的构造与放置

现在，我们将详细说明如何在三种解码设置中实现这些构件，并证明它们具有假设 5 所要求的性质。我们还将说明如何放置这些构件，使它们彼此充分分离，同时保持所需的连接关系，从而满足假设 2。对于所有构件，假设 4 均可通过检查验证，因此我们不再赘述。

A. 色码构件

我们从六角晶格上的色码开始。最近，参考文献 [27] 才证明了其针对 Z 错误的解码问题是 NP 困难。该研究还引入了分裂构件（称为 RGB 复制器子构件）、导线构件，以及连接同色或不同颜色导线的交叉构件（分别称为完全交叉构件和多色交叉子构件）。为完整起见，我们在图 2 和图 3 中展示了这些构件；研究证明，它们具备假设 5 所要求的性质。这些构件均不存在错误超额。

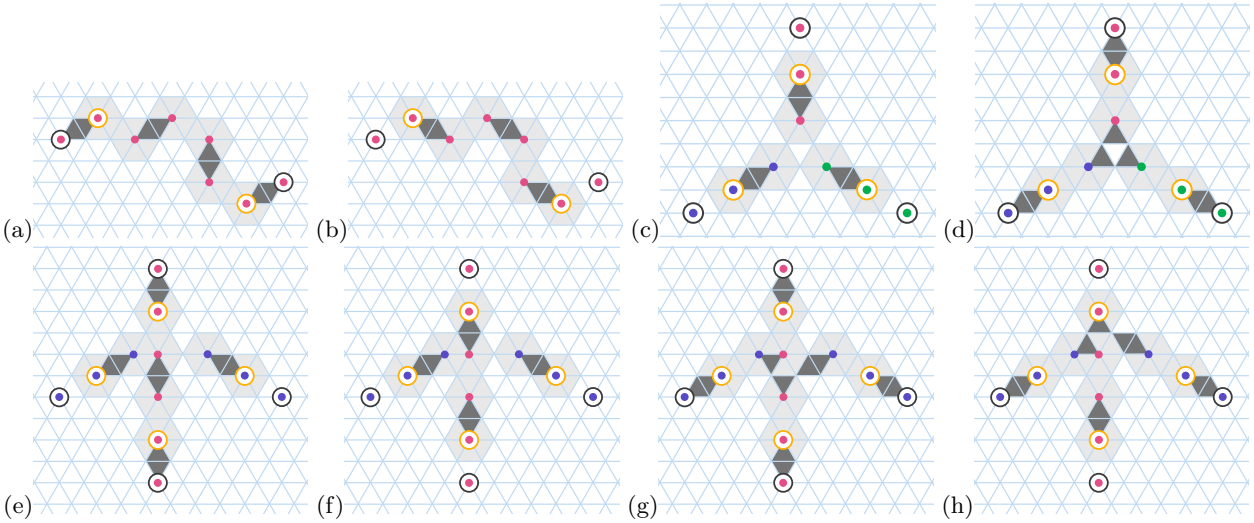

图 2. (a)(b) 导线构件，(c)(d) 分裂构件，以及 (e)-(h) ColorCodeZ 解码问题中连接不同缺陷类型导线的交叉构件，均由参考文献 [27] 引入。图中展示了不同的极小覆盖。在所有图中，圆点表示缺陷（色码中未满足的 X 稳定子）；黄色圆圈标出节点，黑色圆圈标出配对节点（它们是另一构件中的缺陷）。构件的邻域以浅灰色突出显示。

接下来需要构造元素构件，如图 4 所示。我们通过以下论证来界定错误超额。

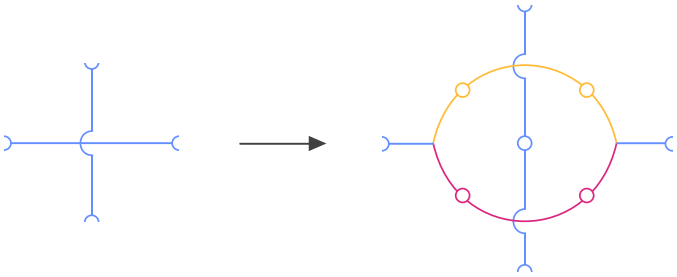

图 3. 同一缺陷类型的导线交叉构件由两个分裂构件以及两个用于不同缺陷类型导线之间交叉的交叉构件构成。

引理 6. 如果一个构件 g 由 *Tanner* 图中彼此距离至少为四的缺陷组成（我们称之为孤立缺陷），那么它的错误超额为 $m_g \geq 0$。

证明。 在 g 中，每个缺陷旁边都必须有一个错误；该错误必定位于 R_g 中，因为其中包含 g 的一邻域。由于缺陷之间的距离条件意味着每个错误最多只能与一个缺陷相邻，因此结论成立。 □

与图 4 中类似的错误配置 E_g 可实现 $|E_g \cap R_g| = |\sigma|$，这表明 $m_g = 0$，并且在最小覆盖中恰有一个节点为真。注意， $E_g \subseteq R$，因为每个错误都与某个缺陷相邻。

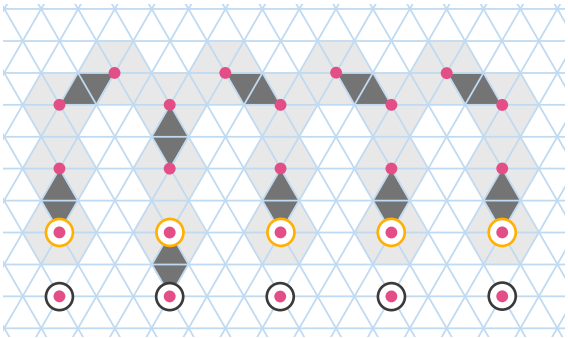

图 4. 含有 R 缺陷的元素构件。此处，我们展示了第二个节点设为真的最小覆盖。

我们按照图 1(e) 所示放置构件。这样，各构件之间可以充分分开，从而满足假设 2。特别要注意的是，除导线小工具外，每个构件占用的空间都是常量。综合征配置的总宽度为 $O(s)$。我们通过实现交换层，将 $3s$ 导线从元素构件路由到相应的分裂构件。采用一维连接时，任何 $3s$ 个元素的排列都可以通过一个深度为 $O(s)$、由最近邻交换层组成的排序网络实现 [35]。因此，综合征配置的高度也为 $O(s)$。这表明该解码问题的规模是多项式级的，因为综合征可以嵌入一个含有 $O(s^2)$ 个量子比特的色码晶格中。

B. 表面码构件

接下来，我们构造正方形晶格上表面码的构件。图 5 展示了用于 Z 缺陷的导线构件 g，用于 X 缺陷的构件也类似。由于这些缺陷是孤立的，引理 6 蕴含图 5(a)(b) 中的构件满足 $m_g \geq 0$。图中所示的构型实现了 $|E_g \cap R_g| = |g|$，因此它们是极小覆盖，且 $m_g = 0$。根据该图所示的极小覆盖和引理 6，可以看出图 5(c)(d) 中的构件具有错误超额 $m_g = -1$（移除一个 X 缺陷后会得到一组孤立缺陷）。我们将经常使用一个奇偶性论证：表面码主体中的任何错误都会导致

X 缺陷的数量为偶数，且 Z 缺陷的数量为偶数（假设将任何 Y 缺陷分解为一个 X 和一个 Z 缺陷），以此推断极小覆盖中的真值。在这种情况下，这意味着这些节点要么都为真，要么都为假，正如假设 5 所要求的那样。结合使用这两种构件，可以将 Z 导线构件的节点放置在晶格上的任意顶点处。

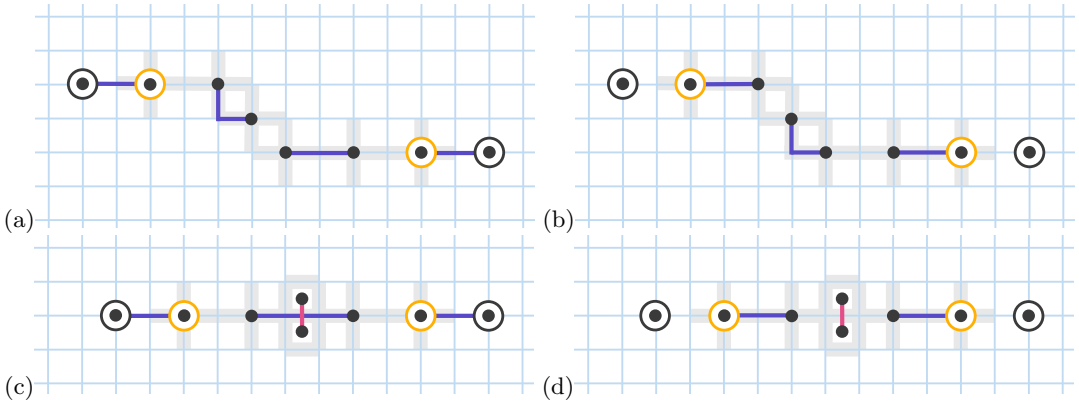

图 5. 表面码中带有 Z 缺陷的两类导线构件。(a)(c) 和 (b)(d) 分别展示了两个节点均为真和两个节点均为假的极小覆盖。在我们的表面码图中，蓝色线表示 Z 错误，红色线表示 X 错误（任何重叠部分均表示 Y 错误）。同时使用 (a)(b) 和 (c)(d) 中的两类构件，就可以将节点放置在晶格的任意顶点上。

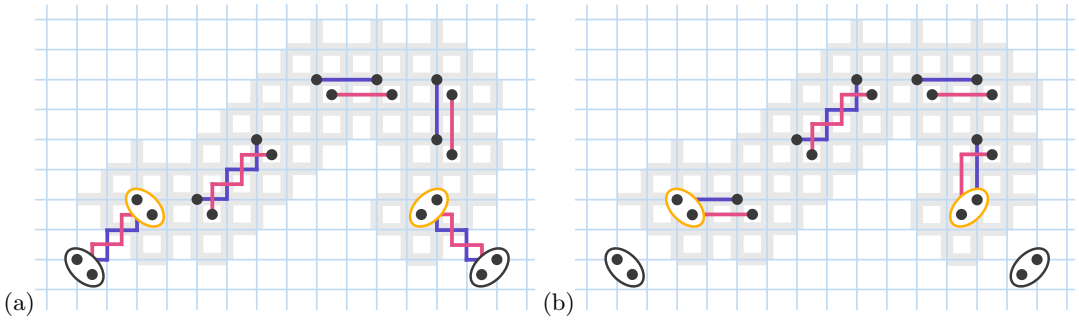

图 6. 表面码中的 Y 导线构件，其中的极小覆盖分别满足：(a) 两个节点均为真；(b) 两个节点均为假。

图 6 展示了 Y 导线构件。尽管缺陷并未彼此隔离，我们仍然可以得到 $m_g = 0$ 所示的极小覆盖。事实上，构件中的 Z 缺陷必须彼此匹配，X 缺陷也同样如此。对于导线的对角线部分，可以为 X 和 Z 缺陷分别选择完全重叠的最小权匹配，从而得到合并后的最小权配置。对于水平（或垂直）线段，图中所示的配置之所以是极小的，是因为两个 Z 缺陷必须与长度至少为 2 的 Z 线匹配，而两个 X 缺陷必须与长度至少为 2 的 X 线匹配。一个 Y 错误可以降低其中一条线所需的权重，但不能同时降低两条线所需的权重。如图所示，表面上似乎有四个节点。根据奇偶性论证，两个 X 节点必须具有相同的真值，两个 Z 节点也必须具有相同的真值。事实上，只要至少存在一个对角线段，四个真值就必须全部相同，因为在极小覆盖中，X 线和 Z 线必须在对角线段上重叠，从而迫使相邻的 X 节点和 Z 节点具有相同的真值。因此，我们可以将相邻的 X 节点和 Z 节点视为一个合并的 Y 缺陷，使得 Y 导线具有两个真值相同的 Y 节点。请注意，Y 节点的配对节点应放置在其对角方向上，正如图 6 所示，因为当该节点为真时，其二邻域应覆盖连接它与配对节点的错误的一半。

分裂构件如图 7 所示。根据奇偶性论证以及最小覆盖必须用一条 Y 串匹配 Y 缺陷这一事实，三个节点的真值都相同。该构件的错误超额为零。

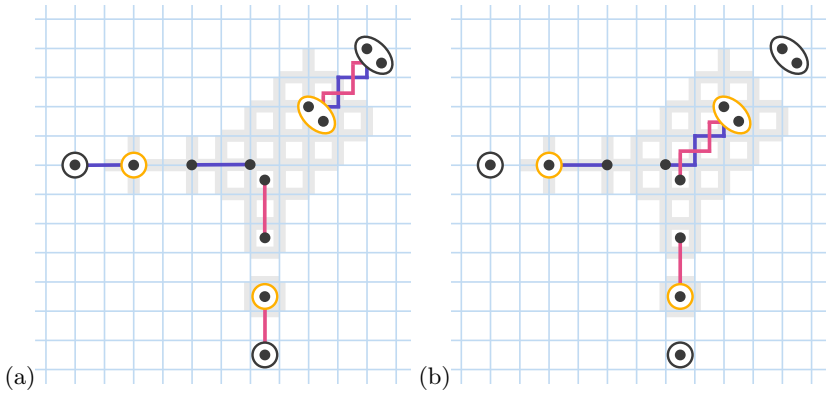

图 7。表面码中的分裂构件。图中展示了 (a) 三个节点均为真和 (b) 三个节点均为假的极小覆盖。

图 8 展示了 X 线路与 Z 线路之间的交叉构件。奇偶性论证表明，两个X 缺陷的真值相同，两个 Z 缺陷的真值也相同。如果不考虑 X 缺陷， Z 缺陷彼此隔离，反之亦然。将它们组合起来后，中心处的一些 X 和 Z 缺陷彼此相邻，因此在四种真值组合下，最小覆盖中一条 X 串和一条 Z 串都可以重叠一个单位。这表明所提出的缺陷集合是一个有效的交叉构件，其错误超额为 -1。

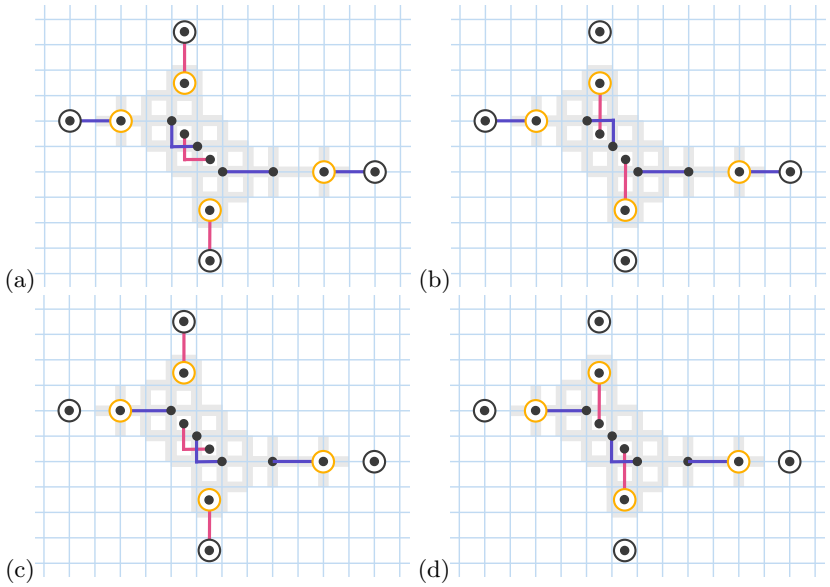

图 8。表面码中 X 线与 Z 线之间的交叉构件。图中展示了节点真值的不同有效组合对应的极小覆盖。无论节点的真值如何，该构件的中心都允许一个错误覆盖它，且该错误的权重比所覆盖的缺陷数量少一。

图 9 展示了 Y 导线与 Z 导线之间的交叉构件。图中所示的错误配置是错误超额为 1 的最小覆盖，它们在 Y 节点和 X节点上给出相同的真值。覆盖的极小性可由以下事实看出：构件的外侧部分由Y 和 Z 导线组成；分析中心处可能的错误配置也可得出这一点。[3] X 导线与 Y 导线之间的交叉类似。

[3] 例如，在图 9(a) 的中心区域，由四个 Z 缺陷和两个 X 缺陷组成，对于 Z 缺陷的任何匹配都至少需要六个错误。由于两个 X 缺陷无法与任何完全重叠于权重为六的配置的字符串匹配，因此最小权重为七，图中展示了这样一种配置。

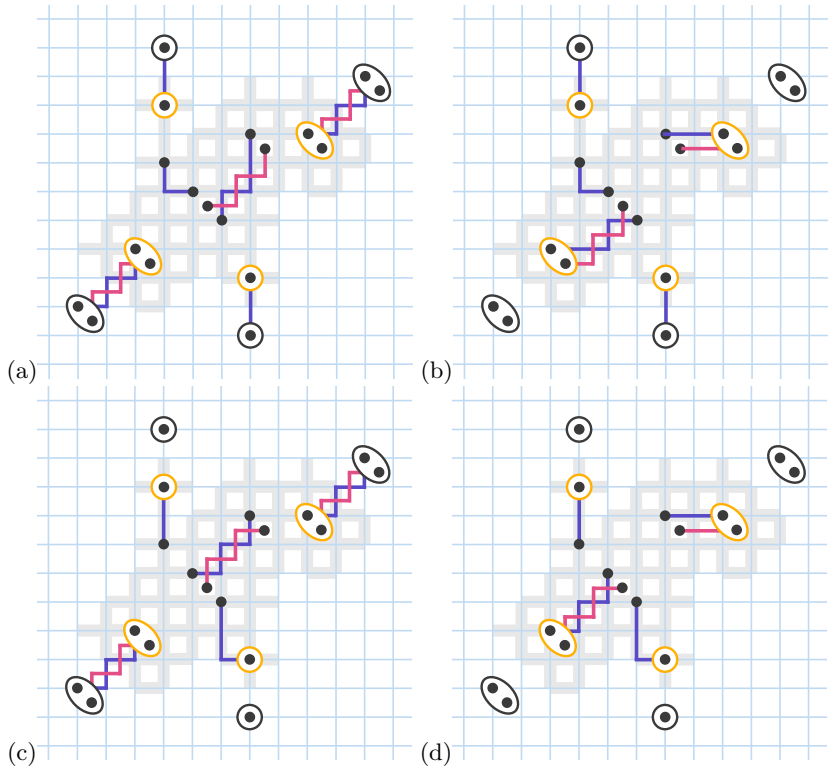

图 9. 表面码中 Y 线与 Z 线之间的交叉构件。对于节点真值的四种组合（图中所示的极小覆盖），错误权重比所覆盖的缺陷数多 1。

要构造两个同为 w_1 和 w_2 缺陷类型的导线之间的交叉，我们可以先将 w_1 拆分成两条属于另外两种缺陷类型（且真值相同）的导线 w_1'、w_1''，让它们与 w_2交叉，然后再将它们重新合并为一条原类型的导线。图 3 已展示过这种做法。

最后，图 10(a) 展示了用于 C 集合、包含 Z 个节点的元素构件。通过与色码中对应构件类似的分析，我们可以看到，在极小覆盖中恰好有一个节点为真，并且没有错误超额。包含 X 个节点的元素构件与此类似。图 10(b) 展示了用于 B 集合、包含 Y 个节点的构件，它本质上是包含 X 个节点的元素构件与包含 Z 个节点的元素构件并置而成的。请注意，节点与其配对节点之间的对角连接，确保将该构件视为两个独立的元素构件时，必须选择相同位置的节点为真。

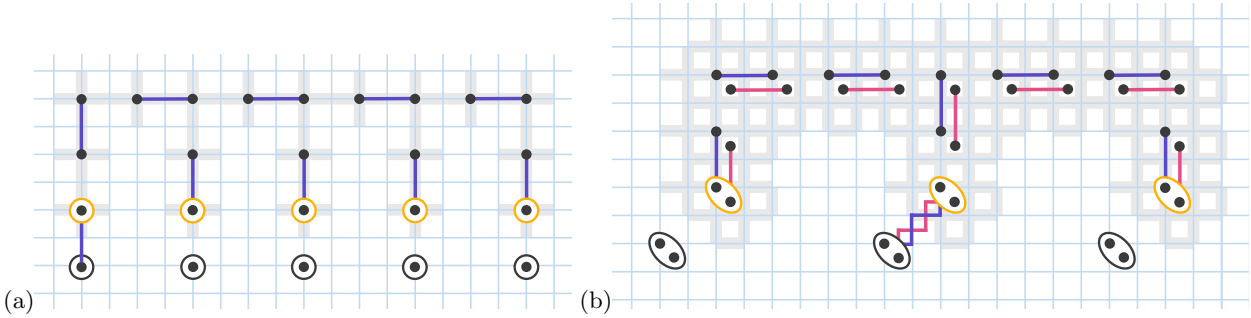

图 10. 表面码中的元素构件：(a) 包含 Z 个节点；(b) 表面码中包含 Y 个节点。最小错误中恰好有一个节点为真。

将构件在图 1(e) 中彼此放置得足够远，并使用一个 $O(s)$ 深度排序网络，我们便满足假设 2，并获得一个嵌入表面码中的综合征，该表面码包含 $O(s^2)$ 个量子比特。

C. 横向 CNOT 解码构件

现在考虑通过中间时间步中的横向逻辑 CNOT 门耦合的两个方格晶格表面码块的解码。问题是，给定一组触发的 X 检测器，求 Z 量子比特错误和测量比特翻转错误的最小总权重。除横向 CNOT 门所在的时间切片 t_G 外，解码图是一个三维立方晶格，因此我们可以使用与第 IV B 节中带有 Z 缺陷的构件基本相同的构件。该立方晶格是二分的，我们只会在其中一个顶点子集上放置节点。[4] 回想一下，此问题中的缺陷类型取决于其所在的时空区域。

（适用于三种缺陷类型中的任一种的）导线构件与图 5(a)(b)中的构件类似，但置于三维空间中。在这种情形下不需要交叉构件，因为导线构件可以在三维几何中彼此交错。元素构件与图 10(a)中的构件完全相同。

这种解码情形的主要区别在于分裂构件的实现方式。分裂构件只能跨越时间切片 t_G 放置，如图11所示。该构件由孤立缺陷组成，因此根据引理 6，图示的错误配置是极小覆盖，错误超额为零。利用奇偶性论证以及解码图中的超边会产生每种类型各一个缺陷这一事实，可以证明该构件中的节点必定全为真或全为假。

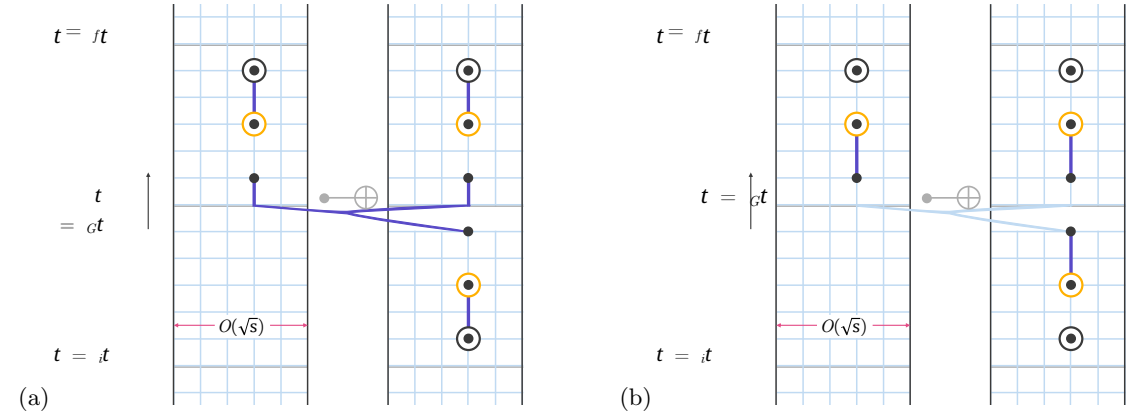

图11。tCNOTZ解码问题中的分裂构件。图中展示了表面码在 (1+1)D 下的投影，时间方向向上。跨越两个表面码的超边源于一次测量错误（未展示其他可能的测量错误），且三条导线均位于各自表面码中的相同空间位置。图中展示了极小覆盖：(a) 所有节点均为真；(b) 所有节点均为假。

tCNOTZ 问题中的构件布局如图1(f)所示，与 ColorCodeZ 和 SurfaceCodeXYZ 的二维解码图情形略有不同。我们将集合 A 中各元素的所有元素构件放置在时空区域 A 所在的时间切片 t_i 上；对于集合 B 和 C 中的元素，也采用类似布局，但放置在时间切片 t_f 上。[5] 所有超边 $t \in T$ 对应的分裂构件均位于横向 CNOT 门所在的时间切片上。接着，我们使用导线构件将元素构件连接到相应的分裂构件。换言之，需要合并的三条导线会被布线至每个区域中靠近横向 CNOT 时间切片的同一空间位置。为了让根据规模为 s 3 DM 的问题放置的构件彼此充分分离并满足假设 2，元素构件和分裂构件应占据大小为 $O(\sqrt{s}) \times O(\sqrt{s})$ 的空间区域。布线时还需要保持间隔。一种实现方式是使用二维排序网络，它可以通过最近邻交换 [36] 在深度$O(\sqrt{s})$ 内实现任意置换。因此，元素构件与横向 CNOT 门所在时间切片之间的时间距离为 $t_f - t_G = t_G - t_i = O(\sqrt{s})$。由此，解码问题的规模是多项式级的，因为综合征可以放置在包含 $O(s^{3/2})$ 个错误位置的时空区域中。

---

[4] 我们之所以对此作出说明，是因为图 5(a)(b) 中导线构件的节点始终位于同一个顶点子集内。[5] 如果不假设在 $t_i - \frac{1}{2}$ 和 $t_f + \frac{1}{2}$ 时进行完美测量，我们也可以将元素小工具放置在时空体区更深处，例如位于时间切片 $(t_i + t_G)/2$ 和 $(t_G + t_f)/2$。

V. 逻辑算符解码的困难性

在用于证明定理 1 的归约中，待解码的综合征被放置在一块大型晶格的内部。即使三维匹配实例中不存在完美匹配，最小权重错误也很可能仍支撑在晶格内部。如此一来，纠错的逻辑效应与存在完美匹配时相比便不会有差异，因此人们或许会认为，高效解码逻辑算符是可行的。然而，我们证明，确定施加最小权重纠错后的逻辑效应同样是 NP 困难的。

定理 7. 在这三种解码情形中，判断一个最小权重错误是否与给定逻辑算符代表元反对易的问题是 *NP* 困难的。

证明的思路是在从三维匹配进行归约时使用一种修改后的综合征模式。对于修改后的综合征，如果存在完美匹配，最小权重错误将与原始综合征对应的错误相似。然而，当不存在完美匹配时，修改后的综合征使我们能够控制最小权重错误的形式。具体而言，有效错误的最小权重比存在完美匹配时的最小权重大一，而该错误对所选逻辑算符的作用将与之相反。

定理 7 的证明。 我们考虑对具有奇数权重弦算符 Q 的量子纠错码进行解码。在色码中，可以使用具有开放边界条件的奇数距离三角形色码来实现这一点。在表面码中（无论是否存在测量错误），我们可以使用具有开放边界条件或周期边界条件的奇数距离码。我们将对逻辑算符 P（图 12(f) 中的紫色线）进行解码；它与 Q 相交，且与原始构件距离足够远。

由算符 Q，我们构造一个特殊线路小工具 g。对于这个构件，存在两种错误配置E_g， E'_g其综合征包含在 g及其配对节点中，并使 $|E \cap R_g|$最小。这两种配置分别将两个节点都设为假或都设为真。然而，与 E_g 相比， E'_g在 R（所有构件的邻域）之外还多出一个错误，若采用该配置，将导致全局错误的权重更高。文献 [27] 介绍了色码中的这类算符，并在图12(a)(b)中展示。表面码的特殊线路小工具（在 tCNOTZ 解码场景中，插入于一个固定的时间切片）如图12(c)(d)所示。这两种错误配置对逻辑算符 P的影响相反。

我们还引入了一种多导线分裂组件（文献 [27]中称为变量组件）。该构件包含 $r+2$ 个同类型节点，在任何最小覆盖中，这些节点的真值都相同。注意， r 必须为偶数。如图12(e)所示，可以用常规分裂构件实现它。对于 tCNOTZ 解码场景，由于分裂构件也受到相同限制，这种构件只能放置在时间切片 t_G 附近。

新的综合征配置如图 12(f) 所示。从构件的原始放置方式出发，我们为每个元素构件额外添加一个节点。在集合 A 中，我们将这些新节点两两配对，并通过导线构件将它们连接起来；对集合 B 也重复这一操作。注意，不失一般性，我们可以假设三维匹配实例中的 $r = |A| = |B| = |C|$ 为偶数；否则，添加额外元素 $a_0 \in A$、$b_0 \in B$ 和 $c_0 \in C$，以及一条额外的超边 $(a_0,\ b_0,\ c_0) \in T$，即可得到一个等价的三维匹配实例。集合 C 的额外节点通过导线构件连接到多导线分裂组件。这需要在 tCNOTZ 解码场景中，将导线从时间切片 t_f 路由到时间切片 t_G。多导线分裂组件的另外两个节点连接到特殊线路小工具，该小工具显示为蓝色水平线。

考虑三维匹配实例存在完美匹配的情况。此时，我们可以使用与判定问题中相同的最小覆盖。元素构件中的所有额外节点都设为假，多导线分裂组件和特殊线路小工具中的节点也都设为假。这样便得到一个权重为 $|E| = |\sigma| + m$ 的全局最小错误配置。这里，色码的 $m = \sum_g m_g + 1$ 和表面码的 $m = \sum_g m_g$ 均由特殊线路小工具以及对公式（2）的修改产生。

另一方面，如果存在权重为 $|E| = |\sigma| + m$ 的错误 E，则特殊线路小工具中的节点，以及多导线分裂组件中的节点和集合 C 对应的元素构件中的额外节点，都必须为假。这些元素构件中的真节点会连接到 r 个分裂构件，随后这些构件会与 A 和 B 中的每个元素恰好连接一次，从而得到该三维匹配实例的一个完美匹配。

然而，如果该三维匹配实例不存在完美匹配，我们就能找到一个权重为 $|E| = |\sigma| + m + 1$ 的错误 E。为此，我们将元素构件中的所有原始节点设为假，并将新节点设为真。这样就可以得到与该元素构件相关联的所有分裂构件的最小覆盖

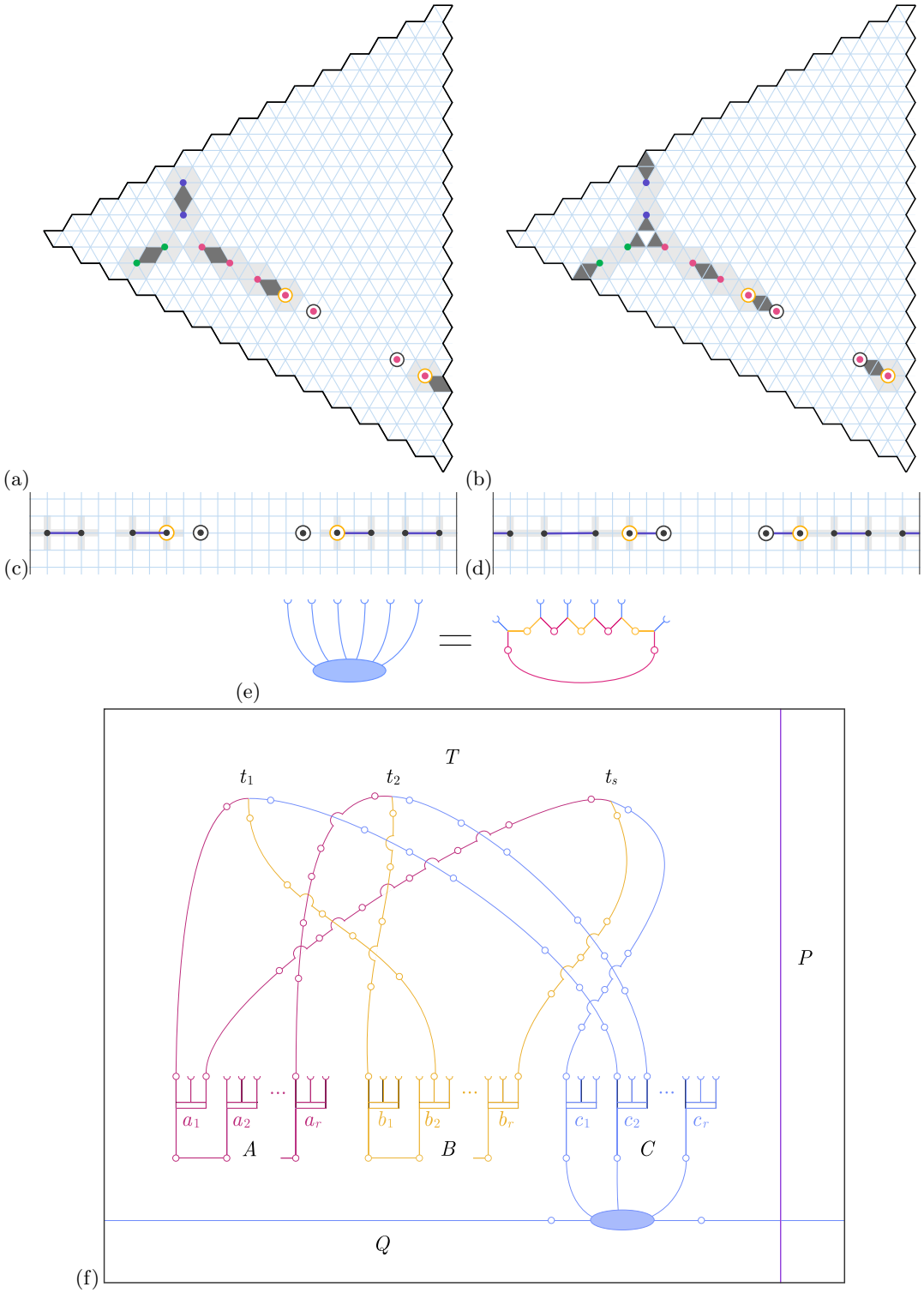

图12。(a)(b) 色码和 (c)(d) 表面码中的特殊线路小工具。当两个节点都设为假时，如 (a)(c) 所示，与两个节点都设为真时（如 (b)(d) 所示）相比，错误配置在 R 外部包含的错误少一个。色码边界上的并非所有顶点都支撑稳定子。(e) 使用分裂构件实现的多导线分裂组件。(f) 将三维匹配归约到判定最小权重错误是否会翻转给定逻辑算符（紫色竖线）这一问题时需要解码的综合征。蓝色长水平线是特殊线路小工具。

由于 T 中的超边均设为假。随后将多导线分裂组件和特殊线路小工具的节点设为真，这会产生一个比将它们设为假时权重多 1 的错误配置。这表明，最小权重错误是否会翻转逻辑算符 P，取决于该三维匹配实例是否存在完美匹配。

□

VI. 讨论

在这项工作中，我们通过从三维匹配进行归约，证明了三个典型的最小权重解码问题——ColorCodeZ、SurfaceCodeXYZ 和 tCNOTZ——均为 NP 困难。我们的结果表明，在量子纠错中一些基础且具有实际意义的解码问题中，计算上的难解性已然出现，其中包括对量子存储器和逻辑电路实现都至关重要的情形。这些结果也凸显了最小权重解码与其近似实现之间的计算复杂性差异。

更广泛地说，我们的工作为量子纠错和容错中基础任务相关的日益丰富的困难性结果增添了重要成果，例如计算码距 [37, 38], 、解码 [39–42],，以及实现或优化逻辑算符 [43–45]。首先，这项工作通过一种可以说更自然的归约，重新得出了 Walters 和 Turner 最近证明的色码最小权重解码问题的 NP 困难性 [27], 。其次，它证明了表面码的最小权重解码问题是 NP 困难的；表面码是最具代表性、研究最深入的量子纠错码。相比之下，Fischer 和 Miyake 先前的结果 [46]，表明，在错误率具有空间非均匀性的精细调校 Pauli 噪声下，最可能错误解码具有计算难度。第三，这项工作表明，即使是在表面码配备横向 CNOT 门这一非常基础的情形下，逻辑电路的解码问题对最小权重解码而言也具有计算挑战性，这促使人们进一步研究适用于逻辑电路的高效解码器 [14, 47]。

A. 未来方向与开放问题

未来工作有几个值得探索的方向。我们证明了在最常用的六边形晶格和正方形晶格上，色码和表面码的解码问题分别是困难的。我们预计其他晶格乃至平面上的非均匀铺砌也会有类似结果，但必须谨慎设计构件，以避免病态构型。也可以考虑解码其他码族，例如各种量子低密度奇偶校验码 [8], 不过，由于缺少弦状算符，我们的方法无法直接推广。这些码可在码容量场景或唯象噪声场景中进行分析，后者对应于实现逻辑操作时的情况。

鉴于此前关于各种量子纠错码最大似然解码问题的困难性结果 [40, 46],，我们可以进一步探讨，在我们考虑的三种场景中，简并解码问题是否为 #P困难。复杂性类 #P 中的问题要求统计 NP 中判定问题的解的数量。计算三维匹配中完美匹配的数量是 #P完全问题 [26, 48], ，这大致对应于在我们的归约中求最小权重错误的数量 w。完成证明的一种方法是，对每个等价类中高权重错误的数量与其概率的乘积进行界定。

另一个未解决的问题是如何近似求解这些解码问题中的最小权重解。我们在附录 A 中证明，可以高效地找到一个权重不超过最小权重恢复的常数倍（两倍或三倍）的恢复。然而，是否存在近似因子任意接近 1 的算法，即多项式时间近似方案，目前尚不清楚。如果不存在这样的算法，也可以进一步询问，是否存在某个 $\varepsilon > 0$，使得寻找近似因子为 $1+\varepsilon$ 的解是 NP 困难的。

致谢

S.G. 和 A.K. 感谢 Yue Wu 和 Cole Maurer 就色码解码问题的困难性进行了富有启发性的讨论。L.W. 获得 NSERC Fellowship PGSD3-587672-2024 资助，并感谢耶鲁量子研究所在项目期间接待她。S.G. 和 A.K. 感谢美国国家科学基金会（QLCI，奖项编号 OMA-2120757）、美国情报高级研究计划局以及陆军研究办公室（ELQ 计划，合作协议编号 W911NF-23-2-0219）的支持。

附录 A：最小权重解码的近似算法

我们证明，在这三种解码情形中的每一种情形下，都存在一种高效的、基于匹配的算法，能够找到权重与最小值相差一个常数因子的错误。

1. 色码

对于色码，我们证明，文献 [22] 中的限制解码器返回的错误权重至多为最小值的三倍。设 $\sigma = \sigma_R \sqcup \sigma_G \sqcup \sigma_B$ 是一个 X 综合征，并将其分解为三种不同的缺陷类型。对于三种不同的颜色 A，B，C，受限晶格 $\mathcal{L}_{AB}$ 通过从三角晶格 $\mathcal{L}$ 中移除C色顶点及其所有相邻边来定义。解码器首先在三个受限晶格 $\mathcal{L}_{AB}$ 上，对综合征 $\sigma_A \sqcup \sigma_B$执行最小权完美匹配（MWPM），得到边集 γ_{AB}。不失一般性，我们可以假设 $|\gamma_{RG}| \le |\gamma_{RB}| \le |\gamma_{GB}|$。随后应用局部提升过程。在这一步中，对于每个红色顶点 v，找出相邻面的一个最小子集 τ_v，使得将范围限制在与 v关联的边上时，该子集的边界等于 $\gamma_{RG} \sqcup \gamma_{RB}$。文献 [22] 证明，支撑为$\bigsqcup_{v\ \text{红色}} \tau_v$ 的 Z 算子 F 是综合征 σ的有效纠错。

为了给 F 的权重设定上界，令 E 为具有综合征 σ 的最小权重错误。其支撑的 $\mathbb{Z}_2$-边界是一个边集合 $\tilde{\gamma}$，其大小至多为 $3|E|$，因为每个三角形有三条边。我们将 $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{RG} \sqcup \tilde{\gamma}_{RB} \sqcup \tilde{\gamma}_{GB}$ 分解，其中 $\tilde{\gamma}_{AB}$ 由连接一个 A 顶点与一个 B 顶点的边组成，其中 A，$B \in \{R, G, B\}$各不相同。每个 $\tilde{\gamma}_{AB}$ 都是受限晶格 $\mathcal{L}_{AB}$ 上 $\sigma_A \sqcup \sigma_B$ 的一个匹配。由于 γ_{AB} 是最小权重匹配，因此有 $|\gamma_{AB}| \le |\tilde{\gamma}_{AB}|$。在三角晶格中的每个红色顶点 v 周围，最小局部提升 τ_v 的大小至多为 $\gamma_{RG} \sqcup \gamma_{RB}$ 中与 v 相邻的边数的 $3/2$ 倍。对所有红色顶点求和可得

$$|F| \le \frac{3}{2}(|\gamma_{RG}| + |\gamma_{RB}|) \le |\gamma_{RG}| + |\gamma_{RB}| + |\gamma_{GB}| \le |\tilde{\gamma}_{RG}| + |\tilde{\gamma}_{RB}| + |\tilde{\gamma}_{GB}| \le 3|E|. \tag{A1}$$

2. 表面码

考虑对综合征为 σ 的表面码进行解码，并令 $E = E_X E_Z$ 为最小权重错误，其中 E_X 和 E_Z 分别是 E 的 X 和 Z 分量。通过对 σ 的 X 缺陷使用最小权完美匹配（MWPM），我们找到一个能产生这些缺陷的最小权重 X 错误 F_X。类似地，MWPM 给出满足 σ 的 Z 缺陷的最小权重Z 错误 F_Z。组合错误 $F = F_X F_Z$ 满足该综合征，且其权重为

$$|F| \le |F_X| + |F_Z| \le |E_X| + |E_Z| \le 2|E|. \tag{A2}$$

3. 横向 CNOT 解码

现在，考虑对应用了横向逻辑 CNOT 的表面码进行解码。令 σ 为综合征，它由一组被触发的 X 检测器组成。该综合征可以表示为不相交并集 $\sigma = \sigma_1 \sqcup \sigma_2$，其中 σ_1 和 σ_2 分别是与两个表面码相关联的被触发检测器。（检测器 $s^1_{t_G-1/2} s^1_{t_G+1/2} s^2_{t_G-1/2}$ 被视为属于第一个表面码。）令 $E = E_1 \sqcup E_2$ 为最小权重错误，并将其分解为影响每个表面码的错误。

我们考虑依次对两个表面码进行解码，方法如参考文献 [14, 31, 32, 49] 所述。具体而言，我们首先使用最小权完美匹配（MWPM），根据综合征 σ_2 对第二个表面码进行解码。这将得到一组满足 σ_2 中检测器的、权重最小的 Z 量子比特错误和 X 测量错误 F_2。如果该错误在时间 $t_G - \frac{1}{2}$ 包含测量错误，则还会触发第一个表面码块中的某些检测器 σ_1^F。随后，我们在第一个表面码中使用 MWPM 对综合征 $\sigma_1 \oplus \sigma_1^F$（$\sigma_1$ 与 σ_1' 的对称差）进行解码，从而得到一个最小权重错误 F_2。由于第一个表面码上的错误不会触发与第二个表面码相关联的检测器，因此组合错误 $F = F_1 \sqcup F_2$ 满足综合征 σ。

现在来界定 F 的权重。由于 E_2 也满足综合征 σ_2，我们有 $|F_2| \le |E_2|$。令σ_1^E 表示由 E_2在第一个表面码上触发的探测器，其中包含时间 t_G 处、位于

测量错误空间位置上的缺陷。 σ_1^E在时间 $t_G - \frac{1}{2}$ 的综合征为 $\sigma_1 \oplus \sigma_1^E$。现在，我们将 E^+和 E^- 定义为 $E_2 \oplus F_2$分别限制在时间 $t \geq t_G$和 $t \leq t_G - \frac{1}{2}$的错误上的结果，但仅考虑第一个表面码。这两个算符中至少有一个的权重至多为$\frac{1}{2}(|E_2| + |F_2|)$，因为它们的并集为$E_2 \oplus F_2$。由于 E_2和 F_2 限制在第二个表面码上时具有相同的综合征，且两个表面码具有相同的时间边界条件，因此 E^+ 和 E^- 的综合征都等于 $\sigma_1^E \oplus \sigma_1^F$。这意味着 $E_1 \oplus E^+$ 和 $E_1 \oplus E^-$ 都具有综合征 $\sigma_1 \oplus \sigma_1^F$。由于 F_1 是具有综合征 $\sigma_1 \oplus \sigma_1^F$的最小权重错误，我们得到

$$|F_1| \leq |E_1| + \frac{1}{2}(|E_2| + |F_2|) \leq |E_1| + |E_2|, \tag{A3}$$

由此可得

$$|F| \leq |F_1| + |F_2| \leq 2|E_1| + |E_2| \leq 2|E|. \tag{A4}$$

---

[1] P. W. Shor，降低量子计算机存储器退相干的方案，Physical Review A 52，R2493–R2496（1995）。[2] A. M. Steane，量子理论中的纠错码，Physical Review Letters 77，793–797（1996）。[3] P. W. Shor，容错量子计算，载于*Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* 96 1996 56，FOCS ’（IEEE Computer Society，美国，）第 页。[4] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，具有常数错误率的容错量子计算，载于 *Proceedings of theTwenty-Ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*，STOC ’97（ Association for Computing Ma- chinery，纽约州纽约市，美国，1997）第176–188页。[5] E. Knill、R. Laflamme 和 W. H. Zurek，弹性量子计算：错误模型与阈值，Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 454，365–384（1998）。[6] J. Preskill，可靠的量子计算机，Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 454，385–410（1998）。[7] D. Gottesman，达到量子汉明界的量子纠错码类，Physical Review A 54，1862–1868（ 1996）。[8] N. P. Breuckmann 和 J. N. Eberhardt，量子低密度奇偶校验码，PRX Quantum 2，040101（2021）。[9] H. Bomb´ın，单次容错量子纠错，Physical Review X 5，031043（2015）。[10] E. T. Campbell，关于对抗性噪声下单次纠错的理论，Quantum Science and Technology 4，025006（2019）。[11] A. Kubica 和 M. Vasmer，利用三维子系统环面码实现单次量子纠错，Nature Communications 13，6272（2022）。[12] S. Gu、E. Tang、L. Caha、S. H. Choe、Z. He 和 A. Kubica，优良量子低密度奇偶校验码的单次解码，Communications in Mathematical Physics 405，85（2024）。[13] H. Zhou、C. Zhao、M. Cain、D. Bluvstein、N. Maskara、C. Duckering、H.-Y. Hu、S.-T. Wang、A. Kubica 和 M. D. Lukin，面向通用量子计算的低开销横向容错，Nature 646，303–308（2025）。[14] M. Cain、D. Bluvstein、C. Zhao、S. Gu、N. Maskara、M. Kalinowski、A. A. Geim、A. Kubica、M. D. Lukin 和 H. Zhou，横向逻辑算法的快速相关解码（2025），arXiv:2505.13587 [quant-ph]。[15] B. M. Terhal，量子存储器的量子纠错，Reviews of Modern Physics 87，307–346（2015）。[16] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，拓扑量子存储器，Journal of Mathematical Physics 43，4452–4505 （ 2002 ）。[17] O. Higgott 、 T. C. Bohdanowicz、A. Kubica、S. T. Flammia 和 E. T. Campbell，改进定制表面码的电路噪声解码与脆弱边界处理，Physical Review X 13，031007（2023）。[18] Y. Wu 和 L. Zhong，Fusion blossom：用于量子纠错的快速最小权完美匹配解码器，载于 *2023 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)* 2023 928 938 （IEEE，）第–页。[19] N. Delfosse，通过投影到表面码来解码颜色码，Physical Review A 89，012317（2014）。[20] C. Chamberland、A. Kubica、T. J. Yoder 和 G. Zhu，带标志量子比特的三价图三角形颜色码，New Journal of Physics 22，023019（2020）。[21] K. Sahay 和 B. J. Brown，通过在莫比乌斯带上匹配来解码三角形色码，PRX Quantum 3，010310（2022）。[22] A. Kubica 和 N. Delfosse，利用环面码解码器在 $d \geq 2$ 维中实现高效颜色码解码器，Quantum 7，929（2023）。

[23] S. J. S. Tan、I. Gill、E. Huang、P. Liu、C. Zhao、H. Dehghani、A. Kubica、H. Zhou 和 A. Dua，二维拓扑平移不变码的广义匹配解码器（2026），arXiv:2603.05402 [quant-ph]。[24] K. Sahay、D. J. Williamson 和 B. J. Brown，双变量自行车码的匹配解码器（2026），arXiv:2602.22770 [quant-ph]。[25] R. M. Karp，组合问题之间的可归约性，载于 *Complexity of Computer Computations*（施普林格美国，1972）第85–103页。[26] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，*Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*（W. H. Freeman & Co.，美国，1990）。[27] M. Walters 和 M. L. Turner，颜色码中的最小权重解码是 NP 困难的（2026 2603 04234），[ ] arXiv: . quant-ph。[28] O. Higgott 和 C. Gidney，Sparse Blossom：利用最小权重匹配，每个核心每秒纠正一百万个错误，Quantum 9，1600（2025）。[29] H. Bombin 和 M. A. Martin-Delgado，拓扑量子蒸馏，Physical Review Letters 97，180501（2006）。[30] A. Kitaev，基于任意子的容错量子计算，《物理学年鉴》303，2–30（2003）。[31] M. E. Beverland、A. Kubica 和 K. M. Svore，普适性的代价：颜色码中态蒸馏与码切换开销的比较研究，PRX Quantum 2，020341（2021）。[32] K. Sahay、Y. Lin、S. Huang、K. R. Brown 和 S. Puri，面向可扩展表面码计算的横向CNOT门纠错，PRX Quantum 6，020326（2025）。[33] K. H. Wan、M. Webber、A. G. Fowler 和 W. K. Hensinger，迭代横向CNOT解码器（2025），arXiv:2407.20976 [quant-ph]。[34] M. Cain、C. Zhao、H. Zhou、N. Meister、J. P. B. Ataides、A. Jaffe、D. Bluvstein 和 M. D. Lukin，利用横向门对逻辑算法进行相关解码，Physical Review Letters 133，240602（2024）。[35] D. E. Knuth，*The art of computer programming, volume 3: (2nd ed.) sorting and searching*（Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc.，美国，1998）。[36] C. D. Thompson 和 H. T. Kung，在网格互连并行计算机上排序，《ACM通讯》20，263–271（1977）。[37] E. Berlekamp、R. McEliece 和 H. van Tilborg，论某些编码问题固有的难解性（通信），《IEEE信息论汇刊》24，384–386（1978）。[38] U. Kapshikar 和 S. Kundu，论量子码最小距离问题的困难性，《IEEE信息论汇刊》69，6293–6302（2023）。[39] M.-H. Hsieh 和 F. Le Gall，量子纠错码解码的 NP 困难性，Physical Review A 83，052331 2011（）。[40] P. Iyer 和 D. Poulin，量子稳定子码解码的困难性，《IEEE信息论汇刊》61，5209–5223（2015）。[41] K.-Y. Kuo 和 C.-C. Lu，论若干量子解码问题的困难性，《量子信息处理》19，123（2020）。[42] A. B. Khesin、J. Z. Lu、A. Poremba、A. Ramkumar 和 V. Vaikuntanathan，量子稳定子解码的平均情形复杂度（2025），arXiv:2509.20697 [quant-ph]。[43] D. Herr、F. Nori 和 S. J. Devitt，晶格手术优化是 NP 困难的，《npj量子信息》3，35（2017）。[44] J. Bostanci 和 A. Kubica，寻找稳定子码的不相交性是 NP 完全的，《物理评论研究》3，043192（2021）。[45] K. Wasa、S. Nishio、K. Suetsugu、M. Hanks、A. Stephens、Y. Yokoi 和 K. Nemoto，表面码中编织量子电路优化的困难性，《IEEE量子工程汇刊》4，1–7（2023）。[46] A. Fischer 和 A. Miyake，Pauli 噪声下表面码解码的困难性结果，《Quantum》8，1511（2024）。[47] M. Serra-Peralta、M. H. Shaw 和 B. M. Terhal，表面码中横向克利福德门下的解码，PRX Quantum 7，010335（2026）。[48] M. Jerrum，*Counting, Sampling and Integrating: Algorithms and Complexity*（Birkh¨auser，巴塞尔，2003）。[49] K. H. Wan、M. Webber、A. G. Fowler 和 W. K. Hensinger，迭代横向CNOT解码器（2025），arXiv:2407.20976 [quant-ph]。