连续时间系统的基于采样的可检测性与移动时域状态估计 ⋆

Isabelle Krauss a, Victor G. Lopez a, Matthias A. Müller [a]

[a]汉诺威莱布尼茨大学，自动控制研究所，德国汉诺威 *30167*

arXiv:2603.22107v1 [eess.SY] 23 Mar 2026

摘要

本文针对具有不规则/低频输出测量的非线性连续时间系统，提出了一种可检测性条件，即增量积分输入/输出到状态稳定性（i-iIOSS）的基于采样的版本。我们给出了 i-iIOSS 系统满足基于采样的 i-iIOSS 的充分条件。我们还利用该条件分析了线性系统的基于采样的 i-iIOSS 与基于采样的可观测性之间的关系，从而可以采用先前为线性系统确立的采样策略来保证基于采样的 i-iIOSS。此外，我们提出了一种基于采样的移动时域估计方案，并证明了其鲁棒稳定性。最后，我们通过一个生物医学仿真示例说明了所提出估计方案的适用性。

关键词：可检测性，增量　　系统性质、非规则采样、移动时　　域估计。

1 引言

在许多实际应用中，由于物理或技术限制，直接测量系统的所有状态并不切实际，甚至不可能。然而，准确掌握内部状态对于系统监测以及设计状态反馈控制器等任务至关重要。状态估计器通过已知输入和测量输出重构未测量的状态，以应对这一挑战。

基于优化的状态估计问题解决方案是移动时域估计（MHE）。MHE 是一种状态估计技术，它基于滑动窗口内过去的输入和输出求解优化问题。其优势在于能够直接处理非线性系统和约束，并应对模型误差和测量噪声 [17]。对于非线性系统，一种广受欢迎的可检测性刻画方式，尤其是在 MHE 的背景下，是增量输入/输出到状态稳定性（i-IOSS），该概念最初于 [21]中提出。基于 i-IOSS，已有研究确立了 MHE 的强稳定性结果，例如参见 [2,7,10,20,1]。最近， [19] 还提出了一种针对连续时间系统的鲁棒稳定 MHE 方案，该方案考虑将 [18] 中提出的 i-IOSS 积分变体作为可检测性条件。

虽然标准估计方法依赖连续测量，但在许多应用中，我们只能获得有限的输出信息。例如，在生物医学应用中，通过血液样本采集的测量值可能只能稀疏或非规则地获取。当需要确定某些激素浓度以诊断垂体–甲状腺反馈环疾病并制定适当的用药策略时（例如，参见 [4,24]），这便会带来问题。因此，需要能够处理此类不规则测量序列的适当状态估计方法。

为了设计此类估计器，需要采用合适的基于采样的可观测性/可检测性条件，直接考虑这些不规则/低频输出序列。对于线性系统， [22,25] 针对连续时间系统、 [11] 针对离散时间系统，分别研究了采样序列需满足的条件，以确保能够根据采样输出唯一重构初始状态。对于非线性离散时间系统， [14]研究了一种基于采样的 i-IOSS 表述，该表述直接考虑了不规则输出序列。

利用 [14], 中的研究成果， [13]提出了一种适用于非线性系统的离散时间基于采样的移动时域估计方案。对于连续时间系统，已有研究针对线性情形开发了基于样本的状态估计器。 [14], 介绍了一种考虑不规则离散测量

⋆ 本研究获得欧洲研究理事会（ERC）资助，资助来源为欧盟“地平线2020”研究与创新计划（资助协议编号 948679）。
电子邮箱地址： krauss@irt.uni-hannover.de (Isabelle Krauss)、lopez@irt.uni-hannover.de (Victor G. Lopez)、mueller@irt.uni-hannover.de (Matthias A. Müller)。

值的最小二乘估计方法， [22], 并且 [23] H_∞ 提出了针对周期性和非周期性离散测量的观测器设计方案。然而，据作者所知，目前还没有适用于非线性连续时间系统、能够处理不规则或低频测量的状态估计器。本文的贡献之一就是提出这样一种估计器。

具体而言，我们的贡献如下。首先，我们提出了增量积分输入/输出到状态稳定性（i-iIOSS）的基于样本的版本 [18] （第 3 节）。接着，我们推导出 i-iIOSS 系统满足基于样本的 i-iIOSS 的一个充分条件，这与 [14,中针对离散时间系统的定理 1,3] 所给出的充分条件类似（第 3 节）。此外，我们研究了线性系统中基于采样的可观测性与基于采样的 i-iIOSS 之间的关系，并利用了上述充分条件（第 5 节）。此外，我们提出了一种鲁棒稳定的基于采样移动时域估计方案（第 4 节）。最后，将所提出的估计方案应用于垂体-甲状腺反馈环（第 6 节）。

符号说明：设 $\mathbb{R}_{\geq 0}$和 $\mathbb{R}_{>0}$ 分别表示非负实数和正实数， $\mathbb{I}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{I}_{>0}$ 分别表示非负整数和正整数。$P \succ 0$ （$P \succeq 0$）表示对称矩阵 $P = P^\top$ 为正（半）定矩阵。向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的欧几里得范数记为 $|x|$ ，且 $|x|_P^2 = x^\top P x$，其中 $P \succ 0$。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$， $|A|$ 表示 A 的谱范数。对于可测且局部本质有界的函数 $x: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$，区间 [a, b]上的本质上确界范数定义为 $\|x\|_{a:b} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)|$。我们用 $\sigma_{\min}(P)$表示矩阵 P 的最小奇异值。对称矩阵 P、Q 的最大广义特征值记为 $\lambda_{\max}(P,Q)$。函数 α: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$属于 $\mathcal{K}_\infty$ 类，当且仅当它连续、严格递增、 $\alpha(0) = 0$，且 $\lim_{s\to\infty} \alpha(s) = \infty$。

2 预备知识与设置

我们考虑连续时间非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)) \tag{1a}$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \tag{1b}$$

其中状态 $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$、含噪输出测量 $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ 以及时间 $t \geq 0$。控制输入 u、过程噪声 w 和测量噪声 v 均为可测且局部本质有界的函数，分别取值于 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$、$\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ (其中$0 \in \mathcal{W}$)和 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ (其中 $0 \in \mathcal{V}$)。此类函数 u、w 和 v 的集合分别记为 $\mathcal{M}_\mathcal{U}$、 $\mathcal{M}_\mathcal{W}$和 $\mathcal{M}_\mathcal{V}$。非线性连续函数 $f: \mathcal{X}\times\mathcal{U}\times\mathcal{W} \to \mathcal{X}$和 $h: \mathcal{X}\times\mathcal{U}\times\mathcal{V} \to \mathcal{Y}$分别表示系统动力学和输出模型。给定初始状态 $\chi \in \mathcal{X}$、控制输入 $u \in \mathcal{M}_\mathcal{U}$和扰动输入 $w \in \mathcal{M}_\mathcal{W}$，我们将时刻 $t \geq 0$处方程 (1a) 的解记为 $x(t, \chi, u, w)$，并在 χ，u、w可根据上下文明确得知。此外，输出信号记为 $y(t, \chi, u, w, v) := h(x(t, \chi, u, w), u(t), v(t))$。我们假设 $\mathcal{X}$、 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{V}$ 均为闭集，且对于所有$u \in \mathcal{M}_\mathcal{U}$、$w \in \mathcal{M}_\mathcal{W}$和 $\chi \in \mathcal{X}$，方程 (1a) 的解在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上唯一且全局有定义。以下我们使用简写记号

$$\begin{aligned}
&\Delta w(t) := w_1(t) - w_2(t),\ \Delta v(t) := v_1(t) - v_2(t)\\
&\Delta x(t) := x(t, \chi_1, u, w_1) - x(t, \chi_2, u, w_2),\ \Delta\chi := \chi_1 - \chi_2,\\
&\Delta y(t) := y(t, \chi_1, u, w_1, v_1) - y(t, \chi_2, u, w_2, v_2).
\end{aligned}$$

增量输入/输出到状态稳定性（i-IOSS）已成为基于优化的状态估计领域中的标准可检测性概念，例如，参见 [16,2,17,20,6],。研究表明，它是鲁棒稳定估计器存在的必要条件（参见[21]），也是充分条件（参见 [10]）。本文考虑 i-IOSS 的一个积分变体（见下文定义 1），即增量积分输入/输出到状态稳定性（i-iIOSS），该概念由 [18]提出。请注意，此处对 i-iIOSS 的定义对过去输入和输出的影响进行了折扣。采用这种时间折扣后，得以建立 MHE 的强稳定性结果；在离散时间情形下，与早期基于未进行时间折扣的 i-IOSS 的方法相比，这些结果得出了更紧的估计误差上界 [20]。 [18]表明，i-iIOSS 等价于系统存在一个 i-iIOSS 李雅普诺夫函数。 [19],提出了一种构造此类 i-iIOSS 李雅普诺夫函数的方法，从而提供了一种验证 i-iIOSS 的系统方法。此外，在经时间折扣的“L^2-到-L^∞”意义下，i-iIOSS 是鲁棒全局渐近稳定观测器映射存在的必要条件 [18]。

定义 1（i-iIOSS）如果存在某些α、 α_x、 γ_1、 γ_2、 $\gamma_3 \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意初始条件 χ_1、 χ_2 ，以及任意扰动轨迹对 $w_1, w_2 \in \mathcal{M}_\mathcal{W}$、$v_1, v_2 \in \mathcal{M}_\mathcal{V}$和所有 $u \in \mathcal{M}_\mathcal{U}$，对所有 $t \geq 0$均满足以下条件，则系统(1) 是增量积分输入/输出到状态稳定的（*i-iIOSS*）

$$\begin{aligned}
\alpha(|\Delta x(t)|) \leq \alpha_x(|\Delta\chi|)e^{-\eta t} + \int_0^t \Big(&\gamma_1(|\Delta w(\tau)|)\\
&+ \gamma_2(|\Delta y(\tau)|) + \gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\Big) e^{-\eta(t-\tau)} d\tau.
\end{aligned} \tag{2}$$

如果式 (2) 对某些 α， α_x， $\gamma_1 \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\gamma_2 = \gamma_3 \equiv 0$成立，则称该系统为增量积分输入到状态稳定（i-iISS） [3]。

3 基于采样的 i-iIOSS

下面我们介绍 i-iIOSS 的基于样本的版本。随后，我们提出一个充分条件，使 i-iIOSS 系统成为基于采样的 i-iIOSS，这与

离散时间情形下 [14, Theorems 1,3] 中的充分条件类似。在给出 i-iIOSS 的基于样本的版本之前，我们先回顾 [14] 中的以下定义。

定义 2（采样集K [14]）考虑一个无限长序列 $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots\}$，其中 $d_i \in \mathbb{I}_{\geq 0}$，$i \in \mathbb{I}_{>0}$，且 最大值$_i d_i =: d_{\max} < \infty$。集合 $K_i = \{t_1^i, t_2^i, \ldots\}$ 表示由以下内容定义的无限时刻集合

$$\begin{aligned} t_1^i &= d_i \\ t_2^i &= t_1^i + d_{i+1} \\ &\vdots \\ t_j^i &= t_{j-1}^i + d_{i+j-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

集合 K 随后表示一个由所有 K_i 构成的集合的集合，其中 $i \in \mathbb{I}_{>0}$。

以这种方式定义采样集 K 有助于对基于采样的可检测性进行一致的时间分析。更详细的讨论请参见 [14]。

现在，我们将基于采样的 i-iIOSS 定义如下 s.

定义 3（基于采样的 i-iIOSS）如果存在$\bar{\alpha}$、$\bar{\alpha}_x$、$\bar{\gamma}_1$、$\bar{\gamma}_2$、$\bar{\gamma}_3 \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意一对初始条件 χ_1、χ_2，任意一对扰动轨迹 $w_1, w_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{W}}$、$v_1, v_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ 以及所有 $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$，对于所有 $t \geq 0$ 和任意 $K_i \in K$，系统 *(1)* 关于 K 是基于采样的 *i-iIOSS*

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(|\Delta x(t)|) \leq \bar{\alpha}_x(|\Delta\chi|)e^{-\bar{\eta}t} + \int_0^t \bar{\gamma}_1(|\Delta w(\tau)|)e^{-\bar{\eta}(t-\tau)}\, d\tau \\ + \sum_{\tau \in [0,t] \cap K_i} \big(\bar{\gamma}_2(|\Delta y(\tau)|) + \bar{\gamma}_3(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\bar{\eta}(t-\tau)}. \end{aligned} \tag{3}$$

由于在这种基于采样的可检测性概念中，我们只考虑离散测量序列，而非连续时间输出信号，因此在定义 3 中，我们用求和代替积分来表示与输出相关的项。

为推导基于采样的 i-iIOSS 的一个充分条件，我们在下面的定理 5 中采用关于f的以下假设，即f 关于x 满足利普希茨连续性，且关于w满足 $\mathcal{K}$-连续性。

假设 4 存在某个 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ 和某个 $L > 0$，使得对所有 $u \in \mathcal{U}$、所有 $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ 以及所有 $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$，均有

$$|f(x_1, u, w_1) - f(x_2, u, w_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + \rho(|w_1 - w_2|)).$$

陈述假设 4 后，我们现在可以推导出以下定理。请注意，类似的充分条件

针对基于采样的 i-IOSS，已在离散时间情形的 [14, 定理 1,3]中提出。尽管这一充分条件背后的主要直觉相同，但下面定理 5 的证明中，连续时间情形需要采用不同的论证。直观而言，定理 5 中的条件 (4) 意味着存在某个有限时刻，此前已收集到足够数量的有效测量值；此后，系统输出的任何变化都可以通过有限数量的可用测量值检测出来。更多详细讨论请参见定理 [14, 1] 下方的备注。

定理 5（充分条件）设系统 *(1)* 为 *i-iIOSS*，且假设 *4* 成立。考虑一个根据定义 *2* 确定的集合 K。若存在有限的 t^* 以及 α_w、α_y、$\alpha_v \in \mathcal{K}_\infty$，使得对于任意两个初始条件 χ_1、χ_2，任意一对扰动轨迹 $w_1, w_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{W}}$、$v_1, v_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$以及所有 $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$，对所有 $t \geq t^*$ 及所有 $K_i \in K$，以下条件均成立，则该系统为基于采样的 *i-iIOSS*。

$$\begin{aligned} \int_{t^*}^t \gamma_2(|\Delta y(\tau)|) + \gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\, d\tau \leq \int_0^t \alpha_w(|\Delta w(\tau)|)\, d\tau \\ + \sum_{\tau \in [0,t] \cap K_i} \alpha_y(|\Delta y(\tau)|) + \alpha_v(|\Delta v(\tau)|). \end{aligned} \tag{4}$$

证明。 根据假设 4，对于所有 $t \in [0, t^*]$

$$|\Delta x(t)| \leq \Big(|\Delta\chi| + \int_0^t L\rho(|\Delta w(\tau)|)\, d\tau\Big)e^{Lt}. \tag{5}$$

通过对定理 1.41 及其在 [15]中的证明进行适当调整，便可直接得出这一点。因此，

$$\begin{aligned} \alpha_x(|\Delta x(t^*)|) \leq \alpha_x(2|\Delta\chi|e^{Lt^*}) \\ + \alpha_x\Big(2\int_0^{t^*} L\rho(|\Delta w(\tau)|)\, d\tau\, e^{Lt^*}\Big). \end{aligned} \tag{6}$$

根据 i-iIOSS 界 (2)，我们知道，对于所有 $t \geq t^*$

$$\begin{aligned} \alpha(|\Delta x(t)|) \leq \alpha_x(|\Delta x(t^*)|)e^{-\eta(t-t^*)} + \int_{t^*}^t \Big(\gamma_1(|\Delta w(\tau)|) \\ + \gamma_2(|\Delta y(\tau)|) + \gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\Big)e^{-\eta(t-\tau)}\, d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

现在固定任意的 $K_i \in K$，并将区间 $[t^*, t], t > t^*$ in $\vartheta \in \mathbb{I}_{>0}$ time intervals $[k_j, k_{j+1}]$ 划分为若干时间区间，使得 (i) $t^* \leq k_{j+1} - k_j \leq 2t^*, j = 1, \ldots, \vartheta$ 且 $k_1 = t^*$ 和 $k_{\vartheta+1} = t$；(ii) 对于 $j = 2, \ldots, \vartheta$，$k_j - t^* \in K_i$。对于每个 $K_i \in K$，我们总能找到这样的 k_j：只需选择足够大的 t^*（这不会损失一般性），并利用任意两个测量值之间的差有界这一事实 $d_{\max}$（参见定义 2）。利用 (4)，我们可以推导出以下界

对于每个 ϑ 时间区间

$$
\begin{aligned}
&e^{-\eta(t-k_{j+1})}\int_{k_j}^{k_{j+1}}\gamma_2(|\Delta y(\tau)|)+\gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\,d\tau\\
&\le e^{-\eta(t-k_{j+1})}\Big(\int_{k_j-t^*}^{k_{j+1}}\alpha_w(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(k_{j+1}-\tau)}e^{\eta 3t^*}\,d\tau\\
&+\sum_{\substack{\tau\in[k_j-t^*,k_{j+1}]\\ \cap K_i}}\big(\alpha_y(|\Delta y(\tau)|)+\alpha_v(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(k_{j+1}-\tau)}e^{\eta 3t^*}\Big)\\
&\le e^{\eta 3t^*}\int_{k_j-t^*}^{k_{j+1}}\alpha_w(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau \qquad (8)\\
&+e^{\eta 3t^*}\sum_{\substack{\tau\in[k_j-t^*,k_{j+1}]\\ \cap K_i}}\big(\alpha_y(|\Delta y(\tau)|)+\alpha_v(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}.
\end{aligned}
$$

因此，并且由于

$$
\begin{aligned}
&\int_{k_j}^{k_{j+1}}\big(\gamma_2(|\Delta y(\tau)|)+\gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&\le e^{-\eta(t-k_{j+1})}\int_{k_j}^{k_{j+1}}\big(\gamma_2(|\Delta y(\tau)|)+\gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\big)\,d\tau
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

我们得到对于所有 $t\ge t^*$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t^*}^{t}\big(\gamma_2(|\Delta y(\tau)|)+\gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}d\tau\\
&\le 2e^{\eta 3t^*}\int_0^t\alpha_w(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau \qquad (10)\\
&+2e^{\eta 3t^*}\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_i}\big(\alpha_y(|\Delta y(\tau)|)+\alpha_v(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}.
\end{aligned}
$$

注意，使用（8）和（9）为（10）中的整个时间区间 $[t^*,t]$得到一个上界时，（8）右侧的积分界限至多重叠t^*（因为 $t^*\le k_{j+1}-kj$）。这就导致了（10）中的因子 2。将（6）和（10）代入（7），可得对于所有 $t\ge t^*$

$$
\begin{aligned}
&\alpha(|\Delta x(t)|)\le\gamma_x(|\Delta\chi|)e^{-\eta t}+\int_{t^*}^{t}\gamma_1(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\alpha_x\Big(\int_0^{t^*}2Le^{Lt^*}\rho(|\Delta w(\tau)|)\,d\tau\Big)e^{-\eta(t-t^*)}\\
&+\int_0^t 2e^{\eta 3t^*}\alpha_w(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau \qquad (11)\\
&+\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_i}2e^{\eta 3t^*}\big(\alpha_y(|\Delta y(\tau)|)+\alpha_v(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma_x(r):=\alpha_x(2e^{Lt^*}r)e^{\eta t^*}$。注意，我们可以用 γ_c 和 γ_v 对 $\alpha_x(r)\le\gamma_c(\gamma_v(r))$ 给出上界，其中 γ_c 和 γ_v 分别是凹函数和凸函数（参见 [8, 引理 13]）。对 γ_v 应用詹森不等式，并利用 γ_c 的凹性以及对于 $t\ge t^*$ 有 $e^{-\eta(t-t^*)}\in[0,1]$，我们可以给出上界

将（11）右侧的第三项表示为

$$
\begin{aligned}
&\alpha_x\Big(\int_0^{t^*}2Le^{Lt^*}\rho(|\Delta w(\tau)|)\,d\tau\Big)e^{-\eta(t-t^*)}\\
&\le\gamma_c\Big(\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*}\gamma_v(t^*2Le^{Lt^*}\rho(|\Delta w(\tau)|))e^{\eta\tau}d\tau\Big)e^{-\eta(t-t^*)} \qquad (12)\\
&\le\gamma_c\Big(\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*}\gamma_v(t^*2Le^{Lt^*}\rho(|\Delta w(\tau)|))e^{\eta t^*}e^{-\eta(t-\tau)}d\tau\Big)
\end{aligned}
$$

注意，由于该项始终大于或等于一，因此可以将 $e^{\eta\tau}$ 加入第二行。此外，注意 $\alpha_x(r)\ge\alpha(r)\ \ \forall r\in\mathbb{R}_{\ge 0}$（由 (2) 在 $t=0$ 时推出），并且对于 $t\in[0,t^*]$，有 $e^{-\eta(t-t^*)}\ge 1$。因此，利用 (5) 可写为

$$
\begin{aligned}
&\alpha(|\Delta x(t)|)\le\alpha_x(2|\Delta\chi|e^{Lt^*})e^{-\eta(t-t^*)}\\
&+\alpha_x\Big(2\int_0^t L\rho(|\Delta w(\tau)|)\,d\tau\,e^{Lt^*}\Big).
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

因此可以看出，将（12）代入（11）不仅为 $t\ge t^*$ 提供了一个上界，同时也为 $t\le t^*$提供了（13）中的上界。因此，我们得到了一个对所有 $t\ge 0$均成立的上界。进一步可将其界定如下

$$
\begin{aligned}
&\alpha(|\Delta x(t)|)\le\hat\alpha\Big(\gamma_x(|\Delta\chi|)e^{-\eta t}+\int_{t^*}^{t}\gamma_1(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*}\gamma_v(t^*2Le^{Lt^*}\rho(|\Delta w(\tau)|))e^{\eta t^*}e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\int_0^t 2e^{\eta 3t^*}\alpha_w(|\Delta w(\tau)|)e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_i}2e^{\eta 3t^*}\big(\alpha_y(|\Delta y(\tau)|)+\alpha_v(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\eta(t-\tau)}\Big)
\end{aligned}
$$

其中 $\hat\alpha(r)=r+\gamma_c(r)$。于是最终得到

$$
\begin{aligned}
&\bar\alpha(|\Delta x(t)|)\le\bar\alpha_x(|\Delta\chi|)e^{-\bar\eta t}+\int_0^t\bar\gamma_1(|\Delta w(\tau)|)e^{-\bar\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_i}\big(\bar\gamma_2(|\Delta y(\tau)|)+\bar\gamma_3(|\Delta v(\tau)|)\big)e^{-\bar\eta(t-\tau)},\quad\forall t\ge 0
\end{aligned}
$$

其中 $\bar\alpha(r)=\hat\alpha^{-1}(\alpha(r))$，$\bar\alpha_x(r)=\gamma_x(r)$，$\bar\gamma_1(r)=\gamma_1(r)+2e^{\eta 3t^*}\alpha_w(r)+\gamma_v(t^*2Le^{Lt^*}\rho(r))^{e^{\eta t^*}\perp t^*}$，$\bar\gamma_2(r)=2e^{\eta 3t^*}\alpha_y(r)$，$\bar\gamma_3(r)=2e^{\eta 3t^*}\alpha_v(r)$ 和 $\bar\eta=\eta$，也就是说，根据定义 3，系统（1）是基于样本的 i-iIOSS。□

4 基于样本的 MHE

MHE 是一种基于优化的状态估计技术。在每个时间步，都会在一个滑动窗口上求解优化问题，并将过去的输入和输出纳入考虑，以获得当前状态估计。遵循文献 [13]，中针对离散时间系统的类似方法，我们提出一种鲁棒稳定的基于样本的 MHE，该方法考虑不规则测量序列。

4.1 设置

我们将K_s定义为一个序列，其中包含估计器可获取测量值的时刻。在所提出的方案中，优化问题不会在规则（等间隔）的采样时刻显式求解，而只会在有新信息可用时求解。这意味着，对于$t_i \in K_s$，在时刻t_i求解以下时域长度为M_{t_i}的优化问题：$= \min\{t_i,\ M\},\ M \in \mathbb{I}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}
&\min_{\hat{\chi}_{t_i},\hat{w}_{t_i},\hat{v}_{t_i}} J(\hat{\chi}_{t_i},\hat{w}_{t_i},\hat{v}_{t_i},\hat{y}_{t_i},t_i)\\
&\text{s.t. } \hat{x}_{t_i}(\tau) = x(\tau,\hat{\chi}_{t_i},u_{t_i},\hat{w}_{t_i}),\ \tau\in[0,M_{t_i}],\\
&\quad \hat{y}_{t_i}(\tau) = y(\tau,\hat{\chi}_{t_i},u_{t_i},\hat{w}_{t_i},\hat{v}_{t_i}),\ \hat{y}_{t_i}(\tau)\in\mathcal{Y},\ \tau\in[0,M_{t_i}],\\
&\quad \hat{w}_{t_i}(\tau)\in\mathcal{W},\ \hat{v}_{t_i}(\tau)\in\mathcal{V},\ \hat{x}_{t_i}(\tau)\in\mathcal{X},\ \tau\in[0,M_{t_i}].
\end{aligned} \tag{14}$$

其中，u_{t_i}、$\hat{}w_{t_i}$、$\hat{}v_{t_i}$、$\hat{}y_{t_i}$分别表示时间区间$[t_i - M_{t_i},\ t_i]$上的输入片段、估计的扰动轨迹和输出轨迹。此外，$\hat{}\chi_{t_i}$表示在时刻t_i估计的区间$[t_i - M_{t_i},\ t_i]$的初始估计，而$\hat{}x(t_i) := \hat{}x_{t_i}(M_{t_i})$。我们考虑以下代价函数

$$\begin{aligned}
J(\hat{\chi}_{t_i},\hat{w}_{t_i},\hat{y}_{t_i},t_i) &= 2e^{-\eta M_{t_i}}|\hat{\chi}_{t_i}-\hat{x}(t_i-M_{t_i})|^2_{P_2}\\
&+\int_0^{M_{t_i}} e^{-\eta(M_{t_i}-\tau)}2|\hat{w}_{t_i}(\tau)|^2_{Q_w}\,d\tau\\
&+\sum_{\tau+t-M_{t_i}\in[t_i-M_{t_i},t_i]\cap K_s} e^{-\eta(M_{t_i}-\tau)}2|\hat{v}_{t_i}(\tau))|^2_{Q_v}\\
&+\sum_{\tau+t-M_{t_i}\in[t_i-M_{t_i},t_i]\cap K_s} e^{-\eta(M_{t_i}-\tau)}|\hat{y}_{t_i}(\tau)-y_{t_i}(\tau)|^2_{R}
\end{aligned}$$

其中$\eta\in\mathbb{R}_{>0}$。代价函数的第一部分惩罚估计状态序列的第一个元素（$\hat{}\chi_{t_i}$）与先验估计之间的差异，并使用加权矩阵$P_2 \succ 0$。其余三项分别考虑估计的扰动序列，以及状态估计器可获得测量值的时刻处测量输出与估计输出之间的差异，并分别由$Q_w \succ 0$、$Q_v \succ 0$和$R \succ 0$加权。

在$t_i \in K_s$时，通过求解移动时域估计的优化问题得到$\hat{}x(t_i)$。下一个测量值在t_{i+1}时可用，因此再次通过求解式 (14) 计算$\hat{}x(t_{i+1})$。对于$t_i < t < t_{i+1}$，估计器以开环方式运行，即

$$\hat{x}(\tau) = x(\tau,\hat{x}(t_i),u,0),\ \tau\in(t_i,t_{i+1}).$$

4.2 鲁棒稳定性分析

下面我们根据以下定义，证明所提出的基于采样的移动时域估计方案具有鲁棒稳定性。该定义针对我们的连续时间设定（含离散测量）进行了调整，因此同时采用积分项和离散求和项来表述。

定义6 考虑一列测量时刻K_s。若对于从初始条件$\hat{}\chi$开始的系统 *(1)* 的状态估计器，所生成的状态估计为$\hat{}x(t)$，并且存在某些$C_x, C_w, C_v, r \in \mathbb{R}_{>0}$和$\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于任意初始条件$\chi, \hat{}\chi\in\mathcal{X}$、任意扰动序列$w\in\mathcal{M}_{\mathcal{W}}, v\in\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$以及任意控制输入$u\in\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$，以下条件对所有$t\geq 0$均成立，则称该状态估计器是鲁棒全局指数稳定的 *(RGES)*

$$\begin{aligned}
|x(t)-\hat{x}(t)|^r \leq C_x|\chi-\hat{\chi}|^r e^{-\lambda t} &+ \int_0^t C_w|w(\tau)|^r e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_s} C_v|v(\tau)|^r e^{-\lambda(t-\tau)}.
\end{aligned}$$

为了确立估计误差的鲁棒指数稳定性，我们将基于采样的 i-iIOSS 的指数版本作为可检测性假设。

假设 7（基于采样的指数 i-iIOSS）
系统 *(1)* 关于K满足基于采样的指数型 *i-iIOSS*，即存在$P_1, P_2, Q_w, Q_v, R \succ 0$和$\eta\in\mathbb{R}_{>0}$，使得对于所有$u\in\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$、任意两组扰动轨迹$w_1, w_2\in\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$、$v_1, v_2\in\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$以及任意一对初始条件$\chi_1, \chi_2$，对于所有$t\geq 0$及任意$K_i\in K$，均有

$$\begin{aligned}
|\Delta x(t)|^2_{P_1} \leq |\Delta\chi|^2_{P_2}e^{-\eta t} &+ \int_0^t |\Delta w(\tau)|^2_{Q_w}e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau\\
&+\sum_{\tau\in[0,t]\cap K_i}\left(|\Delta y(\tau)|^2_R + |\Delta v(\tau)|^2_{Q_v}\right)e^{-\eta(t-\tau)}.
\end{aligned}$$

假设 7 对应于定义 3 中基于采样的 i-iIOSS 的指数变体，因此蕴含后者。在此可检测性假设下，我们可以证明，当时域长度足够大时，估计误差能够保证鲁棒稳定。

定理 8（基于样本的 MHE 是 RGES）考虑定义 *2* 中的集合K。假设假设 *7* 成立，测量序列满足$K_s\in K$，并令时域$M\in\mathbb{I}_{\geq d_{\max}}$的选取满足$4\lambda^2_{\text{最大值}}(P_2,P_1)e^{-\eta M} < 1$。那么，存在$\tilde{\eta}\in\mathbb{R}_{>0}$，使得基于样本的 *MHE* 方案 *(14)* 的状态估计误差对所有$t\geq 0$均满足

$$\begin{aligned}
|\hat{e}(t)|^2_{P_1} \leq 4\lambda_{\max}(P_2,P_1)\Big(&e^{-\tilde{\eta}t}|\hat{e}(0)|^2_{P_2}\\
&+\int_0^t e^{-\tilde{\eta}(t-\tau)}|w(\tau)|^2_{Q_w}\,d\tau + \sum_{\tau\in[0,t]\cap K_s} e^{-\tilde{\eta}(t-\tau)}|v(\tau)|^2_{Q_v}\Big).
\end{aligned} \tag{15}$$

证明。 第 4.1 节中介绍的移动时域估计方案在新测量数据可用时采用固定的时域长度M，否则执行开环预测。与[13],离散时间情形类似，可以证明这等价于一种具有

可变时域长度的方案（参见 [13, 命题 1]）。因此，可以将 [13, 定理 1] 中的稳定性证明直接调整到连续时间情形，从而推导出（15）。□

5 线性系统与基于采样的 i-iIOSS

下文将分析线性系统的基于采样的可观测性与基于采样的 i-iIOSS 之间的联系。本节将说明，对于线性情形，系统的基于采样的指数 i-iIOSS 可由不稳定子系统的基于采样的可观测性以及关于采样时刻的一些附加条件推出。本节稍后将讨论保证这些附加条件成立的一个充分条件（见定理15及其下方的备注）。因此，可利用先前为线性系统满足基于采样的可观测性而建立的条件（参见 [22,25]），来验证或设计满足假设 7 的采样策略，从而确保基于样本的 MHE 具有 RGES。考虑如下线性时不变系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$、$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$、$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$。所有其他假设和符号均与一般非线性设置（第 2 节）相同。为便于建立本节后文给出的结果，此处省略测量噪声。这样假设不失一般性，因为系统 (16) 的（基于采样的）i-iIOSS 与输出方程中含有测量噪声的同一系统的（基于采样的）i-iIOSS 等价，即 $y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t)$。

众所周知，在非采样情形下，对于线性系统，i-IOSS 与可检测性等价 [21]。为求完整起见，我们简要证明这一结论对本文所考虑的 i-IOSS 积分变体也成立。

定理 9 线性系统可检测，当且仅当根据定义 *1*，它是时间折扣指数 *i-iIOSS*。

证明。 假设一个线性系统是指数 i-iIOSS。那么 $w,y \equiv 0$ 意味着 $x \to 0$，当 $t \to \infty$ 时，因此该系统是可检测的。反过来，对于可检测系统，我们利用这样一个事实：存在某个矩阵 L，使得 $A_L := A - LC$ 是 Hurwitz 矩阵。对于任意初始状态 χ_1, χ_2、任意扰动轨迹 w_1, w_2 以及控制输入 u，我们可以写出

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + \Delta w(t) + L(\Delta y(t) - \Delta y(t)) \\ &= A_L \Delta x(t) + \Delta w(t) + L\Delta y(t). \end{aligned}$$

因此，

$$\Delta x(t) = e^{A_L t}\Delta\chi + \int_0^t e^{A_L(t-\tau)}(\Delta w(\tau) + L\Delta y(\tau))\, d\tau.$$

由于 A_L 是 Hurwitz 矩阵，因此存在某个 $c\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $|e^{A_L t}| \le ce^{-\lambda t}$。因此，

$$\begin{aligned} |\Delta x(t)| \le & ce^{-\lambda t}|\Delta\chi| \\ & + \int_0^t ce^{-\lambda(t-\tau)}\big(|\Delta w(\tau)| + |L|\ |\Delta y(\tau)|\big)\, d\tau. \end{aligned}$$ □

为了确立基于采样的 i-iIOSS 与基于采样的可观测性之间关系的结果，我们首先需要给出以下基于采样的可观测性矩阵的定义。

定义 10（基于采样的可观测性矩阵 [12]） 考虑一组任意时刻 $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ 对于某个 $k \ge 1$，其中 $0 \le \tau_1$ 且对于所有 $i = 1, \ldots, k-1$ 均有 $\tau_i < \tau_{i+1}$。基于采样的可观测性矩阵表示为

$$O_s(A,C) = \begin{pmatrix} (Ce^{A\tau_1})^\top & (Ce^{A\tau_2})^\top & \ldots & (Ce^{A\tau_k})^\top \end{pmatrix}^\top. \tag{17}$$

在 [12,定义 2],中讨论了，如果基于采样的可观测性矩阵 $O_s(A,C)$ 满列秩，那么在已知输入序列（扰动为零时）和采样输出的情况下，可以唯一重构初始状态，这意味着该系统是基于采样可观测的。

在陈述本节的第一个主要结果之前，我们提出以下引理，它将在下文定理 13 的证明中使用。

引理 11 如果 $\operatorname{rank}(O_s(A,C)) = n$，且 $\{\tau_{i,t}\}_{i=1}^{k_t} \subseteq [t-T, t]$，并且 $\sigma_{\min}(O_s(A,C)e^{-A(t-T)}) \ge \bar{\sigma}$ 对于某个 $\bar{\sigma} > 0$ 成立，那么存在一些矩阵 $\mu_i \in \mathbb{R}^{p\times p}$，$i = 1, \ldots, k_t$，以及某个 $\bar{\mu} > 0$，使得

$$Ce^{AT} = MO_s(A,C)e^{-A(t-T)} \tag{18}$$

with $M = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{k_t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times k_t p}$ *and* $|\mu_i| \le \bar{\mu}$, $i = 1, \ldots, k_t$.

证明。 满足 $Ce^{AT} = MO_s(A,C)e^{-A(t-T)}$ 的矩阵 M 的一种可能选取为

$$M = Ce^{AT}\tilde{O}^+$$

其中，$\tilde{O} = O_s(A,C)e^{-A(t-T)}$，且 $\tilde{O}^+$ 是 $\tilde{O}$ 的伪逆，即 $\tilde{O}^+ = (\tilde{O}^\top \tilde{O})^{-1}\tilde{O}^\top$。由于 $|\tilde{O}^+| = \frac{1}{\sigma_{\min}(\tilde{O})}$，

$$|M| \le \frac{|Ce^{AT}|}{\sigma_{\min}(\tilde{O})} \le \frac{|Ce^{AT}|}{\bar{\sigma}}.$$

因此，(18) 对 $\bar{\mu} = \frac{|Ce^{AT}|}{\bar{\sigma}}$ 成立。□

在下面的定理中，我们利用定理 5 中的充分条件。为此，注意以下内容。

备注 12 如果定义 *1*（定义 *3*）中的函数 α、α_x、γ_1、γ_2、γ_3（$\bar{\alpha}$、$\bar{\alpha}_x$、$\bar{\gamma}_1$、$\bar{\gamma}_2$、$\bar{\gamma}_3$）是线性函数或二次函数，即例如 α 具有以下形式

$$\alpha(|x|) = c|x| \quad \text{or} \quad \alpha(|x|) = x^\top P x \tag{19}$$

其中 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 且 $P \succ 0$，那么我们得到（基于采样的）*i-iIOSS* 的指数变体。仔细检查定理 *5* 的证明可以看出，当 *(4)* 中的 α_w、α_y、α_v 是如 *(19)* 所示的线性函数或二次函数时，这是系统 *(16)* 具有相应线性函数或二次函数的基于采样的指数 *i-iIOSS* 的充分条件。这里还用到了，对于线性系统，假设 *4* 在 ρ 为线性函数时成立。

虽然理论上，在长度为T的有限时间区间内可以发生任意多次测量，但在以下定理中，我们作出合理假设：对于任意此类区间，测量次数均存在有限上界 $\kappa(T)$。现在，我们可以针对基于采样可观测系统的基于采样的 i-iIOSS，建立以下结果。正如本节开头所述，我们将证明，基于采样的可观测性与某些附加条件结合，可以推出基于采样的 i-iIOSS。除了要求基于采样的可观测性矩阵满列秩（这由基于采样的可观测性保证）之外，我们还假设该矩阵的最小奇异值有一个下界。例如，当各测量时刻彼此任意接近时，这一条件可能不成立。

定理 13 考虑一个如定义 *2* 所述的集合 K，其中 $K_1 \cap [t-T,t]$ 内的测量次数对于任意 $T \in \mathbb{R}_{>0}$ 及所有 $t > T$ 均小于或等于某个有限值 $\kappa(T) \in \mathbb{R}_{>0}$。若存在某个有限的 T 和某个 $\bar{\sigma} > 0$，使得时间索引取自集合 $K_1 \cap [t-T,t]$ 的基于采样的可观测性矩阵满列秩，且满足$\sigma_{\min}(O_s(A,C)e^{-A(t-T)}) \ge \bar{\sigma}$对所有 $t \ge T$ 均成立，则系统 *(16)* 关于 K 是基于采样的指数 *i-iIOSS*。

证明。由于基于采样的可观测性矩阵满列秩，因此该系统是基于采样可观测的，进而也是可观测的。由此，根据定理 9，该系统是指数 i-iIOSS。此外，对于线性系统，假设 4 总是成立。因此，只需证明定理 5 中的条件 (4) 对线性函数成立，这意味着根据备注 12，系统具有基于采样的指数 i-iIOSS。考虑某个时刻 $t = \vartheta T + l$处的输出差，其中 $\vartheta \in \mathbb{I}_{>0}$ 和 $l \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$\Delta y(t) = Ce^{AT}\Delta x(t-T) + \int_{t-T}^{t} Ce^{A(t-\tau)}\Delta w(\tau)\, d\tau. \tag{20}$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}|\Delta y(t)| \le & |Ce^{AT}\Delta x(t-T)| \\ & + \int_{t-T}^{t} |Ce^{A(t-\tau)}\Delta w(\tau)|\, d\tau.\end{aligned} \tag{21}$$

根据引理 11，我们知道

$$\begin{aligned}&|Ce^{AT}\Delta x(t-T)| \\ =&|MO_s(A,C)e^{-A(t-T)}\Delta x(t-T)| \\ \le & \sum_{j\in K_1\cap[t-T,t]} \bar{\mu}|Ce^{A(j-t+T)}\Delta x(t-T)|.\end{aligned} \tag{22}$$

利用 (20)，我们可以进一步对 (22) 求上界如下

$$\begin{aligned}&|Ce^{AT}\Delta x(t-T)| \\ \le & \bar{\mu}\sum_{j\in K_1\cap[t-T,t]} \left(|\Delta y(j)| + \int_{t-T}^{j} |Ce^{A(j-\tau)}\Delta w(\tau)|\, d\tau\right).\end{aligned} \tag{23}$$

将 (23) 代入 (21)，得到

$$\begin{aligned}|\Delta y(t)| \le & \bar{\mu}\sum_{j\in K_1\cap[t-T,t]} |\Delta y(j)| \\ & + (\bar{\mu}\kappa(T)+1)\int_{t-T}^{t} k_w\, |\Delta w(\tau)|\, d\tau\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $k_w \ge |Ce^{Ai}|$ 对所有 $i \in [0,T]$均成立。

注意到 $\int_T^t |\Delta y(j)|\, dj = \sum_{i=1}^{\vartheta-1}\int_{(i+1)T}^{iT} |\Delta y(j)|\, dj + \int_{\vartheta T}^{t} |\Delta y(j)|\, dj$ 且 $\int_{(i+1)T}^{iT} |\Delta y(j)|\, dj \le T\|\Delta y\|_{iT:(i+1)T}$。对这些 ϑ时间区间分别应用 (24)，可得以下界

$$\begin{aligned}\int_T^t c_2|\Delta y(\tau)|\, d\tau \le & \int_0^t 2T(\bar{\mu}\kappa(T)+1)c_2k_w|\Delta w(\tau)|\, d\tau \\ & + \sum_{\tau\in[0,t]\cap K_1} 2T\bar{\mu}c_2|\Delta y(\tau)|\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ 满足：$\gamma_2(r) = c_2 r$ 对于线性系统满足指数 i-iIOSS 界（2）（参见定理 9 的证明）。注意，将（24）应用于每个 ϑ 子区间中 $|\Delta y(t)|$ 的本质上确界时，所得的界涉及过去区间 $[t-T,t]$，该区间可能延伸至前一个子区间。因此，

由于将完整区间 $[T,t]$ 划分为长度为 T 的子区间，将（24）所得的界仅可能在相邻子区间之间重叠。这种重叠解释了界（25）中的因子 2。由于我们假设在任意长度为 T 的区间内都具有基于采样的可观测性，按照定义，（25）也对所有 $K_i \in K$ 成立。因此，（4）成立，其中 $\alpha_w(r) = 2T(\bar{\mu}\kappa(T)+1)c_2 k_w r$，$\alpha_y(r) = 2T\bar{\mu}c_2 r$，且 $t^* = T$。□

这一结果可以放宽。事实上，定理 13 中的条件只需对系统中非渐近稳定的部分成立即可。为此，考虑处于约当标准形的系统，其中

$$A_{\mathrm{J}} = T_{\mathrm{J}}^{-1} A T_{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{us}} \end{pmatrix}, \quad C_{\mathrm{J}} = C T_{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} C_{\mathrm{s}} & C_{\mathrm{us}} \end{pmatrix}$$

其中，A 中所有严格位于单位圆盘内的特征值都包含在 A_{s} 中，其余特征值则包含在 A_{us} 中。

定理 14 考虑一个如定义 *2* 所述的集合 K，其中 $K_1 \cap [t-T,t]$ 中的测量值数量不超过某个有限的 $\kappa(T) \in \mathbb{R}_{>0}$，对任意 $T \in \mathbb{R}_{>0}$ 以及所有 $t > T$ 均成立。若存在某个有限的 T 和某个 $\bar{\sigma} > 0$，使得时间索引取自集合 $K_1 \cap [t-T,t]$ 的基于采样的可观测性矩阵 $O_{\mathrm{s}}(A_{\mathrm{us}}, C_{\mathrm{us}})$ 满列秩，并且 $\sigma_{\min}(O_{\mathrm{s}}(A_{\mathrm{us}}, C_{\mathrm{us}}) e^{-A_{\mathrm{us}}(t-T)}) \geq \bar{\sigma}$ 对所有 $t > T$ 均成立，则系统 *(16)* 关于 K 具有基于采样的指数 *i-iIOSS* 性质。

证明。证明在很大程度上可以类比离散时间情形下相应定理的证明 [13, 定理 4]。主要思路是利用稳定子系统的 i-iISS 界，以及应用定理 13 后得到的不稳定子系统的基于采样的 i-iIOSS 界。请注意，在离散时间情形下的 [13]，我们使用了 i-IOSS 界的基于最大值的表述。由于时间折扣，我们可以将基于采样的 i-iIOSS 界 (3) 中采样输出的求和项转换为基于最大值的表述（例如参见 [9,方程 (25)]）。这使我们能够遵循与离散时间情形类似的步骤，推导出系统 (16) 的基于采样的 i-iIOSS 界。□

对于连续时间可观测系统，文献 [22,25] 给出了可确保 (17) 满列秩的采样策略。这些研究分析了信号 $t \to Ce^{At}\Delta\chi$ 在何时变为零，以及 $\Delta\chi \neq 0$。给出了该信号在指定时间区间内零点数量的一个上界：

$$k^* = r - 1 + \frac{T\delta_\lambda}{2\pi}, \tag{26}$$

其中，T 是时间区间的长度，$r = \sum^{\varsigma}{}_{i=1} r_i$，$r_i$ 表示矩阵 A 的特征值 λ_i 的索引，ς 是系统中互不相同的特征值数量，而 $\delta_\lambda = \max_{1 \leq i,j \leq \varsigma} \Im(\lambda_i - \lambda_j)$ 中，$\Im(\cdot)$ 表示虚部 [25]。在长度为 T 的区间内进行超过 k^* 次测量，可确保 (17) 满列秩。在下述定理中，我们将证明，在长度为 T 的时间区间内选取 $k > k^*$ 个样本，并且这些样本还满足 $\tau_{i+1} - \tau_i \geq \varepsilon$、$i = 1,\ldots,k-1$（其中 $\varepsilon > 0$），则基于采样的可观测性矩阵的最小奇异值存在一个下界。

定理 15 假设信号 $t \to Ce^{At}\Delta\chi, \Delta\chi \neq 0$ 在区间 $[t-T,t]$ 内至多有 k^* 个零点。固定 $\varepsilon > 0$ 并选择 $k = \min\{i | i > k^*, i \in \mathbb{I}\}$ 个采样时刻

$$\tau_1, \ldots, \tau_k \in [t-T,t], \qquad \tau_{i+1} - \tau_i \geq \varepsilon \quad \forall i = 1,\ldots,k-1.$$

于是，存在 $\bar{\sigma} > 0$，使得对于所有 $t \geq T$，时间区间 $[t-T$ 内的基于采样的可观测性矩阵（记为 $O_{\mathrm{s},t}(A,C)$）满足

$$\sigma_{\min}(O_{\mathrm{s},t}(A,C) e^{-A(t-T)}) \geq \bar{\sigma}.$$

证明。我们将 $O_{\mathrm{s},t}(A,C)e^{-A(t-T)}$ 中矩阵指数的指数集合记为 $\mathcal{T} = \left\{(s_1, s_2, \ldots, s_k) | s_1 \in [0, T-(k-1)\varepsilon],\ s_i \in [s_{i-1} + \varepsilon, T-(k-i)\varepsilon],\ \forall i = 2,\ldots,k\right\}$，其中 $s_i = \tau_i - t + T$，$i = 1,\ldots,k$。注意，$\mathcal{T}$ 是一个紧集，且 $g: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$，$g(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sigma_{\min}\left(\left[(Ce^{As_1})^\top (Ce^{As_2})^\top \ldots (Ce^{As_k})^\top\right]^\top\right)$ 是一个连续函数。由于 $k > k^*$，前文讨论的 [25]，中的结果保证 $O_{\mathrm{s},t}(A,C)e^{-A(t-T)}$ 满列秩。因此，在紧集 $\mathcal{T}$ 上，连续函数 g 不会取零。于是，根据极值定理，g 能取到一个严格为正的最小值

$$\bar{\sigma} = \min_{(s_1,s_2,\ldots,s_k) \in \mathcal{T}} g(s_1,\ldots,s_k) > 0.$$

因此，对于每个可容许的 $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ 选择，都有 $\sigma_{\min}\left(O_{\mathrm{s},t}(A,C)e^{-A(t-T)}\right) \geq \bar{\sigma}$。□

因此，将 (26) 应用于子系统 $(A_{\mathrm{us}}, C_{\mathrm{us}})$，并使用测量序列，使其在每个长度为 k^* 个样本以上的 T 长时间区间内，且连续采样时刻满足 $\tau_{i+1} - \tau_i \geq \varepsilon$，根据定理 14 可推出 (16) 具有基于采样的指数 i-iIOSS。

6 仿真示例

为说明第 4 节中基于样本的移动时域估计方案的功能，我们采用高度非线性的

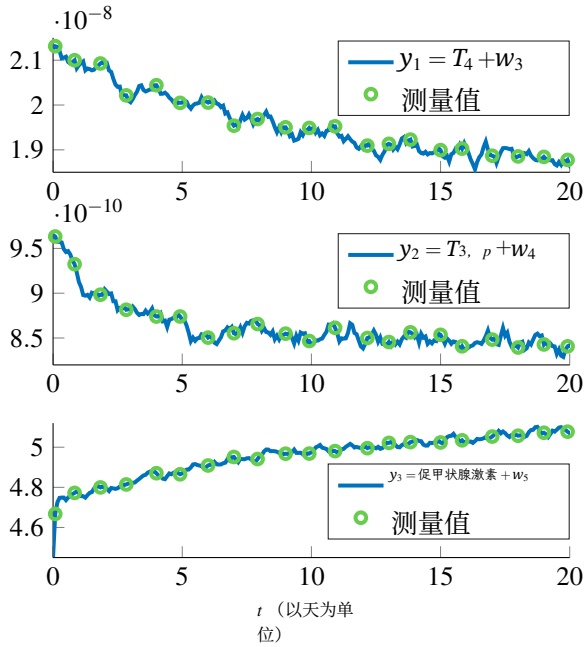


图1. 噪声系统输出y（蓝色）以及基于采样的移动时域估计方案中使用的不频繁采样离散测量（绿色）。

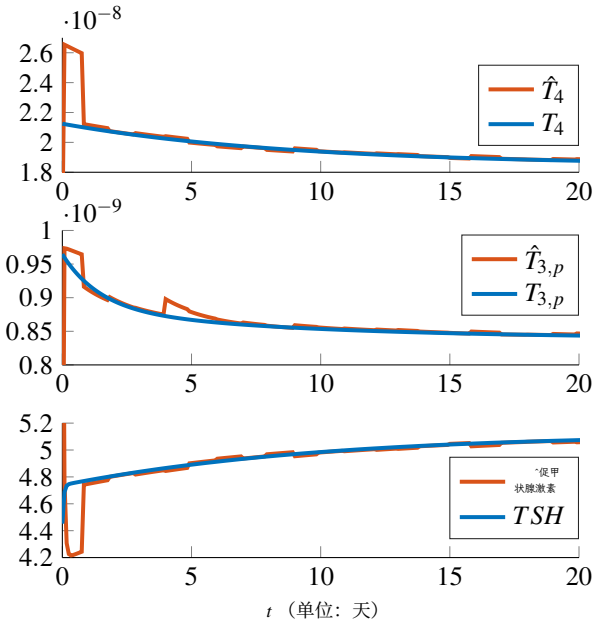


图 2. 可直接测量的激素浓度的真实系统状态（蓝色）和基于样本的移动时域估计（红色）。

六维垂体-甲状腺反馈环模型，该模型来自 [24]，针对一名甲状腺功能减退患者。系统状态为 $\mathrm{x} = \left[\mathrm{T4},_{th}\,\mathrm{T}_4\,\mathrm{T3},_p\ \mathrm{T3},_c\,\mathrm{T\ SH}\ \mathrm{T\ SH}_c\right]$，其中 T_4,T3,$_p$ 和 T SH 分别是甲状腺素（T_4）、三碘甲状腺原氨酸（T_3）和促甲状腺激素（T SH）的外周浓度，而 T4,$_{th}$,T3,$_c$, T SH$_c$分别是甲状腺中的 T_4 和垂体中的 T_3,T SH 的内部浓度。我们将外周浓度视为系统的输出，可通过采集血液样本直接测量。此外，我们假设加性过程噪声 $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^6$ 作用于第一和第六个状态方程，即 $|\mathrm{w}_1| \le 10^{-13}$ 和$|\mathrm{w}_6| \le 0.6$，以及 $\mathrm{w}_i = 0,\ \mathrm{i} = 2,\ldots,5$；并假设存在加性测量噪声 $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$，其中 $|\mathrm{v}_1| \le 5 \cdot 10^{-10}$，$|\mathrm{v}_2| \le 3 \cdot 10^{-11}$和$|\mathrm{v}_3| \le 0.05$。真实初始状态为$\mathrm{x}(0) = \left[4.4 \cdot 10^{-13}\ \ 2.1 \cdot 10^{-8}\ \ 9.6 \cdot 10^{-10}\ \ 2.1 \cdot 10^{-9}\ \ 4.5\ \ 4.8\right]$，先验估计取为 $\bar{\mathrm{x}}(0) = \left[7.4 \cdot 10^{-13}\ \ 1.4 \cdot 10^{-8}\ \ 4.2 \cdot 10^{-10}\ \ 9 \cdot 10^{-10}\ \ 7.7\ \ 8.2\right]^\top$。

我们考虑一个不规则测量序列，平均每24小时获得一次测量值。在图1中，显示了带噪声的输出信号$y(t)$，并标出了进行测量的时刻。对于代价函数的参数化，我们选取了 $\eta = 0.35$、$P_2 = \mathrm{diag}\{1,5,1,1,1,1\}$、$Q_w = 1.39 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{diag}\{1,0,0,0,0,0.1\}$和$Q_v = \mathrm{diag}\{100,100,10\}$以及$R = \mathrm{diag}\{200,150,100\}$。采用这一选择并将时域长度设为$M = 5$ 天后，我们获得了准确的状态估计值，并且其能够快速收敛到真实状态附近，如图2和图3所示。图2展示了真实的激素浓度以及移动时域估计值对激素浓度的估计—

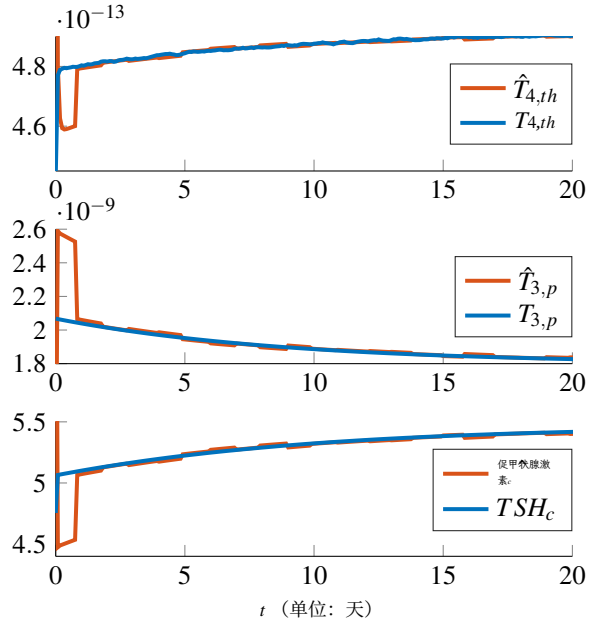


图3. 未测量激素浓度的真实系统状态（蓝色）和基于样本的移动时域估计（红色）。

我们可以直接测量的浓度，而图3展示了未测量的激素浓度及其估计值。

7 结论

在本研究中，我们探讨了测量序列不规则情况下连续时间系统的可检测性和状态估计。我们提出了一个基于样本的

i-iIOSS 版本，该版本仅考虑系统不规则采样所能提供的有限输出信息。此外，我们为 i-iIOSS 系统成为基于采样的 i-iIOSS 提出了一个充分条件。利用这一条件，我们将所提出的基于采样的 i-iIOSS 性质与此前关于线性系统基于采样的可观测性的研究成果联系起来。此外，我们提出了一种鲁棒稳定的基于采样移动时域估计方案。通过一个生物医学应用的仿真实例展示了该方法的适用性，具体而言，是对垂体-甲状腺反馈环中激素浓度的估计；在这类应用中，通常只能获得少量且不规则的测量值。

参考文献

[1] Angelo Alessandri。非线性系统的鲁棒移动时域估计：从完美优化到不完美优化。*Automatica*，175:112187，2025。[2] Douglas A. Allan 和 James B. Rawlings。全信息估计的鲁棒稳定性。*SIAM*控制与优化期刊，59(5):3472–3497，2021。[3] D. Angeli。关于增量输入到状态稳定性的进一步结果。*IEEE*自动控制汇刊，54(6):1386–1391，2009。[4] Vegard Heimly Brun、Amund H. Eriksen、Ruth Selseth、Kenth Johansson、Renate Vik、Benedicte Davidsen、Michal Kaut 和 Lars Hellemo。基于药代动力学/药效动力学建模的患者个体化左甲状腺素剂量：全甲状腺切除术后的新方法。*Thyroid :* 美国甲状腺协会官方期刊，31(9):1297–1304，2021。[5] Johannes W. Dietrich、Gabi Landgrafe-Mende、Evelin Wiora、Apostolos Chatzitomaris、Harald H. Klein、John E. M. Midgley 和 Rudolf Hoermann。甲状腺稳态的计算参数：鉴别诊断和临床研究的新兴工具。*Frontiers in Endocrinology*，7:57，2016。[6] Wuhua Hu。从全信息估计到移动时域估计的一般稳定性蕴含关系。*IEEE*自动控制汇刊，69(2):1164–1170，2024。[7] Luo Ji、James B. Rawlings、Wuhua Hu、Andrew Wynn 和 Moritz Diehl。有界扰动下移动时域估计的鲁棒稳定性。*IEEE*自动控制汇刊，61(11):3509– 3514，2016。[8] Christopher M. Kellett。比较函数结果汇编。*Mathematics of Control, Signals, and Systems*，26(3):339–374，2014。[9] Sven Knufer 和 Matthias A. Muller。时间折扣增量输入/输出到状态稳定性。载于 Carolyn L. Beck（编），*2020 59th IEEE Conference on Decisionand Control(CDC)*，第5394–5400页。IEEE，2020。[10]Sven Knüfer 和 Matthias A. Müller。非线性全信息估计与移动时域估计：鲁棒全局渐近稳定性。*Automatica*，150:110603，2023。[11] Isabelle Krauss、Victor G. Lopez 和 Matthias A. Muller。线性离散时间系统的采样可观测性。载于*2022 61th IEEE Conference on Decisionand Control(CDC)*，第4199–4205页。IEEE，2022。[12] Isabelle Krauss、Victor G. Lopez 和 Matthias A. Müller。关于线性系统的基于采样的函数可观测性。*IEEE* 控制系统快报，9:1393–1398，2025。[13] Isabelle Krauss、Victor G. Lopez 和 Matthias A. Müller。基于采样的移动时域估计。*arXiv:2510.24191*，2025。

[14] Isabelle Krauss、Victor G. Lopez 和 Matthias A. Müller。离散时间系统的基于采样的非线性可检测性。*IEEE*自动控制汇刊，70(4):2422–2434，2025。[15] Andrii Mironchenko。输入到状态稳定性。Springer Cham，2023。[16] James B. Rawlings 和 Luo Ji。基于优化的状态估计：现状与一些新结果。过程控制期刊，22(8):1439–1444，2012。[17] James Blake Rawlings。模型预测控制：理论、计算与设计。Nob Hill Publishing LLC，圣巴巴拉，第2版，2024。[18] Julian D. Schiller 和 Matthias A. Müller。关于增量输入/输出到状态稳定性的积分变体及其作为非线性可检测性概念的应用。*IEEE* 控制系统快报，7 2346，2023 2341: – 。[19]Julian D. Schiller 和 Matthias A. Müller。连续时间系统移动时域估计的鲁棒稳定性。*at* - 自动化技术，72(2):120–133，2024。[20]Julian D. Schiller、Simon Muntwiler、Johannes Köhler、Melanie N. Zeilinger 和 Matthias A. Müller。用于保证移动时域估计鲁棒稳定性的李雅普诺夫函数。*IEEE*自动控制汇刊，68(12):7466–7481，2023。[21]Eduardo D. Sontag 和 Yuan Wang。非线性系统的输出到状态稳定性与可检测性。系统与控制快报，29(5):279–290，1997。[22] Le Yi Wang、Chanying Li、G. George Yin、Lei Guo 和 Cheng-Zhong Xu。非规则采样和传感器限制下线性时不变系统的状态可观测性与观测器。*IEEE*自动控制汇刊，56(11):2639–2654，2011。[23] Zhenhua Wang、Jiahui Zhang、Nacim Meslem 和 Tarek Raïssi。离散测量下连续时间线性系统的区间估计。*IEEE*自动控制汇刊，第1 8页，2025 – 。[24] Tobias M. Wolff、Johannes W. Dietrich 和 Matthias A. Müller。甲状腺功能减退症的最佳激素替代疗法——一种模型预测控制方法。*Frontiers in Endocrinology*，13，2022。[25] Shen Zeng 和 Frank Allgower。一般采样可观测性结果及其应用。载于*2016* 年 *IEEE* 第 *55* 届决策与控制会议，第3997–4002页。IEEE，2016。