arXiv:2603.22129v1 [math.FA] 23 Mar 2026

非交换算子单位球上的稳定矩阵自由多项式的循环性

JEET SAMPAT 和 MAXIMILIAN TORNES

摘要。我们研究非交换算子单位球（对应于有限维算子空间的单位球）上有界非交换（NC）函数的方阵代数，并刻画关于典范弱-*拓扑的循环矩阵自由多项式。更确切地说，我们证明，一个矩阵自由多项式生成弱-*稠密左/右理想，当且仅当它是稳定的，即在非交换算子单位球中的每一点都非奇异。为此，我们建立了稳定矩阵自由多项式的一个诺伊维斯–金斯伯格–纽曼不等式版本。

我们将这些技术与实现理论相结合，确立了在边界上具有一致连续性的稳定非交换有理函数的循环性，并重新得到关于非交换单圆行球上矩阵值自由 Hardy 空间中的非交换有理函数循环性的已知结果。最后，我们引入非交换并联和函数：一种在非交换双圆盘上具有压缩性的稳定非交换有理函数，它无法在边界上作一致延拓；并利用增实算子的性质确定其循环性。

1. 引言

考虑复平面中的单位圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$。Neuwirth、Ginsberg 和 Newman [37]注意到，如果一个多项式 $P \in \mathbb{C}[z]$ 的所有零点都在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$中，那么

$$\left|\frac{P(z)}{P(rz)}\right| \leq 2^{\deg(P)} \text{ for all } r < 1 \text{ and } z \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{1.1}$$

事实上，只需对单个因子 $z - \alpha$ with $|\alpha| \geq 1$证明这一点，此时

$$\left|\frac{z-\alpha}{rz-\alpha}\right| = \left|1 + \frac{(1-r)z}{rz-\alpha}\right| \leq 1 + \left|\frac{1-r}{\alpha - rz}\right| \leq 2.$$

接下来，很容易将其推广到关于多个变量的多项式，若这些多项式相对于开单位多圆盘稳定（即不消失）$\mathbb{D}^d$（对于某个 $d \in \mathbb{N}$）。事实上，设 $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 在 $\mathbb{D}^d$ 上稳定，并注意到 $P_w : z \mapsto P(zw_1, \ldots, zw_d)$对每个 $\mathbb{D}$ 都在 $w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{D}^d$上稳定。对每个 1.1，使用（$P_w$，其中 $z = 1$，立即可得

$$\left|\frac{P(w)}{P(rw)}\right| \leq 2^{\deg(P)} \text{ for all } r < 1 \text{ and } w \in \overline{\mathbb{D}^d},$$

其中 $\deg(P)$ 表示 P 的总次数。我们将其称为*Neuwirth–Ginsberg– Newman (NGN)* 不等式。本文为自由非交换变量的多项式矩阵建立一种 NGN 型不等式，并展示其在循环性研究中的应用。

2020 数学主题分类。 主要分类：46L52；次要分类：15A45、32A08、42B30、47A16。关键词和短语。循环向量、稳定多项式、自由 Hardy 空间、非交换有理函数、算子的并联和。JS 感谢太平洋数学科学研究所提供的部分资助。MT 感谢曼尼托巴大学研究生奖学金计划提供的部分资助。

1.1. **交换循环多项式**。 NGN 不等式曾被用于 [37] 研究 $L^p(\mathbb{T})$中膨胀函数系的完备性，其中 $\mathbb{T}:=\partial\mathbb{D}$ 表示单位圆。在*Hardy* 空间中，这一结果给出了稳定多项式的循环性。回顾一下，Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 由所有 $f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^d)$ 中的函数构成，这些函数可表示为关于 d （交换）变量 $z=(z_1,\ldots,z_d)$的幂级数，即:

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}} c_\alpha z^\alpha,$$

使得 $\sum_\alpha |c_\alpha|^2<\infty$，其中每个 $\alpha=(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_d)$ 都是由非负整数组成的 d 元组$\mathbb{Z}_{\geq 0}$，且 $z^\alpha:=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\ldots\ldots z_d^{\alpha_d}$。显然， $H^2(\mathbb{D}^d)$ 关于由幂级数系数给出的l^2 内积构成一个希尔伯特空间。若 $f\in H^2(\mathbb{D}^d)$ 是循环的，则称其为

$$S[f]:=\overline{\mathrm{span}}\{z^\alpha f\ :\ \alpha\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}\}=\overline{\{Pf\ :\ P\in\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]\}}=H^2(\mathbb{D}^d).$$

$H^2(\mathbb{D}^d)$ 也是一个再生核希尔伯特空间，即对每个 $w\in\mathbb{D}^d$，求值映射 $\Lambda_w\colon f\mapsto f(w)$ 是 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 上的有界线性泛函。因此，f 为循环的一个必要条件是 f 在 $\mathbb{D}^d$ 上不为零（事实上，若 $f(w)=0$，则每个 $g\in S[f]$ 都必须满足 $g(w)=0$）。结合 NGN 不等式与关于 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的基本事实可立即得出，多项式 P 是循环的，当且仅当它在 $\mathbb{D}^d$ [37, 上稳定。定理 5] （另见定理 3.4(1)]）。

如何将循环性的概念推广到更为特殊的函数空间，是相当显而易见的。超越 Hardy 空间和单位多圆盘后可以发现，多项式的零点集仍然是决定其循环性的关键。不过，在大多数一般情形下，边界零点也会发挥作用。Mironov 和第一作者最近的一项结果 [36, Corollary 3.2] 表明，在某个开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的解析函数构成的一般拓扑向量空间中，多项式是循环的，当且仅当它相对于最大定义域 $\Omega_{\max}$稳定；该定义域由 $\mathbb{C}$ 中（因此也可能在 Ω 之外）所有能够在整个空间上定义连续求值泛函的点组成。多项式的循环性与其零点集之间类似的相互作用，也出现在其他多种情境中，例如:

(1) [12, 13] 上的 Dirichlet 型空间和各向异性 Dirichlet 型空间 [31]，(2) 加权解析l^p空间，即$l^p_A(w)$ [48],(3) 欧几里得单位球 $\mathbb{B}_d\subset\mathbb{C}^d$ [32, 52]上的 Dirichlet 型空间，(4) $\mathbb{B}_d$ [3]上的 Drury–Arveson 空间和加权 Besov 空间，等等。

尽管在一些具体情形中已取得显著进展，但对于单变量和多变量的一般解析函数空间，循环性的刻画仍然是一个深奥且具有挑战性的开放问题。尽管如此，这仍然是一个前景广阔且富有成果的研究领域 [45]。

1.2. **自由分析**。自由分析或非交换函数理论是对经典交换函数理论的概念性推广，其源头可追溯至 Taylor 在20世纪70年代的工作 [50, 51]。尽管 Taylor 最初关于将泛函演算推广到非交换元组的研究在很大程度上未受到关注，NC 函数理论此后已发展成为一套成功的理论，相关研究覆盖了多个彼此独立的领域 [1, 8, 29], ，并应用于算子理论、系统与控制理论以及自由概率 [9, 25, 42, 53]。

NC n维数。该 d维的非交换（NC）宇宙定义为 s

$$\mathbb{M}^d := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} M_n^d \cong \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{C}^d) \cong \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}^d \otimes M_n,$$

其中， M_n^d由每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $M_n := M_n^1$ 对应的所有 $n\times n$ （复）矩阵的 d 元组组成。我们在每个 M_n^d 上赋予 上确界范数

$$\|X\| := \max_{1\le j\le d} \|X_j\| \text{ for all } X = (X_1, \dots, X_d) \in M_n^d,$$

并利用它在 $\mathbb{M}^d$ 上定义 不交并拓扑： 当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N}$， $\Omega \subseteq \mathbb{M}^d$ 在不交并拓扑下是开集，当且仅当 $\Omega(n) := \Omega \cap M_n^d$ 是开集。尽管下文不会大量用到它，人们也常考虑 一致拓扑 ，它由以下基本开集生成：给定任意 $X \in M_n^d$ 和 $r > 0$，定义 一致 *NC* 球 （中心为 X ，半径为 r）为

$$B_\infty(X, r) := \bigsqcup_{m=1}^{\infty} \{Y \in M_{mn}^d \ : \ \|Y - I_m \otimes X\| < r\}.$$

为了进一步促进各个 层 $\Omega(n)$ 之间的交流，通常会使用 *NC* 集。这里，若 $X, Y \in \Omega \Rightarrow X \oplus Y := \left[\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right] \in \Omega$，则 $\Omega \subset \mathbb{M}^d$ 是 NC 集。给定如上所述的 NC 集 Ω ，若 $F : \Omega \to \mathbb{M}^1$ ，则称其为 *NC* 函数 ，如果

(1) F是分级的： $X \in \Omega(n) \Rightarrow F(X) \in M_n$; *(2)* F保持直和： $X, Y \in \Omega(n) \Rightarrow F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$; *(3)* F保持相似变换： $X \in \Omega(n)$， $S \in GL_n$以及 $S^{-1}XS = (S^{-1}X_1S, \dots, S^{-1}X_dS) \in \Omega(n) \Rightarrow F(S^{-1}XS) = S^{-1}F(X)S$。

自由分析最根本的特征是，对 NC 函数 F 施加一个温和的局部有界性条件，就能保证 F 连续且全纯；也就是说，对于任意 $X \in \Omega(n)$和任意“方向”$H \in M_n^d$， F 在 X 沿方向 H 的方向导数（或 Gâteaux 导数）都存在：

$$\partial_H F(X) := \lim_{t\to 0} \frac{F(X + tH) - F(X)}{t}. \tag{1.2}$$

此外， F 在每一点都有全导数或 Fr´échet 导数 $X \in \Omega$ （参见 [29,第 7]章）。

我们主要关注的定义域是非交换算子（单位）*Ball*，定义如下。设 E $\subseteq$ B(H) 是某个希尔伯特空间 H 上的一个 d 维算子空间，并设 $\{Q_1, \dots, Q_d\}$ 是 E 的一组基。于是我们引入线性算子值多项式 $Q(Z) := \sum_j Q_j Z_j$，它在 $\mathbb{M}^d$ 上按函数方式解释为

$$Q(X) := \sum_{j=1}^{d} Q_j \otimes X_j \text{ for all } X \in \mathbb{M}^d.$$

T与此线性映射 Q 相对应的非交换算子球 $\mathbb{D}_Q$ 定义为

$$\mathbb{D}_Q := \{X \in \mathbb{M}^d \ : \ \|Q(X)\| < 1\},$$

其中，如果 $X \in M_n^d$， $\|Q(\ X)\|$是 $Q(\ X)$ 在 B(H $\otimes \mathbb{C}^n$) 中的算子范数。容易验证，每个 $\mathbb{D}_Q$ 都是一个有界非交换集，同时也是一致开且矩阵凸 [47,命题 2.6]。当 H $\cong \mathbb{C}^l$是有限维时，我们可以将 $Q = (Q_{ij})_{l\times l}$视为仅由非交换变量 d中的线性多项式 $\{Q_{ij}\}$ 构成的矩阵。

例 1.1. 令$\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ 对于某个 $d \in \mathbb{N}$。

(1) *NC* 单位行球 $\mathfrak{B}_d$ 定义为

$$\mathfrak{B}_d := \left\{ X \in \mathbb{M}^d \ : \ \left\| \sum_{j=1}^{d} X_j X_j^* \right\| < 1 \right\}.$$

然而，很容易看出，这对应于线性算子值映射

$$Q(Z) = \begin{bmatrix} Z_1 & \dots & Z_d \end{bmatrix} \cong \sum_{j=1}^{d} E_{1j} Z_j,$$

其中， E_{ij}表示标准矩阵单位。

(2) *NC* 单位多圆盘 $\mathfrak{D}_d$ 定义为

$$\mathfrak{D}_d := \{ X \in \mathbb{M}^d \ : \ \|X\| < 1 \},$$

这显然对应于

$$Q(Z) = \operatorname{diag}(Z_1, \dots, Z_d) \cong \sum_{j=1}^{d} E_{jj} Z_j.$$

NC 函数代数。 给定一个 NC 算子球 $\mathbb{D}_Q$，我们考虑定义在 $\mathbb{D}_Q$上的有界 NC 函数代数，即，

$$H^\infty(\mathbb{D}_Q) := \left\{ F : \mathbb{D}_Q \to \mathbb{M}^1 \ : \ F \text{ is NC and } \|F\|_Q := \sup_{X \in \mathbb{D}_Q} \|F(X)\| < \infty \right\}.$$

这些代数被称为*NCSchur–Agler* 类，它们最主要的应用背景是 NC 插值问题与传递函数实现、同构问题，以及 NC 谱半径公式 [11, 34, 46, 47, 49]。

显然， $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 是一个巴拿赫代数，但它也是一个算子代数：对于每个$k \in \mathbb{N}$，考虑代数 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，它由 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$-函数构成的 $k \times k$ 矩阵组成，并赋予矩阵范数

$$\|(F_{ij})\|_Q^{(k)} := \sup_{X \in \mathbb{D}_Q} \|(F_{ij}(X))\|,$$

并注意到矩阵范数族 $\{\|\cdot\|_Q^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 满足 Blecher–Ruan–Sinclair 公理 [14, 定理 2.3。2]。显然，由 d个自由非交换变量构成的多项式代数 $\mathbb{C}Z$（即自由多项式）包含于 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 中。我们还将考虑代数 $M_k(\mathbb{C}Z)$，它由 $k \times k$ 个自由多项式构成的矩阵组成。于是， $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$中的任意元素都称为矩阵自由多项式。

根据围绕（1.2）的讨论，我们注意到，每个 $F \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 都是一致全纯的，并且在 0 处具有一个 NC 幂级数展开（参见 [29,定理 7。21]）：

$$F(Z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_d^+} c_\alpha Z^\alpha,$$

其中 $\mathbb{F}_d^+$ 是由字母表 A $=\{1、\dots\dots、 d\}$生成的自由幺半群，每个 $\alpha = \alpha_1 \dots\dots \alpha_l$都是 A 中的一个词，每个 $c_\alpha \in \mathbb{C}$ 都是一个标量，而 $Z^\alpha = Z_{\alpha_1} \dots\dots Z_{\alpha_l}$ 是一个*NC* 单项式。此外，该级数在 $r\mathbb{D}_Q$ 上对所有 $r < 1$绝对且一致收敛。4

1.3. 主要结果。 固定 d，$k \in \mathbb{N}$，并令 $\mathbb{D}_Q \subset \mathbb{M}^d$ 为上述非交换算子球。此外，令$GL_k(\mathbb{C}Z)$为所有可逆矩阵自由多项式的集合，即满足 $P^{-1} \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 的 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$。

第 3 节。我们首先探讨将 $M_k(\mathbb{C}Z)$ 中的矩阵自由多项式视为 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的元素时的 NGN 型界。若对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，$\det P(X) \neq 0$，则称 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 是 Q-稳定（或 $\mathbb{D}_Q$-稳定）。对于任意 $r < 1$，我们引入映射$P^{(r)}: X \mapsto P(rX)$，并秉承经典 NGN 不等式的思路，想要了解

$$\|P^{(r)}(X)^{-1}P(X)\| \quad \text{and} \quad \|P(X)P^{(r)}(X)^{-1}\|$$

是否一致有界（在 $r \in (0,1)$和 $X \in \mathbb{D}_Q$上），对于任意给定的 Q-稳定 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$。遗憾的是，即使在非常简单的情形下，这也不成立。例如，我们在例3.5 中证明，对于情形 $d = 1$ 以及 2×2 矩阵多项式 $L(Z) := \left[\begin{smallmatrix} 1-Z & -Z \\ 0 & I-Z \end{smallmatrix}\right]$，上述量无界，而它显然是 $\mathfrak{D}_1$-稳定的。造成这种情况的部分原因是，从某种意义上说，L 并非“不可约”。事实上，我们在注3.6 中指出，L 有一个因式分解

$$L(Z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I-Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Z \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-Z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

然而，我们注意到这些因子中的每一个都满足 NGN 型界。我们的首要观察是，这一思路一般而言也成立，因此我们需要考察矩阵自由多项式的原子分解。为此，我们运用矩阵自由多项式的线性化等工具，以及 Shalit 和 Shamovich 最近提出的与非交换算子球相关的谱半径公式的概念 [49]。这些概念将在第2 节中为初次接触这些内容的读者作简要总结。

沿用 [18, 23]，的记号，回顾一下，对每个 $k \in \mathbb{N}$，$M_k(\mathbb{C}Z)$ 都是半自由理想环（即半自由理想环）。除此之外，半自由理想环的性质确保每个非零因子 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 都可作因式分解 $P = P_1 \dots P_l$，其中每个 P_j 都是一个原子，也就是说，它不是两个 F、$G \notin GL_k(\mathbb{C}Z)$ 的乘积。此外，每个 P_j 在稳定伴随关系意义下都是唯一的（见定义 2.4）。据此，我们的首个主要结果是关于 Q-稳定原子的以下 NGN 型结果。

定理 A。 若 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 是一个 Q-稳定原子，则

$$\sup_{r<1} \left\|\left(P^{(r)}\right)^{-1}P\right\|_Q < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{r<1} \left\|P\left(P^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q < \infty.$$

由原子分解和定理 A 可立即推出推论3.7，其指出，若 P 是 Q-稳定的，且具有原子分解 $P = P_1 \dots P_l$ 则

$$\sup_{r<1} \left\|\left(P_1{}^{(r)}\right)^{-1}P_1\left(P_2{}^{(r)}\right)^{-1}P_2 \dots \left(P_l{}^{(r)}\right)^{-1}P_l\right\|_Q < \infty,$$

$$\sup_{r<1} \left\|P_1\left(P_1{}^{(r)}\right)^{-1}P_2\left(P_2{}^{(r)}\right)^{-1} \dots P_l\left(P_l{}^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q < \infty.$$

当然，人们会想知道这两种情况下的最优界分别是什么。定理A 的证明表明，我们的界取决于与 P 相关的各种量，而不仅仅是它的次数。我们给出若干例子，并展示能够获得合理界的具体情形（见命题3.8 和例3.9）。然而，一般而言，目前尚不清楚是否存在一种经过优化的策略，以达到可能的最佳界（另见第6.1节，其中我们结合*FM*-实现理论来获得 NGN 型界）。

第4节。Shalit 与第一作者近期的一项工作 [47], 证明了 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 具有典范弱-*拓扑。此外，典范前对偶在以下意义下是唯一的：在矩阵点 $X \in \mathbb{D}_Q$ 处的求值均为弱-*连续。利用泛函分析中的基本事实，我们在命题4.2 中证明，这会在每个 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 上诱导出典范弱-*拓扑 $k \in \mathbb{N}$，该拓扑由唯一的前对偶给出（意义同上）。

任取 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，若称 F 为 左/右（弱-*）循环，是指由 F 生成的弱-*闭左/右理想等于 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$。与经典情形一样，我们在引理 4.5 中指出， F 是左/右循环的充要条件是“常数”NC 函数 I 属于其左/右弱-*闭理想。由此可得循环性的一个简单必要条件：若 F 是左/右循环的，则 F 是 Q-稳定的。利用定理 A ，我们在第 4 节得到主要结果，证明当 F 是矩阵自由多项式时，上述逆命题成立。

定理 B. $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中是左/右循环的，当且仅当 P 是 Q-稳定的。

第 5 节。根据 [24],，回顾一下，NC 有理函数 $\mathfrak{r} \in \mathbb{C}\langle Z\rangle$ 是自由非交换变量 $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$中的 NC 有理表达式的一个等价类，其定义域（记为 $\operatorname{dom}\mathfrak{r}$）是这些 NC 有理表达式各自定义域的并集。在第 5 节中，我们利用描述符实现 理论，将上述定理推广到 *NC* 有理函数 的某些矩阵在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$中。

定理 C. 令 $\mathfrak{r} \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 为一个非交换有理函数矩阵，并令 $s\mathbb{D}_Q \subset \operatorname{dom}\mathfrak{r}$ for some $s > 1$. 那么， $\mathfrak{r}$ 在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中左 / 右循环，当且仅当 $\mathfrak{r}$ 是 Q- 稳定的。

在推论 5.2 中，我们利用众所周知的 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 与自由 Hardy 空间$\mathbb{H}^2_d$ 的乘子代数的同一性（见 [44, 定理 3.1]），从而重新得到 $\mathbb{H}^2_d$ 中循环非交换有理函数的一个已知的完整刻画。事实上，根据 [28, 定理 A 和 C] ，我们知道 $\mathfrak{r} \in \mathbb{H}^2_d$ 当且仅当存在 $s > 1$ 使得 $s\mathfrak{B}_d \subset \operatorname{dom}\mathfrak{r}$，并且 $\mathfrak{r}$ 在$\mathbb{H}^2_d$ 中循环，当且仅当 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{B}_d$-稳定的。Arora、Augat、Jury 和 Sargent [7] 以及 Arora [6] 的近期工作运用最优多项式逼近（OPAs）理论中的技巧，为同一事实提供了不同的证明。同样，我们的定理 B 和 C 提供了另一种方法，以确立 $\mathbb{H}^2_d$ 中稳定非交换有理函数的循环性。我们注意到，这是可行的，因为 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 上的弱算子拓扑与上述弱-*拓扑一致 [19], ；然而，对于一般的 $\mathbb{D}_Q$，尚不知是否存在这样的表示（例如， [46, 定理 2.4] 展示了当 $\mathbb{D}_Q = \mathfrak{D}_d$时所面临的一些挑战）。

最后，在第5.1节中，我们介绍非交换并联和函数

$$\mathfrak{P}(Z,W) := (I-Z)(2I-Z-W)^{-1}(I-W) = \left((I-Z)^{-1}+(I-W)^{-1}\right)^{-1} = (I-W)(2I-Z-W)^{-1}(I-Z),$$

其灵感来自 Anderson 和 Duffin [4] 引入的半正定矩阵并联和运算。在推论 5.6 中，我们证明 $\mathfrak{P}$ 是一个 $\mathfrak{D}_2$-稳定的压缩 NC 映射，它 (i) 在 $(I, I) \in \mathfrak{D}_2$ 处有一个奇点，并且 (ii) 是增生的，即对于所有 $(Z, W) \in \mathfrak{D}_2$， $\operatorname{Re}\mathfrak{P}(Z, W) \succeq 0$。在推论 5.5 中，我们证明任意增生 NC 函数 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 总是左/右循环的。特别地， $\mathfrak{P}$ 的循环性源于其增生性，而非定理 C，甚至也非直接应用我们的自由 NGN 型界（见注 5.7）。

2.1. **对应于算子空间的谱半径**。给定任意算子空间 E，我们考虑 E 上所有方阵构成的单位球，即，

$$\mathbb{B}_{\mathcal{E}} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in M_n(\mathcal{E}) \ : \ \|X\|_n < 1\},$$

其中 $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构成了 E 上一族相容的矩阵范数。下文中，设 E $\subseteq$B(H) 是某个希尔伯特空间 H 上的具体算子空间，并假设 dim E $= d \in \mathbb{N}$。我们还为 E 固定一组基 $\{Q_1, \ldots, Q_d\}$，并引入线性算子值多项式$Q(Z) := \sum_j Q_j Z_j$。相应的非交换算子球 $\mathbb{D}_Q$由此为 $\mathbb{B}_{\mathcal{E}}$ 提供坐标表示:

$$\mathbb{D}_Q(n) \ni X \ \leftrightarrow \ Q(X) \in M_n(\mathcal{E})$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。容易验证， $\mathbb{D}_Q$ 在不交并拓扑下的闭包为

$$\overline{\mathbb{D}_Q} := \{X \in \mathbb{M}^d \ : \ \|Q(X)\| \leq 1\}.$$

根据 [4 9，注 3。6],我们还将 极对偶$\mathbb{D}_Q^\circ$ 定义为 $\mathbb{D}_Q$ 这一 NC集合

$$\mathbb{D}_Q^\circ := \left\{ Y \in \mathbb{M}^d \ : \ \left\| \sum_{j=1}^d Y_j \otimes X_j \right\| < 1 \ \text{ for all } \ X \in \mathbb{D}_Q \right\}.$$

容易验证， $\mathbb{D}_Q^\circ$ 对应于 $\mathbb{B}_{\mathcal{E}^*}$，即它是由对偶算子空间 E* 给出的非交换算子球（如 [41, 第 2 节 3] 所述），并且对于某个线性算子值多项式 $Q^\circ(W) := \sum_j Q_j^\circ Z_j$， $\mathbb{D}_Q^\circ$ 等于 $\mathbb{D}_{Q^\circ}$。此外，我们有

$$\left\| \sum_{j=1}^d Y_j \otimes X_j \right\| \leq \|Y\|_{Q^\circ} \|X\|_Q \text{ for all } Y \in \mathbb{D}_Q^\circ, \ X \in \mathbb{D}_Q. \tag{2.1}$$

最后，注意到$Y \in \mathbb{D}_Q^\circ$当且仅当

$$\left\| \sum_{j=1}^d Y_j \otimes X_j \right\| \leq 1 \ \text{ for all } \ X \in \mathbb{D}_Q. \tag{2.2}$$

Shalit 和 Shamovich [49] 最近引入了与上述有限维算子空间 E $\subseteq$ B(H) 相对应的谱半径概念。接下来，我们会频繁用到他们的一些主要观察结果。为方便读者，本小节将陈述这些事实。请注意，定义相关的技术细节并非理解本文其余讨论所必需。尽管如此，我们还是建议感兴趣的读者参阅 [41, 第 1 节5]或 [40, 第17] 章，了解关于极小/空间张量积和 Haagerup 张量积的背景知识。

定义 2.1. Q-谱半径 的 $T = (T_1, \ldots, T_d) \in$ B(K)^d 定义为

$$\rho_Q(T) := \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{|w|=n} T^w \otimes_{\min} Q_{w_1} \otimes_h Q_{w_2} \otimes_h \cdots \otimes_h Q_{w_n} \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

其中，K 是某个希尔伯特空间，$\otimes_{\min}$ 和 $\otimes_h$ 分别是最小张量积和 Haagerup 张量积，求和遍及所有长度为 n 的词 $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathbb{F}_d^+$，范数取在算子空间内

$$\mathscr{B}(\mathcal{K}) \otimes_{\min} (\underbrace{\mathcal{E} \otimes_h \cdots \otimes_h \mathcal{E}}_{n \text{ times}}).$$

如 [49, 例 2.10], 所述，对应于 $\mathbb{D}_Q = \mathfrak{B}_d$ 的谱半径可简写为

$$\rho_{\mathfrak{B}_d}(T) = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{|w|=n} T^w (T^w)^* \right\|^{\frac{1}{2n}},$$

这与 Bunce 引入并由 Popescu 后续研究的算子组的联合谱半径概念一致 [16]，[43]。

以下事实与我们的讨论相关。回顾一下，$A = (A_1, \dots, A_d) \in M_k^d$称为不可约，若 $\{A_1, \dots, A_d\}$ 生成 M_k 作为一个 $\mathbb{C}$- 代数（等价地，A_j 没有共同的非平凡不变子空间）。

定理 2.2 (推论 2.12, [49])。对于任意 $A \in M_n^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，以下结论成立：
(1) $\rho_Q(A) < 1$ 当且仅当存在 $S \in GL_n$ 使得 $S^{-1}AS \in \mathbb{D}_Q$。*(2)* 若 A 不可约且 $\rho_Q(A) = 1$，则存在 $S \in GL_n$ 使得 $S^{-1}AS \in \mathbb{D}_Q$。

谱半径也被证明与线性铅笔密切相关。这里，对于如上所述的给定 $A \in M_n^d$，我们将（首一）线性铅笔 L_A 定义为仿射映射

$$L_A(X) := I - \sum_{j=1}^{d} A_j \otimes X_j \text{ for all } X \in \mathbb{M}^d,$$

及其可逆定义域是 NC集合

$$\operatorname{dom}(L_A^{-1}) := \left\{ X \in \mathbb{M}^d \ : \ \det\left(I - \sum_{j=1}^{d} A_j \otimes X_j \right) \neq 0 \right\}.$$

定理 2.3 (定理 3.4, [49])。设 $A \in M_n^d$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$，并考虑一个 *NC* 算子球 $\mathbb{D}_Q$ 及其极对偶 $\mathbb{D}_Q^\circ$。那么，我们有

$$\rho_{Q^\circ}(A) \le \frac{1}{r} \iff r\mathbb{D}_Q \subset \operatorname{dom}(L_A^{-1}).$$

特别地，$\rho_{Q^\circ}(A) < 1$ 当且仅当 L_A^{-1}在 $\mathbb{D}_Q$ 的边界上具有一致延拓。

我们称线性铅笔 L_A 是不可约的，如果元组 A 是不可约的。本质上，不可约线性铅笔所起的作用，类似于经典情形中的不可约多项式。我们将在下一小节对此进行探讨。

2.2. **稳定伴随关系与线性化**。回顾引言中的内容，环 $M_k(\mathbb{C}Z)$ 由所有矩阵组成，其中每个 $k \in \mathbb{N}$ 对应的矩阵的元素均属于 $\mathbb{C}Z$。还记得，$GL_k(\mathbb{C}Z)$ 表示所有可逆矩阵自由多项式 F 的环，使得 $F^{-1} \in M_k(\mathbb{C}Z)$。我们称 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 关于 $\Omega \subseteq \mathbb{M}^d$ 是稳定的，如果对所有 $X \in \Omega$，$\det P(X) \neq 0$。如果像之前那样，存在某个 Q 使得 $\Omega = \mathbb{D}_Q$，那么我们称 P 是 Q-稳定的。

定义 2.4。给定任意两个 $P_j \in M_{k_j}(\mathbb{C}Z)$，若存在 $l_j \in \mathbb{N}$ 满足 $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$，以及 F，$G \in GL_{k_1+l_1}(\mathbb{C}Z)$，使得 P_1 和 P_2 满足

$$\begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{l_2} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_{l_1} \end{bmatrix} G.$$

在这种情况下，我们用 $P_1 \sim P_2$ 表示稳定伴随关系，并注意到“~”是 $\mathbb{C}Z$ 上非零因子（方）矩阵之间的等价关系。

固定一个非交换算子球 $\mathbb{D}_Q$，并假设 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 是 Q-稳定的。因此，特别地，P 不是 $M_k(\mathbb{C}Z)$ 中的零因子。Cohn 的一个结果（参见 [18，命题 3.2.9]）保证 P 存在因式分解 $P = P_1 \dots P_l$，其中每个 P_j 都是 $M_k(\mathbb{C}Z)$ 中的一个原子，即它不能表示为 F，$G \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 中两个不可逆元素的乘积。此外，每个 P_j 在稳定伴随关系下唯一确定，且它也是 Q-稳定的。为了确定一个 Q-稳定自由多项式矩阵 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 的循环性，只需考察其每个原子因子 P_j 的等价类，因此不失一般性，我们假设对每个 j，$P_j(0) = I$。关于原子，我们只需要以下来自 [23] 的结果。

引理 2.5 (引理 4.2, [23])。若 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z \rangle)$ 满足 $P(0) = I$，则 $P \sim L_A$ 对于某个线性铅笔 L_A成立。此外，P 是一个原子，当且仅当 $P \sim L_B$ 对于某个不可约 L_B成立。

该引理的证明巧妙地运用了*Higman* 线性化技巧（见 [26, 定理 15]），其内容是：对于任意三个尺寸相容的矩阵 Y_0、Y_1、Y_2，有以下恒等式：

$$\begin{bmatrix} I & -Y_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 - Y_1 Y_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -Y_2 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 & -Y_1 \\ -Y_2 & I \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

下面通过一个简单的例子来说明如何实现线性化。

例 2.6。令 $P(Z,W) = I - \frac{ZW}{2} - \frac{WZ}{2} \in \mathbb{C}\langle Z, W \rangle$。首先，取 $Y_0 = I - \frac{ZW}{2}$、$Y_1 = \frac{W}{\sqrt{2}}$、$Y_2 = \frac{Z}{\sqrt{2}}$ 并将它们代入（2.3），得到

$$\begin{bmatrix} I & \frac{-W}{\sqrt{2}} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(Z,W) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \frac{ZW}{2} & \frac{-W}{\sqrt{2}} \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I \end{bmatrix}.$$

然后，取 $Y_0 = \begin{bmatrix} I & \frac{-W}{\sqrt{2}} \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I \end{bmatrix}$，$Y_1 = \begin{bmatrix} \frac{Z}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$Y_2 = \begin{bmatrix} \frac{W}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 并将它们代入（2.3）得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \frac{-Z}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - \frac{ZW}{2} & \frac{-W}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{-W}{\sqrt{2}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\frac{W}{\sqrt{2}} & -\frac{Z}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{Z}{\sqrt{2}} & I & 0 & 0 \\ -\frac{W}{\sqrt{2}} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

注意，最后一行和最后一列是冗余的，因此还可以进一步简化。随后，显然可以将上述两个恒等式结合起来，完成线性化过程：

$$\begin{bmatrix} P(Z,W) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \frac{W}{\sqrt{2}} & \frac{Z}{\sqrt{2}} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{=:F} \underbrace{\begin{bmatrix} I & \frac{-W}{\sqrt{2}} & \frac{-Z}{\sqrt{2}} \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I & 0 \\ \frac{-W}{\sqrt{2}} & 0 & I \end{bmatrix}}_{=:L_A} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{Z}{\sqrt{2}} & I & 0 \\ \frac{W}{\sqrt{2}} & 0 & I \end{bmatrix}}_{=:G}. \tag{2.4}$$

最后，注意到 L_A 对应于

$$A = \left(A_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_W = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \in M_3^2,$$

可以很容易验证其是不可约的，因为

$$2\sqrt{2}A_Z A_W^2 = E_{12};\ 2\sqrt{2}A_Z^2 A_W = E_{21};\ 2A_Z^2 = E_{23};\ 2A_W^2 = E_{32}.$$

其余所有的 E_{ij} 都可以利用上述结果得到。因此， P是一个原子。

注 2.7。 在上述例子中， F， $G \in GL_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$具有如下形式： $F = I + J_F$以及 $G = I + J_G$，其中 J_F 和 J_G 分别是严格上三角矩阵和严格下三角矩阵。因此， J_F和 J_G 是幂零的，所以在这种情况下，计算 F^{-1} 和 G^{-1} 很容易；这对于下一节的分析是必要的。不过，这只是每一步应用（2.3）而已，但值得指出的是，原子的线性化未必总是一个不可约铅笔 L_A。我们只是恰好在 $P(Z, W) = 1 - \frac{ZW}{2} - \frac{WZ}{2}$的情形中直接得到了一个不可约铅笔。 — —

如 [23, 引理 4 的证明2], 所述，一般而言，必须使用伯恩赛德定理 [15, 推论 523] 并证明 L_A 与某个线性铅笔相似

$$L_B(Z) := \begin{bmatrix} L_1(Z) & * & \dots & * \\ 0 & L_2(Z) & \dots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & L_l(Z) \end{bmatrix}$$

对于某个 $l \in \mathbb{N}$，其中每个线性铅笔 L_j 要么是 I，要么是不可约的，然后证明$L_j = I$ 对于所有 j，除恰好一个 $1 \le j_0 \le l$。因此，在证明给定原子 P 与 L_{j_0}稳定伴随的过程中，会失去单三角结构 F 以及 G。不过，在下一节中，考察能够仅通过希格曼技巧（2.3）获得这种线性化的特殊情形，仍然很有意义。

定义 2.8。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathbb{U}_k(\mathbb{C}Z)$ 定义为所有上单三角矩阵自由多项式的集合，即，当且仅当 $F = I + J_F$ 对某个严格上三角矩阵 J_F 成立时， $F \in \mathbb{U}_k(\mathbb{C}Z)$。类似地，将 $\mathbb{L}_k(\mathbb{C}Z)$ 定义为所有下单三角矩阵自由多项式的集合。

给定两个矩阵自由多项式 $P_j \in M_{k_j}(\mathbb{C}Z)$，若存在 $l_j \in \mathbb{N}$，使得 $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$，且 $F \in \mathbb{U}_{k_1+l_1}(\mathbb{C}Z)$ 和 $G \in \mathbb{L}_{k_1+l_1}(\mathbb{C}Z)$，我们记作 $P_1 \sim_{\mathbb{UL}} P_2$。

$$\begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{l_2} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_{l_1} \end{bmatrix} G.$$

固定一个线性算子值多项式 Q，令 $\mathbb{D}_Q$ 为相应的非交换算子球，其极对偶为 $\mathbb{D}_Q^\circ$。对于任意 $F \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 和 $r < 1$，定义

$$F^{(r)}(X) := F(rX) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

显然，$F^{(r)} \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 其中 $\|F^{(r)}\|_Q \le \|F\|_Q$ 对每个 $r < 1$ 均成立。如 [46, 命题 3.5] 中所述，F 给出了一个齐次展开 $F = \sum_{j\ge 0} F_j$，其中每个 $F_j \in \mathbb{C}\langle Z\rangle$ 满足

$$F_j(rX) = r^j F_j(X) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q,\ r < 1.$$

此外，已有记录表明，对于每个 $j \ge 0$，映射 $F \mapsto F_j$ 是完全压缩的。这一观察的一个直接推论是矩阵自由多项式的以下基本性质。在本节中，我们将把矩阵自由多项式环 $M_k(\mathbb{C}Z)$ 视为 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的子集。

引理 3.1。 固定 $k \in \mathbb{N}$，并设 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 由齐次展开 $P = \sum_{j=0}^N P_j$ 给出，其中某个 $N \ge 0$。则有

$$\sup_{r<1} \frac{\|P - P^{(r)}\|_Q}{1-r} \le \sum_{j=1}^N j\|P_j\|_Q.$$

注 3.2. 正如引理陈述之前所指出的，我们由 [46, 命题 3.5] 可知，对于每个 $0 \le j \le N$，都有 $\|P_j\|_Q \le \|P\|_Q$。因此，

$$\sum_{j=1}^N j\|P_j\|_Q \le \frac{N(N+1)}{2}\|P\|_Q.$$

虽然右端看起来更便于追踪，但在实际应用中，左端的界要紧得多。**证明**。 直接计算可得

$$\frac{P(Z) - P(rZ)}{1-r} = \sum_{j=1}^N \frac{1-r^j}{1-r} P_j(Z).$$

因此，我们很容易计算得出

$$\sup_{r<1} \frac{\|P - P^{(r)}\|_Q}{1-r} \le \sum_{j=1}^N \sup_{r<1} \frac{1-r^j}{1-r}\|P_j\|_Q \le \sum_{j=1}^N j\|P_j\|_Q. \qquad \blacksquare$$

我们利用前一个引理，得到 NGN 不等式在某些 $\mathbb{D}_Q$ 上的矩阵自由多项式情形的推广。

引理 3.3. 设 $P = FL_A \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 属于某个 $A \in \mathbb{D}_Q^\circ(\overline{k})$，且 $F \in GL_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 具有齐次展开 $F = \sum_{j=0}^N F_j$。那么，

$$\sup_{r<1} \left\|\left(P^{(r)}\right)^{-1} P\right\|_Q \le 1 + \left[(N^2+N+1)\|F^{-1}\|_Q\|F\|_Q\right], \tag{3.1}$$

$$\sup_{r<1} \left\|P\left(P^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q \le 2\|F^{-1}\|_Q\|F\|_Q. \tag{3.2}$$

特别地，如果 $P = L_A$（即 $F = I$），那么上述两个常数都变为 2。

备注 3.4. 从下面的证明可以看出，对于 $P = L_A F$ 的情况也能得到类似的界。事实上，在这种情况下，左逆和右逆的界将互换。

证明。 令 $r < 1$和 $X \in \mathbb{D}_Q$为任意选取的元素，并定义 $A \otimes X := \sum_{j=1}^{d} A_j \otimes X_j$。由 (2.1) 可直接得到 $\|r(A \otimes X)\| < 1$，由此可知 $L_A(rX)$是可逆的。事实上，我们可以将 $L_A(rX)^{-1}$表示为诺伊曼级数：

$$L_A(rX)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A \otimes X)^n,$$

因此

$$\|L_A(rX)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \tag{3.3}$$

注意到

$$P(rX)^{-1}P(X) = I + P(rX)^{-1}(P(X) - P(rX)), \tag{3.4}$$

and

$$P(X) - P(rX) = F(X) - F(rX) + (rF(rX) - F(X))(A \otimes X).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|P(X) - P(rX)\| &\le \|F(X) - F(rX)\| + \|F(X) - rF(rX)\| \\ &= \|F(X) - F(rX)\| + \|F(X) - F(rX) + (1-r)F(rX)\| \\ &\le 2\|F(X) - F(rX)\| + (1-r)\|F(rX)\|.\end{aligned}$$

结合 (3.3)、(3.4) 以及引理 3.1 （和注 3.2）中的界，我们有

$$\begin{aligned}\|P(rX)^{-1}P(X)\| &\le 1 + \|F(rX)^{-1}\| \left(\frac{2\|F(X) - F(rX)\|}{1-r} + \|F(rX)\| \right) \\ &\le 1 + \left[(N^2 + N + 1)\|F^{-1}\|_Q \|F\|_Q \right].\end{aligned}$$

由于 $r < 1$ 和 $X \in \mathbb{D}_Q$ 是任意选取的，(3.1) 由上述界立即得出。接下来只需证明 (3.2) 成立。为此，注意到

$$\begin{aligned}\|P(X)P(rX)^{-1}\| &= \|F(X)L_A(X)L_A(rX)^{-1}F(rX)^{-1}\| \\ &\le \|L_A(X)L_A(rX)^{-1}\| \|F^{-1}\|_Q \|F\|_Q.\end{aligned}$$

由于 $L_A(X)$显然与 $L_A(rX)^{-1}$，我们可以利用 (3.1) 中的界来说明，对于情形$F = I$，有

$$\|L_A(X)L_A(rX)^{-1}\| = \|L_A(rX)^{-1}L_A(X)\| \le 2.$$

由此立即得到 (3.2，证明完毕。 ∎

回顾定理 2.3 可知，$L_A(X)^{-1}$对每个 $X \in \mathbb{D}_Q$只要$\rho_{Q^\circ}(A) \le 1$就有定义。下面的例子表明，引理 3.3 不一定对所有满足A的 $\rho_{Q^\circ}(A) \le 1$成立。

例 3.5。 考虑由 $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 给出的单变量线性铅笔，即

$$L_A(Z) = \begin{bmatrix} I - Z & -Z \\ 0 & I - Z \end{bmatrix}.$$

显然， $\rho(A) = 1$ 因此 $L_A(Z)$ 在非交换单位圆盘 $\mathfrak{D}_1$ (利用定理 2.3) 上可逆。于是可以直接计算出，对于每个 $r < 1$ 以及 $X \in \mathfrak{D}_1$ ，有

$$\begin{aligned} L_A(rX)^{-1} L_A(X) &= \begin{bmatrix} (I - rX)^{-1} & rX(I - rX)^{-2} \\ 0 & (I - rX)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - X & -X \\ 0 & I - X \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - rX)^{-1}(I - X) & (r-1)X(I - rX)^{-2} \\ 0 & (I - rX)^{-1}(I - X) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注意，上述矩阵的右上角元素在所有 $r < 1$ 和 $X \in \mathfrak{D}_1$ 构成的集合上无界。为此，令 $X = r$ 并设 $r \to 1$。因此，这种情况下，（3.1）不成立；又由于 $L_A(rX)^{-1}$ 与 $L_A(X)$ 可交换，（3.2）也不成立。

现在我们已做好充分准备来证明定理 A。

定理 A 的证明。 首先，注意到

$$\begin{aligned} PP(0)^{-1}(P^{(r)}P(0)^{-1})^{-1} &= P(P^{(r)})^{-1}, \\ (P(0)^{-1}P^{(r)})^{-1}P(0)^{-1}P &= (P^{(r)})^{-1}P. \end{aligned}$$

因此，不失一般性，我们假设 $P(0) = I$；如有必要，可将 P 替换为 $PP(0)^{-1}$（分别将 P 替换为 $^{-1}P(0)$）。

由引理 2.5，我们知道 $P \sim L_A$ 对于某个不可约线性铅笔 L_A。此外，利用 P 是 Q-稳定的这一事实，可以直接验证 L_A 同样是 Q-稳定的。特别地，对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$， $L_A(X)^{-1}$ 存在，由此通过定理 2.3 可得 $\rho_{Q^\circ}(A) \leq 1$。接下来，由于 A 是不可约的，定理 2.2 表明 A 与某个 $B \in \mathbb{D}_Q^\circ$ 联合相似。因此， $P \sim L_B$，这意味着存在 $l \in \mathbb{N}$ 和 $F, G \in GL_l(\mathbb{C}Z)$ 使得

$$\begin{bmatrix} P(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = F(X) \underbrace{\begin{bmatrix} L_B(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{=: L_{\widetilde{B}}(X)} G(X) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

注意，上述方程中的每个矩阵都是可逆的。因此，

$$\begin{bmatrix} P(X)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = G(X)^{-1} L_{\widetilde{B}}(X)^{-1} F(X)^{-1} \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

由此，我们观察到

$$\begin{bmatrix} P(rX)^{-1}P(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = G(rX)^{-1} \underbrace{\big(F(rX)L_{\widetilde{B}}(rX)\big)^{-1} F(X) L_{\widetilde{B}}(X)}_{=: (P_1^{(r)})^{-1}P_1} G(X),$$

and

$$\begin{bmatrix} P(X)P(rX)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = F(X) \underbrace{L_{\widetilde{B}}(X)G(X)\big(L_{\widetilde{B}}(rX)G(rX)\big)^{-1}}_{=: P_2(P_2^{(r)})^{-1}} F(rX)^{-1},$$

对所有 $r<1$ 和 $X \in \mathbb{D}_Q$。若 $F=\sum_{j=0}^{N} F_j$ 和 $G=\sum_{j=0}^{M} G_j$ 是齐次展开~，分别对应于 F 和 G，那么由于 $B \in \mathbb{D}_Q^\circ$ 我们可以对 3.3 应用引理 P_1，并将备注 3.4中的观察应用于 P_2，从而得出

$$\begin{aligned}\sup_{r<1}\left\|\left(P^{(r)}\right)^{-1}P\right\|_Q &\leq \left[1+\left[(N^2+N+1)\|F^{-1}\|_Q\|F\|_Q\right]\right]\|G^{-1}\|_Q\|G\|_Q<\infty,\\ \sup_{r<1}\left\|P\left(P^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q &\leq \left[1+\left[(M^2+M+1)\|G^{-1}\|_Q\|G\|_Q\right]\right]\|F^{-1}\|_Q\|F\|_Q<\infty.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由此完成证明。 ∎

备注 3.6. 一般而言，定理 A 若 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 不是原子，则不成立。事实上，考虑例 $L_A(Z) \in M_2(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$中引入的线性铅笔 3.5。如前所述，定理 A中的不等式对 $L_A(Z)$不成立。此外，它不是原子：

$$L_A(Z)=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & I-Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -Z\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I-Z & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

这里请注意，$\left[\begin{smallmatrix} I & 0\\ 0 & I-Z\end{smallmatrix}\right]$ 和 $\left[\begin{smallmatrix} I-Z & 0\\ 0 & I\end{smallmatrix}\right]$ 都是原子，因为它们与不可约铅笔 $I-Z$稳定伴随，且 $\left[\begin{smallmatrix} I & -Z\\ 0 & I\end{smallmatrix}\right] \in GL_2(\mathbb{C}Z)$。因此，我们不得不将一般 Q-稳定自由多项式矩阵的 NGN 不等式解释如下。

推论 3.7. 若 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 是 Q-稳定的，且其原子分解为 $P=P_1P_2\dots P_l$，则

$$\begin{aligned}\sup_{r<1}\left\|\left(P_1{}^{(r)}\right)^{-1}P_1\left(P_2{}^{(r)}\right)^{-1}P_2\dots\left(P_l{}^{(r)}\right)^{-1}P_l\right\|_Q<\infty,\\ \sup_{r<1}\left\|P_1\left(P_1{}^{(r)}\right)^{-1}P_2\left(P_2{}^{(r)}\right)^{-1}\dots P_l\left(P_l{}^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q<\infty.\end{aligned}$$

3.1. 界的进一步分析。在某些情况下，可以得到比定理 A 的证明中所得界更具体的界。设 $P \in \mathbb{C}Z$ 是一个 Q- 稳定原子，其齐次展开为 $P=\sum_{j=0}^{N} P_j$，并假设 $P \sim_{\mathbb{UL}} L_A$ 对某个不可约线性铅笔 $L_A \in M_n(\mathbb{C}Z)$ 成立。正如例 2.6 所示，只需将希格曼技巧 (2.3) 应用于 P，有时便会自然出现这种情况。显然，L_A 也是 Q-稳定的。因此，对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，$L_A(X)^{-1}$ 都存在，故由定理 2.3 可得 $\rho_{Q^\circ}(A) \leq 1$。于是，根据定理 2.2，A 经由适当大小的相似变换 S，与某个元素 $B \in \mathbb{D}_{Q^\circ}$ 联合相似。在这些假设下，我们可以如下改进定理 A 中的界。回顾一下，S 的条件数定义为量 $\kappa(S):=\|S^{-1}\|\|S\|$。

命题 3.8。 若 $P \in \mathbb{C}\langle Z\rangle$、$L_A$、$S$ 和 B 如上所述，则

$$\begin{aligned}\sup_{r<1}\left\|P\left(P^{(r)}\right)^{-1}\right\|_Q &\leq 1+\kappa(S)\sum_{j=1}^{N} j\|P_j\|_Q,\\ \sup_{r<1}\left\|\left(P^{(r)}\right)^{-1}P\right\|_Q &\leq 1+\kappa(S)\sum_{j=1}^{N} j\|P_j\|_Q.\end{aligned}$$

Pr证明。 由于 $P \sim_{\mathbb{UL}} L_A$，存在 $F \in \mathbb{U}_l(\mathbb{C}Z)$ 和 $G \in \mathbb{L}_l(\mathbb{C}Z)$，使得 t

$$\begin{bmatrix} P(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = F(X) \underbrace{\begin{bmatrix} L_A(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{=: L_{\tilde{A}}(X)} G(X) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

特别地，由于上述等式中的每个矩阵都是可逆的，我们得到

$$\begin{bmatrix} P(X)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = G(X)^{-1} L_{\tilde{A}}(X)^{-1} F(X)^{-1} \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q. \tag{3.6}$$

注意，$F^{-1} \in \mathbb{U}_l(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$和 $G^{-1} \in \mathbb{L}_l(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$。因此，式（3.6）表明，$P^{-1}$等于(1,1) 项，即 L_A^{-1}的

$$\|P^{-1}(X)\| \le \left\|L_A^{-1}(X)\right\| \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

接下来，注意到

$$\left\|L_A^{-1}(X)\right\| \le \kappa(S)\left\|L_B^{-1}(X)\right\| \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

此外，$\|B\|_{Q^\circ} \le 1$因此，对于每个 $X \in \mathbb{D}_Q$和 $r < 1$，我们可以将 $L_B(rX)^{-1}$展开为诺伊曼级数，并重复引理3.3的证明，得到 $\|L_B(rX)^{-1}\| \le \frac{1}{1-r}$对所有$X \in \mathbb{D}_Q$均成立。将这些不等式合并起来可得

$$\|(P^{(r)})^{-1}\|_Q \le \frac{\kappa(S)}{1-r} \text{ for all } r < 1. \tag{3.7}$$

回忆恒等式

$$(P^{(r)})^{-1} P = I + (P^{(r)})^{-1}(P - P^{(r)}).$$

然后，我们可以应用式（3.7）和引理3.1 估计右侧的范数，从而得到 $\sup_{r<1} \left\|(P^{(r)})^{-1} P\right\|_Q$ 的所需上界。

第二个不等式可以通过类似的论证得到。 ∎

例 3.9。 让我们计算定理A和命题3.8中的一些具体界 .

(1) 令 $P(Z,W) = I - \frac{ZW}{2} - \frac{WZ}{2}$如例 2.6中所述，并注意到 P是 $\mathfrak{D}_2$-稳定的。我们观察到 P 是一个呈现线性化的原子

$$\begin{bmatrix} P(Z,W) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \frac{W}{\sqrt{2}} & \frac{Z}{\sqrt{2}} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{=: F} \underbrace{\begin{bmatrix} I & \frac{-W}{\sqrt{2}} & \frac{-Z}{\sqrt{2}} \\ \frac{-Z}{\sqrt{2}} & I & 0 \\ \frac{-W}{\sqrt{2}} & 0 & I \end{bmatrix}}_{=: L_A} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{Z}{\sqrt{2}} & I & 0 \\ \frac{W}{\sqrt{2}} & 0 & I \end{bmatrix}}_{=: G}.$$

注意，$A = (A_Z, A_W)$ 满足

$$\|A_Z \otimes X + A_W \otimes Y\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & \frac{Y}{\sqrt{2}} & \frac{X}{\sqrt{2}} \\ \frac{X}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{Y}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\| \le 1 \text{ for all } (X,Y) \in \mathfrak{D}_2.$$

于是，（2.2）表明 $A \in \mathfrak{D}_2^\circ$，因此我们可以直接计算（3.5）和命题3.8 中的界，而无需寻找 A与某个 $B \in \mathfrak{D}_2^\circ$ 的相似等价。

由于 F、G 都具有 $I+J$ 的形式，且满足 $J^2=0$，我们使用如下估计

$$\max\{\|I+J\|,\|I-J\|\}\le 1+\|J\|$$

从而得出

$$\|F\|_{\mathfrak{D}_2}=\|F^{-1}\|_{\mathfrak{D}_2}\le 1+\left\|\begin{bmatrix}\frac{W}{\sqrt{2}} & \frac{Z}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{D}_2}=2,$$

$$\|G\|_{\mathfrak{D}_2}=\|G^{-1}\|_{\mathfrak{D}_2}\le 1+\left\|\begin{bmatrix}\frac{Z}{\sqrt{2}} & \frac{W}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{D}_2}=2.$$

将这些值代入（3.5），可得两个量的上界 ≤ 52。如果改为注意到 $\|P_2\|_{\mathfrak{D}_2}=1$ 并应用命题 3.8，则可得上界 ≤ 3。

然而，在这个特定情形下，还有一种简单得多的方法，可以通过注意到 $\widetilde{P}$ 而得到更好的上界 P 具有 $I-P$ 的形式，其中 $P(Z,W)$ 对每个 $Z,W\in\mathfrak{D}_2$ 都是严格压缩映射。因此，可以计算 $\left(P^{(r)}\right)^{-1}=\left(I-\widetilde{P}^{(r)}\right)^{-1}$ 的诺伊曼级数，并仿照引理 3.3 的证明（在 $F=I$ 的情形下）来证明

$$\sup_{r<1}\left\|\left(P^{(r)}\right)^{-1}P\right\|_{\mathfrak{D}_2}\le 2\quad\text{and}\quad\sup_{r<1}\left\|P\left(P^{(r)}\right)^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_2}\le 2.$$

事实上，注意到以下不等式实际上都是等式：

$$\left\|(P^{(0)})^{-1}P\right\|_{\mathfrak{D}_2}=\left\|P(P^{(0)})^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_2}=\|P\|_{\mathfrak{D}_2}=2$$

下一个例子表明，即使在 $k=1$ 的情形下，这种情况也不一定总会出现。

(2) 考虑 $P(Z,W)=I-\frac{2Z}{3}-\frac{2W}{3}+\frac{ZW}{3}$ 在 $\mathfrak{D}_2$ 上，并得到其线性化

$$\begin{bmatrix}P(Z,W) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & -\frac{Z}{\sqrt{3}}\\ 0 & I\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}I-\frac{2Z}{3}-\frac{2W}{3} & \frac{Z}{\sqrt{3}}\\ -\frac{W}{\sqrt{3}} & I\end{bmatrix}}_{=:\,L_A}\begin{bmatrix}I & 0\\ \frac{W}{\sqrt{3}} & I\end{bmatrix}.$$

容易验证 L_A 是不可约的，因此 P 是一个原子。此外，P 是 $\mathfrak{D}_2$-稳定的，因为

$$P(Z,W)=\frac{1}{3}\big((2I-Z)(2I-W)-I\big).$$

事实上，若存在一个向量 v，使得 $P(Z,W)v=0$，那么我们便得到

$$\|(2I-Z)(2I-W)v\|=\|v\|.$$

这不可能发生，因为

$$\|(2I-W)v\|\ge 2\|v\|-\|Wv\|>\|v\|,$$

类似地，对于 $x=(2I-W)v$，我们得到

$$\|(2I-Z)x\|>\|x\|>\|v\|.$$

最后，$\widetilde{P}=I-P$ 显然不是压缩算子（例如，取 $Z=W=-0.9$）。不过，我们注意到 P 在边界上有零点，例如 $P(I,I)=0$，因此计算 NGN 型界仍然是一项非平凡的工作（否则 $\|P^{-1}\|_Q<\infty$，而 NGN 型界就只是 $\|P\|_Q\|P^{-1}\|_Q$）。

在应用命题 3.8 中的界之前，我们首先需要计算一个联合相似 S，如定理 2.2(2) 所示，从而使 $S^{-1}AS \in \mathfrak{D}_2^\circ$，因为 A 是不可约的，但 $\overline{A} \notin \mathfrak{D}_2^\circ$（检查 2.2）可知，对于 $\overline{Z}$，W 接近 I）。为此，令 $S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 为一个矩阵，其列由 $\bar{A}_Z \pm A$ 的特征向量构成，并注意到

$$B := S^{-1}AS = \left(B_Z := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, B_W := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \right).$$

由此可知，对于这些向量 $B_Z = uu^t$ 和 $B_W = vv^t$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^t \quad \text{and} \quad v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^t,$$

并且，对于任意给定的 $(X, Y) \in \mathfrak{D}_2$，我们有

$$\|B_Z \otimes X + B_W \otimes Y\| = \left\| \begin{bmatrix} u \otimes I & v \otimes I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \otimes X & 0 \\ 0 & I \otimes Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^t \otimes I \\ v^t \otimes I \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \right\|^2 = 1.$$

因此，$B \in \overline{\mathfrak{D}_2^\circ}$ 如所期望的。最后，注意到 $\kappa(S) = 2 + \sqrt{3}$，$\|P_1\|_{\mathfrak{D}_2} = \frac{4}{3}$ 并且 $\|P_2\|_{\mathfrak{D}_2} = 1$ 3，因此我们可以计算命题3.8 中的界，得到

$$\sup_{r<1} \left\| (P^{(r)})^{-1} P \right\|_{\mathfrak{D}_2} \leq 5 + 2\sqrt{3} \approx 8.46.$$

4. 矩阵自由多项式的循环性

4.1. **典范弱-*拓扑**。Shalit 与第一作者在 [47]中证明，对于任意给定的非交换算子球 $\mathbb{D}_Q$，$H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 通过如下方式构造前对偶，从而具有典范弱-*拓扑：对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathbb{D}_Q(n)$，令 Φ_X：$F \mapsto F(X) \in M_n$ 为定义在 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 上的矩阵求值映射。接下来，对于任意 $\eta \in M_n^*$，令 $\varphi_{\eta, X} := \eta \circ \Phi_X$。显然，$\varphi_{\eta, X} \in (H^\infty(\mathbb{D}_Q))^*$，因此我们可以定义

$$\mathcal{X}(\mathbb{D}_Q) := \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_{\eta,X} : X \in \mathbb{D}_Q(n), \eta \in M_n^*, n \in \mathbb{N}\} \subset (H^\infty(\mathbb{D}_Q))^*.$$

我们将巴拿赫空间 Y 的前对偶定义如下：设 $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}^*$ 是其对偶的一个子空间。利用 Y 到其二次对偶 Y^{**} 的典范嵌入，我们可以将 Y 视为 X 上的有界线性泛函空间。若在此嵌入下有 $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^*$，则称 X 是 Y 的前对偶。在这种情况下，我们在 Y 上考虑 $\sigma(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ 拓扑，在该拓扑下每个 $\varphi \in \mathrm{X}$ 都是连续的。请注意，前对偶一般未必存在；即使存在，也未必唯一。

定理 4.1 (定理 3.1, [47])。$\mathcal{X}(\mathbb{D}_Q)$ 是 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 的唯一前对偶 $\mathcal{X}$，使得矩阵点求值映射 Φ_X 对所有 $X \in \mathbb{D}_Q$ 均为 $\sigma(H^\infty(\mathbb{D}_Q), \mathcal{X})$ 连续。

注意，尚未证明 $\mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$ 是 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 的算子空间预对偶。尽管如此，我们仍可直接为每个 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))) = M_k \otimes H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 建立类似结果。为此，定义

$$\mathcal{X}_k(\mathbb{D}_Q) := M_k^* \otimes \mathcal{X}(\mathbb{D}_Q),$$

并注意到 $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 是 $(M_k \otimes H^\infty(\mathbb{D}_Q))^*$ 的闭子空间。令 E_{ij} 为 M_k 中的标准矩阵单位，并令 $\{e_{ij}\}$ 为 M_k^* 的对偶基。那么，每个 $\varphi \in \mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 都可以唯一地写成 $\varphi = \sum_{i,j=1}^k e_{ij} \otimes \varphi_{ij}$，其中 $\varphi_{ij} \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$ 适当选取。最后，对于 $X \in \mathbb{D}_Q(n)$，令 Φ_X：$F \mapsto F(X) \in M_k(M_n)$ 为定义在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 上的矩阵点求值映射。

命题 4.2。 $\mathcal{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 是 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的唯一前对偶$\mathcal{X}_k$，使得对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，矩阵点取值映射 Φ_X 均为 $\sigma(M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q)), \mathcal{X}_k)$连续。

证明。 我们完全按照定理 4.1的证明进行。为了证明 $\mathcal{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 是 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的预对偶，我们需要确立两点（详见 [47, 第 3] 节和[20, 第 2] 节）：

(1) $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 范数化 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，即，

$$\sup\{\|\varphi(F)\| : \|\varphi\| \le 1,\ \varphi \in \mathcal{X}_k(\mathbb{D}_Q)\} = \|F\|_Q \text{ for all } F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q)). \tag{4.1}$$

(2) $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的闭单位球是 $\sigma(M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q)), \mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q))$-紧的。

(1) 的证明：不等式 $\le$ 在（4.1）中显然成立，因此只需证明不等式 $\ge$。对任意 $X \in \mathbb{D}_Q(n)$ 和 $\eta \in (M_k(M_n))^* = M_k^* \otimes M_n^*$，定义 $\varphi_{\eta, X} := \eta \circ \Phi_X$。我们声称，任何这样的 $\varphi_{\eta, X}$都是 $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 的元素。事实上，对于有限多个 $\eta_j^{(k)} \in M_k^*$ 和 $\eta_j^{(n)} \in M_n^*$，我们可以写出 $\eta = \sum_j \eta_j^{(k)} \otimes \eta_j^{(n)}$。于是可验证

$$\varphi_{\eta,X} = \sum_j \eta_j^{(k)} \otimes \varphi_{\eta_j^{(n)},X} \in \mathcal{X}_k(\mathbb{D}_Q).$$

因此，我们得到 $\varphi_{\eta, X} \in \mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$，如所声称。现在，给定任意 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 和 $X \in \mathbb{D}_Q(n)$，令 $\eta_X \in (M_k(M_n))^*$使得 $\|\eta_X\| = 1$并且

$$|\varphi_{\eta_X,X}(F)| = |\eta_X(F(X))| = \|F(X)\|.$$

由于 F是任意选取的，并且由于$\|\varphi_{\eta_X, X}\| \le \|\eta_X\|\|\Phi_X\| \le 1$，我们对如上所述的$X \in \mathbb{D}_Q$ 取上确界，从而得出不等式 $\ge$ 在（4.1）中成立，如所要求。

（2）的证明：令 $F_\iota = \sum_{i,j=1}^k E_{ij} \otimes f_{(ij)\iota}$为 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的闭单位球中的一个网。那么，对于每个 $1 \le i, j \le k$，$(f_{(ij)\iota})$ 是 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 的闭单位球中的一个网。因此，利用以下事实：$H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 的闭单位球是 $\sigma(H^\infty(\mathbb{D}_Q), \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q))$ 紧的（由定理 4.1 和巴拿赫–阿劳格鲁定理可知），我们可以找到一个子网 (F_{ι_λ})，使得对于每个$1 \le i, j \le n$，$f_{(ij)\iota_\lambda} \xrightarrow{w^*} f_{(ij)}$ 对某个 $f_{(ij)}$ 成立，其中该元素属于 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 的闭单位球。然后，利用 $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 的定义，直接验证可得

$$F_{\iota_\lambda} = \sum_{i,j=1}^k E_{ij} \otimes f_{\iota_\lambda}^{(ij)} \to \sum_{i,j=1}^k E_{ij} \otimes f^{(ij)},$$

在 $\sigma(M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q)), \mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q))$ 中，且其极限位于 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的闭单位球内（由 (1)）。这就完成了 (2) 的证明，因此 $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 是 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的前对偶。

最后，关于矩阵点求值连续性以及前对偶唯一性的证明，与定理 4.1的证明完全相同，因此此处不再重复。 ∎

命题 4.3。 M_k（H^∞（$\mathbb{D}_Q$））上的弱-*拓扑具有以下性质。

(1) 网 $(F_\iota) \subset M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 弱-*收敛到某个 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，当且仅当 (F_ι) 的每个条目都在 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 中弱-*收敛到 F 中对应的条目；*(2)* $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 上的弱-*拓扑与有界集上的逐点收敛拓扑一致；*(3)* $M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中弱-*稠密；*(4)* 固定 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$。由 F、$G \mapsto FG$ 左乘以及由 F、$G \mapsto GF$ 右乘所定义的线性映射，在 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 上均为弱-*连续。

证明。 (1) T 这可由一个直接的论证以及 $\mathrm{X}_k(\mathbb{D}_Q)$ 的定义得出 .

(2) 如 [47], 一个有界网(f_ι) 在 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 弱-*收敛到 $f \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 当且仅当(f_ι) 在 f 上逐点收敛 $\mathbb{D}_Q$所示。(1) 进而意味着，对于 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 及其弱-*拓扑，同样的结论也成立。

(3) 对于 $k=1$，这由 [47, 命题3.4 (2)] 得出。直接应用 (1) 即可证明该结论对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。

(4) 根据 (1)，只需对 $k=1$ 证明该结论。为此，对于每个 $\varphi \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$，我们定义有界线性泛函 φ^F 如下

$$\varphi^F : H^\infty(\mathbb{D}_Q) \to \mathbb{C}, \quad \varphi^F(G) := \varphi(FG).$$

我们将证明，对于每个 $\varphi \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$，都有 $\varphi^F \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$，由此可知，左乘 F 是弱-*连续的。

首先，考虑某个 $X \in \mathbb{D}_Q(n)$ 和 $\eta \in M_n^*$ 对应的 $\varphi_{\eta,X} \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$。那么，对于每个$G \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$，我们都有

$$\varphi^F_{\eta,X}(G) = \varphi_{\eta,X}(FG) = \eta(F(X)G(X)) = \varphi_{\eta(F(X)\cdot),X}(G). \tag{4.2}$$

注意到 $\varphi_{\eta(F(X)\cdot),X} \in \mathcal{X}(\mathbb{D}_Q)$。事实上，$A \mapsto \eta(F(X)A)$ 显然定义了一个 M_n^* 的元素。因此，$\varphi^F_{\eta,X} \in \mathcal{X}(\mathbb{D}_Q)$ 利用 (4.2) 可得。从而立即推出，对于所有 $\varphi^F \in \mathcal{X}(\mathbb{D}_Q)$ 均有

$$\varphi \in \operatorname{span}\{\varphi_{\eta,X} \ : \ X \in \mathbb{D}_Q(n),\ \eta \in M_n^*,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

接下来，任取 $\varphi \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$。那么，存在一个由上述线性张成中的元素构成的序列 (φ_n)，使得 $\varphi_n \to \varphi$ in $(H^\infty(\mathbb{D}_Q))^*$。一个标准论证表明，$\varphi_n^F \to \varphi^F$ in $(H^\infty(\mathbb{D}_Q))^*$。这就得到了所需的 $\varphi^F \in \mathrm{X}(\mathbb{D}_Q)$。

关于右乘 F 的结论可类似得到。

■

4.2. **弱-*循环性。** 我们将任意给定的 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 的左理想 $\mathrm{I}_L(F)$ 和右理想 $\mathrm{I}_R(F)$ 定义为

$$\mathfrak{I}_L(F) := \{GF \ : \ G \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))\},$$
$$\mathfrak{I}_R(F) := \{FG \ : \ G \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))\}.$$

接着，我们分别使用以下记号

$$[F]_L := \overline{\mathfrak{I}_L(F)}^{w^*} \quad \text{and} \quad [F]_R := \overline{\mathfrak{I}_R(F)}^{w^*}$$

表示由 F 生成的左和右不变子空间。

定义 4.4。 若 NC 函数 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 满足 $[F]_L = M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$（分别为 $[F]_R = M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$），则称其为左（分别为右）循环的。

引理 4.5。 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 是左（分别为右）循环的，当且仅当 $I \in [F]_L$（分别为 $I \in [F]_R$）。

证明。 若 F 是左循环的，则根据定义有 $I \in [F]_L$。

反过来，如果 $I \in [F]_L$，那么存在一个网 $(G_\iota) \subset M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 使得 $G_\iota F \xrightarrow{w^*} I$。根据命题 4.3(4)，左乘是弱-*连续的，因此$M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q)) = [F]_L$。

右循环性的证明类似。 ■

注 4.6. 如 [39], 所述，存在一个 NC 函数 F 使得 t

(1) F 在一致拓扑下于 $s\mathfrak{B}_d$ 上对所有 $s > 1$解析，且 (2) F 在 $\mathfrak{B}_d$上无界。

因此，以下引理的结论在 NC 框架中并非显然，而其交换对应结论则相当容易验证。

引理 4.7。 设 $P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 是 Q-稳定的。那么，对所有 $r < 1$，都有$(P^{(r)})^{-1} \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $P(0) = I$。由引理 2.5， $P \sim L_A$ 存在某个线性铅笔 L_A。因此，存在 F， $G \in GL_l(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$使得

$$\begin{bmatrix} P(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = F(X) \underbrace{\begin{bmatrix} L_A(X) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{=:\, L_B(X)} G(X) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

注意，由于 P 是 Q-稳定的，上述等式中的所有矩阵都是可逆的。因此，将 $r < 1$ 扩张并对等式两边取逆可得

$$\left\|(P^{(r)})^{-1}\right\|_Q \le \left\|(G^{(r)})^{-1}\right\|_Q \left\|(L_B^{(r)})^{-1}\right\|_Q \left\|(F^{(r)})^{-1}\right\|_Q.$$

由于 $\frac{1}{r}\mathbb{D}_Q \subset \mathrm{dom}(L_{(r)B})^{-1}$，我们得到 $\left\|(L_{(r}{}_B)^{-1}\right\|_Q < \infty$)根据 [49, 推论 3.2]。利用 $(G_{(r)})^{-1}$, $(F_{(r)})^{-1} \in M_l(\mathbb{C}Z)$，因此我们得出结论：$(P^{(r)})^{-1} \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$。 ∎

现在我们已做好充分准备来证明定理B。

定理 B 的证明。 和之前一样，我们只证明左循环性的陈述。

假设 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 是左循环的。根据定义，存在一个网 $(G_\iota) \subset M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，使得 $G_\iota P \xrightarrow{w^*} I$。特别地，矩阵点求值映射 Φ_X 的弱-* 连续性意味着，对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，都有 $G_\iota(X)P(X) \to I$。行列式的连续性进而表明，对于所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，都有 $\det G_\iota(X) \det P(X) \to 1$，因此 P 是 Q-稳定的。

反过来，假设 $P \in M_k(\mathbb{C}Z)$ 是 Q-稳定的，并令 $P = P_1P_2 \dots P_l$ 为其原子分解。显然，每个 P_j 也是 Q-稳定的。取满足 $r_n \to 1^-$ 的 $(r_n) \subset (0, 1)$，并注意，对于每个 n, $P^{(r_n)}1$ 都是 Q-稳定的，且根据引理 4.7，$(P^{(r_n)}1)^{-1} \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$。接下来，任取 $G \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，并考虑 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中由下式给出的序列 (H_n)

$$H_n := G(P_1^{(r_n)})^{-1}P_1P_2 \dots P_l.$$

根据定理 A，(H_n) 是一个有界序列。此外，由于 $((P^{(r_n)}1)^{-1}P_1)$ 逐点收敛于 I，(H_n)逐点收敛于 $GP_2 \dots P_l$。因此， $H_n \xrightarrow{w^*} GP_2 \dots P_l$根据命题 4.3(2)。由于 G 是任意选取的，我们得到

$$\Im_L(P_2 \dots P_l) \subset [P_1P_2 \dots P_l]_L,$$

进而意味着

$$[P_2 \dots P_l]_L \subset [P_1P_2 \dots P_l]_L.$$

沿着这一思路继续推理，我们得到

$$[I]_L \subset [P_l]_L \subset [P_{l-1}P_l]_L \subset \cdots \subset [P_2 \dots P_l]_L \subset [P_1P_2 \dots P_l]_L.$$

因此， $I \in [P]_L$，从而 P 根据引理成为左循环4.5。 ∎

4.3. **自由 Hardy 空间中的循环多项式。** 如引言中所述，定理 B 使我们能够重新得到关于自由 Hardy 空间中自由多项式循环性的一个已知结果（参见 [6, 7, 28]）。同样，在第 5 节中，我们重新得到关于自由 Hardy 空间中 NC 有理函数循环性的一个已知结果。

回顾一下，自由 Hardy 空间 $\mathbb{H}_d^2$ 定义为由 d 个自由非交换变量构成、系数（标量）平方可和的所有幂级数所组成的希尔伯特空间：

$$\mathbb{H}_d^2 = \left\{ f(Z) = \sum_{w \in \mathbb{F}_d^+} a_w Z^w : \sum_{w \in \mathbb{F}_d^+} |a_w|^2 < \infty \right\},$$

其内积由系数的 l^2 内积诱导。可以证明，对于单位行球 d中任意的 $f \in \mathbb{H}_d^2$和 X， $f(X)$ 都收敛（见 [42，定理 1.1]），因此 $\mathbb{H}_d^2$ 中的每个元素都在 $\mathfrak{B}_d$ 上定义一个 NC 函数。在 M_k 上赋予希尔伯特–施密特内积后，我们便可以考虑希尔伯特空间 $M_k(\mathbb{H}_d^2) = M_k \otimes \mathbb{H}_d^2$，并将其视为自由 Hardy 空间的矩阵值版本。 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$中的每个元素 F都可以写成 $F(Z) = \sum_w A_w Z^w$的形式，其中 M_k中的一族矩阵为 A_w。若 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$中的另一个元素为 $G(Z) = \sum_w B_w Z^w$，则 F 与 G 的内积为 $\sum_w \mathrm{Tr}(B_w{}^* A_w)$。对于任意给定的 $F \in M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 和 $X \in \mathfrak{B}_d$， $F(X)$ 应解释为 $F(X) = \sum_w A_w \otimes X^w$。如此一来， $M_k(\mathbb{H}_d^2)$中的每个元素都在 $\mathfrak{B}_d$上定义一个矩阵值 NC 函数。

可以证明， $\mathbb{H}_d^2$ 按照 Ball、Marx 和 Vinnikov [10], 的定义是一个 NC 再生核希尔伯特空间（NCRKHS）， [10], 这意味着对每个点 $X \in \mathfrak{B}_d$，线性映射$f \mapsto f(X)$ 都是从 $\mathbb{H}_d^2$ 到适当大小的方阵空间的连续映射。显然，对每个 $X \in \mathfrak{B}_d$，这意味着 $F \mapsto F(X)$ 也定义了一个从 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 到适当大小的方阵空间的连续线性映射。对于每个 NCRKHS，都可以自然地关联一个代数，称为其（左）乘子代数，它由底层定义域上的所有 NC 函数组成，这些函数将该 NCRKHS 左乘到自身中。可以证明，$\mathbb{H}_d^2$ 的左乘子代数与 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 完全等距同构；见 [44,定理 3.1]和 [42,定理 3.1]。因此， $H^\infty(\mathfrak{B}_d) \subset \mathbb{H}_d^2$，且 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 上存在自然的弱算子拓扑（WOT）。事实上，Davidson 和 Pitts 证明了 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 上的弱算子拓扑与弱-*拓扑一致；见[19, 推论 2.12]。

上述将 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 识别为 $\mathbb{H}_d^2$ 的左乘子代数的做法，使我们能够运用已有结果来讨论 $\mathbb{H}_d^2$中的循环性。为此，对于任意给定的 $F \in M_k(\mathbb{H}_d^2)$，我们定义：

$$\mathfrak{I}^2(F) := \{GF : G \in M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))\} \quad \text{and} \quad [F]^2 := \overline{\mathfrak{I}^2(F)}^{\|\cdot\|}.$$

接着，若 $[F]^2 = M_k(\mathbb{H}_d^2)$，我们就称 F 在 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 中是（左）循环的。在这种情形下，容易证明， F 的循环性等价于 $I \in [F]^2$。

推论 4.8. *$P \in M_k(\mathbb{C}\langle Z\rangle)$ 在 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 中是循环的，当且仅当 P 是 $\mathfrak{B}_d$-稳定的。*

证明。 若 P 是左循环的，那么证明 P 为 $\mathfrak{B}_d$-稳定的过程与定理 B证明的第一部分完全相同，只需利用点求值在 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 上定义有界线性泛函这一事实。

反过来，假设 P 是 $\mathfrak{B}_d$-稳定的。由于 $P \in M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))$，定理 B 表明$P$在 $M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))$中是左循环的。根据定义，我们可以找到一个网 $(H_\iota) \subset M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))$，使得 $H_\iota P \xrightarrow{w^*} I$。应用命题 4.3(1)，并利用弱算子拓扑在 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$上与弱-*拓扑一致这一事实，可以直接验证，$(H_\iota P)$的每个分量都弱收敛到 $\mathbb{H}_d^2$中常值 NC 函数I 的相应分量。由此，根据一个标准论证可得 $H_\iota P \xrightarrow{w} I$ 属于 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$。因此，$I \in \mathrm{I}^2(P)_{\mathrm{w}}$。然而，由于 $\mathrm{I}^2(P)$是凸的，它在 $M_k(\mathbb{H}_d^2)$中的弱闭包与范数闭包一致，因此 $I \in [P]^2$，这正是所需结论。

■

5. NC 有理函数的循环性

根据 [24] 和 [54], 一个 *NC 有理表达式*，以 d 自由非交换变量$Z_1, \ldots, Z_d$为变量，可以通过对 d中的 NC 多项式进行加法、乘法和求逆，构造任何语法上有效的表达式。例如，

$$(Z_1Z_2 - Z_2Z_1)^{-1}Z_3 \quad \text{and} \quad Z_1Z_2^{-1} - 3(Z_1Z_3^{-1} + Z_2)^{-1},$$

都是 NC 有理表达式。若存在一个元组 $X \in \mathbb{M}^d$ 使得某个 NC 有理表达式可以在该处求值，我们就称它是非退化的。含有 d 个变量的非退化 NC 有理表达式的定义域，是 d 维 NC 宇宙$\mathbb{M}^d$ 中所有可对该 NC 有理表达式求值的点的集合。接下来，如果两个非退化 NC 有理表达式在其定义域交集中的每一点都取相同的矩阵值，就称它们等价。容易验证，这定义了一种等价关系。最后，*NC 有理函数*是非退化 NC 有理表达式的一个等价类，其定义域是该等价类中所有 NC 有理表达式的定义域之并。NC 有理函数构成一个斜域，记作 $\mathbb{C}\langle Z\rangle$，它是 NC 多项式环 $\mathbb{C}Z$的泛斜分式域；有关泛斜域的背景介绍，参见 [17]。

在讨论定理 C 的证明之前，请注意，只要 $\mathfrak{r}$ 是一个满足 $s\mathbb{D}_Q \subset \operatorname{dom}\mathfrak{r}$ 的 NC 有理函数，其中 $s > 1$，那么 $\mathfrak{r}$ 在每个满足 $r\mathbb{D}_Q$ 的 Ball $r < s$ 上都有界；参见 [49, 推论 3。2] 特别地，在这种情况下，我们有 $\mathfrak{r} \in H^\infty(\mathbb{D}_Q)$。需要指出的是，对于一般的 NC 函数，即使满足 $\mathbb{D}_Q = \mathfrak{B}_d$，上述结论也不成立；参见 [39]。我们对定理C 的证明沿用 [6, 定理 3。7], 中的思路，该定理依赖于 NC 有理函数矩阵的一个因式分解公式（见下文的（5.4））。

定理 C 的证明。假设 Q-稳定性由假设中的任意给定的左/右循环 $\mathfrak{r}$ 满足，这一点与定理B中的情形完全相同。

为证明充分性，假设 $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_{\lambda,\mu})$ 是 Q-稳定的。对于所有 $1 \le \lambda, \mu \le d$，存在一个称为描述子实现的三元组 $(A_{\lambda,\mu}, b_{\lambda,\mu}, c_{\lambda,\mu})$，其中 $A_{\lambda,\mu} = (A^\lambda_{,1}{}^\mu, \ldots, A^\lambda_{,d}{}^\mu) \in M^d_{n_\lambda,n_\mu}$且 $b_{\lambda,\mu}, c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{C}^{n_\lambda, n_\mu}$，使得

$$\operatorname{dom}\mathfrak{r}_{\lambda,\mu} \subset \{X \in \mathbb{M}^d : L_{A_{\lambda,\mu}}(X) \text{ is invertible}\},$$

and

$$\mathfrak{r}_{\lambda,\mu}(Z) = b^*_{\lambda,\mu} L_{A_{\lambda,\mu}}(Z)^{-1} c_{\lambda,\mu},$$

作为 $\operatorname{dom}\mathfrak{r}_{\lambda,\mu}$ 上的函数。这里，对于 $X \in \operatorname{dom}\mathfrak{r}_{\lambda,\mu}$，上述方程应解释为

$$\mathfrak{r}_{\lambda,\mu}(X) = b^*_{\lambda,\mu} \otimes I L_{A_{\lambda,\mu}}(X)^{-1} c_{\lambda,\mu} \otimes I.$$

关于这一事实的证明，参见例如 [54]。接下来，我们为 $\mathfrak{r}$构造一个描述子实现。对于每个 $1 \le j \le d$，定义

$$A_j := \operatorname{diag}(A_j^{1,1}, A_j^{1,2} \ldots, A_j^{1,k}, A_j^{2,1}, A_j^{2,2}, \ldots, A_j^{k,1}, \ldots, A_j^{k,k}).$$

此外，令

$$b := \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,k} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{2,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{2,k} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{k,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{k.k} \end{bmatrix}, \qquad c := \begin{bmatrix} c_{1,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{k,k} \end{bmatrix}.$$

容易验证

$$\operatorname{dom} \mathfrak{r} = \bigcap_{1 \le \lambda, \mu \le k} \operatorname{dom} \mathfrak{r}_{\lambda,\mu} \subset \{X \in \mathbb{M}^d : L_A(X) \text{ is invertible}\}, \tag{5.1}$$

and

$$\mathfrak{r}(X) = b^* \otimes I L_A(X)^{-1} c \otimes I \text{ for all } X \in \operatorname{dom} \mathfrak{r}. \tag{5.2}$$

由假设可知 $s\mathbb{D}_Q \subset \operatorname{dom} \mathfrak{r}$，由 (5.1) 得到 $s\mathbb{D}_Q$ 属于 $L_A(Z)$ 的可逆性定义域，因此根据定理 2.3，$\rho_{Q^\circ}(A) \le \frac{1}{s} < 1$。因此，根据定理 2.2，$A$ 可通过适当大小的可逆矩阵 S 与某个 $B \in \mathbb{D}_Q^\circ$ 联合相似。于是，对所有 $X \in \mathbb{D}_Q$，我们得到 $\|B \otimes X\| \le \|B\|_{Q^\circ} \|X\|_Q < 1$，其中 $B \otimes X = \sum_j B_j \otimes X_j$，因此可以将 $L_B(X)^{-1}$ 展开为诺伊曼级数，从而得到

$$L_A(X) = S \otimes I L_B(X)^{-1} S^{-1} \otimes I = S \otimes I \left(\sum_{n=0}^{\infty} (B \otimes X)^n \right) S^{-1} \otimes I,$$

and

$$\|L_A(X)^{-1}\| \le \kappa(S) \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (B \otimes X)^n \right\| \le \frac{\kappa(S)}{1 - \|B\|_{Q^\circ}}. \tag{5.3}$$

特别地，$L_A(Z)^{-1} \in M_N(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，其中 $N = \sum_{1 \le \lambda,\ \mu \le d} n_{\lambda,\ \mu}$。

利用（5.2），可以验证

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ c & L_A(Z) & 0 \\ 0 & b^* & 0 \end{bmatrix}}_{=:\ \alpha(Z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ c & L_A(Z) & 0 \\ 0 & b^* & I \end{bmatrix}}_{=:\ \beta(Z)} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{r}(Z) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & -L_A(Z)^{-1} c \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{=:\ \gamma(Z)}, \tag{5.4}$$

作为定义在 $s\mathbb{D}_Q$ 上的函数。显然，根据（5.3），$\alpha(Z)$、$\beta(Z) \in M_e(\mathbb{C}Z)$ 和 $\gamma(Z) \in M_e(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，其中 $e = N + 2k$。由于 $\gamma(Z)$ 是 $M_e(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中的上三角酉矩阵，直接计算其逆矩阵并验证 $\gamma(Z)^{-1} \in M_e(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 即可，这同样由（5.3）得出。现在，我们可以将（5.4）化为

$$\alpha(Z)\gamma(Z)^{-1} = \beta(Z)\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{r}(Z) \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

作为 $s\mathbb{D}_Q$ 上的函数，这推出

$$\det \alpha(X) \det \gamma(X)^{-1} = \det \beta(X) \det \mathfrak{r}(X) \text{ for all } X \in \mathbb{D}_Q.$$

由于 $\mathfrak{r}$ 假设是 Q-稳定的，这说明 α 也 Q-稳定。因此，根据定理 α 是左循环的。定理 B。因此，我们可以找到一个网 (H_ι) 属于 $M_e(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$，使得 $H_\iota\alpha \xrightarrow{w^*} \gamma$。接下来，将等式 (5.5) 两边乘以 H_ι，得到

$$H_\iota(Z)\alpha(Z)\gamma(Z)^{-1} = H_\iota(Z)\beta(Z)\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{r}(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & J_\iota(Z)\mathfrak{r}(Z) \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

其中 $J_\iota(Z)$是 $M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$中的一个元素。根据命题 4.3(4)，等式 (5.6) 的左端弱-* 收敛于 I。根据命题 4.3(1)，弱-* 收敛等价于逐项弱-* 收敛，由 (5.6) 可得 $J_\iota\mathfrak{r} \xrightarrow{w^*} I$。因此，$\mathfrak{r}$ 根据引理是左循环的4.5。

为了证明右循环性，我们从 (5.4) 出发，仿照 (5.5) 进行推导，只需将$\beta(Z)^{-1}$ 放在左端，并将 $\gamma(Z)$ 放在右端。其余论证完全相同，因此证明完毕。

■

由于 $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 中每个 NC 有理函数的定义域都包含一个半径严格大于 1 的行球（参见 [28, 定理 A]），以下推论显而易见。

推论 5.1。 *NC* 有理函数矩阵 $\mathfrak{r} \in M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))$ 是左/右循环的，当且仅当它是 $\mathfrak{B}_d$-稳定的。

我们还得到以下结果，该结果最初由 [28, 定理 C]在$k = 1$中提出；另请参见 [6, 定理3.7]，其中给出了另一种证明。

推论 5.2。 *NC* 有理函数矩阵 $\mathfrak{r} \in M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 是循环的，当且仅当它是$\mathfrak{B}_d$-稳定的。

证明。 首先注意，NC 有理函数是 $\mathbb{H}_d^2$ 的元素，当且仅当它属于$H^\infty(\mathfrak{B}_d)$；参见 [28, 定理 A]。因此，由于 $\mathfrak{r} \in M_k(\mathbb{H}_d^2)$ 按假设成立，我们有 $\mathfrak{r} \in M_k(H^\infty(\mathfrak{B}_d))$。证明的其余部分与推论 4.8 的证明相同（使用推论 5.1）。

■

5.1. **非交换并联和函数**。到目前为止，我们一直使用涉及稳定非交换有理函数定义域的逼近技术来确定其循环性。然而，本小节将介绍一类 NC 函数，通过分析这些函数的值域来展现循环性。具体而言，我们在非交换双圆盘 $\mathfrak{D}_2$ 上引入非交换并联和函数。

给定有限维希尔伯特空间 H，以及任意两个厄米正半定（p.s.d.）算子 $A,\ B \in$ B(H)（即在洛文纳序中 $A,\ B \succeq 0$），并联和 $A:B$定义为

$$A : B = A(A + B)^{\dagger}B.$$

这里，$(A+B)^{\dagger}$表示 $A+B$的 Moore–Penrose（广义）逆。当 A和 B也都是非奇异的时，我们有以下几种等价的并联和定义方式：

$$A : B = A(A + B)^{-1}B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A = B : A.$$

矩阵的并联和由 Anderson 和 Duffin 提出 [4]，旨在推广一种网络综合过程；后来，Fillmore 和 Williams 通过研究算子值域 [21]，将其推广到无限维空间上的有界非可逆算子。此后，并联和出现在不同领域的多篇有影响力的论文中：(i) Kubo 和 Ando 奠定调和算子均值的基础[33]，(ii) Aizenman 和 Cipolloni 给出了关于量子力学熵强次可加性之 Lieb 和 Ruskai 定理的简明证明 [35]，[2]，(iii) Ando 利用并联和为正算子导出了 Lebesgue 型分解 [5],等。

受此思路启发，我们在 $\mathfrak{D}_2$ 上定义非交换并联和函数如下：

$\mathfrak{P}(Z,W)$: $=(I-Z)$（$2I-Z-W)^{-1}(I-W=\left((I-Z)^{-1}+(I-W^{1}\right)^{-1}=(I-W($$2I-Z-W)^{-1}(I-Z)$。

在本小节中，我们将证明，$\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{D}_2$上的压缩稳定非交换有理函数，无法一致地延拓到边界之外，并利用增实算子的性质建立其循环性。事实上，我们将证明关于稳定增实非交换矩阵函数循环性的一般结果，即满足对所有$X \in \mathbb{D}_Q$都有 Re $F(X) \succeq 0$的 $F \in M_k(H^{\infty}(\mathbb{D}_Q))$，并证明 $\mathfrak{P}$是增生的。

在标量层面，我们有

$$f(z,w) := \mathfrak{P}|_{\mathbb{D}^2}(z,w) = \frac{(1-z)(1-w)}{2-z-w} = \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-w}\right)^{-1} \text{ for all } (z,w) \in \mathbb{D}^2.$$

该函数出现在 [22]，数字滤波器稳定性的背景下，其中证明了 $|f| < 1$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上如下所示。

(1) 若 $z \in \mathbb{D}$，则 Re $\left(\frac{1}{1-z}\right) > \frac{1}{2}$。(2) 因此，对所有 $(z,\ w) \in \mathbb{D}^2$，都有 Re $\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-w}\right) > 1$。(3) 对上式取逆，并利用 Re $\alpha > 1 \implies |\alpha| > 1$ 这一事实。

通过增生算子的已知性质，这一思想可以推广到 $\mathfrak{P}$，因此我们简要回顾所需的事实。

增生算子与循环性。任意希尔伯特空间 H 上的算子 $A \in$ B(H) 若满足 Re $A \succeq 0$，则称其为增生算子，即

$$\mathrm{Re}\langle Av, v\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \text{ for all } v \in \mathcal{H}.$$

A i若存在某个 $\delta > 0$ 使得 Re $A \succeq \delta I$，则称其为 δ-增生（或强增生）。

注 5.3. 通常考虑无界／稠密定义增生算子，此时需要特别指出算子在何种意义下是极大增生的。对于有界算子，则无需作此区分，因为这类算子显然是极大增生的。

增生算子的以下性质众所周知（例如参见 [30, 第 V.3.10-11]节）。

命题 5.4。 如果 $A \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ 是增生的，则以下结论成立。
(1) 如果 A 可逆，则 A^{-1} 是增生的。*(2)* $(A+\lambda I)^{-1}$ 对所有 $\lambda > 0$均存在。此外，*(a)* $(A+\lambda I)^{-1}$和 $A(A+\lambda I)^{-1} = (A+\lambda I)^{-1}A$ 是增生的，*(b)* $\|(A+\lambda I)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$，以及 *(c)* $\|A(A+\lambda I)^{-1}\| \le 1$。*(3)* 如果 A 是 δ-增生的，则 $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$。

上述命题中的重要观察是，范数界与 H 的维数无关。这些性质的一个直接推论是，有界耗散 NC 矩阵函数在 $\mathbb{D}_Q$上的循环性。

推论 5。 **5.** 若 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 是 Q-稳定且增生的，则 F 是左/右循环的 .

证明。 由于 F 是增生的，命题5.4(2) 表明该序列 e

$$\{F_\lambda := (F+\lambda I)^{-1} \ : \ \lambda > 0\}$$

由有界 NC 映射的矩阵组成。事实上，对所有 $\lambda > 0$ ，我们有

$$\|F_\lambda\|_Q \le \frac{1}{\lambda} \quad \text{and} \quad \|FF_\lambda\|_Q = \|F_\lambda F\|_Q \le 1.$$

由命题 4.3(2) 可知，在有界集上，弱-* 收敛与逐点收敛一致。因此，由上式以及 Q-稳定性可知F，因此 $F_\lambda F \xrightarrow{w^*} I$且 $FF_\lambda \xrightarrow{w^*} I$。于是， F由引理 4.5可知是左/右循环的。 ∎

NC 并联和的性质。 如本小节引言中所述，现在我们重复 Goodman 关于 [22] 标量并联和函数的论证，以证明$\mathfrak{P}$ 是压缩的，并利用推论 5.5证明其循环性。

推论 5.6. *NC* 并联和 $\mathfrak{P}$ 是定义在 $\mathfrak{D}_2$ 上的压缩、稳定、增生的 *NC* 有理函数，且无法在边界附近一致延拓。因此，它是左/右循环的。

证明. 注意，对于任意 $Z \in \mathfrak{D}_1$，$(I-Z)^{-1}$ 是 1 2-增生的。事实上，我们有

$$\begin{aligned}(I-Z^*)^{-1} + (I-Z)^{-1} - I &= (I-Z^*)^{-1}\big((I-Z) + (I-Z^*) - (I-Z^*)(I-Z)\big)(I-Z)^{-1} \\ &= (I-Z^*)^{-1}(I-Z^*Z)(I-Z)^{-1} \\ &\succeq 0.\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Re}\left((I-Z)^{-1} + (I-W)^{-1}\right) \succeq I \text{ for all } (Z,W) \in \mathfrak{D}_2,$$

即， $\mathfrak{P}^{-1}$ 是 1-增生的。命题5.4（3）立即表明 $\|\mathfrak{P}\|_Q \le 1$ ，因此 $\mathfrak{P}$ 是压缩的。根据定义， $\mathfrak{P}$ 是 $\mathfrak{D}_2$-稳定的是显然的，而它是增生的则由命题5.4（1）推出。注意到即使在标量层面，我们也会在边界点（1，1）处出现第二类奇点，因而 $\mathfrak{P}$在边界上不一致连续也是显然的。 $\mathfrak{P}$ 的循环性随后由推论5.5得到。 ∎

注 5.7。注意， 在（I，I）处的奇点使我们无法使用定理C 来确定 $\mathfrak{P}$的循环性。也有人可能会想对原子 $I - Z$ 和 $I - W$ 应用 NGN 型不等式，从而试图像定理B 那样论证 $\mathfrak{P}$ 是左/右循环的。也就是说，我们注意到

$$(I - rX)^{-1}\mathfrak{P}(X,Y) \to (2I - X - Y)^{-1}(I - Y)$$

对每个 $(X,\ Y) \in \mathfrak{D}_2$作为 $r \to 1^-$。特别是，可以考虑对 $I - Z$ 因子采用 NGN 型界，并证明上述收敛是弱-* 收敛，从而

$$[\mathfrak{P}]_L \supseteq [(2I - Z - W)^{-1}(I - W)]_L \supseteq [I - W]_L = H^\infty(\mathfrak{D}_2),$$

因为 $I - W$是循环的。然而，这显然行不通，因为 $(2I - Z - \mathfrak{W}^{-1}(I - \mathfrak{W}$在 $\mathfrak{D}_2$上无界。

例 5.8 （解耦的非交换并联和）。 值得注意的是，按定义，非交换并联和函数关于变量是对称的，因此在某种意义上，这些输入是“耦合”在一起的。解耦这些变量的一种方法是考虑

$$\mathfrak{P}_L(Z,W) := (2I - Z - W)^{-1}(I - Z)(I - W),$$
$$\mathfrak{P}_R(Z,W) := (I - Z)(I - W)(2I - Z - W)^{-1}.$$

在这种情况下很容易验证，一般而言，$\mathfrak{P}_L(Z,\mathfrak{W} \neq \mathfrak{P}_L(W,Z)$ 且$\mathfrak{P}_R(Z,\mathfrak{W} \neq \mathfrak{P}_R(W,Z)$ 在 $\mathfrak{D}_2$上。此外，类似于注 5.7 中所给论证的推理，可立即得到 $\mathfrak{P}_L$ 和 $\mathfrak{P}_R$ 分别是左循环和右循环，依据定理 B。然而，这两个解耦的非交换并联和都不属于 $H^\infty(\mathfrak{D}_2)$；只需将 $\|\mathfrak{P}_L(X_t,Y_t)\|$和 $\|\mathfrak{P}_R(X_t,Y_t)\|$作为 $t \to 0^+$进行检验即可

$$X_t := \cos(t)\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ \sin(t) & -\cos(t)\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Y_t := \cos(t)\begin{bmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ -\sin(t) & -\cos(t)\end{bmatrix}.$$

6. 总结性备注

6.1. 利用 Fornasini–Marchesini 实现得到的 NGN 型界。命题 3.8 证明中的关键步骤是利用这一事实：$P \sim_{\mathbb{UL}} L_A$，从而为$\left\|(P^{(r)})^{-1}\right\|_Q$得到一个上界。自然地，我们可以进一步探讨，是否存在其他方法来界定 $\left\|(P^{(r)})^{-1}\right\|_Q$，以便改进命题 3.8 中的界。为进一步探究这一问题，令$P \in \mathbb{C}Z$为一个 Q-稳定原子，且 $P(0) = I$，并令（A，B，C，I）为 P^{-1}的一个最小 Fornasini-Marchesini（FM）实现，使得 P（Z）$^{-1} = I + C^*L_A$（Z）^{-1}B（Z）（关于 FM-实现的背景知识，参见例如 [23,第 5 节。2] 及其中的参考文献）。

有人向我们指出 Jurij Volˇciˇc 指出，在这种情况下，L_A 将是不可约的，并且

$$\begin{bmatrix} I & 0\\ C^*L_{A_0}(Z)^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & P(Z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{A_0}(Z) & B(Z)\\ 0 & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B(Z)\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_A(Z) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ C^* & I\end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

其中，L_{A_0} 是属于 P 的某个极小 FM-实现中的线性铅笔。特别是，$L_{A_0}(X)$对所有 $X \in \mathbb{M}^d$ 都可逆。对等式（6.1）两边取逆，并利用左侧和右侧矩阵的上（分别为下）三角形式，

$I \oplus P(Z)$，我们得到 P^{-1} 等于等式（（2，2））右端的逆矩阵的第6.1）个元素。这使我们能够得到以下界：

$$\left\|(P^{(r)})^{-1}\right\|_Q \le \left\|\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C^* & I \end{bmatrix}\right\| \left\|\begin{bmatrix} L_A(rZ)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\|_Q \left\|\begin{bmatrix} I & -B(rZ) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\|_Q. \tag{6.2}$$

接下来，利用上述不等式以及 L_A 不可约这一事实，可以完全按照命题3.8的证明，得到 $\sup_{r<1}\left\|P(P^{(r)})^{-1}\right\|_Q$和 $\sup_{r<1}\left\|(P^{(r)})^{-1}P\right\|_Q$的上界。然而，一般而言，这并不会改进命题3.8中的界，如下例所示。

例 6.1. 考虑多项式 $P(Z,\ W = I - \frac{ZW}{2} - \frac{WZ}{2}$，它来自例2.6和3.9(1)。可以验证$(A,\ B,\ C,\ I)$，其中 $A = (A_Z,\ A_W)$与例2.6中相同，$C = e_1 \in \mathbb{C}^3$ 且

$$B_Z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^t \quad \text{and} \quad B_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t,$$

是 P^{-1} 的一个 FM-实现（可以通过使用例2.6 中的线性化，并按照 [23, 备注 52]中的论证得到）。此外，该实现是极小的，因为 A 根据例2.6是不可约的。接下来，容易验证

$$\left\|\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C^* & I \end{bmatrix}\right\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{and} \quad \left\|\begin{bmatrix} I & -B(Z,W) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{D}_2} \ge \left\|\begin{bmatrix} I & -B(1,1) \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

此外，完全按照引理3.3证明开头的论证，我们得到 t

$$\left\|\begin{bmatrix} L_A(rZ)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{D}_2} \le \frac{1}{1-r}.$$

因此，对于 P^{-1}的这个极小 FM-实现，从（6.2）中能够导出的最佳界为

$$\left\|(P^{(r)})^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_2} \le \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4(1-r)}.$$

由这个不等式出发，我们可以按照命题 3.8 证明末尾的做法，得到

$$\sup_{r<1}\left\|(P^{(r)})^{-1}P\right\|_{\mathfrak{D}_2} \le 1 + \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} \approx 6.24.$$

然而，这比我们在例 ≤ 3 中得到的界更差。在例3.9(1) 中，我们直接将命题3.8应用于 P，得到的界要更好。

6.2. **其他开放问题**。我们以一些值得进一步研究的有趣开放问题结束讨论。

左循环性与右循环性。在 [27, 例 34] 中观察到，右内函数$F \in H^\infty(\mathfrak{B}_d) \subset \mathbb{H}^2_d$ 未必是左内函数。这里，左/右内函数是指 $\mathbb{H}^2_d$的左/右等距乘子。循环函数和内函数对于理解这些函数空间的结构都很重要，因此自然会提出以下一般性问题：

问题 6.2。如果 $F \in M_k(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 比如说是左循环的，那么 F 是否也一定是右循环的?

我们的定理C 和推论5.5 给出了该问题答案为肯定的情形，但目前我们既没有反例，也没有一般性证明。

非循环稳定非交换有理函数。 如前文所述， $H^\infty(\mathfrak{B}_d)$ 中 NC 有理函数的循环性等价于 $\mathfrak{B}_d$-稳定性。现在，本文中的所有例子和主要定理都考察了 Q-稳定的稳定非交换有理函数，而这些函数最终都证明在 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 中具有循环性，但我们不知道这是否总是成立。

问题 6.3. 是否存在一个 $\mathbb{D}_Q$-稳定非交换有理函数，在 $H^\infty(\mathbb{D}_Q)$ 中不是左/右循环的?

非方阵自由多项式的情形。 最后，显然，我们使用自由 NGN 型不等式的技术依赖于考察方阵自由多项式，因此我们将 $M_{k\times l}(H^\infty(\mathbb{D}_Q))$ 中某些 $k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $k \neq l$ 时的循环性问题留待讨论。

致谢

我们感谢 Robert T.W. Martin、Orr Moshe Shalit 和 Jurij Volˇciˇc 提出的建议，并感谢他们就相关主题进行的有益讨论。

参考文献

[1] J. Agler、J.E. McCarthy 和 N.Y. Young。《算子分析：复分析中的希尔伯特空间方法》，第 219 卷。剑桥大学出版社，2020 年。2[2] M. Aizenman 和 G. Cipolloni。关于矩阵凸性与量子力学熵强次可加性的思考。《数学物理快报》，113(1):18，2023 年。25[3] A. Aleman、K.-M. Perfekt、S. Richter、C. Sundberg 和 J. Sunkes。Drury–Arveson 空间及其他加权 Besov 空间中的循环性。《美国数学会会刊》，377(2):1273–1298，2024 年。2[4] W.N. Anderson, Jr. 和 R.J. Duffin。矩阵的串联与并联加法。《数学分析与应用杂志》，26(3):576–594，1969 年。6, 25[5] T. Ando。正算子的 Lebesgue 型分解。《数学科学学报》（塞格德），38(3-4):253–260，1976 年。25[6] P. Arora。自由多项式的因式分解与逼近问题。博士论文，佛罗里达大学，2023 年。6, 21, 22, 24[7] P. Arora、M. Augat、M. Jury 和 M. Sargent。自由多项式的最优逼近问题。《美国数学会会刊》，152(2):455–470，2024 年。6, 21[8] J.A. Ball 和 V. Bolotnikov。《非交换函数论算子理论及其应用》，剑桥数学专著丛书第 225 卷。剑桥大学出版社，2022 年。2[9] J.A. Ball、G. Groenewald 和 T. Malakorn。保守结构化非交换多维线性系统。载于《状态空间方法的推广与应用》，《算子理论：进展与应用》第 161 卷，第 179–223 页。Birkh¨auser，2006 年。2[10] J.A. Ball、G. Marx 和 V. Vinnikov。非交换再生核希尔伯特空间。《泛函分析杂志》，271(7):1844–1920，2016 年。21[11] J.A. Ball、G. Marx 和 V. Vinnikov。非交换 Schur–Agler 类的插值与传递函数实现。载于《不同背景下的算子理论及相关应用：第 26 届 IWOTA》，第比利斯，2015 年 7 月，第 23–116 页。施普林格，2018 年。4[12] C. B´en´eteau、G. Knese、Ł. Kosi´nski、C. Liaw、D. Seco 和 A. Sola。二元变量中的循环多项式。《美国数学会会刊》，368(12):8737–8754，2016 年。2[13] L. Bergqvist。多圆盘中的循环多项式札记。《数学物理分析》，8(2):197–211，2018 年。2[14] D.P. Blecher 和 C. Le Merdy。算子代数及其模：算子空间方法。伦敦数学会专著丛书第 30 卷。克拉伦登出版社，2004 年。4[15] M. Breˇsar。《非交换代数导论》。施普林格，2014 年。10[16] J.W. Bunce。非交换算子 n-元组的模型。《泛函分析杂志》，57(1):21–30，1984 年。8[17] P.M. Cohn。《斜域：一般除环理论》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，1995 年。22

[18] P.M. Cohn。一般环中的自由理想环与局部化，第 3 卷。剑桥大学出版社，2006 年。5, 9[19] K.R. Davidson 和 D.R. Pitts。自由半群代数的不变子空间与超反身性。《伦敦数学会会刊》，78:401–430，1999 年。6, 21[20] K.R. Davidson 和 A. Wright。具有唯一预对偶的算子代数。《加拿大数学通报》，54(3):411–421，2011 年。18[21] P.A. Fillmore 和 J.P. Williams。关于算子值域。《数学进展》，7(3):254–281，1971 年。25[22] D. Goodman。二维线性移不变数字滤波器的某些稳定性。《IEEE电路与系统汇刊》，24(4):201–208，1977 年。25, 26[23] J.W. Helton、I. Klep 和 J. Volˇciˇc。自由轨迹的几何与非交换多项式的因式分解。《数学进展》，331:589–626，2018 年。5, 9, 10, 27, 28[24] J.W. Helton、S.A. McCullough 和 V. Vinnikov。非交换凸性源自线性矩阵不等式。《泛函分析杂志》，240(1):105–191，2006 年。6, 22[25] J.W. Helton 和 V. Vinnikov。集合的线性矩阵不等式表示。《纯粹与应用数学通讯》，60(5):654–674，2007 年。2[26] G. Higman。群环的单位元。《伦敦数学会会刊》，2(1):231–248，1940 年。9[27] M.T. Jury 和 R.T.W. Martin。非交换测度的勒贝格分解。《国际数学研究通知》，2022(4):2968–3030，2022 年。28[28] M.T. Jury、R.T.W. Martin 和 E. Shamovich。全福克空间中的非交换有理函数。《美国数学会会刊》，374:6727–6749，2021 年。6, 21, 24[29] D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 V. Vinnikov。《自由非交换函数理论基础》。美国数学会，2014 年。2, 3, 4[30] T. Kato。《线性算子扰动理论》，《数学科学基础》第 132 卷。施普林格出版社，柏林、海德堡，第 2 版，1980 年。26[31] G. Knese、Ł. Kosi´nski、T.J. Ransford 和 A. Sola。各向异性狄利克雷空间中的循环多项式。《数学分析杂志》，138(1):23–47，2019 年。2[32] Ł. Kosi´nski 和 D. Vavitsas。单位球中 Dirichlet 型空间里的循环多项式 $\mathbb{C}^2$。《构造性逼近》，58(2):343–361，2023 年。2[33] F. Kubo 和 T. Ando。正线性算子的平均。《数学年刊》，246(3):205–224，1980 年。25[34] P. Kumar 和 J. Sampat。交换变量与非交换变量中全纯函数的零点作为谱数据。arXiv 预印本 arXiv:2510.12718，2025 年。4[35] E.H. Lieb 和 M.B. Ruskai。量子力学熵强次可加性的证明。《数学物理杂志》，14(12):1938–1941，1973 年。25[36] M. Mironov 和 J. Sampat。联合循环多项式与极大定义域。《美国数学会会刊》，153(11):4781–4795，2025 年。2[37] J.H. Neuwirth、J. Ginsberg 和 D.J. Newman。通过 $\{f(kx)\}$ 进行逼近。《泛函分析杂志》，5(2):194–203，1970 年。1, 2[38] N. Nikolski。RH 的阴影下：希尔伯特多圆盘上的 Hardy 空间循环向量。《傅里叶研究所年刊》，62(5):1601–1626，2012 年。2[39] J.E. Pascoe。一个在行球上无界的整自由全纯函数。《算子理论杂志》，84(2):365–367，2020 年。20, 22[40] V. Paulsen。完全有界映射与算子代数，第 78 卷。剑桥大学出版社，2002 年。7[41] G. Pisier。《算子空间理论导论》。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2003 年。7[42] G. Popescu。单位球上的自由全纯函数 $B(H)^n$。《泛函分析杂志》，241(1):268–333，2006 年。2, 21[43] G. Popescu。非交换多圆域中的相似问题。《泛函分析杂志》，267(11):4446–4498，2014 年。8[44] G. Salomon、O.M. Shalit 和 E. Shamovich。非交换单位球子簇上的有界非交换解析函数代数。《美国数学会会刊》，370(12):8639–8690，2018 年。6, 21

[45] J. Sampat。《解析函数空间中的移位循环性》，载于《算子理论》，D. Alpay、I. Sabadini 和 F. Colombo 编，第 1–50 页。施普林格巴塞尔，巴塞尔，2025。2[46] J. Sampat 和 O.M. Shalit。非交换算子球的子簇上函数代数的分类。《泛函分析杂志》，288(2):110703，2025。4, 6, 11[47] J. Sampat 和 O.M. Shalit。非交换函数代数的弱-*及完全等距结构。《数学分析与应用杂志》，550(1):129552，2025。3, 4, 6, 17, 18, 19[48] D. Seco 和 R. T´ellez。加权 l^p_A 中循环性的多项式方法。《班纳赫数学分析杂志》，15(1):1，2021。2[49] O.M. Shalit 和 E. Shamovich。算子空间上矩阵的谱半径。《数学进展》，479:110449，2025。4, 5, 7, 8, 20, 22[50] J.L. Taylor。多算子泛函演算的一般框架。《数学进展》，9(2):183–252，1972。2[51] J.L. Taylor。多个非交换变量的函数。《美国数学会通报》，79:1–34，1973。2[52] D. Vavitsas 和 K. Zarvalis。单位球的 Dirichlet 型空间中的非循环性与多项式。《伦敦数学会通报》，56(12):3905–3919，2024。2[53] D. Voiculescu。自由分析问题 I： $\partial_{X:B}$ 的余代数的对偶变换。《国际数学研究通知》，2004(16):793–822，2004。2[54] J. Volˇciˇc。非交换有理函数的定义域。《线性代数及其应用》，516:69–81，2017。22, 23

数学系，曼尼托巴大学，温尼伯，加拿大
电子邮件地址：Jeet.Sampat@umanitoba.ca

数学系，曼尼托巴大学，温尼伯，加拿大电子邮件地址：
Maximilian.Tornes@umanitoba.ca