arXiv:2603.22132v1 [math.AC] 23 Mar 2026

单元集合的二项式理想的完全交性质

作者Rodica Dinu[(1)], Francesco Navarra[(2)]

谨以此文纪念 *Ionel Bucur*（*1930—1976*）和 *Nicolae Radu*（*1931—2001*）

摘要

本文给出了这样一类单元集合的组合刻画：其内 2-子式理想是完全交。更确切地说，给定一个单元集合 $\mathcal{C}$ 及其关联的内 2-子式理想 $I_{\mathcal{C}}$，我们证明， $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是一个棋盘。

关键词：单元集合、二项式理想、完全交性质。

2020年数学主题分类：主要 05E40、13C40；次要 13P10。

1 引言

设 X 是域 K 上的一个 $m \times n$ 未定元矩阵。对于每个满足 $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$ 的整数，由 X 的所有 t 阶子式生成的理想称为 行列式理想，这一理想已得到广泛研究，并构成交换代数和代数几何中的经典课题。关于行列式理想的全面参考文献是 Bruns and Vetter [3] 的专著。

多年来，人们提出了行列式理想的若干推广，其中只考虑 t 阶子式的特定子集。当所选子式遵循某种规定的组合模式（例如梯形形状）时，便产生了一个重要例子，即 梯形行列式理想；参见 [1]。

相比之下，当 I 由 X 的任意 t 阶子式集合生成时，即使在第一个非平凡情形 $t = 2$ 中，该理想的结构也会变得复杂得多。因此，人们投入了大量精力研究由 X 的任意 2 阶子式集合生成的理想的代数性质。这一研究方向通常以组合方式展开，将此类理想解释为图或单元集合，并分析其代数性质与组合性质之间的相互作用。典型例子包括二项式边理想、由相邻 2 阶子式生成的理想，以及与单元集合相关的内 2-子式理想。关于这些二项式理想的全面论述可参见 [12]。

从交换代数的角度系统研究单元集合的内 2-子式理想，始于 [20]。给定一个单元集合 $\mathcal{C}$，可将其与由其内 2-子式在多项式环 $S_{\mathcal{C}} = K[x_a$ 中生成的二项式理想 $I_{\mathcal{C}}$ 联系起来：$a \in V(\mathcal{C})]$, 其中， $V(\mathcal{C})$表示 $\mathcal{C}$ 的顶点集， K 为一个域。商环 $K[\mathcal{C}] = S_{\mathcal{C}}/I_{\mathcal{C}}$ 称为 $\mathcal{C}$的坐标环。

一个核心问题是，如何判定这类理想何时为素理想 或根理想，并根据其底层单元格集合的组合结构描述其主分解和高度

。在这一方向上已取得显著进展；代表性结果请参见 [4, 5, 16, 18, 22, 25] 。

最近，一条新的研究路线应运而生，旨在用车理论不变量来描述诸如坐标环的希尔伯特–庞加莱级数和卡斯特努沃–芒福德正则性等不变量。有关最重要的一些成果，请参见 [7, 10, 15, 17, 19, 23, 24], 。

关于上述性质以及这些理想的其他代数和同调性质的完整参考文献，其中包含约四十篇研究论文，可见于最新的综述 [21]。

在本文中，我们研究内 2-子式理想的一项迄今尚未得到讨论的性质，即 完全交 性质。

回顾一下， $K[x_1, \dots, x_n]$ 中的齐次理想 I 称为<style id='3'>完全交，如果它由齐次多项式构成的正则序列生成。等价地，这意味着当且仅当 I 是完全交时，

$$\mu(I) = \operatorname{ht}(I),$$

其中

- $\mu(I)$表示 I的最小齐次生成集的基数，而
- $\operatorname{ht}(I)$表示 I的高度。

本文将始终采用这一数值刻画。关于完全交的更多背景知识，请参阅 [2]。

本文的主要目标是对那些内 2-子式理想为完全交的单元格集合给出组合刻画。

本文结构如下。第 2 节回顾单元格集合及其相关二项式理想的必要背景知识。第 1 节致力于证明我们的主要刻画定理，即定理 3.1。该定理指出，单元格集合 $\mathcal{C}$ 的内 2-子式理想是完全交，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是棋盘。粗略地说，棋盘由顶点对顶点相连的单元格组成（见图1(b)）。我们首先在命题 3.2 中证明一个充分条件：构造一个合适的单项式序，使得棋盘的内 2-子式理想的生成元集合构成一个约化 Gröbner 基。随后，我们利用命题 3.3 中给出的上界 $\operatorname{ht}(I_{\mathcal{C}}) \leq |\mathcal{C}|$ ，对任意单元格集合 $\mathcal{C}$成立，从而在命题 3.4 中证明一个必要条件。

2 单元集合与交换代数

本节将介绍关于单元集合及其相关的 2-子式理想的术语和记号。

设 $(i,\ j)$，$(k,\ l) \in \mathbb{Z}^2$。我们在 $\mathbb{Z}^2$ 上定义一个偏序，规定 $(i,\ j) \leq (k,\ l)$ 当且仅当 $i \leq k$ 且 $j \leq l$。对于 $a = (i,\ j)$ 和 $b = (k,\ l)$，若它们属于 $\mathbb{Z}^2$ 且满足 $a \leq b$，我们定义

$$[a, b] = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \leq m \leq k,\ j \leq n \leq l\}$$

并将其称为 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个区间 。如果 $i < k$ 且 $j < l$，则称 $[a, b]$ 为真 区间。在这种情况下，a 和 b 称为 $[a, b]$ 的对角顶点 ，点 $c = (i,\ l)$ 和

$d=(k,\ j)$ 称为反对角顶点。如果 $j=l$ （分别地， $i=k$），则称 a 和 b 处于水平 （分别地，垂直）位置。

在 $\mathbb{Z}^2$ 中，带有 $b=a+(1,\ 1)$ 的真区间 $C=[a,b]$ 被称为一个单元。点 a、 b、c 和 d 分别称为 C 的左下角、右上角、左上角和右下角。我们将 C 的顶点集和边集记为

$$V(C)=\{a,b,c,d\},\qquad E(C)=\{\{a,c\},\{c,b\},\{b,d\},\{a,d\}\}.$$

对于 $\mathbb{Z}^2$ 中的单元格集合 $\mathcal{P}$，我们设

$$V(\mathcal{P})=\bigcup_{C\in\mathcal{P}}V(C),\qquad E(\mathcal{P})=\bigcup_{C\in\mathcal{P}}E(C).$$

$\mathcal{P}$ 的秩记为 $|\mathcal{P}|$，其定义为 $\mathcal{P}$ 中单元的数量。文献中也使用以下记号：$\mathrm{rank}(\mathcal{C})$。

设 $\mathbb{Z}^2$ 中的两个单元 A 和 B 的左下角分别为 $a=(i,\ j)$ 和 $b=(k,\ l)$，并假设 $a\le b$。单元区间 $[A,B]$（也称为矩形）是 $\mathbb{Z}^2$ 中所有单元组成的集合，其中它们的左下角 $(r,\ s)$ 满足 $i\le r\le k$ 和 $j\le s\le l$。

设 $\mathcal{P}$ 为一个单元格集合。如果区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 的最小包围矩形，则意味着 $V(\mathcal{P})\subseteq[a,b]$，且不存在满足 $V(\mathcal{P})\subsetneq[a',b']\subsetneq[a,b]$ 的 $\mathbb{Z}^2$ 的真区间 $[a',b']$。

如果对于 $\mathcal{P}$ 中的任意两个单元 C 和 D，都存在一个单元序列 $\mathcal{C}:\ C=C_1,\ldots,C_m=D$，其中 $\mathcal{P}$ 中的 $V(C_i)\cap V(C_{i+1})\neq\emptyset$ 对所有 $i=1,\ \ldots,\ m-1$ 均成立，则称有限单元集合 $\mathcal{P}$ 是弱连通的。示例见图1(a)。

如果每个连通分支都由单元组成，且任意两个不同的单元至多交于一个顶点，则称一个单元集合为棋盘。示例见图1(b)。

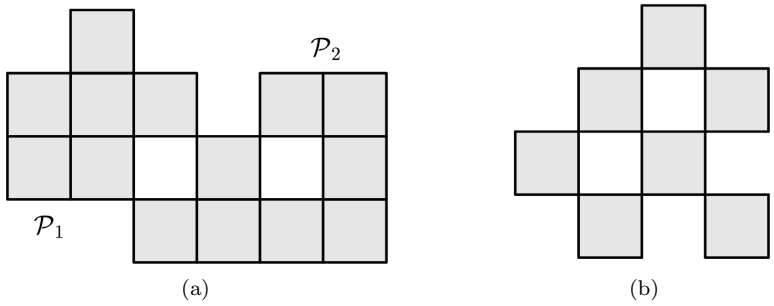

图1：弱连通的单元集合和棋盘。

设 $\mathcal{P}$ 为有限个单元的集合， $S_{\mathcal{P}}=K[x_v:\ v\in V(\mathcal{P})]$ 为与 $\mathcal{P}$相关联的多项式环，其中 K 是一个域。若真区间 $[a,b]$ 的所有单元都属于 $\mathcal{P}$，则称 $[a,b]$ 为 $\mathcal{P}$ 的内区间。若 $[a,b]$ 是 $\mathcal{P}$的一个内区间，其对角顶点为 a和 b，反对角顶点为 c和 d，则称二项式 $x_ax_b-x_cx_d$为 $\mathcal{P}$的内 2-子式。由 $\mathcal{P}$ 的所有内 2-子式生成的理想 $I_{\mathcal{P}}\subset S_{\mathcal{P}}$ 称为 $\mathcal{P}$ 的 2-子式理想。商环 $K[\mathcal{P}]=S_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}$ 称为 $\mathcal{P}$的坐标环。 $I_{\mathcal{C}}$ 的极小生成元集记作 $\mathcal{G}(I_{\mathcal{C}})$。

3 完全交性质的组合刻画

本节致力于阐述本文的主要结果，即以下刻画。

定理 3.1。 设 $\mathcal{C}$ 为单元集合。则 $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交理想，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是棋盘。

我们首先证明完全交性质的一个充分条件，该条件在命题 3.2 中给出。必要条件将在随后命题 3.4 中建立。

命题 3.2。 设 $\mathcal{C}$ 为单元集合。如果 $\mathcal{C}$ 是棋盘，那么 $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交理想。

证明。 不妨设 $\mathcal{C}$ 是弱连通的。事实上，设 $\mathcal{C}$ 分解为弱连通单元格集合 $\mathcal{C}_1$、……、$\mathcal{C}_r$，且 $V(\mathcal{C})$ 是集合 $V(\mathcal{C}_j)$ 的不交并，其中 $j = 1$、……、r。那么

$$I_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{C}_1} + \cdots + I_{\mathcal{C}_r}$$

在一个多项式环中，其变量按照顶点集的不交并进行分解。在这种情况下， $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交，当且仅当每个 $I_{\mathcal{C}_j}$ 都是完全交。因此，只需处理 $\mathcal{C}$ 是弱连通的情形。

因此，假设 $\mathcal{C}$ 是一个弱连通棋盘。我们回顾一下：如果齐次理想 I 关于某个单项式序的初始理想是完全交，那么 I 本身也是完全交。因此，我们旨在在 $S_{\mathcal{C}}$ 上定义一个合适的单项式序 $<$，使得 $\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{C}})$ 是完全交，即由一个正则序列生成；等价地，对于 $\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{C}})$ 的极小生成集中的任意一对 m_1， m_2，都有 $\gcd(m_1, m_2) = 1$。

令 $[a, b]$ 为 $\mathcal{C}$ 的最小包围矩形。不失一般性，经过适当平移后，我们可以假设 $a = (0, 0)$ 和 $b = (m, n)$。我们如下定义 $V(\mathcal{C})$ 上的全序 $<_{V(\mathcal{C})}$。

对于 $V(\mathcal{C})$ 中的 (i, j) 和 (k, l)，若满足以下条件之一，则令 $(i, j) <_{V(\mathcal{C})} (k, l)$：

1. $j < l$；或
2. $j = l$， j 为偶数，且 $i < k$；或
3. $j = l$， j 为奇数，且 $i > k$。

当 $p <_{V(\mathcal{C})} q$ 时，我们令 $<$ 表示由变量顺序 $x_p < x_q$ 在 $S_{\mathcal{C}}$ 上诱导的字典序。

例如，考虑图1 (b)中的棋盘 $\mathcal{C}'$，则 $<$ 是由下列顺序确定的字典序：

$$x_{20} < \cdots < x_1,$$

其中，顶点 $\{1, \ldots, 20\}$ 如图2 (a)所示。在图2 (b)中，对角线线段或反对角线线段表示 $I_{\mathcal{C}'}$ 的二项式生成元的首项。

一般来说，考虑 $\mathcal{C}$ 中共享一个公共顶点的两个单元。它们有两种可能的构型。

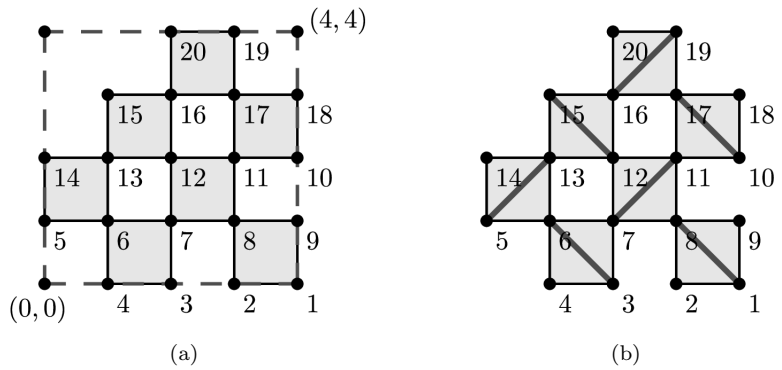

图2：棋盘顶点的排列顺序。

1. 这些单元的排列如图3所示。

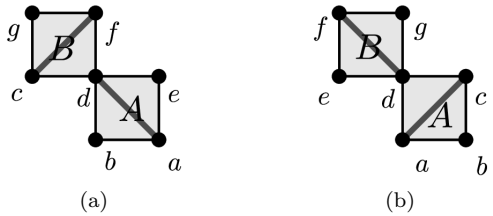

图3：棋盘一部分中的排列顺序。

如图所示，顺序 $<_{V(\mathcal{C})}$ 由 $g < f < e < c < b < a$给出。设 h_A 和 h_B 分别为 $\mathcal{G}(I_{\mathcal{C}})$中对应于 A 和 B的二项式。 h_A 和 h_B 的首项不含任何相同的变量；因此，

$$\gcd(\mathrm{in}_<(h_A), \mathrm{in}_<(h_B)) = 1.$$

2. 单元按图4所示排列。此构形是通过沿 y轴反射前一个构形得到的。情形（1）中的同一论证同样适用。

因此，对于每一对 h_1， $h_2 \in \mathcal{G}(I_{\mathcal{C}})$，我们有

$$\gcd(\mathrm{in}_<(h_1), \mathrm{in}_<(h_2)) = 1.$$

由此可知，$\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{C}})$ 是一个完全交。因此， $I_{\mathcal{C}}$ 是一个完全交。

□

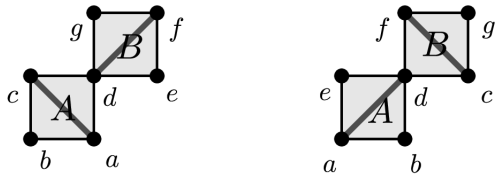

图4：棋盘的一部分中的顺序。

在确立了充分条件后，我们现在转而讨论一组单元生成完全交理想的必要条件。

我们首先比较内 2-子式理想的高度与相关单元格集合的秩，特别是证明 $\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) \leq |\mathcal{C}|$。这一不等式最近刚在 [11] 中得到确立，其依据是通过$I \subset S$ 中二项式理想 $\mathbb{Q}$的高度刻画，即利用由整数向量集合 $\{\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathbb{Q}^n : \mathbf{x}^{\mathbf{v}} - \mathbf{x}^{\mathbf{w}} \in I\}$张成的 $\mathbb{Q}$-向量空间的维数。这里，我们给出一个简短直接的证明，证明与 $\mathcal{C}$ 相关的适当格理想是 $I_{\mathcal{C}}$的一个极小素理想。

我们首先回顾单元格集合的格理想的定义，该定义见于 [20]。

设 $\mathcal{C}$ 是一个单元格集合。对于每个 $a \in V(\mathcal{C})$，记 $\mathbf{v}_a$ 为 $\mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$中的向量，其在由 a 索引的坐标上取 1，在所有其他坐标上取 0。若 $C = [a, b] \in \mathcal{C}$是一个单元，其对角顶点为 a，b，反对角顶点为 c，d，则设$\mathbf{v}_{[a,b]} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_d \in \mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$。我们将 $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 定义为由所有 $C \in \mathcal{C}$对应的向量 $\mathbf{v}_C$ 生成的 $\mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$ 的子格。注意， $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 的秩等于 $|\mathcal{C}|$。令 $n = |V(\mathcal{C})|$。对于 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$，我们用 $x^{\mathbf{v}}$ 表示 $S_{\mathcal{C}}$ 中以 $\mathbf{v}$ 为指数向量的单项式。对于 $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^n$，用 $\mathbf{e}^+$ 表示将 $\mathbf{e}$ 中所有负分量替换为零后得到的向量，用 $\mathbf{e}^- = -(\mathbf{e} - \mathbf{e}^+)$表示相应的非正部分。令 $L_{\mathcal{C}}$ 为 $\Lambda_{\mathcal{C}}$的格理想，即 $S_{\mathcal{C}}$中的以下二项式理想：

$$L_{\mathcal{C}} = (\{x^{\mathbf{e}^+} - x^{\mathbf{e}^-} \mid \mathbf{e} \in \Lambda_{\mathcal{C}}\}).$$

给定单元格集合 $\mathcal{C}$，理想 $L_{\mathcal{C}}$ 是一个素理想，参见 [20, 第 288] 页。此外， [20, 中的定理 3.6] 证明， $I_{\mathcal{C}}$ 是素理想当且仅当 $I_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{C}}$。

命题 3.3。 设 $\mathcal{C}$ 为单元格集合。则 $L_{\mathcal{C}}$ 是 $I_{\mathcal{C}}$的一个极小素理想。此外，$\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) \leq |\mathcal{C}|$。

证明。 假设存在一个满足 $I_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq L_{\mathcal{C}}$的素理想 $\mathfrak{p}$ 。我们证明$L_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p}$。

设 $f \in L_{\mathcal{C}}$。用 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 表示由所有形如 $x_a x_b - x_c x_d$ 的二项式生成的 $S_{\mathcal{C}}$ 理想，其中 $[a, b]$ 是 $\mathcal{C}$的一个单元， c， d 是其反对角顶点。根据定义，有 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq I_{\mathcal{C}}$。根据 [14, 命题 1.1],

$$L_{\mathcal{C}} = I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) : \left(\prod_{a \in V(\mathcal{C})} x_a \right)^{\infty}.$$

因此，存在一个单项式 $u \in S_{\mathcal{C}}$，使得 $uf \in I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$，从而 $uf \in I_{\mathcal{C}}$。由于 $I_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p}$，我们得到 $uf \in \mathfrak{p}$。

设 $f \notin \mathfrak{p}$。由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想且 $uf \in \mathfrak{p}$，可得 $u \in \mathfrak{p}$。$\mathfrak{p}$ 的素性进而迫使一个整除 u 的变量属于 $\mathfrak{p}$。

另一方面，包含关系 $\mathfrak{p} \subseteq L_{\mathcal{C}}$ 意味着这个变量也属于 $L_{\mathcal{C}}$。这是不可能的，因为 $L_{\mathcal{C}}$ 不含任何变量。矛盾表明 $f \in \mathfrak{p}$，因此 $L_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p}$。

由 [9, 定理 2.1(b)] 可知，对于格 Λ，其格理想 L_Λ 的高度等于 Λ的秩。在当前情形下，$\Lambda_{\mathcal{C}}$ 的秩等于 $|\mathcal{C}|$。因此，

$$\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) \leq \mathrm{ht}(L_{\mathcal{C}}) = |\mathcal{C}|,$$

如所需。 □

值得强调的是，单元集合的内 2-子式理想高度的给定上界是紧的。我们预期等号成立，即 $\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) = |\mathcal{C}|$（见 [8, 猜想 3.7]），而且这一结论已对若干类单元集合得到证明（见 [6, 8, 13]）。

现在我们可以证明这一必要条件：如果 $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交—
se—，那么 $\mathcal{C}$ 必须是棋盘。

命题 3.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单元格集合。若 $I_{\mathcal{C}}$ 是完全交理想，则 $\mathcal{C}$ 是棋盘。

证明。 假设 $\mathcal{C}$ 不是棋盘，那么如图 5 所示（至多相差一次旋转），$\mathcal{C}$ 中存在两个共用一条边的单元。

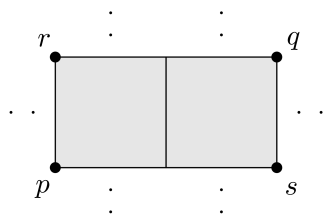

图 5：两个共用一条边的单元

那么 $I_{\mathcal{C}}$ 的极小生成元个数严格大于 $|\mathcal{C}|$，因为 $\mathcal{G}(I_{\mathcal{C}})$ 包含

$$\{x_p x_q - x_r x_s\} \cup \{x_a x_b - x_c x_d : [a,b] \text{ is a cell of } \mathcal{C} \text{ with anti-diagonal corners } c, d\}.$$

因此 $\mu(I_{\mathcal{C}}) > |\mathcal{C}|$。另一方面，根据命题 3.3，我们有 $\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) \leq |\mathcal{C}|$。因此可得

$$\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}}) < \mu(I_{\mathcal{C}}),$$

因此，$I_{\mathcal{C}}$ 不是完全交，这与 $I_{\mathcal{C}}$是完全交的假设相矛盾。

□

致谢*RD*获得了洪堡回归奖学金以及教育与研究部*CNCS-UEFISCDI*的资助，项目编号为*PN-IV-P2- 2.1-BSM-2024-0022*，项目属于*PNCDI IV*。*FN*获得土耳其科学技术研究理事会*TUBITAK*的资助，资助编号为：*124F113*，并感谢¨ ´*TUBITAK*给予的支持。*FN*是*INDAM-GNSAGA*的成员，并感谢其提供的支持。

参考文献

[1] A. Conca, J. Herzog, 梯形行列式环具有有理奇点, 《Advances in Mathematics》132 (1997), 120–147.[2] W. Bruns, J. Herzog, 科恩–麦考利环, 剑桥大学出版社, 1993.[3] W. Bruns, U. Vetter, 行列式环, 《数学讲义》1327, Springer, 1988.[4] C. Cisto, F. Navarra, 闭路径多米诺方格的素性, 《代数及其应用杂志》22 (2023), 2350055.[5] C. Cisto, F. Navarra, R. Utano, 弱连通单元格集合及弱闭路径多米诺方格的素性, 《伊利诺伊数学杂志》66 (2022), 545–563.
[6] C. Cisto, F. Navarra, D. Veer, 多米诺集合理想及多米诺理想的主分解, 《代数杂志》641 (2024), 498–529.[7] R. Dinu, F. Navarra, 网格多米诺方格的车多项式, arXiv:2309.01818, 即将在《离散数学》发表。[8] R. Dinu, F. Navarra, K¨onig型非简单多连通方格图及其典范模, 《代数杂志》673 (2025), 351–384.
[9] D. Eisenbud, B. Sturmfels, 二项式理想, 《杜克数学杂志》84 (1996), 1–45.
[10] V. Ene, J. Herzog, A. A. Qureshi, F. Romeo, L-凸多米诺方格的正则性与戈伦斯坦性质, 《电子组合学杂志》28 (2021), #P1.50.[11] J. Herzog, T. Hibi, S. Moradi, 与有限单元格集合相关的二项式理想, 《通信代数》 (2024), 52(11), 4666–4670.[12] J. Herzog, T. Hibi, H. Ohsugi, 二项式理想, 《数学研究生教材》279, Springer, 2018.[13] J. Herzog, A. A. Qureshi, A. Shikama, 平衡多米诺方格的Gr¨obner基, 《数学新闻》288 (2015), 775–783.[14] S. Hoşten, J. Shapiro, 格基理想的主分解, 《符号计算杂志》29 (2000), 625–639。

[15] R. Jahangir, F. Navarra, 可剖分单纯复形与框架多连通方格图的切换车多项式, 《纯粹与应用代数杂志》228 (2024), 107576.[16] M. Koley, N. Kotal, D. Veer, 多连通方格图与Knutson理想, arXiv:2411.16364 (2024).[17] M. Kummini, D. Veer, 某些多连通方格图的 h-多项式与车多项式, 《电子组合学杂志》30 (2023), #P2.6. [18] C. Mascia, G. Rinaldo, F. Romeo, 多重连通多连通方格图的素性, 《伊利诺伊数学杂志》64 (2020), 291–304.[19] F. Navarra, 非简单多连通方格图的可剖分旗单纯复形, 《意大利数学联合会通报》 (2025), 专辑：第二届UMI博士生会议。[20] A. A. Qureshi, 由二阶子式生成的理想、单元集合与堆叠多连通方格图, 《代数杂志》357 (2012), 279–303. [21] F. Navarra, A. A. Qureshi, 多连通方格图理想理论的最新进展, 《伽罗瓦代数杂志》1 (2025).[22] A. A. Qureshi, T. Shibuta, A. Shikama, 简单多连通方格图是素的, 《交换代数杂志》9 (2017), 413–422.[23] A. A. Qureshi, G. Rinaldo, F. Romeo, 平行四边形多连通方格图的希尔伯特级数, 《数学科学研究》9 (2022), 28.[24] G. Rinaldo, F. Romeo, 简单薄多连通方格图的希尔伯特级数, 《代数组合学杂志》54 (2021), 607–624. [25] L. Zheng, J. Guo, T. Wu, 内 2-子式理想为素理想的非简单单元集合 II, 《代数组合学杂志》63 (2026), 15. (1) 罗马尼亚科学院数学研究所，Calea Grivitei 21, 010702，布加勒斯特，罗马尼亚 电子邮箱：rdinu@imar.ro (2) 萨班哲大学，工程与自然科学学院，Orta Mahalle，图兹拉

34956，土耳其伊斯坦布尔
电子邮件：francesco.navarra@sabanciuniv.edu