arXiv:2603.22162v1 [math.OA] 23 Mar 2026

酉共轭群胚作为 Baum–Connes 组装映射的普适中介

Shih-Yu Chang *

2026年3月24日

摘要

我们证明，Baum–Connes 组装映射可通过酉共轭群胚作规范分解；对于与给定变换群胚 Morita 等价的群胚模型而言，酉共轭群胚充当普适中介。这在 K 理论层面建立了基于群胚的指标理论与 Baum–Connes 纲领之间的结构性联系。在此前对酉共轭群胚及其相关指标理论的研究基础上，我们将 K_1 指标框架从 I型情形拓展到非 I 型例子，包括无理旋转代数和可 amenable 交叉积。借助 Morita 等价，我们将酉共轭群胚与变换群胚及作用群胚联系起来，从而能够将下降型指标构造迁移到这些情形中。我们的主要结果表明，在所有与某个变换群胚 Morita 等价的群胚实现中，通过酉共轭群胚作分解在 K 理论层面是规范的。这确立了酉共轭群胚作为 Baum–Connes 组装映射的普适中介。作为应用，我们在 Connes 的意义下，重新得到无理旋转代数与迹态的经典指标配对；并证明，对于可 amenable 交叉积，在 Morita 等价下，下降构造与解析鲍姆–康恩组装映射一致。这些结果从交叉积代数的内部对称性角度，为组装映射提供了概念解释，并通过群胚方法提出了一个将 Fredholm型指标数据与等变 K 理论相联结的统一框架。

目录

1 引言 **5**

1.1 推广至非 I 型代数的必要性.5 1.2 为什么选择无理旋转代数和可 amenable 交叉积？.5 1.3 本文的主要结果与贡献.6 1.4 普适中介定理.6 1.5 本文概要.7 1.6 记号与约定.7

2 预备 知识：交叉积、群胚 C* 代数与 Baum–Connes 猜想 re 7

2.1 交叉积与变换群胚.7 2.2 无理旋转代数.11 2.3 变换群胚及其 C^*-代数.12

*Shih-Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮件：shihyu.chang@sjsu.edu）

2.4 Renault 的 Cartan 子代数与 Weyl 群胚.18 2.5 Baum–Connes 组装映射：简要回顾.21 2.6 可 amenable 群与 K-可 amen 性.23 2.7 无理旋转代数的 Connes 指标定理.26

3 Morita 等价　性与酉共轭群胚 3 **1**

3.1 论文 I 的局限：I 型假设.31 3.2 群胚与 C^*-代数的 Morita 等价.36 3.3 一般原理：超越 I 型情形的群胚模型.39 3.4 方法论：通过 Morita 等价而非直接定义来计算 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 43

4 案例研究 I：无 理旋转代数 $A_\theta = C\left(S^1\right) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ **47**

4.1 A_θ 的定义与基本性质.47

4.1.1 交叉积定义.48 4.1.2 泛表示.48 4.1.3 基本结构性质.49 4.1.4　K 理论与典范配对.51 4.1.5 与变换群胚的关系.52 4.2 A_θ 中的极大交换子代数与特征.53 4.2.1 典范 Cartan 子代数.54 4.2.2 典范极大阿贝尔子代数的特征.55 4.2.3 其他自然极大阿贝尔子代数.55 4.3 特征与对偶空间.55 4.4 谱子空间与环面作用.56 4.5 交换上下文与相关单位空间数据.57 4.6 与变换群胚的关系.58 4.7 典范交换数据与相关底空间.58 4.8 旋转作用的极小性.61 4.9 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 之间的 Morita 等价.65 4.10 对角嵌入 $\iota: A_\theta \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$：启发与局限.73 4.11 A_θ 中可逆元的等变 K^1 类.81 4.11.1 可逆元与 $K_1(A_\theta)$.81 4.11.2 约化到酉元情形.82 4.11.3 单位空间模型上的希尔伯特模.82 4.11.4 诱导 A_θ作用与 Kasparov 循环.83 4.11.5 与指标理论的关系.84 4.11.6 与酉元关联的算子场.84 4.11.7 典范生成元的显式算子场.86 4.11.8 与对角系数的启发式关系.87 4.11.9 迈向下降构造（计划展望）.87 4.11.10 已取得成果总结.88 4.12 下降映射与识别 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta \otimes \mathcal{K}$ .88 4.12.1 群胚的 Kasparov 下降.88 4.12.2 通过正则表示的显式描述.89 4.12.3 与 $A_\theta \otimes \mathcal{K}$ 的 Morita 等价.89 4.12.4　K 理论识别.90 4.12.5 解释.91 4.13 恢复 Connes 指标配对 .92

4.13.1 A_θ 上的典范迹.92 4.13.2 Connes 指数定理.92 4.13.3 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的迹.92 4.13.4 主恢复定理.93 4.13.5 案例研究 I 的主定理.94 4.14 典范生成元 $U \in A_\theta$：显式计算.94 4.14.1 U 的等变类.94 4.14.2 下降与 Morita 识别.95 4.14.3 迹配对计算.95 4.14.4 解释.95 4.14.5 总结.95 4.15 案例研究 I 结论.96

5 案例研究 II：可和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 965.1 假设： Γ 离散可容许、 X 紧豪斯多夫.96 5.1.1 动力系统.96 5.1.2 交叉积代数.97 5.1.3 可和性假设.97 5.1.4 变换群胚.98 5.1.5 Cartan 子代数结构.99 5.1.6 酉共轭群胚的推论.99 5.1.7 常设假设总结.100 5.1.8 与本文的相关性.100 5.1.9 案例研究 II 其余部分概述.100 5.2 $C(X) \rtimes \Gamma$ 中的交换子代数与特征.101 5.2.1 典范交换子代数.101 5.2.2 $C(X)$的特征.102 5.2.3 与群作用的相互作用.102 5.2.4 共轭极大阿贝尔子代数及其特征.102 5.2.5 交叉积内部的交换上下文.103 5.2.6 单位空间参数化.103 5.2.7 单位空间的拓扑.104 5.2.8 几何解释.105 5.2.9 例子.105 5.2.10 总结与展望.106 5.3 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与作用群胚 $X \rtimes \Gamma$ 之间的关系.106 5.3.1 变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ .107 5.3.2 特征与求值映射.107 5.3.3 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的单位空间中的点.107 5.3.4 从 $X \rtimes \Gamma$ 到 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的自然映射.108 5.3.5 扩展到共轭极大阿贝尔子代数.109 5.3.6 几何解释.109 5.3.7 概念解释.109 5.3.8 与单位空间参数化的关系.110 5.3.9 总结.110 5.4 Morita 等价定理： $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$ .111 5.4.1 回顾两个群胚.111 5.4.2 群胚对应.112

5.4.3 主定理陈述.112 5.4.4 C^*-代数的推论.113 5.4.5 与对角嵌入的关系.114 5.4.6 与正则表示的联系.117 5.4.7 几何解释.117 5.4.8 在指标理论框架中的作用.118 5.4.9 总结.118 5.5 对角嵌入与正则表示.119 5.6 $C(X)$中可逆元的等变 K^1-类.120 5.7 下降映射与识别 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$.120 5.8 下降-指标图与Baum–Connes组装映射.125 5.8.1 回顾下降构造.125 5.8.2 Morita 等价及其推论.126 5.8.3 Baum–Connes 组装映射.126 5.8.4 下降-指标图.126 5.8.5 主定理.127 5.8.6 解释与推论.129 5.8.7 带迹配对的下降—组装交换图.129 5.8.8 几何解释.130 5.8.9 与无理旋转代数的关系.131 5.8.10 总结.131 5.9 交换性定理：我们的复合等于组装映射.132 5.10 含义与推论.132

6 综合：指标理论的统一视角 135

6.1 酉共轭群胚：分析与拓扑之间的桥梁 . . . . . 135 6.2 与 Cartan 对的 Renault 的 Weyl 群胚比较.144 6.3 可 amen 性与 K-可 amen 性的作用.149 6.4 为什么 K_1 和边界映射具有普适性.151 6.5 下降–指标–迹三角.154

7 酉共轭　　共轭群胚：Baum–Connes 猜想的类比 159

7.1 猜想.159 7.2 与经典 Baum–Connes 猜想的关系.159 7.3 来自例子的证据.159 7.4 开放问题与未来方向.160

A 交叉引用补充说明 160

1 引言

主要定理的基本假设

除非另有明确说明，所有群胚均假定为第二可数、局部紧，并在涉及约化群胚 C^*-代数或群胚等变 KK-理论时配备 Haar 系统。所有 C^*-代数均假定为可分。在交叉积应用中，群 Γ 取为离散且可 amenable；当使用紧豪斯多夫空间上的作用来识别相关 Morita 模型时，假定这些作用是拓扑自由的。

算子代数的指标理论为分析、拓扑与几何之间搭建了一座强有力的桥梁。自 Connes [6] 和 Connes–Skandalis [8], 的开创性工作以来，群胚已成为在非交换几何中表述指标定理的自然框架。尤其是，群胚C^*代数为源自动力系统、叶状结构和群作用的一大类算子代数提供了几何模型。

在论文 I [1], 中，我们构造了与一个可分含幺C^*代数 $\mathcal{A}$ 相关联的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ ，并确立了其基本的拓扑和结构性质。在论文 II [2], 中，我们利用该群胚为 Fredholm 型算子建立了一个 K_1指标框架。特别地，对于典型的 I 型代数 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，与可逆算子相关联的等变 K_1类可经由群胚 C^*代数下降，从而恢复经典 Fredholm 指标。

本文的目标是将这一框架扩展到真正的非 I 型 C^*代数。我们的主要例子是无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

由 Rieffel [11], 引入；更一般地，还包括如下形式的可和交叉积

$$C(X) \rtimes \Gamma,$$

其中 Γ 是一个离散可和群，它作用于一个紧豪斯多夫空间 X上。

1.1 扩展到非 I 型代数的必要性

酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在 I 型 C^*代数中表现良好，但非交换几何中的许多核心例子都不属于这一类。值得注意的是，无理旋转代数 A_θ 是单、核且非 I 型的，但它在非交换几何中发挥着基础性作用 [6]。同样，由群作用产生的交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$也构成了一大类非 I 型算子代数。

虽然在这些情形下已无法使用论文 I 中酉共轭群胚的直接构造，但这类代数可通过 Renault [9]意义下与 Cartan 子代数相关的群胚获得自然几何模型。这表明，如果相关群胚能够通过 Morita 等价联系起来，那么论文 II 中发展出的下降指标工具或许仍然适用。确立这种联系构成了本文的核心目标。

1.2 为什么是无理旋转代数和可和交叉积?

无理旋转代数 A_θ 是非 I 型 C^*代数中最简单、最基础的例子。它可以自然地实现为变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$的群胚 C^*代数，其 K理论与 Connes 非交换指标定理 [6]密切相关。

更一般地，与离散群作用相关的交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 可以用变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 来作几何描述。对于这些群胚，Baum–Connes 组装映射

$$\mu_\Gamma : K_*^\Gamma(X) \longrightarrow K_*(C(X) \rtimes \Gamma)$$

在将动力系统的拓扑不变量与相关算子代数的解析不变量 [12–14] 联系起来的过程中发挥着核心作用。因此，这些例子为将酉共轭群胚框架扩展到非 I 型情形提供了天然的试验场。

1.3 本文的主要结果与贡献

本文的主要贡献是，在论文 I 和 II 中发展的酉共轭群胚框架与可和交叉积的 Baum–Connes 组装映射之间建立直接联系。

更准确地说，我们证明了以下结果。

- 对于无理旋转代数 A_θ，酉共轭群胚与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$Morita 等价。

- 利用这一等价，论文 II 的下降构造可推广到 A_θ，并重现 $K_1(A_\theta)$ 与典范迹之间的 Connes 指标配对。

- 对于一般交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，其中 Γ 离散且可 amenable，与$C(X) \rtimes \Gamma$ 相关的群胚与作用群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。

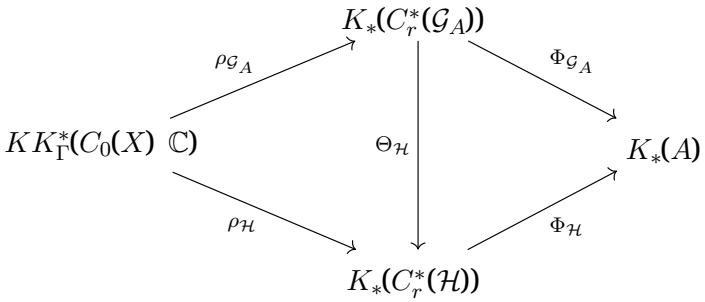
- 在这一等价下，由酉共轭群胚定义的下降映射与解析 Baum–Connes 组装映射一致。

这些结果在论文 I 和 II 中引入的基于群胚的指标理论与 Baum–Connes 纲领之间建立了概念桥梁。

1.4 普适中介定理

本文的重大成果是定理 4.2，它确立了酉共轭群胚的泛性质。我们证明，在所有与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价的群胚模型中，经由 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 对 Baum–Connes 组装映射进行的分解是典范且普适的。

更准确地说，令 Fact(X, Γ) 表示由三元组 ($\mathcal{H}$, $\rho_{\mathcal{H}}$, $\Phi_{\mathcal{H}}$) 组成的类，其中 $\mathcal{H}$ 是与 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价的群胚， $\rho_{\mathcal{H}}$ 是从等变 KK 理论到 $K_*(C_r^*(\mathcal{H}))$ 的实现映射，而 $\Phi_{\mathcal{H}}$ 是从 $K_*(C_r^*(\mathcal{H}))$ 到 $K_*(C(X) \rtimes \Gamma)$ 的同构，且满足 $\mu_\Gamma = \Phi_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{H}}$。那么对于每个这样的对象，都存在一个典范同构 $\Theta_{\mathcal{H}}$：$K_*(C_r^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))$ $\to K_*(C_r^*(\mathcal{H}))$，使图表



可交换。正是在这一精确意义上，酉共轭群胚是普适中介者，Baum–Connes 组装映射通过它在所有与 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价的群胚模型之间分解。

这一结果代表着一次质的飞跃：它将我们的构造从一个有趣的群胚模型提升为关于组装映射本质的结构定理。酉共轭群胚并非

众多等价模型中的一个而已——它是规范源，所有其他分解都通过唯一的 K-理论同构由此产生。

备注 1（核心结论）。 与酉共轭群胚相关联的下降映射，在 *Morita* 等价下恢复了 *Baum–Connes* 组装映射，而这种分解在所有 *Morita* 等价的群胚模型中具有普适性。这为从交叉积代数的内部对称性角度几何实现组装映射提供了一种新方法，并确立了酉共轭群胚作为等变拓扑与解析 K-理论之间的规范几何中介。

1.5 论文概要

本文结构如下。

第 2 节回顾交叉积、群胚 C^*-代数、Cartan 子代数以及 Baum–Connes 组装映射所需的背景知识。

第 3 节构建 Morita 等价框架，使得酉共轭群胚可以用经典变换群胚来解释。

第 4 节将这一框架应用于无理旋转代数 A_θ，其中下降构造恢复了 Connes 的指标配对。

第 5 节将分析扩展到可和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，并确立下降映射与 Baum–Connes 组装映射之间的相容性，最终得到普适中介定理（定理 26）。

最后，第 6 节对这些结果进行概念综合，并在第 7 节提出 Baum–Connes 猜想的一种群胚类比猜想。

1.6 记号与约定

全文中， A 表示一个可分含幺的 C^*-代数， Γ 表示一个作用于紧豪斯多夫空间 X上的离散群。我们用 $C^*(G)$ 和 $C_r^*(G)$ 表示群胚 G 的满与约化 C^*- 代数。对于一个 C^*- 代数 A，其 K 理论群记作 $K_0(A)$ 和 $K_1(A)$。

需要时将引入其他记号。

注 2. 本文所提出的数学见解和理论方向均由作者独立负责。包括 *OpenAI* 的 *ChatGPT* 和 *DeepSeek* 模型在内的 *AI* 工具，仅用于协助验证想法、整理参考文献并确保论述的内在一致性 *[33, 34]*。

此外，本文中，“论文 *I*”指我们之前的工作 *[1]*, ，“论文 *II*”指我们之前的工作 *[2]*。

2 预备知识：交叉积、群胚 C*-代数与 Baum–Connes 猜想

2.1 交叉积与变换群胚

交叉积 C^*-代数为在算子代数结构中编码动力系统提供了自然框架。它们源自群 Γ 在 C^*-代数 A 上的作用 $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$，并在非交换几何中发挥核心作用，尤其是在带系数的鲍姆–康尼斯猜想的表述以及变换群胚 C^*-代数的研究中；在后者中，有 $C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes_r \Gamma$。

在本文中，交叉积是非 I 型 C^*-代数的主要且丰富的来源，我们将论文 I 中引入的酉共轭群胚构造扩展到这些代数。我们首先考虑、也是最基本的例子是无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

与圆的无理旋转 $2\pi\theta$ 相关联的典范单 C^*代数。作为一个真正的非 I 型代数，它是检验我们的构造能否超越交换和 I 型情形的关键案例。此外，在后续章节中，这类交叉积的群胚解释将使我们能够通过 Morita 等价，把酉共轭群胚框架与经典变换群胚联系起来，从而将我们的构造置于更广阔的非交换几何图景之中。

设 A 是一个含幺 C^*代数， Γ 是一个离散群。假设 $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$是 Γ 在 A 上的一个 $*$自同构作用。三元组（A、 Γ、 α）称为一个 C^*动力系统。

定义 1 （代数交叉积）。设（A、 Γ、 α）是一个 C^*动力系统，且 Γ 为离散群。代数交叉积 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 是由有限支撑函数 $x\colon \Gamma \to A$构成的 $*$代数，这些函数可写成有限和

$$x = \sum_{g\in\Gamma} a_g u_g,$$

其中 $a_g \in A$ ，且只有有限多个 a_g 非零。符号 u_g 是由 $g \in \Gamma$索引的形式生成元。

乘法和对合在初等张量上定义为

$$(au_g)(bu_h) = a\,\alpha_g(b)\,u_{gh}, \qquad (au_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(a^*)\,u_{g^{-1}},$$

并将其线性扩展到有限和，从而使 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 成为一个 $*$-代数。

等价地，可以将 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 识别为由 $*$-代数 $C_c(\Gamma,\ A)$ 中的有限支撑函数$f\colon \Gamma \to A$构成的空间，并赋予其卷积乘积

$$(f * g)(t) = \sum_{s\in\Gamma} f(s)\,\alpha_s\big(g(s^{-1}t)\big)$$

以及对合

$$f^*(t) = \alpha_t\big(f(t^{-1})^*\big).$$

注 *3*。 *</style}*符号 u_g 纯粹是形式上的；这些元素在下文讨论的 C^*-完备化中成为酉元。代数交叉积在满交叉积和约化交叉积 C^*-代数中都是稠密的。

代数交叉积有两种规范的 C^*完备化：全交叉积和约化交叉积。

定义 2 (协变表示**)**。 希尔伯特空间 H 上的协变表示 $A, \Gamma, \alpha)$ 由一个 $*$-表示 $\pi\colon A \to B(H)$ 以及一个酉表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathcal{U}(H)$ 组成，并满足

$$\rho(g)\pi(a)\rho(g)^* = \pi(\alpha_g(a)), \qquad g \in \Gamma,\ a \in A.$$

定义 3 （全交叉积）。 全交叉积 $A \rtimes_\alpha \Gamma$ 是 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 在以下范数下的完备化

$$\|x\|_{\max} = \sup\big\{\|\pi \rtimes \rho(x)\| : (\pi,\rho) \textit{ is a covariant representation}\big\}.$$

约化交叉积是利用正则协变表示定义的。

定义 4（约化交叉积）。设 $\lambda\colon\ \Gamma \to \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma))$ 为左正则表示。若$\pi\colon\ A \to B(H)$ 是任意一个忠实表示，则定义一个表示 $\tilde{\pi}\colon\ A \to B(H \otimes \ell^2(\Gamma))$ 如下：

$$\tilde{\pi}(a)(\xi \otimes \delta_g) = \pi\big(\alpha_{g^{-1}}(a)\big)\xi \otimes \delta_g, \qquad a \in A,\ \xi \in H,\ g \in \Gamma,$$

其中 $\{\delta_g\}_{g\in\Gamma}$ 表示 $\ell^2(\Gamma)$的典范正交基。再结合酉表示

$$(1 \otimes \lambda_g)(\xi \otimes \delta_h) = \xi \otimes \delta_{gh}, \qquad g, h \in \Gamma,$$

这就定义了一个在 $H \otimes \ell^2(\Gamma)$上的 协变表示$(\tilde{\pi}, 1 \otimes \lambda)$，它属于 (A, Γ, α)。

该约化 交叉积 $A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$ 是 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 关于范数

$$\|x\|_r = \|(\tilde{\pi} \rtimes \lambda)(x)\|.$$

范数 $\|x\|_r$ 与忠实表示 π的选取无关，且典范满射 $A \rtimes_{\alpha}\Gamma \to A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$ 可延拓为一个商映射。

备注 4（可 amen 性）。若 Γ 是可 *amenable* 的，则典范商映射

$$A \rtimes_{\alpha} \Gamma \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$$

是一个同构。在这种情况下，全交叉积与约化交叉积相同，我们只写作 $A \rtimes \Gamma$。这一事实将在后文发挥重要作用，因为它使我们在将构造与 *Baum–Connes* 组装映射联系起来时，可以使用约化交叉积。

当 $A = C(X)$ 是紧豪斯多夫空间 X，且 Γ 通过同胚作用于 X时，会出现一个重要的特例。对 $C(X)$ 的诱导作用为

$$(\alpha_g f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad f \in C(X),\ g \in \Gamma.$$

交叉积 $C(X) \rtimes_{\alpha} \Gamma$ 刻画了动力系统（X，Γ）。

这个代数有一个自然的几何解释，即变换群胚的 C^*-代数

$$X \rtimes \Gamma.$$

命题 1。设 Γ 是一个离散群，作用于紧豪斯多夫空间 X。那么约化交叉积典范同构于约化群胚 C^*-代数：

$$C(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma \ \cong\ C_r^*(X \rtimes \Gamma).$$

更明确地说，该同构将函数 $f \in C_c(X \rtimes \Gamma)$ 映射为有限支撑函数$\Gamma \to C(X)$，其定义为 $g \mapsto f(\cdot, g)$。

证明。变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是局部紧的 ´étale 群胚，其底层集合为$X \times \Gamma$，源映射与值域映射为

$$s(x, g) = g^{-1}x, \qquad r(x, g) = x,$$

与乘法

$$(x, g)(g^{-1}x, h) = (x, gh).$$

由于 Γ 是离散的，而 X 是紧的，空间 $C_c(X \rtimes \Gamma)$由函数 F 组成： $X \times \Gamma \to \mathbb{C}$ 在 Γ变量上具有有限支集。任意这样的函数都可以唯一地写成

$$F(x, g) = f_g(x)$$

其中 $f_g \in C(X)$，且仅有有限多个 f_g 非零。因此，我们得到一个线性同构

$$C_c(X \rtimes \Gamma) \cong C_c(\Gamma, C(X)), \qquad F \mapsto (g \mapsto f_g).$$

在此识别下，群胚卷积

$$(F * G)(x, g) = \sum_{h \in \Gamma} F(x, h)\, G(h^{-1}x, h^{-1}g)$$

变为

$$(f * g)_g = \sum_{h \in \Gamma} f_h \; \alpha_h(g_{h^{-1}g}),$$

其中， α 表示在 $C(X)$ 上的诱导作用。这恰好是代数交叉积 $C(X) \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 中的乘法，类似的计算也表明，对合同样对应。

最后，群胚 $X \rtimes \Gamma$ 在 $L^2(X \times \Gamma)$ 上的正则表示，与用于定义约化交叉积的正则协变表示一致。事实上，对每个 $x \in X$，通过固定 x ，可得到 $C_c(X \rtimes \Gamma)$ 在 $\ell^2(\Gamma)$ 上的表示；在此识别下，该表示对应于 $C(X)$ 在 x 处的求值表示与 Γ 的左正则表示的张量积。

由于 Φ 是一个关于约化范数的稠密子代数之间的等距 $*$-同构，它唯一地延拓为完备化之间的同构:

$$C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_{\alpha, r} \Gamma.$$

□

注 5. 当 Γ 可 *amenable* 时，全交叉积与约化交叉积相同，并且我们还有 $C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_\alpha \Gamma$。在这种情况下，同构可扩展到全群胚 C^*-代数。

K 理论与 Pimsner–Voiculescu 序列 由 $\mathbb{Z}$ 作用所产生的交叉积的 K 理论，可以利用 Pimsner–Voiculescu 正合列计算；这是算子 K 理论中的一项基本工具。

定理 1 （Pimsner–Voiculescu 正合列）。 设 $(A, \mathbb{Z}, \alpha)$ 是一个 C^*-动力系统。那么存在一个循环六项正合序列

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{1-\alpha_*} & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(A) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(A) \end{array}$$

其中，映射 $1 - \alpha_*$ 由自同构 α 在 K 理论上的作用诱导。

证明略。 参见 Pimsner 和 Voiculescu [3]的原始著作。关于详细论述，请读者参阅 [4,第 9] 章或 [5, 第 10 节 3]。 □

2.2 无理旋转代数

交叉积 C^*代数中最重要的例子之一是无理旋转代数，也称为非交换 2-环面。它源自最简单的非平凡动力系统：圆上的无理旋转。

例 1 （无理旋转代数）。 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为一个无理数。考虑 $\mathbb{Z}$ 在圆 S^1 上的旋转作用，其定义为

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z},\ z \in S^1.$$

这诱导出一个作用 α： $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(C(S^1))$，定义为

$$\alpha_n(f)(z) = f(n^{-1} \cdot z) = f(e^{-2\pi i n\theta} z), \qquad f \in C(S^1).$$

交叉积

$$A_\theta := C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

称为无理旋转代数 （或非交换2-环面）。由于 $\mathbb{Z}$是可 ***amenable*** 的，满交叉积与约化交叉积相同。

令 $u \in C(S^1)$表示典范酉元 $u(z) = z$，并令 v 为交叉积中实现$\mathbb{Z}$-作用的酉元。这两个酉元满足基本交换关系

$$vu = e^{2\pi i\theta} uv,$$

且 A_θ 是由两个酉元生成、满足这一关系的普适 C^*-代数。从几何上看， A_θ可视为交换环面代数 $C(\mathbb{T}^2)$ 的一种变形；当 $\theta = 0$时，它便退化为该代数。

无理旋转代数的 K理论由 Pimsner 和 Voiculescu 在其开创性工作中计算得出。

例 2 (A_θ的 K 理论**)**。将 ***Pimsner–Voiculescu*** 正合列（定理 ***1***）应用于动力系统 $(C(S^1)\ \mathbb{Z}, \alpha)$ 可得

$$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2.$$

事实上， $C(S^1)$ 的 K理论为 $K_0(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ （由单位元的类生成），而 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ （由恒等函数 u的类生成）。由于作用 α 由旋转诱导， K理论上的诱导映射在 K_0 和 K_1上均满足 $\alpha_* =$ 恒等映射 。因此，***Pimsner–Voiculescu*** 六项正合列分解为短正合列，从而得到上述结果。

典范生成元为：

- 在 $K_1(A_\theta)$ 中：两个酉元 $[u]$和 $[v]$ 的类；
- 在 $K_0(A_\theta)$ 中：单位元的类 $[1_A]$ 以及 ***Rieffel–Power*** 投影 $[p_\theta]$ 的类，该投影满足 $\tau(p_\theta) = \theta$，其中 A_θ 上的唯一迹态为 τ。

$K_0(A_\theta)$ 上迹的像因此为 $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$，这是实数 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子群。

该代数在非交换几何中发挥着核心作用，也是指标理论的基本检验案例；参见 [6] 和 [7]。

本文中的作用 交叉积为群作用、变换群胚与等变 K理论提供了自然的联系。特别是，当离散群 Γ 在紧豪斯多夫空间 X上连续作用时，交叉积 $C(X) \rtimes_\alpha \Gamma$ 与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的群胚 C^*代数典范同构（命题 1）。

在接下来的各节中，我们将与此交叉积相关联的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma}$ 与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$进行比较。这一比较得出了一个 Morita 等价

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$$

（定理 19），使我们能够将论文 II 中发展的下降指标工具推广到非 I 型情形。

这一比较的主要结果是得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma})) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ KK^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_\Gamma} & K_1(C(X)\rtimes_\alpha\Gamma) \end{array}$$

其中，左侧的纵向同构由 Morita 等价诱导，右侧的纵向同构则由 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes_\alpha\Gamma) \otimes \mathcal{K}$ 得出，而 μ_Γ表示带有 $C(X)$ [24]系数的 Baum–Connes 组装映射。

特别地，我们证明，在这一 Morita 等价下，与酉共轭群胚相关联的下降映射与解析组装映射相容。当 Γ是可 amenable 的，因而全交叉积与约化交叉积相同，这种相容性便将我们的下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来，为这一基本不变量提供了一种新的几何实现。

2.3 变换群胚及其 C^*-代数

群胚为描述动力系统及其相关的算子代数提供了自然框架。特别是，离散群在拓扑空间上的作用可以编码为变换群胚。这些群胚在非交换几何中发挥着核心作用，并在交叉积 C^*-代数与群胚 C^*-代数之间架起一座几何桥梁。在本文中，它们必不可少，因为无理旋转代数 A_θ 和可 amenable 交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 都可以具体实现为变换群胚的群胚 C^*-代数；见 [9]。

变换群胚。设 Γ 是一个离散群，它通过同胚连续作用于局部紧豪斯多夫空间 X。相应的变换群胚（也称为作用群胚）定义为

$$X \rtimes \Gamma := X \times \Gamma,$$

其结构映射如下。

- **值域映射与源映射：**
$$r(x,g) = x, \qquad s(x,g) = g^{-1}x.$$
- **乘法：** 两个箭头（x，g）和（y，h）可复合，当且仅当 $s(x,g) = r(y,h)$，即 $g^{-1}x = y$。在这种情况下，
$$(x,g)(g^{-1}x,h) = (x,gh).$$

- **逆：**

$$(x,g)^{-1} = (g^{-1}x, g^{-1}).$$

- **单位空间：**单位空间自然地通过以下方式与 X 识别

$$x \mapsto (x,e),$$

其中 e 表示 Γ 的单位元。

在拓扑上，$X \rtimes \Gamma$ 配备积拓扑，其中 Γ 赋予离散拓扑。因此，$X \rtimes \Gamma$ 是一个局部紧 Hausdorff 群胚。

该 ´étale 性质。一个关键特征是，$X \rtimes \Gamma$ 是一个 ´étale 群胚。事实上，对于每个固定的 $g \in \Gamma$，子集 $X \times \{g\}$ 在积拓扑中是开集，且源映射的限制

$$s|_{X\times\{g\}} : X \times \{g\} \longrightarrow X$$

是一个同胚（其逆映射为 $x \mapsto (gx,\ g)$）。因此，源映射 $s\colon X \rtimes \Gamma \to X$ 是一个局部同胚。

这种 ´étale 性质对相关算子代数有重要影响。卷积代数 $C_c(X \rtimes \Gamma)$ 具有特别简单的结构，而约化群胚代数 $C_r^*(X \rtimes \Gamma)$ 带有一个映到 $C_0(X)$ 的典范忠实条件期望，该期望通过将函数限制在单位空间上给出。

注 6. 此处采用的约定 $r(x,g) = x$, $s(x,g) = g^{-1}x$ 旨在与交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$中的标准卷积公式保持一致。根据此约定，群胚C^*-代数的一个元素对应于函数 $f\colon X \times \Gamma \to \mathbb{C}$，卷积乘积则变为

$$(f_1 * f_2)(x,g) = \sum_{h\in\Gamma} f_1(x,h)\, f_2(h^{-1}x, h^{-1}g),$$

这与交叉积乘法相符。

群胚 C^*-代数。设 $G = X \rtimes \Gamma$ 为变换群胚。卷积代数 $C_c(G)$ 由紧支撑连续函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$构成。

对于 $f_1,\ f_2 \in C_c(G)$，卷积乘积定义为

$$(f_1 * f_2)(x,g) = \sum_{h\in\Gamma} f_1(x,h)\, f_2(h^{-1}x, h^{-1}g),$$

对合定义为

$$f^*(x,g) = \overline{f(g^{-1}x, g^{-1})}.$$

这些运算使 $C_c(G)$ 成为一个 $*$-代数。

完整群胚 C^*-代数 $C^*(G)$ 是关于泛范数的 $C_c(G)$ 的完备化

$$\|f\|_{\max} = \sup\big\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ is a } *\text{-representation of } C_c(G)\big\}.$$

约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(G)$ 通过正则表示来定义。对于每个 $x \in X$，定义一个表示 $\pi_x\colon C_c(G) \to B(\ell^2(\Gamma))$，如下所示

$$(\pi_x(f)\xi)(g) = \sum_{h\in\Gamma} f(x,h)\, \xi(h^{-1}g), \qquad \xi \in \ell^2(\Gamma),\ g \in \Gamma.$$

约化范数定义如下

$$\|f\|_r = \sup_{x\in X} \|\pi_x(f)\|,$$

而 $C_r^*(G)$ 是关于此范数对 $C_c(G)$ 完备化所得。等价地， $C_r^*(G)$ 也可以通过关于任意准不变测度对表示 π_x 在 X上的直积分所诱导的范数，对 $C_c(G)$ 完备化得到；这两种定义等价，因为对 x 取上确界与关于任意此类测度取本质上确界相同。

注 7。 上述公式与第 *2.3* 节采用的约定 $r(x,g) = x$, $s(x,g) = g^{-1}x$ 一致。在此约定下，卷积乘积与交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$中的乘法相对应，而对合则对应于群胚代数中的通常 $*$-运算。

与交叉积的关系 对于离散群作用所对应的变换群胚，这些构造有一种尤为具体且重要的描述。

命题 2。 设 Γ是一个离散群，它通过同胚作用于局部紧豪斯多夫空间 X ，并令 α 表示 Γ在 $C_0(X)$上的诱导作用。那么存在一个典范同构

$$C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

更准确地说，该同构由映射 Φ： $C_c(X \rtimes \Gamma) \to C_c(\Gamma, C_0(X))$ 实现，其定义如下

$$\Phi(f)(g)(x) = f(x,g), \qquad f \in C_c(X \rtimes \Gamma),\ g \in \Gamma,\ x \in X.$$

证明。 设 $G = X \rtimes \Gamma$ 为变换群胚。由于 Γ 是离散的，每个函数 $f \in C_c(G)$ 关于 Γ变量都具有有限支集，并且可以唯一写成

$$f(x,g) = f_g(x), \qquad g \in \Gamma,$$

其中每个 $f_g \in C_0(X)$，且只有有限多个 f_g 非零。因此，上文定义的赋值 Φ是一个线性双射。

我们断言 Φ 是一个 $*$代数同构。回顾一下，对于具有如下源映射与值域映射的变换群胚

$$r(x,g) = x, \qquad s(x,g) = g^{-1}x,$$

$C_c(G)$上的卷积乘积定义为

$$(f_1 * f_2)(x,g) = \sum_{h\in\Gamma} f_1(x,h)\, f_2(h^{-1}x, h^{-1}g),$$

而对合定义为

$$f^*(x,g) = \overline{f(g^{-1}x, g^{-1})}.$$

另一方面，代数交叉积 $C_0(X) \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 可与 $C_c(\Gamma,\ C_0(X))$ 等同，并赋予卷积乘积

$$(F_1 * F_2)(g) = \sum_{h\in\Gamma} F_1(h)\ \alpha_h\big(F_2(h^{-1}g)\big)$$

和对合

$$F^*(g) = \alpha_g\big(F(g^{-1})^*\big).$$

乘积的验证。对于 $f_1,\ f_2 \in C_c(G)$，令 $F_i = \Phi(f_i)$。根据诱导作用的定义（$(\alpha_h(\varphi))(x) = \varphi(h^{-1}x)$，我们计算得：

$$\begin{aligned}\big(F_1 * F_2\big)(g)(x) &= \sum_{h\in\Gamma} F_1(h)(x)\ \alpha_h\big(F_2(h^{-1}g)\big)(x)\\ &= \sum_{h\in\Gamma} f_1(x,h)\ F_2(h^{-1}g)(h^{-1}x)\\ &= \sum_{h\in\Gamma} f_1(x,h)\ f_2(h^{-1}x, h^{-1}g)\\ &= (f_1 * f_2)(x,g) = \Phi(f_1 * f_2)(g)(x).\end{aligned}$$

因此 $\Phi(f_1 * f_2) = \Phi(f_1) * \Phi(f_2)$。

对合的验证。同样地，

$$\Phi(f^*)(g)(x) = f^*(x,g) = \overline{f(g^{-1}x, g^{-1})} = \overline{\Phi(f)(g^{-1})(g^{-1}x)}.$$

另一方面，

$$\Phi(f)^*(g)(x) = \big(\alpha_g(\Phi(f)(g^{-1})^*)\big)(x) = \Phi(f)(g^{-1})^*(g^{-1}x) = \overline{\Phi(f)(g^{-1})(g^{-1}x)}.$$

因此 $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$，从而证明 Φ 是 $*$-代数 $C_c(X \rtimes \Gamma)$ 与 $C_0(X) \rtimes_{\mathrm{al}}$之间的同构 $_{\mathrm{g}}\,\Gamma$.

约化范数的比较。对于每个 $x \in X$，$C_c(G)$ 在 $\ell^2(\Gamma)$上的正则表示 π_x 定义为

$$(\pi_x(f)\xi)(g) = \sum_{h\in\Gamma} f(x,h)\,\xi(h^{-1}g), \qquad \xi \in \ell^2(\Gamma),\ g \in \Gamma.$$

在识别 Φ 下，这恰好是与求值表示 $\mathsf{ev}_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$相关联的代数交叉积的正则协变表示。因此，对于每个 $f \in C_c(G)$，

$$\|\pi_x(f)\| = \|(\mathrm{ev}_x \rtimes \lambda)(\Phi(f))\|,$$

其中 λ 表示 Γ的左正则表示。对 $x \in X$取上确界，得到

$$\|f\|_r = \sup_{x\in X} \|\pi_x(f)\| = \|\Phi(f)\|_r,$$

其中右侧表示 $C_0(X) \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$上的约化交叉积范数。

由于 Φ 是稠密子代数之间关于约化范数的等距 $*$-同构，因此它唯一地延拓为完备化之间的同构：

$$\Phi : C_r^*(X \rtimes \Gamma) \xrightarrow{\cong} C_0(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

证明完毕。 □

推论 1. 若 Γ 是可 *amenable* 的，则全交叉积与约化交叉积相同，并且存在一个自然同构

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes_\alpha \Gamma.$$

此外，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是可 *amenable* 的，因此其满群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数也相同：

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_r^*(X \rtimes \Gamma).$$

证明。 如果 Γ 是可 amenable 的，那么对于任意 C^*-动力系统 $(A,\ \Gamma,\ \alpha)$，典范商映射 $A \rtimes_{\alpha} \Gamma \to A \rtimes_{\alpha,\ r} \Gamma$ 是一个同构。将其应用于 $A = C_0(X)$，得到 $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \Gamma \cong C_0(X) \rtimes_{\alpha,\ r} \Gamma$。

此外，当 Γ 可 amenable 时，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 也是可 amenable 的；对于可和群胚，其全群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同（参见 [9,13]）。因此，$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_r^*(X \rtimes \Gamma)$。结合命题 2，即可得到所需的同构：

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma \cong C_0(X) \rtimes_{\alpha} \Gamma.$$

□

注 8. 同构 Φ 具有自然性，即它与由 Γ-等变映射在空间之间诱导的映射，以及与对不变子空间的限制相容。关于这些同构的详细讨论，参见 *[9, 17]*。

可 amen 性。 可 amen 性在变换群胚和交叉积的研究中发挥着重要作用，也将是本文反复讨论的主题。

这里我们不再重述局部紧群胚的可 amen 性的完整定义；我们只需用到一个标准事实：若群胚 G 是可 amen 的（按 Anantharaman-Delaroche 和 Renault 的定义 [25]），那么其全群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同：

$$C^*(G) \cong C_r^*(G).$$

若 Γ 是作用于局部紧豪斯多夫空间 X 上的可 amenable 离散群，则变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是可 amenable 的。这一观察在下文中尤为重要，因为可 amen 性使我们能够将群胚的全代数与约化代数等同起来，交叉积的全交叉积与约化交叉积也同样如此。特别地，对于可 amen 性的 Γ，我们有 $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \Gamma \cong C_0(X) \rtimes_{\alpha,\ r} \Gamma$，而根据 Tu 定理 [13]，Baum–Connes 组装映射是一个同构。

***K*-理论与 Baum–Connes 组装映射**。变换群胚为带系数的 Baum–Connes 猜想提供了自然的几何框架。对于一个 Γ-C^*-代数 A，组装映射

$$\mu_{\Gamma}^{A} : K_*^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma; A) \longrightarrow K_*(A \rtimes_r \Gamma)$$

取值于约化交叉积的 K-理论中。左侧表示等变 KK-理论群 $KK_{\Gamma}^*(C_0(E\Gamma)\ A)$，其中 $E\Gamma$ 是适当 Γ-作用的分类空间。

在特殊情形 $A = C_0(\overline{X})$ 下，对于一个 $\overline{\Gamma}$-空间 X，约化交叉积 $C_0(X) \rtimes_r \Gamma$ 可以被识别为变换群胚的约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(X \rtimes \Gamma)$（命题 2）。这一识别使我们能够将组装映射重新诠释为一种群胚理论构造；当我们在第 5 节比较 ourdescentmap 与组装映射时，这一点将至关重要。

例 3（无理旋转群胚）。 对于无理旋转代数

$$A_{\theta} = C(S^1) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z},$$

相应的变换群胚为

$$S^1 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}.$$

其单位空间是圆 S^1，其箭头是有序对 (z, n)，其中 $z \in S^1$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。按照第 *2.3* 节确立的约定，值域映射和源映射为

$$r(z, n) = z, \qquad s(z, n) = e^{-2\pi i n\theta} z.$$

等价地，也可以取 $s(z,n) = z$, $r(z,n) = e^{2\pi i n\theta} z$；文献中两种约定都有出现，而我们将始终采用前一种，以与先前的选择保持一致。

这个群胚是 *´étale*（因为 $\mathbb{Z}$ 是离散的），并且是可 *amenable* 的（因为 $\mathbb{Z}$ 是可 *amenable* 的）。它的约化（等价地，完整）群胚 C^*代数与 A_θ典范同构。

由于 θ 是无理的，$\mathbb{Z}$ 在 S^1 上的作用是自由的（每个稳定子都是平凡的），并且是极小的（每个轨道都是稠密的）。这种动力学行为反映在相应的 C^*代数结构中：A_θ 是单的，且没有非平凡理想，这是极小作用的典型特征。

注 9. 无理旋转群胚是极小 *´étale* 群胚的典型例子。它的单纯性和轨道的稠密性使其成为检验本文所发展的构造的理想试验场，正如我们在案例研究 *I*（第 *4* 节）中所见。

与本文的关系。 变换群胚为本文所考虑的交叉积提供了几何模型。在接下来的几节中，我们将比较酉共轭群胚

$$\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma}$$

与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$。

在适当的 Morita 等价下，这一比较使我们能够将与 $\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma}$ 相关的下降映射，与系数取自 $C_0(X)$ 的 Baum–Connes 组装映射联系起来：

$$\mu_\Gamma : K_*^\Gamma(X) \longrightarrow K_*(C_0(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma),$$

其中，$K_*^\Gamma(X)$ 表示 X 的等变 K-同调，更准确地说，是 $KK_\Gamma^*(C_0(X)\ \mathbb{C})$。

更具体地说，我们证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma}}\big(C_0(\mathcal{G}^{(0)}),\mathbb{C}\big) & \xrightarrow{\ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}}\ } & K_1\big(C_r^*(\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma})\big) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ KK^1_\Gamma(C_0(X),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\ \mu_\Gamma\ } & K_1\big(C_0(X)\rtimes_{\alpha,r}\Gamma\big) \end{array}$$

这里：

- 左侧的竖直同构由 Morita 等价 $\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$ 诱导（定理 19）；
- 右侧的垂直同构来自 Morita 等价 $C_r^*(\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma}) \sim_M (C_0(X)\rtimes_{\alpha,r}\Gamma) \otimes \mathcal{K}$ 以及 K-理论的稳定性；
- μ_Γ 表示系数取自 $C_0(X)$的 Baum–Connes 组装映射；根据 Tu 定理[13]，该映射被识别为变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的下降映射。

该图表在论文 I 和 II 所构建的群胚框架与 Baum–Connes 猜想的分析工具之间架起了一座概念桥梁。具体而言，它在 Morita 等价下将酉共轭群胚导出的下降映射识别为 Baum–Connes 组装映射。确立这一识别是本文的主要结构性成果之一。

备注 10 (主要结论)。 与酉共轭群胚相关联的下降映射，在 *Morita* 等价意义下恢复了 *Baum–Connes* 组装映射。这为以交叉积代数的内部对称性来描述组装映射提供了一种新的几何实现。

2.4 Renault 的 Cartan 子代数与 Weyl 群胚

正如第 3.1 节所述，无法为 A_θ 等非 I 型代数构造酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$，这表明我们需要采用不同的几何范式。Renault 理论中的 Cartan 子代数和 Weyl 群胚 [9, 10] 提供了一种强有力的替代方案。该框架表明，一大类 C^* 代数都可以从一个由特定交换子代数及其正规化子构造的 ´étale 群胚中重构出来。

Cartan 子代数

该理论始于一个交换子代数，它编码了非交换代数所选定的“经典层”。

定义 5 (Cartan 子代数)。 设 A 是一个可分的 C^*-代数。若子代数 $D \subseteq A$ 满足以下条件，则称其为 Cartan 子代数：

1. D 是 A 的极大阿贝尔自伴子代数（*MASA*）；
2. D 包含 A 的一个近似单位（若 A 含幺，这意味着 $1_A \in D$）；
3. D 是正则的，即其正规化子

$$\mathcal{N}_A(D) := \{n \in A \mid nDn^* \subseteq D \text{ and } n^*Dn \subseteq D\}$$

生成 A，使其成为一个 C^*-代数；

4. 存在一个忠实条件期望 E： $A \to D$。

满足这些条件的有序对(A, D) 称为Cartan 对。

正规化子 $\mathcal{N}_A(D)$ 是关键所在；它们实现 Cartan 子代数的对称性，$\widehat{\ }$在其 Gelfand 谱 D上充当部分自同构。条件期望 E 将代数投影到“经典”部分，对于重构定理至关重要。

例子 4 (Cartan 对的例子)。• 交换代数。 对于 $A = C_0(X)$，其中 X 是局部紧豪斯多夫的， $D = A$ 本身就是一个 *Cartan* 子代数。条件期望是恒等映射，而正规化子是 A的酉群，由连续函数 $X \to S^1$组成。

• 变换群胚（拓扑自由作用）。设 Γ是一个离散群，它作用于局部紧豪斯多夫空间 X。如果该作用是拓扑自由的（即，具有非平凡稳定子的点集内部为空），那么约化交叉积

$$A = C_0(X) \rtimes_r \Gamma$$

包含 $D = C_0(X)$ 作为 *Cartan* 子代数。条件期望

$$E\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma u_\gamma\right) = f_e$$

是忠实的，且正规化子由实现酉元 $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 以及 $C_0(X)$的酉元生成。这是源自 *Renault* 的群胚构造的一类基本例子。

• 无理旋转代数。 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为无理数。则 $\mathbb{Z}$ 通过旋转在 S^1 上的作用是自由且极小的，因此是拓扑自由的。由此，无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

（参见例 *1*）具有 $D = C$（S^1）作为 ***Cartan*** 子代数，其条件期望由到不动点子代数的典范投影给出。

• 有限维代数（退化情形）。对于 $A = M_n$（$\mathbb{C}$），对角子代数 $D_n \cong \mathbb{C}^n$是一个极大交换子代数，并且存在忠实条件期望（即消去非对角项的映射）。其正规化子由广义置换矩阵组成（每行和每列恰有一个非零元素的酉矩阵）。尽管这个例子在形式上满足定义条件，但它并未展现出源自 ***étale*** 群胚的 ***Cartan*** 对通常具有的丰富几何结构；其对应的 ***Weyl*** 群胚是一个带有离散拓扑的有限群胚。

注 11 （关于定义）。上文给出的 ***Cartan*** 子代数定义遵循 ***Renault*** *[10],*，不过文献中也存在不同版本。有些作者省略可分性假设，要求条件期望具有有限指标，或施加额外的正则性条件。这里列出的条件足以满足 ***Renault*** 重构定理，我们将在下文回顾该定理。

注记 12 （拓扑自由性至关重要）。 在交叉积示例中，要求作用是拓扑自由的并非仅仅是技术性条件；这是使 C_0（X） 成为C_0（X） $\rtimes_r \Gamma$中的极大交换子代数所必需的。如果作用在某个开集上具有非平凡的各向同性，那么支撑在该各向同性上的元素就可能与 C_0（X）交换，从而破坏极大交换性。在这种情况下，必须以扭曲群胚构造取代 ***Cartan*** 结构。

Weyl 群胚

给定一个 Cartan 对 (A, D)，Renault 将一个 ´étale、局部紧豪斯多夫群胚 $\mathcal{G}$(A, D) 与一个扭曲 Σ （一般情形下）关联起来，称之为***Weyl*** 群胚，使得 A 可以重构为 ($\mathcal{G}$(A, D) Σ) [10] 的约化扭曲群胚 C^* 代数。在本文相关的情形中，扭曲是平凡的，因此可以还原为非扭曲群胚 C^* 代数。

构造过程如下：

1. **单位空间**。 单位空间被识别为 Cartan 子代数的 Gelfand 谱：

$$\mathcal{G}(A, D)^{(0)} \cong \widehat{D}.$$

2. **由正规化子导出的部分同胚**。 每个正规化子 $n \in \mathcal{N}_A$(D) 都确定一个部分同胚

$$\alpha_n : \mathrm{dom}(n) \longrightarrow \mathrm{ran}(n)$$

$\widehat{\ }$从 D到

$$\mathrm{dom}(n) = \{\phi \in \widehat{D} : \phi(n^*n) > 0\}, \qquad \mathrm{ran}(n) = \{\phi \in \widehat{D} : \phi(nn^*) > 0\},$$

并且对于 $\phi \in$ dom(n),

$$\alpha_n(\phi)(d) = \frac{\phi(n^*dn)}{\phi(n^*n)}, \qquad d \in D.$$

这刻画了 n 在“经典层” D上的作用，分母确保 α_n(ϕ) 再次成为 D 上的一个特征。

3. **Weyl 群胚**。Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A,\ D)$ 是由正规化子产生的偏同胚 α_n 的芽群胚。这得到一个 ´étale 、局部紧 Hausdorff 群胚（通常还伴有一个扭曲）。

Renault 重构定理 [10] 是这一理论的集大成之作。它指出，存在一个扭曲Σ，其上方有 $\mathcal{G}(A,\ D)$，使得

$$A \cong C_r^*(\mathcal{G}(A,D),\Sigma),$$

在此映射下，Cartan 子代数 D 与典范 Cartan 子代数 $C_0(\mathcal{G}(A,\ D)^{(0)})$ 相对应。在下文讨论的不带扭曲的情形中，这可以简化为

$$A \cong C_r^*(\mathcal{G}(A,D)).$$

例 5（交叉积导出的 Weyl 群胚）。设 Γ 是一个离散群，在局部紧豪斯多夫空间 X上拓扑自由地作用。那么，$C_0(X) \subset C_0(X) \rtimes_r \Gamma$ 是一个 ***Cartan*** 包含，其对应的 ***Weyl*** 群胚与变换群胚典范同构：

$$\mathcal{G}(C_0(X) \rtimes_r \Gamma, C_0(X)) \cong X \rtimes \Gamma.$$

由于 Γ 是离散的，这个群胚是 ***étale*** 的；在此情形下，扭曲是平凡的。

对于无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其中 θ 是无理数，相应的 ***Weyl*** 群胚为

$$\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

确认其结构为带有平凡扭曲的 ´***étale*** 群胚。

关联两个群胚：Morita 桥梁

论文 I 中的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A$ 与 Renault 的 Weyl 群胚$\mathcal{G}(A,\ D)$ 之间的关系虽错综复杂，却对我们的指标理论构造至关重要。

- **不同的理念**。群胚 $\mathcal{G}_A$ 是规范的，能够同时编码所有交换上下文。它是一个波兰群胚，但通常并非局部紧，也不是非´étale。相比之下，Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A,\ D)$ 取决于所选的 Cartan 子代数 D，但总是 ´étale 且局部紧豪斯多夫的（可能带有扭曲）。

- **相关情形下的 Morita 等价**。对于本文讨论的交叉积示例，我们构造了相关群胚之间的显式 Morita 等价。这些等价将 $\mathcal{G}_A$ 的全局视角与 $\mathcal{G}(A,\ D)$ 所提供的更简约的几何模型联系起来。特别是，对于交叉积 $C_0(X) \rtimes_r \Gamma$，当 Γ 可 amenable 且该作用拓扑自由时，我们有

$$\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_r\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma \cong \mathcal{G}(C_0(X) \rtimes_r \Gamma, C_0(X)).$$

- **对指标理论的意义**。这座 Morita 桥梁是关键纽带，使我们能够将论文 II 中发展出的下降指标工具转移到 Weyl 群胚的 ´étale 情形，即使在论文 I 的 $\mathcal{G}_A$ 典范构造不再适用的情况下也不例外。这一转移是本文的核心方法论进展。

对于无理旋转代数 A_θ，这意味着我们可以使用变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$，而不必处理问题重重的 $\mathcal{G}_{A_\theta}$。对于可 amenable 交叉积 $C_0(X) \rtimes_r \Gamma$，我们可以直接使用作用群胚 $X \rtimes \Gamma$。在接下来的小节中，我们将明确构造这些 Morita 等价，并利用它们应用论文 II 中的指标定理，最终建立与 Baum–Connes 组装映射的直接联系。

2.5 Baum–Connes 组装映射：简要回顾

Baum–Connes 猜想揭示了适当群作用的几何与约化群 C^*-代数的解析 K-理论之间的深刻联系。就本文而言，它为我们的下降指标构造与经典组装映射之间架起了概念桥梁。

等变 KK-理论与组装映射

设 Γ 是第二可数局部紧群。Baum–Connes 猜想断言，组装映射

$$\mu_i^\Gamma : K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma) \longrightarrow K_i(C_r^*(\Gamma)), \qquad i = 0, 1,$$

是一个同构。这里，$K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma)$ 表示通用真 Γ-空间 $E\Gamma$ 的拓扑 K-理论，定义为归纳极限

$$K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma) := \varinjlim_{\substack{Z \subseteq \underline{E}\Gamma \\ Z/\Gamma \text{ compact}}} KK_i^\Gamma(C_0(Z), \mathbb{C}),$$

其中，KK^Γ 表示 Kasparov 的等变 KK-理论。非正式地说，$K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma)$ 可视为 $E\Gamma$ 的等变 K-同调。

更一般地，若 Γ 连续作用于一个 C^*-代数 A，则带系数的鲍姆–康尼斯猜想断言，组装映射

$$\mu_i^\Gamma(A) : K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma; A) \longrightarrow K_i(A \rtimes_r \Gamma)$$

是一个同构，其中

$$K_i^{\mathrm{top}}(\Gamma; A) := \varinjlim_{\substack{Z \subseteq \underline{E}\Gamma \\ Z/\Gamma \text{ compact}}} KK_i^\Gamma(C_0(Z), A).$$

Kasparov 下降与 Dirac–对偶 Dirac 方法

关键组成组装映射的要素是 Kasparov 的下降同态 m

$$j_\Gamma : KK^\Gamma(A, B) \longrightarrow KK(A \rtimes_r \Gamma,\ B \rtimes_r \Gamma),$$

它将等变 KK-类映射为约化交叉积上的类。该映射提供了一种机制，使我们能够从几何数据（由等变 KK-理论编码）转向解析不变量（由普通 KK-理论编码）。

研究 Baum–Connes 猜想最有力的方法之一是 Kasparov 的*Dirac–*对偶 *Dirac* 方法 [14]。在有利情况下，可以在等变 KK-理论中构造两个关键元素：

- 一个 **Dirac 元素** $\alpha \in KK^\Gamma(P, \mathbb{C})$，以及
- 一个 **对偶 Dirac 元素** $\beta \in KK^\Gamma(\mathbb{C}, P)$，

其中 P 是一个合适的适当 Γ-C^*-代数（通常是 $C_0(E\Gamma)$ 或与之密切相关的代数）。接下来考虑 Kasparov 乘积

$$\gamma := \beta \otimes_P \alpha \in KK^\Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

当可以证明 $\gamma = 1$是等变 KK-环中的单位元时，下降同态结合 Kasparov 乘积的性质可推出组装映射 μ_i^Γ是一个同构。这一方法已成功应用于一大类群，包括可 amenable 群（依据 Tu 定理 [13]）、a-T-menable 群（依据 Higson 和 Kasparov [20]），以及作用于建筑上的群。

关于 Baum–Connes 猜想、Kasparov 理论和 Dirac–对偶 Dirac 方法的全面论述，请参见 [14]。

注释 13 (与本文的相关性)。 对于本文所研究的可 *amenable* 交叉积 $C_0(X) \rtimes_r \Gamma$ ， *Tu* 定理 *[13]* 保证组装映射是同构。在第 *5* 节中比较我们的下降指标构造与组装映射时，这一事实至关重要。

Tu 对群胚的推广

在其开创性著作中，Tu 将 Baum–Connes 猜想从群推广到配备 Haar 系统的局部紧 Hausdorff 群胚。对于这样的群胚 $\mathcal{G}$，他定义了一个拓扑 K理论群 $K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G})$（通过对适当分类空间中 $\mathcal{G}$ 紧子空间取归纳极限得到），并定义了一个组装映射

$$\mu_{\mathcal{G}} : K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}) \longrightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G})).$$

他证明，对于一大类群胚，这个组装映射是同构，其中包括:

- 所有可和群胚;
- 更一般地，满足其 Haagerup 性质几何类比的群胚（即允许在欧氏仿射空间的连续场上存在适当作用的群胚）。

这一群胚表述推广了经典 Baum–Connes 猜想，并为源自动力系统的变换群胚提供了自然框架。

本文中一个尤为重要的情形来自交叉积。设 Γ 是作用于紧豪斯多夫空间 X上的离散群。那么相应的变换群胚

$$X \rtimes \Gamma$$

具有约化的 C^*代数

$$C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_r \Gamma.$$

在此情形下，按照 Tu 的构造，Baum–Connes 组装映射具有如下形式

$$\mu_{X\rtimes\Gamma} : K_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes \Gamma) \longrightarrow K_*(C(X) \rtimes_r \Gamma),$$

其中， $K_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes \Gamma)$表示该变换群胚的拓扑 K理论。在此情形下，拓扑侧可等同于 X的适当 Γ等变 K同调。因此，组装映射在该作用的等变拓扑与交叉积的算子理论不变量之间架起了桥梁。

与本文工作的联系：概念桥梁

本文中使用的下降映射，

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \longrightarrow K_1\big(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\big),$$

在形式上类似于构造鲍姆–康恩斯组装映射时所采用的下降程序。在这两种情形中，都是通过下降型构造，将等变或群胚理论的 K 理论数据转化为相关约化 C^* 代数的K理论。

本文后面研究的非 I 型例子使这种类比变得具体。对于无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

对于交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ ，若 Γ 可 amenable，我们证明非 I 型一侧的相关几何模型——即酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ （在论文 I 的框架内无法直接为这些代数构造）

以及相关的 Weyl 群胚——与相应的变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价。在这些识别下，由我们的框架导出的下降映射与群胚的解析组装映射相兼容。

这一观　察为本文的两条主线提供了关键的概念联系：

• 论文 II 中为 I 型代数发展起来的指标理论工具，以酉共轭群胚为核心；

• 针对具有 Cartan 子代数的非 I 型代数的 Baum–Connes 框架，以 Weyl 群胚及其相关组装映射为核心。

接下来的几个小节将明确阐述这一联系。特别是，对于可 amenable 交叉积，复合

$$\tau_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \circ \kappa$$

（其中 κ 将一个等变 K^1-类与一个可逆元相关联）可视为 Baum–Connes 组装映射的一种局部化体现。这是本文的主要概念性进展之一。

注 14。 对于本文讨论的可 *amenable* 交叉积，*Tu* 定理 *[13]* 保证组装映射 $\mu_{X\rtimes\Gamma}$ 是一个同构。结合我们的 *Morita* 等价，这一事实将使我们能够在第 *5* 节中将下降指标构造与组装映射对应起来。

2.6 可 amenable 群与 K-可 amen 性

可 amen 性在交叉积 C^*-代数和 Baum–Connes 组装映射的研究中起着基础作用。在本文后续讨论的例子中——即无理旋转代数 A_θ和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$——作用群始终是离散可 amenable 群。这带来若干重要结论：全交叉积与约化交叉积相同，Baum–Connes 组装映射已知是同构，并且所得代数的 K-理论在 Morita 等价下表现良好。本小节回顾可 amen 性的基本概念及其更强的 K-理论变体—— K-可 amen 性，为其在我们的指标理论构造中的应用作铺垫。

可 amenable 群：经典定义与例子

离散群 Γ 称为可 *amenable* ，如果在 $\ell^\infty(\Gamma)$ 上存在左不变均值，也就是说，存在一个正的归一化线性泛函

$$m \in \ell^\infty(\Gamma)^*$$

使得

$$m(g \cdot f) = m(f), \qquad g \in \Gamma,\ f \in \ell^\infty(\Gamma),$$

其中 $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$。这个经典定义有深远的影响，并且有若干等价表述：

• **Følner 条件：** 对于任意有限子集 $K \subseteq \Gamma$和 $\varepsilon > 0$，存在非空有限集 $F \subseteq \Gamma$，使得对所有 $k \in K$ 都有 $|kF \triangle F| < \varepsilon|F|$。

• **正则表示：** 左正则表示 $\lambda : \Gamma \to \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma))$ 延拓为一个同构 $C^*(\Gamma) \cong C^*_r(\Gamma)$，它连接群的全 C^*-代数与约化 C^*-代数。

可 amenable 群构成一个庞大且重要的类别，包括所有有限群、阿贝尔群、幂零群、可解群，以及更一般地通过扩张、有向并和归纳极限由这些群得到的群。由两个或更多生成元生成的自由群是非 amenable 群的典型例子。关于可 amen 性的标准参考资料包括 [16, 26]。

交叉积与可 amen 性带来的简化

设 Γ 是一个离散群，它通过 $*$-自同构作用于一个 C^*-代数 A。我们可以构造全交叉积 $A \rtimes_\alpha \Gamma$ 和约化交叉积 $A \rtimes_{\alpha,\, r} \Gamma$。一般而言，这两个 C^*-代数并不相同；典范满射

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$$

总是满射，但只有在条件有利时才是同构。

以下定　　理表明，可 amen 性恰好提供了这类有利条件　　.

定理 2 (可和交叉积)。 设 Γ 是一个可 *amenable* 离散群，它作用于一个 C^*-代数 A 上。那么典范满射

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$$

是同构。因此，

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \cong A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

证明。 这是可 amen 性的标准推论；例如参见 [17, 第 7 节2], ，其中证明了对于可 amen 群，全交叉积与约化交叉积相同。

令 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 表示代数交叉积。全交叉积 $A \rtimes_\alpha \Gamma$ 是 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ 在泛范数下的完备化

$$\|x\|_{\max} = \sup\{\|(\pi \rtimes u)(x)\| : (\pi, u) \text{ is a covariant representation of } (A, \Gamma, \alpha)\},$$

而约化交叉积 $A \rtimes_{\alpha,\, r} \Gamma$ 是在约化范数下的完备化　　m

$$\|x\|_r = \|(\widetilde{\pi} \rtimes \lambda)(x)\|.$$

这里 π： $A \to B(H)$ 是忠实表示， λ： $\Gamma \to \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma))$ 是左正则表示，而 $(\widetilde{\pi},\ \lambda)$ 是由下式给出的正则协变表示

$$\widetilde{\pi}(a)(\xi \otimes \delta_g) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi \otimes \delta_g, \qquad (1 \otimes \lambda_h)(\xi \otimes \delta_g) = \xi \otimes \delta_{hg}.$$

因此总是存在一个典范商映射

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma,$$

只需证明范数 $\|\cdot\|_{\max}$ 和 $\|\cdot\|_r$ 在 $A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$上相同即可。

对于可 amen 群， Γ 的每个酉表示都弱包含于左正则表示中。一个标准论证（例如参见 [16]）可将此结论推广到协变表示，表明对于每个协变表示 $(\pi,\ u)$ 和每个 $x \in A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ ，都有

$$\|(\pi \rtimes u)(x)\| \le \|(\widetilde{\pi} \rtimes \lambda)(x)\| = \|x\|_r.$$

对所有协变表示取上确界，得到

$$\|x\|_{\max} \le \|x\|_r.$$

由于约化范数总是不大于泛范数，对于所有 x，我们也有 $\|x\|_r \le \|x\|_{\max}$。因此

$$\|x\|_{\max} = \|x\|_r \qquad \text{for all } x \in A \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma.$$

由此可知，　　典范商映射是等距的，因此是单射，进而是同构　　.

□

这一结果极大地简化了由可 amenable 群作用产生的交叉积 C^*-代数的分析。特别是，它意味着交叉积的 K-理论与完备化的选择无关——这一事实对于我们的指标理论构造至关重要。当 Γ 可 amenable 时，我们将直接用 $A \rtimes \Gamma$ 表示全交叉积或约化交叉积，因为二者相同。

从可 amen 性到 K-可 amen 性

可 amenable 群的全交叉积与约化交叉积相同，这一事实有一个自然的 K-理论细化。若局部紧群 Γ 满足-*amenable*，则称其为 K，此时典范商映射

$$C^*(\Gamma) \longrightarrow C_r^*(\Gamma)$$

在 K-理论中诱导出一个同构：

$$K_*(C^*(\Gamma)) \cong K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

每个可 amenable 群都是 K-可 amenable 的，但反之并不成立：存在一些非 amenable 群（例如自由群），它们仍然是 K-可 amenable 的 [18,19]。更一般地，离散群 Γ 是 K-可 amenable 的，当且仅当平凡表示在正则表示中以 KK-理论意义弱包含；此性质等价于在 $KK^{\Gamma}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 中存在某个特定元素 [20]。

对于交叉积， K-可 amen 性有以下重要推论：对于任意 Γ-C^*-代数A，全交叉积与约化交叉积具有相同的 K-理论，

$$K_*(A \rtimes \Gamma) \cong K_*(A \rtimes_r \Gamma),$$

即使这些代数本身并不同构。我们将在指标理论论证中隐式使用这一事实，因为它确保 K-理论计算可以在任一种完备化中进行，而不会丢失信息。

注 15。 对于本文讨论的可 *amenable* 群，全交叉积与约化交叉积之间的区别完全消失。这里提及更一般的 K-可 *amen* 性，是为了将我们的工作置于 *Baum–Connes* 猜想的更广阔背景中，并指出可能的推广方向。

K-可 amen 性：一种较弱但足够的条件

K-可 amen 性这一概念由 Cuntz [18], 提出，是对可 amen 性的一种 K-理论弱化，足以满足许多指标理论应用的要求。若局部紧群 Γ的典范映射 K

$$K_*(C^*(\Gamma)) \longrightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

由正则表示诱导的映射是一个同构。

每个可 amenable 群都是 K-可 amen 性的。值得注意的是，许多重要的非 amenable 群，包括自由群和某些李群，也具有 K-可 amen 性 [18,19]。因此， K-可 amen 性显著扩大了分析不变量与拓扑不变量相一致的群的范围。

对于群胚，也可以提出类似的概念：若一个局部紧群胚 $\mathcal{G}$ （带有 Haar 系统）满足典范映射 $C^*(\mathcal{G}) \to C_r^*(\mathcal{G})$ 在 K- 理论上诱导同构，则称其为 K- 可 amen 性：

$$K_*(C^*(\mathcal{G})) \cong K_*(C_r^*(\mathcal{G})).$$

对 Baum–Connes 组装映射的推论

可 amen 性对 Baum–Connes 猜想有重要影响。在其开创性工作中，Tu 证明了，对于所有可和群胚，组装映射都是同构 [13, Th´定理` 9.3]。特别地，若 Γ 是可 amenable 的，那么解析组装映射

$$\mu_\Gamma : K_*^{\mathrm{top}}(\Gamma) \longrightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

是同构。更一般地，对于可和群胚 $\mathcal{G}$,

$$\mu_{\mathcal{G}} : K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}) \longrightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$$

是一个同构。

此外，在可 amenable 的情形下，Kasparov 下降同态

$$j_{\mathcal{G}} : KK^{\mathcal{G}}(A, B) \longrightarrow KK(A \rtimes_r \mathcal{G}, B \rtimes_r \mathcal{G})$$

表现得尤为良好，并在组装映射的构造中发挥核心作用，提供了将等变 KK-理论数据传递到算子 K-理论的机制。

对变换群胚的应用与本文

设 Γ 是一个离散可和群，它作用于一个紧空间 X。那么相应的变换群胚

$$X \rtimes \Gamma$$

i是可 amenable 的。因此，其约化 C^*-代数与交叉积相同：

$$C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_r \Gamma \cong C(X) \rtimes \Gamma,$$

其中，最后一个同构由 Γ 的可 amenable 性推出（根据定理 2）。

在本文的语境中，这一观察使我们能够在上述群胚框架内处理可 amenable 群的交叉积。具体而言：

- **无理旋转代数** $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$**：** 由于 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的，变换群胚$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 也是可 amenable 的，并且根据 Tu 定理，Baum–Connes 组装映射是一个同构。
- **一般交叉积** $C(X) \rtimes \Gamma$**：** 对于任意可 amenable 群 Γ，同样的结论也成立，从而确保交叉积的 K理论与 Morita 等价以及第2.5节所述的组装映射相容。

这些性质对于确立酉共轭群胚（在适当意义下，通过以 Weyl 群胚替代它）与变换群胚$X \rtimes \Gamma$之间的 Morita 等价至关重要。可 amenable 性和 K-可 amenable 性构成了分析基础，确保我们的下降指标构造与 Baum–Connes 框架相契合。

注 16（概念综合）。这一视角表明，可 *amen* 性与 K-可 *amen* 性不应仅被视为分析上的简化，而应被看作结构性条件，确保基于群胚的指标构造具有与组装型映射相容的函子性解释。具体而言，对于本文所考虑的可和交叉积，全交叉积与约化交叉积相一致，保证下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_A}$ 落入一个 K-理论群，该群与 $K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$有规范的识别；而 *Tu* 定理则确保这一识别与 *Baum–Connes* 组装映射相容。因此，可 *amen* 性正是使酉共轭群胚框架与解析组装机制相协调的精确假设。

2.7 无理旋转代数的 Connes 指标定理

无理旋转代数是非交换几何中最基本的例子之一。它是一个简单、核、非 I 型 C^*代数的基本例子，并在 Connes 关于非交换空间指标理论的表述中发挥着核心作用。Connes 关于 A_θ 的工作展现了深刻的关系

介于该代数的 K理论、其典范迹以及 Toeplitz 型指标构造 [7]之间。就本文而言， A_θ 提供了一个理想的测试案例：通过在我们的下降指标框架中重新诠释经典指标配对，我们证明，酉共轭观点与该代数和 Weyl 群胚之间的 Morita 等价相结合，能够恢复预期的非交换指标理论图景。

无理旋转代数

为便于后文使用，我们固定标准的稠密定义导子

$$\delta\left(\sum_{m,n} a_{m,n} u^m v^n\right) = 2\pi i \sum_{m,n} m\, a_{m,n} u^m v^n,$$

先定义在光滑子代数 A_θ^∞ 上。这是实现第一坐标上的典范圆群作用的导子，也是下文指标配对公式中记作 δ 的算子。需要二维循环余循环时，我们使用与环面作用相关的标准导子对 $(\delta_1,\ \delta_2)$。

设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为无理数。无理旋转代数 A_θ 是由两个酉元 u和 v 生成的普适 C^*-代数，它们满足

$$vu = e^{2\pi i\theta} uv.$$

等价地， A_θ 可实现为交叉积

$$A_\theta \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其中， $\mathbb{Z}$ 在 $C(S^1)$ 上的作用由圆上的无理旋转诱导：

$$\alpha_n(f)(z) = f(e^{-2\pi i n\theta} z), \qquad f \in C(S^1),\ n \in \mathbb{Z}.$$

代数 A_θ 具有以下众所周知的性质：

- A_θ 是单且核的 [3]。

- 它有唯一的忠实迹态 τ： $A_\theta \to \mathbb{C}$，在三角多项式的稠密 $*$-子代数上（由单项式 $u^m v^n$的有限线性组合构成）定义为

$$\tau\left(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} u^m v^n\right) = a_{00}.$$

- 它的 K-群为

$$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2,$$

由交叉积 $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$[3] 的 Pimsner–Voiculescu 六项正合列可得。

- 由于 θ 是无理的， A_θ 是非 I 型且没有有限维表示，因此不在论文 I 中发展的典范构造的适用范围内。另一方面，如第 2.4 节所述，它包含自然的 Cartan 子代数 $C(S^1)$，其 Weyl 群胚可识别为变换群胚

$$\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

它是 ´etale 且可 amenable 的（因为 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的）。该群胚将作为我们进行指标理论构造的几何模型。

Connes 指数定理：陈述与背景

无理旋转代数 [7] 的 Connes 指数定理确立了 A_θ 的 K-理论不变量与其 Toeplitz 扩张所关联的某些算子的 Fredholm 指数之间精确的数值关系。更具体地说，令

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_\theta \longrightarrow A_\theta \longrightarrow 0$$

是定义 A_θ 的 Toeplitz 扩张的短正合列，其中 $\mathcal{K}$ 表示作用于可分希尔伯特空间上的紧算子。相应的 K 理论六项正合列给出一个边界映射

$$\partial : K_1(A_\theta) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}.$$

Connes 证明，对于任意可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，该边界映射等于 K_1 类 $[u]$ 与由唯一迹 τ 确定的循环余循环之间的配对：

$$\partial([u]) = \langle [\tau], [u] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

对于典范生成元，可得

$$\partial([u]) = 0, \qquad \partial([v]) = 1,$$

而对于 Rieffel 投影 p_θ （它与单位元一起生成 $K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ ），

$$\tau(p_\theta) = \theta,$$

这表明 K_0 上的迹的像为 $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$，它是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子群。

注 17 （与下降指标框架的联系）。 在第 *4* 节中，我们将证明，*Connes* 指标配对可以由我们的下降指标构造恢复。具体而言，对于可逆元$u \in M_n$（A_θ），我们在酉共轭群胚的 KK理论中构造一个等变 K^1-类 $[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}$。应用下降映射和 *Morita* 等价 $\mathcal{G}_{A_\theta} \sim_M S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$后，我们得到一个$K_1$（$A_\theta$）中的类；将它与迹 τ配对时，便可重现 *Connes* 指标配对：

$$\tau_*\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}})\Big) = \langle [\tau], [u] \rangle.$$

这为论文 *II* 中发展的基于群胚的指标理论与非交换几何中的经典结果提供了概念上的统一。

迹配对与 Toeplitz 指数映射

无理旋转代数 A_θ 具有唯一的忠实迹态 τ： $A_\theta \to \mathbb{C}$。此迹在 K理论上诱导一个同态

$$\tau_* : K_0(A_\theta) \longrightarrow \mathbb{R},$$

该同态通过在投影上取迹来定义（并通过 $\tau \otimes$Tr扩展到矩阵）。一项基本计算表明，

$$\tau_*(K_0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R},$$

一个反映无理旋转角算术结构的稠密子群。特别地，对于 Rieffel 投影 p_θ （它与单位元一起生成 $K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$），有 $\tau(p_\theta) = \theta$。

虽然迹自然地与 K_0 配对，但 K_1 群的 A_θ 可通过源自 Toeplitz 型扩张的指标映射来探测。具体而言，存在一个 C^* 代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_\theta \longrightarrow A_\theta \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{K}$ 表示可分希尔伯特空间上的紧算子，而 $\mathcal{T}_\theta$ 由移位算子与酉元 u， v 生成，满足 $vu = e^{2\pi i\theta}uv$。相应的 K理论六项正合列给出一个边界映射

$$\partial : K_1(A_\theta) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}.$$

定理 3 （ A_θ的 Toeplitz 扩张的指标定理）。 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_\theta \longrightarrow A_\theta \longrightarrow 0$$

为与无理旋转代数相关的 ***Toeplitz*** 型扩张。那么，对于每个表示类 $[u] \in K_1(A_\theta)$的可逆元$u \in M_n(A_\theta)$，边界映射

$$\partial : K_1(A_\theta) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$$

与通过扩张由 u 得到的算子的 ***Fredholm*** 指数一致。也就是说，

$$\partial([u]) = \mathrm{Index}(T_u),$$

其中 T_u 表示由 u 在 ***Toeplitz*** 扩张下得到的 ***Fredholm*** 算子。

这种识别可视为 ***Connes*** 指标配对的一个特例，它关联了 K理论与K同调 *[7]*。

注 18 （与循环上同调的关系）。 指标映射 ∂ 也可以表示为一个配对

$$\partial([u]) = \langle [\mathcal{F}_\theta], [u] \rangle,$$

其中 $[\mathcal{F}_\theta] \in KK^1$（$A_\theta, \mathbb{C}$）是与 ***Toeplitz*** 扩张相关联的 ***Fredholm*** 模的 K-同调类。这是由迹诱导的偶配对 τ_*： K_0（A_θ） $\to \mathbb{R}$的奇对应形式。

这个定理因以下几个原因而引人注目：

1. 它表明，由 Toeplitz 扩张导出的 K-理论中的抽象边界映射，与具体的解析 Fredholm 指数相一致——这是一条真正的非交换指标定理。

2. 与 K_0上的迹映射 τ_* 结合起来看，它表明 A_θ 的整个 K-理论都与其背后的无理旋转动力学密切相关： K_0 类 $[p_\theta]$ 编码了旋转角θ，而 K_1 类 $[u]$ 和 $[v]$ 则分别对应于指标映射下平凡和非平凡的绕数。

3. 这提供了非交换指标定理最早的奠基性例子之一，其中解析指标可从非交换 C^*-代数的内部结构中恢复。这项工作预示了整循环上同调的发展，以及它在 Connes 非交换几何计划中的核心作用。

注 19 （与下降指标框架的联系）。 在定理 ***14*** 中，我们将证明，***Connes*** 指数定理可以通过我们的下降指标构造自然地恢复。具体而言，对于可逆元 $u \in M_n$（A_θ），我们在酉共轭群胚的 KK-理论中构造一个等变 K^1-类 $[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}$。应用下降映射和 ***Morita*** 等价 $\mathcal{G}_{A_\theta} \sim_M S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$，我们得到一个 K_1（A_θ）中的类，其在边界映射 ∂ 下的像与 ***Connes*** 指数一致：

$$\partial\Big(\Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}})\Big) = \mathrm{Index}(T_u) = \partial([u]).$$

因此，我们的框架通过酉共轭群胚及其与变换群胚的 ***Morita*** 等价，为指标映射提供了几何实现。

以下降–指标机制重新表述

用本文建立的语言来说，Connes 指数定理可以通过群胚模型得到一种自然的重新解释

$$\mathcal{G}_\theta := S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

由于 $\mathbb{Z}$是可 amenable 的，变换群胚 $\mathcal{G}_\theta$ 也是可 amenable 的，因此根据 Tu 定理 [13]，其 Baum–Connes 组装映射

$$\mu_{\mathcal{G}_\theta} : K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}_\theta) \longrightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}_\theta))$$

是一个同构。利用典范识别

$$C_r^*(\mathcal{G}_\theta) \cong A_\theta,$$

这提供了一个 gr 胚论的实现，为无理旋转代数的解析 K-理论提供了实现。

从这一视角来看，Toeplitz 扩张及其相关的边界映射

$$\partial : K_1(A_\theta) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

可视为群胚模型解析输出的一部分。Connes 定理表明，这个解析指标与由自然关联于 Toeplitz 扩张的 Fredholm 模所确定的奇指标配对一致。因此， A_θ 的经典指标定理自然融入了这样一个框架：群胚方法、组装映射和指标理论配对彼此兼容。

与 Morita 等价框架的联系

本文的关键在于，尽管论文 I 中的典范酉共轭群胚构造不适用于非 I 型代数 A_θ，但 Weyl 群胚

$$\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

提供了一种性质良好的 ´étale 且可 amenable 的替代方案。因此，必须将此前发展的指标理论工具移植到这个 Weyl 群胚模型中。

这构成了我们处理 A_θ时所依托的概念桥梁：以一个明确的几何模型取代无法获得的典范群胚，并使相应的下降–指标图景能够与变换群胚的 Baum–Connes 组装映射进行比较。具体而言，定理 9 中确立的 Morita 等价（形式对象 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $\mathcal{G}_\theta$之间）使我们能够将下降指标构造从前者转移到后者；在后者中，该构造变得可计算，也能够直接与 Connes 的原始表述进行比较。从这个意义上说，Connes 关于无理旋转代数的指标定理可视为本文所发展的更广泛群胚理论框架的一个典型案例。

对于典范生成元，我们得到：

- 对于 Rieffel 投影 p_θ （ A_θ 中迹为 θ 的典范投影），我们有 $\tau(p_\theta) = \theta$；通过下降指标工具的偶数版本，这便恢复了 K_0 配对。
- 对于酉生成元 v （ $\mathbb{Z}$-作用的实现酉元），边界映射给出$\partial([v]) = 1$；而对于生成元 u，则得到 $\partial([u]) = 0$，这反映了它们各自非平凡和零绕数的性质。

总结与展望

非理性 onal 旋转代数为我们的方法提供了一个基本测试案例。它表明 s:

- Weyl/变换群胚提供的群胚模型能够恢复正确的 A_θ解析K理论；
- Toeplitz 边界映射及其相关的 Fredholm 指数与群胚图景天然兼容，而 Baum–Connes 组装映射则提供了拓扑 K理论与解析理论之间的同构；
- 即使无法使用论文 I 的典范构造，具有 Cartan 子代数的非 I 型代数仍可通过其 Weyl 群胚，运用我们的方法加以研究。

在接下来的章节中，我们将把这一图景扩展到可和交叉积 $C（X）\rtimes\Gamma$。在此情形下，变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 提供了几何模型，将我们的下降指标工具与 Baum–Connes 组装映射联系起来。这将表明，经由与 Weyl 群胚的 Morita 等价作适当诠释后，酉共轭群胚为指标理论提供了统一的几何框架，适用于广泛的 C^*代数。

3 Morita 等价与酉共轭群胚

3.1 论文 I 的局限：I 型假设

在 [1], 中，为含幺可分 I 型 C^*代数构造了酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。I 型假设在构造的若干步骤中发挥了关键的技术作用，尤其是在控制代数的表示论以及由此得到的群胚的可测结构方面。本小节将解释 I 型假设为何不可或缺，为何它不适用于无理旋转代数和可 amenable 交叉积等重要例子，并概述我们将采取何种策略来克服这一局限。

I 型假设在论文 I 中的作用

回顾一下，若每个不可约表示都包含紧算子，则称一个 C^*代数为 I 型（或 GCR，即“一般连续表示”）。对于可分 I 型代数，表示$\widehat{}$论的性质极佳：对偶空间 $\mathcal{A}$（不可约表示的酉等价类所构成的集合）是标准博雷尔空间，而且可以通过直积分分解 [27]来分析表示的结构。我们在 [1] 中利用了这一正则性，证明了酉共轭群胚的两个关键性质。

首先，单位空间

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}=\{(B,\chi)\mid B\subseteq\mathcal{A}\text{ unital commutative},\ \chi\in\widehat{B}\}$$

具有一种与部分求值映射相容的自然标准博雷尔结构 s

$$\mathrm{ev}_a:\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\longrightarrow\mathbb{C}_\infty,\qquad \mathrm{ev}_a(B,\chi)=\begin{cases}\chi(a) & \text{if } a\in B,\\ \infty & \text{if } a\notin B,\end{cases}$$

其中 $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 表示 $\mathbb{C}$ 的一点紧化。这些映射在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上生成一个 σ-代数，使其成为标准博雷尔空间；此外，这种博雷尔结构还允许配备与之相容的波兰拓扑。这一结构使得能够在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上构造博雷尔哈尔系统。

其次，必须将与单位空间各点相关联的 GNS 表示族 $\{\pi_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 组织成可测希尔伯特空间场，以便得到一个直积分表示

$$\Pi(a)=\int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus}\pi_x(a)\,d\mu(x)$$

可以构造出来。由此得到的对角嵌入 $\iota:\ \mathcal{A}\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$具有单射性，这就要求这一族表示能够分离 $\mathcal{A}$中的点。

注释20 （I 型假设真正发挥作用之处）。 *GNS* 表示的点分离性质本身并非 *I* 型代数所独有：对于任意含幺的 C^*代数，与纯态对应的 *GNS* 表示都能分离点，正如我们在引理 *1* 中所示。*I*型情形的特殊之处在于，这些表示能够以可测组织 的方式构成一个标准博雷尔族，并与由有序对（B、χ）给出的$\widehat{\ }$单位空间参数化相容。对于可分 *I* 型代数，对偶空间 $\mathcal{A}$ 以及相关的不可约表示族都具有与直积分理论相容的标准博雷尔参数化。正是这一额外的正则性——而非单纯的点分离——使我们得以在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构造可测希尔伯特空间场，并由此得到对角嵌入。在非 *I* 型情形中，不可约表示仍然能够分离点，但由于缺少同样良好的可测参数化，*[1]* 中的论证无法原样进行。

引理 1 (纯态 GNS 表示可分离点)。 设 $\mathcal{A}$ 是含幺的 C^*-代数。那么对于每个非零的 $a\in\mathcal{A}$，存在一个纯态 φ作用于 $\mathcal{A}$，使得 $\pi_\varphi(a)\neq 0$，其中 π_φ 表示与 φ相关联的 *GNS* 表示。

证明。 设 $a\neq 0$。于是 $a^*a\neq 0$，因此 $\|a^*a\|>0$。由于

$$\|a^*a\|=\sup_{\omega\in S(\mathcal{A})}\omega(a^*a),$$

其中 $S(\mathcal{A})$表示 $\mathcal{A}$的态空间，存在一个态 $\omega_0\in S(\mathcal{A})$，使得 $\omega_0(a^*a)>0$。态空间 $S(\mathcal{A})$ 在弱-* 拓扑下是紧凸集；根据克莱因–米尔曼定理，它是其极点的闭凸包，这些极点即为纯态。映射 $\omega\mapsto\omega(a^*a)$ 在弱-* 拓扑下连续且仿射，因此闭面

$$F=\{\omega\in S(\mathcal{A}):\omega(a^*a)=\|a^*a\|\}$$

有一个极点 φ，它必然是纯态。特别地，$\varphi(a^*a)>0$。

设 $(\pi_\varphi,\ H_\varphi,\ \xi_\varphi)$ 为与 φ 相关联的 GNS 三元组。则

$$\|\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\|^2=\langle\pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi,\xi_\varphi\rangle=\varphi(a^*a)>0.$$

因此$\pi_\varphi(a)\neq 0$，得证。 □

命题 3 (单位空间数据足够丰富)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数。对于每个纯态$\sim\varphi\in P(\mathcal{A})$，存在一个含幺交换 C^*-子代数 $B\subseteq\mathcal{A}$ 和一个特征 $\chi\in B$，使得$\varphi|_B=\chi$。

证明。 设 φ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个纯态。考虑集合

$$\mathcal{S}=\{(C,\psi)\mid C\subseteq\mathcal{A}\text{ unital commutative }C^*\text{-subalgebra},\psi\in\widehat{C},\ \psi=\varphi|_C\}.$$

该集合非空，因为我们可以取 $C=\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$、标量以及 $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$上的唯一特征 ψ，它与限制在标量上的 φ 一致。

在 $\mathcal{S}$ 上定义偏序：若 $C_1 \subseteq C_2$ 且 $\psi_2|_{C_1} = \psi_1$，则有 $(C_1, \psi_1) \preceq (C_2, \psi_2)$。根据佐恩引理，$\mathcal{S}$ 中存在一个极大元 (B, χ)。

我们断言，B 是 $\mathcal{A}$的极大阿贝尔自伴子代数（MASA）。反设存在 $x \in \mathcal{A}$，使得 x 与 B 中的所有元素都交换，但 $x \notin B$。令 C 为由 B 和 $\{x\}$生成的含幺 C^*-代数。由于 x 与 B交换，因此 C 是交换的。

现在我们证明 φ 在 C上是乘法的。对于任意 $y,\ z \in C$，我们可以用 x 中系数属于 B的多项式逼近它们。由于 φ 是线性且连续的，只需验证形如 bx^k 的元素（其中 $b \in B$ 且 $k \geq 0$）上的乘法性。对于这类元素，利用 x 与 B 交换，且 φ 在 B上是乘法的，我们计算得：

$$\varphi((b_1x^{k_1})(b_2x^{k_2})) = \varphi(b_1b_2x^{k_1+k_2}) = \varphi(b_1b_2)\varphi(x^{k_1+k_2}).$$

如果我们能证明对所有 n都有 $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$，那么乘法性便得证。但这可由以下事实推出：对于由单个正规元生成的交换 C^*-代数上的纯态，该态是乘法的当且仅当它是一个特征（参见 Gelfand-Naimark 定理）。由于 C 是交换的，且由 x 和 B生成，并且 φ 在 B上的限制是一个特征，因此 φ 在 C 上的限制必定是乘法的。

因此，φ 在 C上是乘法性的，其在 C 上的限制定义了 C 的一个特征 χ'，且满足 $\chi'|_B = \chi$。这与$(B,\ \chi)$在 $\mathcal{S}$中的极大性相矛盾。因此，不存在这样的 x，且 B 是一个极大阿贝尔自伴子代数。

根据构造，$\chi = \varphi|_B \in \widehat{B}$，且$(B,\ \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，证明至此完成。 □

注 21。命题 *3* 表明，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的点通过限制到交换子代数，能够捕捉所有纯态。然而，从一个点(B, χ) 构造 *GNS* 表示，需要选择将 χ 从 B 扩张到 $\mathcal{A}$；这种扩张一般并不唯一。在 *I*型情形中，表示论额外具备的正则性使得这些选择能够以可测的方式进行，从而得到定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的良定义可测表示场。这正是 *I* 型假设不可或缺之处。

非 I 型代数中的失效

对于一般的 C^*-代数，这些性质未必成立。非 I 型代数的表示论可能具有严重的病态性质：本原理想空间可能不是豪斯多夫的，对偶空间可能不是标准博雷尔空间，而且直积分分解可能不唯一，甚至不是良定义的。此外，尽管纯态 GNS 表示仍能分离点，但由于缺乏良好的可测参数化，无法在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构造可测表示场。特别是，对于无理旋转代数 A_θ 以及可 amenable 交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 这类代数，存在非零元在所有源自交换背景的表示下都映为零 —— 这类元称为 “ 不可见元 ”（见下文命题 24）。因此，本文采用另一种方法，通过 Morita 等价转向 Weyl 群胚。

对于一般的 C^*-代数，这些性质未必成立。非 I 型代数的表示论可能具有严重的病态性质：本原理想空间可能不是豪斯多夫的，而且不可约表示的结构可能无法进行易于处理的参数化。不过，区分不同程度的失效十分重要。

点分离与可测组织

如引理 1 所确立的，与纯态相关联的 GNS 表示族能够分离每个含幺 C^*-代数中的点。因此，非 I 型情形的问题并非点分离失败，而在于如何将这些表示组织成上下文空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的一个性质良好的可测场。

在 I 型情形中，对偶空间 $\mathcal{A}$ 具有标准博雷尔结构，而由点 $x = (B,\ \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 导出的 GNS 表示可以组装成一个与直积分构造相容的可测场。这种正则性源于 Mackey 意义下 I 型代数表示论的光滑性。

对于非 I 型代数，这种可测组织会失效：

- 对偶空间 $\mathcal{A}$ 可能不是标准博雷尔空间，而且无法以可测的方式对不可约表示进行规范参数化。

- 即使固定一个由 $\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A}$ 索引的表示族，也无法保证该族构成一个可测希尔伯特空间场，并且与由部分求值映射在 $\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A}$ 上诱导的自然博雷尔结构相容。

- 因此，直积分构造

$$\Pi(a) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}^{\oplus} \pi_x(a)\, d\mu(x)$$

论文 I 中用于定义对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的方法，无法原封不动地应用于非 I 型情形。

对论文 I 中构造的影响

因此，非 I 型情形面临的困难包括：

1. **可测参数化失败：**构造所需的表示未必能以与单位空间描述相容的标准博雷尔方式组织起来。2. **直积分模型失效：**没有这样的可测场，便无法按照论文 I 中的论证得到算子 $\Pi(a)$。3. **群胚结构缺乏良好的性质：**由部分求值在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上诱导的拓扑和可测结构可能不具备构造 Haar 系统以及使用群胚等变 KK 理论所需的正则性。4. **无法像论文 I 那样进行下降：**由于相关的结构性假设不再自动成立，I 型情形中使用的下降机制不能直接照搬到非 I 型情形。

非 I 型代数的例子

非交换几何中许多最重要的例子都属于非 I 型。一个基本例子是无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

该代数是单的、核的，并且具有唯一迹态，但不是 I 型。该代数没有有限维表示，而其在非交换几何中的重要性使其成为扩展论文 I 框架的天然测试案例。

问题不在于 A_θ 缺乏足够的表示来区分点——事实上，单纯性迫使每个非零表示都是忠实的。相反，论文 I 中所采用的、基于上下文的表示可测组织，如今已无法以任何显而易见的方式获得。尽管其自然的 Cartan 子代数 $C(S^1)$ 上的特征产生了一个 GNS 表示族（它们都与正则表示酉等价），

却不存在一种规范方法，能够将其扩展为适当上下文空间上的可测场，从而得到单射对角嵌入。因此，酉共轭群胚的 I 型构造无法原样扩展到 A_θ。

同样，形如

$$C(X) \rtimes \Gamma$$

的交叉积代数在 Γ 的作用足够非平凡时，往往是非 I 型的。即使 Γ 可 amenable，交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 也未必是 I 型，除非该作用满足更强的正则性条件。这些代数在指标理论和 Baum–Connes 纲领中发挥着核心作用，因此，人们希望将酉共轭群胚的框架扩展到 I 型情形之外。

备注 22. 这里所作的区分——点分离（普遍成立）与可测组织（在非 *I* 型情形下失效）之间的区分——对于理解论文 *I* 的局限性以及本文所发展的莫里塔等价方法的必要性至关重要。存在足够多的表示来分离点并不足够；还需要一种规范的、可测的方式，将这些表示组织成定义在上下文空间上的一个场。正是后一要求在非 *I* 型代数中无法满足，这也促使我们使用 *Weyl* 群胚作为替代性的几何模型。

与其尝试直接为任意非 I 型代数构造酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，我们不如采用另一种策略。关键在于，许多重要的非 I 型代数已经拥有源自动力系统的典范群胚模型。

具体而言：

- 无理旋转代数 $A_\theta \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 由变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$典范地建模；

- 更一般地，交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$ 由变换群胚 $X \rtimes \Gamma$建模。

当 X 是局部紧豪斯多夫空间，且 Γ 是一个在 X上连续作用的可数离散群时，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是局部紧豪斯多夫且 étale 的。若 Γ 是可 amenable 的，则 $X \rtimes \Gamma$作为群胚也是可 amenable 的，因此其满群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同。在标准的第二可数可 amenable 条件下，Tu [13] 的结果表明，这些群胚的 Baum–Connes 组装映射是同构。

因此，本文的核心思想并非在非 I 型情形下直接构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，而是用规范的变换群胚模型 $X \rtimes \Gamma$ 来取代其作用。这种替代有以下观察作为依据：

- 对于交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，群胚 C^*-代数 $C^*(X \rtimes \Gamma)$ 与交叉积代数本身规范同构（命题 1）。

- 论文 II 中发展的下降指标工具，若以变换群胚的语言来理解，便可进行计算，并能直接与交叉积理论和 Baum–Connes 猜想中的经典结果相比较。

- 对于具有 Cartan 子代数的代数，例如 A_θ 和 $C(X) \rtimes \Gamma$，变换群胚与 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A, D)$ 相一致（见第 2.4 节），从而与 Renault 重构定理建立直接联系。

核心启发式思想是：附属于 $\mathcal{A}$ 的候选酉共轭群胚，在适当意义下应与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价。由于在非 I 型情形下无法直接构造前者，我们便以后一者作为具体的替代模型。在本文讨论的情形中

，我们将建立相关群胚 C^*-代数之间明确的 Morita 等价，这足以传递指标理论信息。

以下小节将详细阐述这一策略。我们首先回顾群胚与 C^*代数的 Morita 等价相关概念（第 3.2 节），然后为具有 Cartan 子代数的代数提出一项一般原则，即用 Weyl 群胚／变换群胚替代酉共轭群胚（第 3.3 节），最后将其应用于两个主要例子：无理旋转代数（第 4 节）和可 amenable 的交叉积（第 5 节）。

注 23. 需要着重指出的是，我们并未声称已经为非 I 型代数构造了 $\mathcal{G}_A$ 。相反，我们利用替代群胚模型——具体而言，变换群胚和 *Weyl* 群胚——的存在，将它们作为替代模型，以承载相同的 K 理论信息和指标理论信息。以这些替代群胚的术语来诠释论文 II 的下降指标工具，可以得到可计算的不变量，并且这些不变量与经典结果一致。这种替代策略构成了本文的方法论核心。

3.2 群胚与 C^*-代数的 Morita 等价

Morita 等价为比较由不同群胚构造产生的 C^*-代数提供了强有力的工具。具体而言，在配备 Haar 系统的局部紧豪斯多夫第二可数群胚这一标准假设下，Morita 等价的群胚会产生 Morita 等价的群胚C^*-代数 [21]，因此其 K-理论群自然同构。这一原理使我们能够在非 I 型情形下，以与交叉积代数相关的变换群胚取代无法直接使用的酉共轭群胚，从而将我们的下降指标框架扩展到这些例子。

C^*-代数的 Morita 等价

我们首先回顾 C^*-代数的经典 Morita 等价概念，它为比较其表示理论和 K-理论不变量提供了自然的框架。

定义 6 （Morita 等价（针对 C^*-代数））。如果存在一个 A-B 印迹双模 X，则称两个 C^*-代数 A 和 B 为（强）Morita 等价。也就是说， X 是一个配备了以下结构的 A-B 双模：

- 一个取值于 A 的左内积
$$ {}_A\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to A, $$
使 X 成为一个满左希尔伯特 A-模（即 A 在左侧作用，且内积关于第一个变量是 A-线性的）；

- 一个取值于 B 的右内积
$$ \langle \cdot, \cdot \rangle_B : X \times X \to B, $$
使 X 成为一个满右希尔伯特 B-模（即 B 在右侧作用，且内积关于第二个变量是 B-线性的）；

- 模作用与内积之间的相容性条件，包括关键的印迹关系
$$ {}_A\langle x, y \rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z \rangle_B \qquad \textit{for all } x, y, z \in X. $$

丰满性条件意味着， $\{{}_A\langle x, y \rangle : \ x、\ y \in X\}$ 和 $\{\langle x, y \rangle_B : \ x、\ y \in X\}$ 的张成空间分别在 A 和 B 中稠密。这样的印迹双模通过 ***Rieffel*** 归纳实现了 A 和 B 的表示理论之间的等价。

Morita 等价的基本推论包括：

- 自然同构的 K理论群：

$$K_*(A) \cong K_*(B);$$

- eq非退化 $*$表示的等价范畴（通过 Rieffel 对应）);
- 若 A 和 B 是 σ含幺的（例如可分的），则它们稳定同构：

$$A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K},$$

其中， $\mathcal{K}$ 表示作用于可分无穷维希尔伯特空间上的紧算子。

因此，Morita 等价是用于在 C^*代数之间传递 K理论信息和指标理论信息的基本工具。

注 24 （与群胚 Morita 等价的联系）。 *Morita* 等价的概念自然地推广到群胚。对于配备 *Haar* 系统的局部紧豪斯多夫群胚 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ ，按照 *Muhly–Renault–Williams [21]* 的定义，$\mathcal{G}$-$\mathcal{H}$等价会导出它们的约化群胚 C^*代数之间的强 *Morita* 等价：

$$C_r^*(\mathcal{G}) \sim_M C_r^*(\mathcal{H}).$$

此外，这种群胚层面的 *Morita* 等价保持相应的 K-理论及指标理论构造。在接下来的章节中，当我们将形式酉共轭群胚（通过以 *Weyl* 群胚／变换群胚替代它来理解）与具体的几何模型联系起来时，这一点至关重要。

群胚的 Morita 等价

Morita 等价的概念自然地推广到群胚，从而体现出这样一种思想：两个群胚可能编码相同的几何信息。

定义 7 （群胚的 Morita 等价）。 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是配备 *Haar* 系统的局部紧豪斯多夫群胚。根据 *Renault [9]* 和 *Muhly–Renault–Williams [21],* ，若存在一个局部紧豪斯多夫空间 Z ，并且满足以下条件，我们就称 $\mathcal{G}$ 和$\mathcal{H}$ 是Morita 等价 的：

- 一个开满射，使 Z 成为左 $\mathcal{G}$-空间（即存在一个连续作用 $\mathcal{G} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z \to Z$ ，且与 r_Z相容）；

$$r_Z : Z \to \mathcal{G}^{(0)}$$

- 一个开满射

$$s_Z : Z \to \mathcal{H}^{(0)}$$

使 Z 成为右 $\mathcal{H}$-空间（即存在一个与s_Z相容的连续作用 $Z \times_{\mathcal{H}^{(0)}} \mathcal{H} \to Z$ ）；

- 在 Z 上可交换的左 $\mathcal{G}$-作用和右 $\mathcal{H}$-作用；
- 主丛条件：左 $\mathcal{G}$-作用和右 $\mathcal{H}$-作用都是自由且适当的，并且轨道空间满足

$$\mathcal{G}\backslash Z \cong \mathcal{H}^{(0)} \quad via\ s_Z, \qquad Z/\mathcal{H} \cong \mathcal{G}^{(0)} \quad via\ r_Z.$$

这样的空间 Z 称为 $\mathcal{G}$-$\mathcal{H}$ 等价（或等价双丛）。

直观地说，空间 Z 实现了两个群胚之间的广义等价，其方式与一个非退化双模在 C^* 代数之间实现 Morita 等价大致相同。

群胚 C-代数的推论

Muhly、Renault 和 Williams 的基本定理 [21]确立了与算子代数之间的关键联系。

定理 4 (Muhly–Renault–Williams)。 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是带有 *Haar* 系统的局部紧豪斯多夫群胚。若 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ *Morita* 等价，则它们的全群胚 C^*-代数强 *Morita* 等价：

$$C^*(\mathcal{G}) \sim_M C^*(\mathcal{H}).$$

若 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{H}$ 可 *amenable*，则其约化群胚 C^*-代数也有相同结论，且 *Morita* 等价与典范商映射 $C^*(\mathcal{G}) \to C_r^*(\mathcal{G})$相容。

特别地，它们的 K-理论群自然同构：

$$K_*(C^*(\mathcal{G})) \cong K_*(C^*(\mathcal{H})).$$

这种 Morita 不变性是将 K理论和指标理论信息在不同群胚模型之间传递的基本机制。在本文相关的情形中，它提供了所需的桥梁，用于比较变换群胚上的基于下降的构造与相应交叉积 C^*-代数。

注 25 (与等变 KK-理论和下降的关系**)**。 对于满足适当正则性条件（第二可数、局部紧豪斯多夫且带有 *Haar* 系统）的群胚，*Morita* 等价会在等变 KK-理论层面诱导自然同构，并与 *Kasparov* 下降映射*[13, 14, 22]*相容。这些相容性确保指标理论构造在不同的等价群胚模型之间转换时得以保留。本文将在与例子相关的标准假设下（由交叉积产生的可 *amenable* 变换群胚）运用这些性质。

变换群胚与交叉积

一个尤为重要的例子类别来自变换群胚。设 Γ 是一个可数离散群，它在局部紧豪斯多夫空间 X 上连续作用。相应的变换群胚

$$X \rtimes \Gamma$$

其单位空间为 X，箭头为 $(x,\ \gamma) \in X \times \Gamma$，源映射与值域映射为

$$s(x,\gamma) = x, \qquad r(x,\gamma) = \gamma \cdot x,$$

乘法

$$(\gamma \cdot x, \eta)(x,\gamma) = (x, \eta\gamma),$$

以及逆

$$(x,\gamma)^{-1} = (\gamma \cdot x, \gamma^{-1}).$$

其全群胚 C^*-代数自然同构于交叉积代数

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes \Gamma.$$

如果 X 是紧的，这就简化为熟悉的同构

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma.$$

在这一识别下，变换群胚的 Morita 等价导出相应交叉积 C^*-代数的强 Morita 等价。这一观察为基于群胚的构造与经典交叉积框架搭建了桥梁。

与本文的相关性

Morita 等价框架提供了一种自然方式，将论文 II 中发展的下降指标理念与交叉积相关的几何群胚模型联系起来。在本文稍后研究的例子中，相关的变换群胚是

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z} \quad \text{and more generally} \quad X \rtimes \Gamma,$$

其群胚 C^*-代数可恢复相应的交叉积代数。我们不会尝试在非 I 型情形下直接构造酉共轭群胚，而将采用这些变换群胚作为具体的替代模型。

第 4 节和第 5 节的核心技术任务，是通过 Morita 等价确立拟构造的酉共轭群胚（通过以 Weyl 群胚替代它来理解）与这些变换群胚之间的精确关系。具体而言，我们将证明：

- 对于无理旋转代数 A_θ，Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 可充当有效的替代，使下降指标构造能够重现 Connes 指数定理。
- 对于可 amenable 交叉积 $C_0(X) \rtimes \Gamma$，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 提供了恰当的几何框架，从而能够直接比较我们的下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射。

一旦建立这些 Morita 等价，定理 4 就会推出相应群胚 C^*-代数之间的强 Morita 等价：

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong A_\theta, \qquad C^*(\mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes \Gamma,$$

右侧的同构来自交叉积的识别。因此，群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的K理论与相应交叉积代数的K理论一致，使我们能够将下降指标工具推广到非 I 型情形。

接下来的小节将具体阐述这些 Morita 等价，首先聚焦于无理旋转代数（第 4 节），然后讨论一般的可 amenable 交叉积（第 5 节）。

3.3 一般原则：超越 I 型情形的群胚模型

上一小节回顾了群胚的 Morita 等价会诱导相关群胚 C^*-代数的强 Morita 等价，进而在 K理论中产生同构。这提示了一种一般策略，可将下降指标框架推广到论文 I 和 II 所讨论的 I 型情形之外。我们不直接为任意非 I 型代数构造酉共轭群胚，而是采用源自 Cartan 对的典范群胚模型，作为替代几何模型，使相关构造仍然能够进行。

通过 Cartan 对构造 C^*-代数的群胚模型

设 $(\mathcal{A}, D)$ 是 Renault [10] 意义下的 Cartan 对。回顾第 2.4 节，这意味着：

- D 是 $\mathcal{A}$ 的极大交换子代数；
- D 包含 $\mathcal{A}$ 的一个近似单位（若 $\mathcal{A}$ 是含幺的，这只意味着 $1_{\mathcal{A}} \in D$）；
- D 是正则的，即其正规化子

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(D) := \{n \in \mathcal{A} \mid nDn^* \subseteq D \text{ and } n^*Dn \subseteq D\}$$

生成 $\mathcal{A}$一个 C^*代数；

• 存在一个忠实条件期望 $E\colon \mathcal{A}\to D$。

对于这样一个 $\mathcal{A}$ 可分的 Cartan 对，Renault 重构定理 [10,定理 5.9] 将 $(\mathcal{A},\ D)$ 关联到一个 ´étale、局部紧豪斯多夫 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A},\ D)$，以及一个扭曲 Σ（一般而言），使得 $\mathcal{A}$同构于约化扭曲群胚 C^*代数：

$$\mathcal{A}\cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A},D),\Sigma).$$

在此同构下，Cartan 子代数 D 对应于 $C_0(\mathcal{G}(\mathcal{A},\ D)^{(0)})$。由此，Cartan 对赋予 $\mathcal{A}$ 一个典范几何模型。在本文考虑的例子中，扭曲 Σ 是平凡的，因此同构简化为 $\mathcal{A}\cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A},\ D))$。

例子的一个基本来源是动力系统。在确保 $C(X)\subseteq C(X)\rtimes\Gamma$ 是 Cartan 子代数的标准假设下（例如，当 Γ 是离散的且作用是拓扑自由时），与该对 $(C(X)\rtimes\Gamma,\ C(X))$ 相关联的 Weyl 群胚典范地同构于变换群胚

$$\mathcal{G}(C(X)\rtimes\Gamma,C(X))\cong X\rtimes\Gamma.$$

与酉共轭群胚的比较

论文 I 中引入的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 由酉群$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对代数的交换上下文空间的作用构造而成。其单位空间为

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}=\{(B,\chi)\mid B\subseteq\mathcal{A}\text{ unital commutative},\ \chi\in\widehat{B}\},$$

其箭头由酉共轭诱导：对于每个酉元 $u\in\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 和每个 $(B,\ \chi)\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，都有一个箭头

$$u:(B,\chi)\longrightarrow(uBu^*,\chi\circ\mathrm{Ad}_{u^{-1}}).$$

对于 I 型代数，这一构造产生一个波兰群胚，其可测结构足够丰富，能够支持论文 II 中的下降指标工具。对于非 I 型代数，困难并不在纯粹形式化的集合论层面，而在拓扑和可测性层面：上下文与共轭数据未必能组合成一个良好的拓扑群胚或 Borel 群胚，而这正是论文 I 和 II 所要求的。剩下的是底层的集合论结构，但它缺少开展解析构造所需的额外正则性。

指导原则

上述观察启发了以下启发式原理：

原理 在某些情形下，若一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 具有源自 Cartan 对 $(\mathcal{A},\ D)$ 的经典群胚模型——尤其是 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A},\ D)$——那么该模型便可作为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 无法直接构造时的几何替代。启发式地，人们预期，设想中的酉共轭群胚与 Weyl 群胚在 Morita 型等价意义下编码了相同的非交换几何；本文则具体采用后者。

在接下来的小节中，我们将针对两个主要例子系列，具体阐明这一原则：

• 对于无理旋转代数 $A_\theta=C(S^1)\rtimes_\theta\mathbb{Z}$，自然的 Cartan 子代数是 $C(S^1)$，而 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta,\ C(S^1))$ 与变换群胚 $S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 同构。

• 对于可和交叉积 $C_0(X)\rtimes\Gamma$，若 Γ 离散且作用拓扑自由，则 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(C_0(X)\rtimes\Gamma,\ C_0(X))$ 与变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 同构。

通过研究这些具体的 Weyl 群胚，我们将展示如何在非 I 型情形中实现论文 II 的下降指标构造，从而重现 A_θ 的 Connes 指数定理，并将其与可和交叉积的 Baum–Connes 组装映射联系起来。

前文回顾了，群胚的 Morita 等价会诱导相应群胚 C^*-代数的 Morita 等价，进而诱导 K-理论中的同构。这一观察为将下降指标框架拓展到论文 I 和 II 的 I 型情形之外，提供了一般策略。我们不直接为任意非 I 型代数构造酉共轭群胚，而是采用源自 Cartan 对的典范群胚模型，作为替代几何模型，以便在其上诠释相关构造。

Morita 型指导原则

上述讨论引出了以下指导原则。

原则 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，且存在典范群胚模型，例如通过 Cartan 对或变换群胚实现得到。那么，在无法直接构造酉共轭群胚$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，使其具备论文 I 和 II 所要求的拓扑与可测结构的情况下，应将该典范群胚模型视为下降指标形式体系中 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的几何替代。

这一原则并非意在成为完全一般性的定理。相反，它概括了本文将通过具体例子来实现的机制：无理旋转代数 A_θ 以及可 amenable 交叉积 $C_0(X) \rtimes \Gamma$。

Cartan 对与 Weyl 群胚

设 $(\mathcal{A}, D)$ 是 Renault [10] 意义下的 Cartan 对。Renault 重构定理 [10, 定理 5.9] 将 $(\mathcal{A}, D)$ 与一个 étale、局部紧豪斯多夫 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 联系起来，并配有一个扭曲Σ（一般情况下），使得 $\mathcal{A}$ 同构于约化扭曲群胚 C^* 代数：

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma),$$

其中 D 与 $C_0(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)^{(0)})$ 相对应。在本文所考虑的例子中，扭曲 Σ 是平凡的，因此该同构可简化为 $\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D))$。因此，Weyl 群胚为 $\mathcal{A}$ 提供了一个典范几何模型。

从本文的视角来看，$\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 的作用是提供一个具体的群胚，以便在超出 I 型情形、无法使用直接的酉共轭构造时，仍可在其上实施下降和指标构造。

与酉共轭群胚的关系

论文 I 中引入的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，是由酉群$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对代数的交换上下文空间的作用构造而成的。对于 I 型代数，这一构造产生一个具有足够可测结构的波兰群胚，可用于论文 II 中的下降指标工具。对于非 I 型代数，困难并不在纯粹形式上的集合论层面，而在拓扑和可测性层面：上下文与共轭数据未必能整合成一个性质良好的拓扑群胚或 Borel 群胚，而这正是论文 I 和 II 所要求的。

在本文讨论的例子中，我们将看到，Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$——或其作为变换群胚的具体体现——提供了一种有效的替代方案，使我们能够实施下降指标构造，尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 本身无法直接构造。

对 K-理论与下降的推论

一旦有了具体的替代群胚模型，其群胚 C^*-代数便与代数$\mathcal{A}$ （或与一个在典范意义下等价的扭曲群胚代数）相一致，因此所得的 K-理论与$K_*(\mathcal{A})$一致。这正是下降指标构造能够应用于本文后续讨论的非 I 型例子的基本机制。

特别是，对于无理旋转代数 A_θ，相关的变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 提供了一个几何背景，可据此将我们的下降指标框架与 Connes 的经典指标定理进行比较。对于可 amenable 交叉积 $C_0(X) \rtimes \Gamma$，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 提供了一个背景，可据此将我们的构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来。

在本文例子中的应用

两个主要　　例子自然地适用于本文的这一替代框架　　.

1. 对于无理旋转代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

该代数可规范地实现为 $\mathbb{Z}$ 对 $C(S^1)$ 的交叉积。相应的变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

为 A_θ提供了一个具体的几何模型。在第 4 节中，我们将直接利用这个群胚来实现下降指标构造，并说明它如何与 Connes 的经典指标定理进行比较。

2. 对于形式如下的交叉积代数

$$C(X) \rtimes \Gamma,$$

具有 Γ 离散且可 amenable 的情形，该代数可由变换群胚规范地建模

$$X \rtimes \Gamma.$$

这个群胚为我们的下降指标构造提供了自然背景，使其能够与鲍姆–康恩斯组装映射以及交叉积代数的 K 理论建立联系，相关内容将在第 5 节中展开。

因此，本小节提出的一般原则应被理解为一种替代原则，而不是一个断言某个形式化定义的对象之间存在字面意义上的群胚 Morita 等价的定理。在本文讨论的例子中，无法直接构造的酉共轭群胚所发挥的作用，由源自动力系统、明确且性质良好的 ´etale 群胚承担。这些替代模型使论文 II 中的指标理论思想得以扩展到原有 I 型情形之外，并能与交叉积和变换群胚相关的经典结果进行比较。

注26。 在一些有利情形下，上文出现的变换群胚也与适当 *Cartan* 对 （$\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{G}(C(X) \rtimes \Gamma, C(X)) \cong X \rtimes \Gamma$ ）所产生的 *Weyl* 群胚一致。这为 *Renault* 理论提供了额外的概念联系，但我们构造的核心并不依赖于为所有 *Cartan* 对确立一般性的 *Morita* 等价；直接使用具体的变换群胚模型便已足够。

以下各节将针对本文讨论的两大类主要例子，具体阐明这一策略。

3.4 方法论：通过 Morita 等价而非直接定义计算 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$

对于本文研究的非 I 型代数，无法按照论文 I 的思路直接构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 。因此，我们采用以下间接策略。

1. 为 $\mathcal{A}$ 确定一个经典几何群胚模型 G。在本文的例子中， G 是与 $\mathcal{A}$ 典范关联的相关变换群胚或 Weyl 群胚。

2. 以具体群胚 G 取代无法实现的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 直接构造，并将其用作 $\mathcal{A}$ 的替代几何模型。这一替代方案的合理性在于与这些群胚相关联的 C^* 代数之间存在 Morita型关系；下文将在具体例子中予以确立。

3. 利用以下识别，在 G 上执行下降指标构造

$$C^*(G) \cong \mathcal{A}$$

（或在 Cartan情形下为 $C_r^*(\mathcal{G}(A,\ D)\ \Sigma)\ \cong \mathcal{A}$），从而在原代数的 K 理论中实现下降映射的目标。

以下两个案例研究均采用这一精简方法论作为实际操作原则。特别是，它使我们能够使用性质良好的 ´étale 群胚，同时保留最初由酉共轭群胚形式主义所启发的指标理论内容。

第3.4节概述的方法框架提供了一种通用策略，用经典群胚模型 G 取代无法直接构造的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ ；该模型与$\mathcal{A}$存在规范关联。为了使这一策略适用于具体计算，我们必须确定一类 C^*代数，使得目标群胚 G 不仅良定义，而且与该代数存在规范关联，并具有清晰的几何结构。Renault 的 Cartan 子代数理论恰好提供了这样一类代数。本小节将说明，对于配备 Cartan 子代数 $D \subseteq \mathcal{A}$的 C^*代数 $\mathcal{A}$ ，一般的替代策略如何化为一种具体且可计算的形式，从而建立一条直接路径，将定义 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 所需的抽象数据转化为案例研究中将出现的经典变换群胚。

Cartan 对：定义与意义

设 $\mathcal{A}$ 是一个可分 C^*代数，且 $D \subseteq \mathcal{A}$ 是一个极大交换的 C^*子代数。按照 Renault[10], 的术语，若包含映射 $(\mathcal{A},\ D)$ 满足以下条件，则称其为一个 ***Cartan*** 对：

1. **近似单位：** D 包含 $\mathcal{A}$ 的一个近似单位（如果 $\mathcal{A}$ 是含幺的，这仅意味着 $1_{\mathcal{A}} \in D$）。

2. **极大交换：** D 在 $\mathcal{A}$中是极大交换的。

3. **正则性：** D 在 $\mathcal{A}$中是正则的，这意味着其正规化子

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(D) := \{n \in \mathcal{A} \mid nDn^* \subseteq D \text{ and } n^*Dn \subseteq D\}$$

生成 $\mathcal{A}$作为一个 C^*-代数。

4. **条件期望：** 存在一个忠实条件期望 $E:\ \mathcal{A} \to D$.

Cartan 对提供了一种非交换类比，对应于由一个带有单位空间 X 的 ´étale 群胚 G 所产生的包含映射 $C_0(X)\ \subseteq C^*(G)$。它们恰好捕捉了从底层几何群胚重构一个 C^*-代数所需的结构

在这些条件下，Renault 重构定理将 $(\mathcal{A}, D)$ 与一个（可能带扭曲的）´étale 群胚模型 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 联系起来，并且一般还带有一个扭曲 Σ，使得

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma),$$

其中 D 与 $C_0(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)^{(0)})$ 同构。在本文考察的例子中，扭曲 Σ 是平凡的，因此该同构可简化为 $\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D))$。

Renault 重构定理

Renault 理论的基本结果表明，每个可分 Cartan 对都可由一个带扭曲的 ´étale 群胚以典范方式得到。

定理 5 (Renault [10, 定理 5。9])。 设 $(\mathcal{A}, D)$ 是一个可分的 *Cartan* 对。那么，存在一个局部紧豪斯多夫 *´étale* 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 以及一个定义在 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 上的拓扑扭曲 Σ，使得

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma),$$

在此同构下，*Cartan* 子代数 D 对应于

$$C_0\big(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)^{(0)}\big).$$

证明。 我们简要回顾 Renault 构造中的要素。由于 D 是阿贝尔的，其 Gelfand 谱

$$\widehat{D} := \mathrm{Spec}(D)$$

$\widehat{\ }$是一个局部紧豪斯多夫空间，且$D \cong C_0(D)$。
对于每个正规化子 $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(D)$，关系式 $nDn^* \subseteq D$ 和 $n^*Dn \subseteq D$ 意味着 n确定了一个局部同胚

$$\alpha_n : \mathrm{dom}(n) \longrightarrow \mathrm{ran}(n)$$

$\widehat{\ }$属于 D,
其中

$$\mathrm{dom}(n) = \{\phi \in \widehat{D} : \phi(n^*n) > 0\}, \qquad \mathrm{ran}(n) = \{\phi \in \widehat{D} : \phi(nn^*) > 0\}.$$

更确切地说， α_n 由恒等式刻画

$$\phi(n^*dn) = \phi(n^*n)\, \alpha_n(\phi)(d) \qquad (d \in D,\ \phi \in \mathrm{dom}(n)).$$

Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 随后构造为由局部同胚 α_n生成的芽群胚。这个芽群胚上的拓扑是自然的 étale 拓扑，由来自正规化子的基本双截集生成。Renault 定理表明，该群胚是局部紧豪斯多夫 étale 群胚，并且一般存在一个覆盖 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 的拓扑扭曲 Σ，使得

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma).$$

在此识别下，对角子代数 D 被识别为单位空间代数 $C_0(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)^{(0)})$。

□

注27. 本文所讨论的例子中，扭曲 Σ 是平凡的，因此同构可简化为 $\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D))$。

交叉积中的 Cartan 对

这一框架与本文相关之处在于，交叉积代数为 ´étale 群胚模型提供了一个自然的源。设 Γ 是一个在紧豪斯多夫空间 X上连续作用的离散群，并考虑约化交叉积

$$\mathcal{A} = C(X) \rtimes_r \Gamma$$

及其规范子代数 $D = C(X)$。在确保 D 在 $\mathcal{A}$ 中是 Cartan 的标准假设下（例如，作用具有拓扑自由性），相应的 Weyl 群胚与变换群胚规范同构

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}, D) \cong X \rtimes \Gamma.$$

特别地，Renault 定理给出群胚模型

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \cong C_r^*(X \rtimes \Gamma),$$

并且当变换群胚可 amenable 时，约化群胚 C^*代数与完全群胚 C^*代数相同。

变换群胚识别的证明。 设 Γ 作用于 X。变换群胚 $X \rtimes \Gamma$的单位空间为 X，箭头为 (x, γ)，源映射 $s(x, \gamma) = x$，值域映射 $r(x, \gamma) = \gamma \cdot x$。其卷积代数 $C_c(X \rtimes \Gamma)$ 在代数意义上与有限支撑函数相识别

$$f : \Gamma \to C(X), \qquad \gamma \mapsto f_\gamma,$$

其乘法为

$$(f * g)_\eta(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\, g_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1} \cdot x),$$

这恰好就是通常的交叉积卷积公式。同样，对合也与交叉积的对合一致:

$$f_\gamma^*(x) = \overline{f_{\gamma^{-1}}(\gamma^{-1} \cdot x)}.$$

取约化范数后得到

$$C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_r \Gamma.$$

在满足 $C(X) \subseteq C(X) \rtimes_r \Gamma$ 为 Cartan 对的附加假设下，该群胚恰好是与这一对 $(C(X) \rtimes_r \Gamma,\ C(X))$ 相关联的 Weyl 群胚。 □

非I型例子的约化原理

对于本文研究的非 I 型例子，按照论文 I 的意义，无法直接构造酉共轭群胚$\mathcal{G}_\mathcal{A}$。因此，Renault 定理提供了恰当的替代机制：只要 $(\mathcal{A},\ D)$ 是一个 Cartan 对，Weyl 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A},\ D)$ 就为 $\mathcal{A}$ 提供一个典范的 ´étale 几何模型。

因此，对于本文相关的例子，实际的约化并非要证明严格的 Morita 等价

$$\mathcal{G}_\mathcal{A} \sim_M \mathcal{G}(\mathcal{A}, D),$$

而是用具体的 Weyl 群胚或变换群胚模型替代无法实现的直接群胚构造，并在其中进行下降指标构造。由于

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma),$$

此 id 将该构造的目标代数与正在研究的原始 C^*-代数相识别 .

特别是，对于交叉积示例，相关的群胚模型是变换群胚。这一机制使后文的案例研究能够将我们的框架与经典指标理论以及 Baum–Connes形式体系联系起来。

命题 4 (归约至 Cartan模型)。 设 $(\mathcal{A}, D)$ 是一个可分 *Cartan* 对。那么，*Renault* 重构定理给出一个典范的 ´*étale* 群胚模型

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma).$$

因此，在无法直接构造酉共轭群胚的任何情形下，*Weyl* 群胚 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 都是用于下降和指标理论的自然几何替代。

证明。 第一条陈述正是 Renault 重构定理。第二条是对该定理在当前语境下的解释：由于在 I 型情形之外，所需的拓扑结构和可测结构对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 并不存在，因此我们转而使用典范关联的 ´étale 模型 $\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$，其群胚 C^*-代数重构了 $\mathcal{A}$。 □

注28。 对于本文讨论的具体例子，我们将直接使用变换群胚模型：

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z} \quad \textit{for } A_\theta, \qquad X \rtimes \Gamma \quad \textit{for } C(X) \rtimes \Gamma.$$

这些是在相应 *Cartan* 假设下对 *Weyl* 群胚的具体实现，但我们的构造并不依赖于为所有 *Cartan* 对证明一般的 *Morita* 等价定理。

K-理论与下降指标映射的推论

约化原理对第二部分中发展的下降指标构造有重要推论。在 Cartan 情形下，Renault 重构定理给出了一个典范的 ´étale群胚模型

$$\mathcal{A} \cong C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma),$$

因此，下降构造的目标代数可以通过 Weyl 群胚模型识别为原代数 $\mathcal{A}$ 。特别地，这就给出了一个典范识别

$$K_*\big(C_r^*(\mathcal{G}(\mathcal{A}, D), \Sigma)\big) \cong K_*(\mathcal{A}).$$

由 K-理论的稳定性，还可得

$$K_*(\mathcal{A}) \cong K_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}).$$

因此，在此处考察的非 I 型例子中，下降指标机制应当在具体的 Weyl 群胚或变换群胚上实施，而非在无法使用的直接酉共轭群胚上实施。具体而言，步骤如下：

1. 在 Weyl 群胚或变换群胚模型上表述相关的等变 K-理论类。

2. 对该 ´étale 群胚应用良定义的下降映射，从而在其约化扭曲群胚 C^*-代数的 K-理论中得到一个类。

3. 通过 Renault 重构定理，将这个目标群识别为 $K_*(\mathcal{A})$。

4. 将所得类与当前示例所对应的经典指标配对进行比较。

在本文中的应用

当我们直接使用其具体群胚模型时，本研究中考察的两类代数自然地符合这一框架。

- **无理旋转代数** A_θ。 代数 A_θ 具有交叉积实现

$$A_\theta \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

及其相伴的变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

这个 ´étale 可 amenable 群胚提供了具体的几何背景，使我们能够将下降指标构造与 Connes 指数定理进行比较。（在适当的假设下，这个变换群胚与 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta,\ C(S^1))$ 相同，但构造并不需要这种识别。）

- **可 amenable 交叉积** $C(X) \rtimes_r \Gamma$。 在确保 th 的标准假设下 at

$$C(X) \subseteq C(X) \rtimes_r \Gamma$$

是 Cartan 包含（例如，作用的拓扑自由性），相应的 Weyl 群胚就是变换群胚

$$\mathcal{G}(C(X) \rtimes_r \Gamma, C(X)) \cong X \rtimes \Gamma.$$

这为我们将框架与 Baum–Connes 组装映射联系起来提供了自然的背景。若 Γ 是可 amenable 的，则变换群胚也是可 amenable 的，并且群胚C^*-代数的全代数与约化代数相同。

因此，约化到 Cartan 对这一做法构成了概念上的桥梁，使酉共轭群胚的抽象理念在本文讨论的例子中转化为具体的计算方法。我们不直接处理无法获得的非 I 型群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$，而是采用与之典范关联的 Weyl 群胚或变换群胚模型；其群胚 C^*-代数可以重构原代数。

注 29. 必须强调，我们并未声称对所有 *Cartan* 对都存在一般的 *Morita* 等价 $\mathcal{G}_\mathcal{A} \sim_M \mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ 。这样的论断要求将 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 构造为一个拓扑群胚，而这在 *I* 型情形之外无法实现。相反，我们使用具体的 *Weyl* 群胚作为替代模型，并由 *Renault* 重构定理以及我们所研究例子的特定性质为其提供依据。

在接下来的各节中，我们将针对本文讨论的两个主要例子族，具体阐明这一策略，展示如何借助变换群胚计算 A_θ 的指标配对，并将我们的框架与解析组装映射联系起来。

4 案例研究 I：无理旋转代数 $A_\theta = C\ (S^1)\ \ \rtimes_\theta \mathbb{Z}$

4.1 A_θ 的定义与基本性质

无理旋转代数，也称为非交换环面，是非交换几何中最基本的例子之一。它既自然地作为二维环面上函数代数的变形出现，也作为与圆的无理旋转作用相关的交叉积出现。由于其结构已得到充分理解，它为详细研究本文提出的下降指标框架及其与经典指标理论的比较提供了理想的情境。

4.1.1 通过交叉积定义

设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为无理数。考虑 $\mathbb{Z}$ 对圆的旋转作用

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

由下式给出

$$R_n(z) = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

这通过拉回诱导出一个作用 $\alpha : \mathbb{Z} \curvearrowright C(S^1)$，其作用由 $*$-自同构给出：

$$\alpha_n(f)(z) = f(R_n^{-1}(z)) = f(e^{-2\pi i n\theta} z), \qquad f \in C(S^1).$$

定义 8. 无理旋转代数是交叉积 C^*-代数

$$A_\theta := C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

由于 $\mathbb{Z}$是可 amenable 的，全交叉积与约化交叉积相同，因此上述定义没有歧义；我们将简写为 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$，不再区分全交叉积与约化交叉积。

4.1.2 泛表示

等价地，A_θ 具有一种泛表示，通常更便于进行代数计算。

定义 9 (泛表示)。 代数 A_θ 是由两个酉元 U 和 V 生成的泛 C^*-代数，它们满足交换关系

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV.$$

也就是说，对于任意一对酉元 u、v，若它们属于含幺 C^*-代数 B 并满足 $vu = e^{2\pi i\theta} uv$，则存在唯一的 $*$-同态 $\pi : A_\theta \to B$，满足 $\pi(U) = u$，$\pi(V) = v$。

为将其与交叉积表示联系起来，令

$$u(z) = z \in C(S^1)$$

它是圆上的恒等函数（ $C(S^1)$的典范生成元）；并令 v 表示在交叉积中实现生成元 $1 \in \mathbb{Z}$的典范酉元。于是，协变关系给出

$$vuv^* = \alpha_1(u).$$

直接计算可得

$$\alpha_1(u)(z) = u(e^{-2\pi i\theta} z) = e^{-2\pi i\theta} z = e^{-2\pi i\theta} u(z),$$

因此

$$vuv^* = e^{-2\pi i\theta} u,$$

或者等价地

$$vu = e^{2\pi i\theta} uv.$$

因此，交叉积生成元恰好满足泛表示的定义关系。反过来，若 U和 V是满足 $VU = e^{2\pi i\theta} UV$ 的酉元，则对 (U, V) 这一对而言，它确定了一个协变表示

，对应于动力系统 $(C(S^1)\ \mathbb{Z},\ \alpha)$，因此也确定了交叉积的一个表示。这就确立了 A_θ 的交叉积描述与泛表示描述之间的对应关系。

关系 $VU = e^{2\pi i\theta}UV$可视为定义普通环面代数的交换关系 $UV = VU$的一种变形。特别是，当 $\theta = 0$时，便得到交换的 C^*-代数

$$A_0 \cong C(\mathbb{T}^2),$$

其中 $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ 是普通二维环面。

注 30. 参数 θ 仅在模 1 意义下定义，因为将 θ 替换为 $\theta + 1$ 不会改变关系 $e^{2\pi i\theta}$。此外， A_θ 与 $A_{1-\theta}$ 同构，同构映射为 $U \mapsto U, V \mapsto V^*$。当 θ为无理数时，所有这类代数都是单代数，且彼此不同构。

4.1.3 基本结构性质

θ 的无理性赋予了 A_θ 一系列卓越性质，使其成为算子代数理论和非交换几何中的核心对象。

定理 6 （ A_θ 的基本结构）。 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，并设

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

为无理旋转代数，其中

$$(\alpha_n f)(z) = f(e^{-2\pi in\theta}z).$$

则：

（*i*）单纯性与核性。 A_θ 是单代数且具有核性。

（*ii*）唯一迹。 A_θ 具有唯一的忠实迹态 τ： $A_\theta \to \mathbb{C}$。在单项式 U^mV^n 的代数张成空间上，它由下式给出

$$\tau(U^mV^n) = \delta_{m,0}\delta_{n,0}.$$

（*iii*）***Cartan*** 子代数。 C（S^1） 在

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

是一个 *Cartan* 子代数。等价地，在泛表示中，子代数 $C^*(U) \cong C(S^1)$是极大交换的、正则的，包含一个近似单位，并且是某个忠实条件期望的值域。

(iv) 稠密傅里叶型张成空间。 单项式 U^mV^n、 m、 $n \in \mathbb{Z}$ 的线性张成是 A_θ中的一个稠密 $*$-子代数，且乘法规则为

$$(U^mV^n)(U^pV^q) = e^{2\pi i\theta np}U^{m+p}V^{n+q}.$$

证明。 我们写作 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 的生成元 V 实现了该作用，而 $U \in C(S^1)$ 是恒等函数 $U(z) = z$。

(iv) 稠密线性张成与乘法公式。 根据交叉积的定义，代数交叉积由有限和组成

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n V^n, \qquad f_n \in C(S^1),$$

并且这个代数在 A_θ 中稠密。由于三角多项式在 $C(S^1)$ 中稠密，每个 f_n 都可以用 U 的幂的有限线性组合来逼近，因此单项式 $U^m V^n$ 的线性张成在 A_θ 中稠密。

利用协变关系

$$VU = \alpha_1(U)V = e^{2\pi i\theta}UV,$$

我们通过归纳证明

$$V^n U^p = e^{2\pi i\theta np} U^p V^n.$$

因此

$$\begin{aligned}(U^m V^n)(U^p V^q) &= U^m (V^n U^p) V^q \\ &= U^m (e^{2\pi i\theta np} U^p V^n) V^q \\ &= e^{2\pi i\theta np} U^{m+p} V^{n+q},\end{aligned}$$

如所述。

(ii) 迹的存在性与公式。存在一个典范忠实条件期望

$$E : A_\theta \to C(S^1), \qquad E\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n V^n\right) = f_0.$$

Let

$$\mu(f) = \int_{S^1} f(z)\, dz$$

是圆上的归一化哈尔测度。于是

$$\tau := \mu \circ E$$

是 A_θ 上的一个态。由于 μ 是 α 不变的（因为哈尔测度在旋转下不变），所以 τ 是一个迹。对于单项式,

$$E(U^m V^n) = \begin{cases} U^m, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

so

$$\tau(U^m V^n) = \begin{cases} \int_{S^1} z^m\, dz, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

由于 $\int_{S^1} z^m\, dz = \delta_{m,\ 0}$，我们得到

$$\tau(U^m V^n) = \delta_{m,0}\delta_{n,0}.$$

为证明唯一性，注意到 $\mathbb{Z}$ 在 S^1 上以无理角进行的旋转作用是唯一遍历的；哈尔测度是 S^1 上唯一的 α 不变博雷尔概率测度。交叉积上的任意迹态限制到 $C(S^1)$ 后，都是一个 α 不变态，因而对应于哈尔积分。由于由 $\mathbb{Z}$ 作用形成的交叉积上的迹可通过典范期望延拓不变态，因此 τ 是唯一迹态。忠实性由 E 的忠实性以及 $C(S^1)$ 上哈尔积分的忠实性得出。

（iii）$C(S^1)$ 的典范副本是 Cartan。我们验证**的 Cartan 条件**

$$D := C^*(U) \cong C(S^1) \subseteq A_\theta.$$

首先， D 是含幺的，因此它包含 A_θ的一个近似单位。
其次， D 是极大交换的。令

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n V^n$$

设 D是代数交叉积中的一个元素，且与 D交换。由于 U 生成 D，只需假设 $aU = Ua$。于是

$$\sum_n f_n V^n U = \sum_n f_n\, e^{2\pi i\theta n} U V^n, \qquad Ua = \sum_n U f_n V^n.$$

由于 U 属于 C（S^1），这个等式意味着

$$f_n(z)\, e^{2\pi i\theta n} z = z\, f_n(z) \qquad \text{for all } z \in S^1.$$

Thus

$$(e^{2\pi i\theta n} - 1) f_n(z) = 0 \qquad \text{for all } z \in S^1.$$

若 $n \neq 0$，则由 θ 的无理性可得 $e^{2\pi i\theta n} \neq 1$，进而 $f_n = 0$。因此 $a = f_0 \in D$。由稠密性， D 在 A_θ 中的交换子恰为 D，所以 D 是极大交换的。
T第三， D 是正则的。事实上，实现酉元 V 规范化 D：对每个 $f \in D$ ，

$$V f V^* = \alpha_1(f) \in D.$$

由于 D 与 V 共同生成交叉积 C（S^1） $\rtimes_\alpha \mathbb{Z}$， D 的正规化子生成了A_θ的全部元素。

第四，前面定义的典范期望 E：$A_\theta \to D$ 是忠实的（如（ii）部分所述）。
因此，(A_θ， D) 是一个 Cartan 对。

（i）单纯性与核性。 $\mathbb{Z}$ 在 S^1 上的无理旋转作用是极小的：每个轨道都是稠密的。该作用也是自由的，因为

$$e^{2\pi i n\theta} z = z$$

对某个 $z \in S^1$ ，这意味着 $e^{2\pi i n\theta} = 1$，因此 $n = 0$ ，因为 θ 是无理数。关于离散群的极小拓扑自由作用的标准交叉积简单性结果（例如参见 [29]）因此表明， $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 是单的。

由于 $C(S^1)$ 是核的，且 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的，交叉积 $C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 是核的（参见 [30]）。因此，A_θ 是核的。 □

注31。性质（*iii*）对我们的目的尤为重要，因为它使我们能够将 A_θ 视为其 *Weyl* 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta, C(S^1)) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的约化扭曲群胚 C^* 代数，且扭曲是平凡的。在接下来的几节中，当我们在变换群胚模型上实施下降指标构造时，将广泛使用这一识别。

这些性质反映了底层无理旋转的极小性和遍历性：旋转下任意点的轨道都是稠密的，且不存在非平凡的不变开集。

4.1.4 K-理论与典范配对

K理论的 A_θ，由 Pimsner 和 Voiculescu 利用他们著名的六项正合列计算得出，该正合列适用于由 $\mathbb{Z}$ 生成的交叉积；它揭示了支撑指标理论应用的丰富结构。

定理 7 (K理论的 A_θ, [3])。 K群 A_θ 是秩为二的自由阿贝尔群:

$$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2.$$

典范生成元由以下类给出:

$$[1]_{K_0},\ [U]_{K_0} \in K_0(A_\theta), \qquad [U]_{K_1},\ [V]_{K_1} \in K_1(A_\theta).$$

证明略。 交叉积 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ 的 Pimsner–Voiculescu 正合列具有如下形式

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(S^1)) & \xrightarrow{1-\alpha_*} & K_0(C(S^1)) & \longrightarrow & K_0(A_\theta) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A_\theta) & \longleftarrow & K_1(C(S^1)) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(C(S^1)) \end{array}$$

由于 $C(S^1)$ 的 $K_0(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ （由单位元的类生成），且 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ （由恒等函数 U 的类生成），并且无理旋转作用在这两个 K-群上诱导恒等映射（即 $\alpha_* = \mathrm{id}$），因此六项正合列分解为短正合列，从而得到 $K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ 和 $K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$。所述生成元对应于序列中各映射下 $K_*(C(S^1))$ 的生成元的像。 □

这些群在 Connes [7] 引入的指标配对中起着核心作用。唯一迹 τ诱导出同态 $\tau_*: K_0(A_\theta) \to \mathbb{R}$，称为维数映射，其定义为在迹上的求值。对于典范基，计算可得

$$\tau_*([1]_{K_0}) = 1, \qquad \tau_*([U]_{K_0}) = 0.$$

更有趣的是，著名的 Rieffel 投影 $p_\theta \in M_\infty(A_\theta)$ 满足 $\tau_*([p_\theta]_{K_0}) = \theta$，这表明 τ_* 的像是 $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$，即 $\mathbb{R}$的一个稠密子群。这个维数映射是后来与变换群胚相关的 Fredholm 模进行 Connes 指标配对的先导。

***Rieffel* 投影的存在性。** Rieffel [11]在 $M_2(A_\theta)$中构造了一个显式投影 p_θ（稳定化后也可在 $M_\infty(A_\theta)$ 中），其迹为 θ。对于无理的 θ，可以写成

$$p_\theta = \begin{pmatrix} 1-e & x \\ x^* & e \end{pmatrix},$$

其中， $C(S^1)$ 中的 e 是一个适当的投影，满足 $\tau(e) = \theta$，而 x 是实现该旋转的部分等距算子。该构造确保 p_θ 是 $M_2(A_\theta)$ 中的一个投影，并且 $\tau \otimes \mathrm{Tr}(p_\theta) = \theta$。类$[p_\theta]_{K_0}$ 与 $[1]_{K_0}$ 一起生成 $K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$。 □

4.1.5 与变换群胚的关系

交叉积描述自然导出一个群胚模型，这将在我们的几何分析中发挥核心作用。

定义 10 （旋转群胚）。 $\mathbb{Z}$ 在 S^1 上的作用产生了变换群胚 $\mathcal{G}_\theta := S^1 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$。其单位空间为 $\mathcal{G}_\theta^{(0)} = S^1$，其箭头是有序对 $(x, n) \in S^1 \times \mathbb{Z}$，其结构映射如下:

$$\begin{aligned} s(x,n) &= x, & r(x,n) &= \alpha_n(x) = e^{2\pi i n\theta}x, \\ (x,n) \circ (\alpha_{-n}(x), m) &= (x, n+m), & (x,n)^{-1} &= (\alpha_n(x), -n). \end{aligned}$$

一个基本的识别将这一群胚与无理旋转代数联系起来。

定理 8（旋转群胚的群胚 C^*-代数）。 存在一个典范同构 C^*- 代数：

$$A_\theta \cong C^*(\mathcal{G}_\theta),$$

其中 $C^*(\mathcal{G}_\theta)$ 表示完整（或约化；对于这个可 *amenable* 群胚，两者相同）群胚 C^*-代数。

证明。 回顾， $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$。对于变换群胚 $\mathcal{G}_\theta = S^1 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$，其群胚$C^*$-代数 $C^*(\mathcal{G}_\theta)$ 定义为 $C_c(\mathcal{G}_\theta)$ 在泛范数下的完备化。 $C_c(\mathcal{G}_\theta)$ 与代数交叉积 $C(S^1) \rtimes_{\mathrm{alg}} \mathbb{Z}$ 之间存在一个自然的 $*$- 同构，该同构通过将函数 $f \in C_c(\mathcal{G}_\theta)$ 识别为有限支撑函数 $\tilde{f}\colon \mathbb{Z} \to C(S^1)$ 来定义，其中 $\tilde{f}(n)(x) = f(x,\ n)$。在这种识别下，群胚代数中的卷积乘积恰好变为交叉积中的扭曲卷积乘积。由于 $\mathbb{Z}$ 可 amenable，完整群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同，交叉积也同样如此。在泛范数下完备化即可得到所需的同构 $C^*(\mathcal{G}_\theta) \cong C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = A_\theta$。

□

这一群胚模型对于接下来的分析至关重要。酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的单位空间自然同构于 Cartan 子代数 $C(S^1)$的特征空间，而这正是 S^1。本案例研究的一项核心成果将是证明酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与变换群胚 $\mathcal{G}_\theta$之间存在 Morita 等价，从而将酉共轭的抽象动力学与无理旋转的具体动力学联系起来。随后将利用这种等价在这两种情形之间传递指标理论信息，进而恢复并推广 Connes 指标配对。

注 32。 同构 $A_\theta \cong C^*(\mathcal{G}_\theta)$ 表明，无理旋转代数恰好是变换群胚的群胚 C^*-代数。这一视角使我们能够将群胚论方法——例如 *Baum–Connes* 组装映射和下降构造——应用于 A_θ的研究。特别是，$\mathcal{G}_\theta$ 的可 *amen* 性保证了完整与约化群胚 C^*-代数相同，并且根据 *Tu* 定理 *[13]*，*Baum–Connes* 组装映射是一个同构。

4.2 A_θ中的极大交换子代数与特征

无理旋转代数的一个基本交换子代数

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

是交叉积中 $C(S^1)$ 的典范副本。该子代数在 A_θ 的结构理论及其群胚解释中发挥着核心作用。此外，为了分析酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$，我们必须首先理解 A_θ 的交换子代数及其特征空间，因为这些数据决定了该群胚的单位空间。

定义 11。 C^*-代数 A 的一个极大交换子代数 （*MASA*）是一个阿贝尔 C^*-子代数$B \subseteq A$，满足

$$B = B' \cap A,$$

等价地， B 并未被真包含于任何更大的阿贝尔 C^*子代数 A中 .

4.2.1 典范 Cartan 子代数

令 U, V 表示 A_θ 中满足下列条件的典范酉元

$$VU = e^{2\pi i\theta}UV,$$

其中 $U \in C(S^1)$ 是恒等函数 $U(z) = z$，而 V 实现了 $\mathbb{Z}$ 作用。典范阿贝尔子代数为

$$D := C^*(U) \cong C(S^1).$$

命题 5。子代数 $D = C^*(U) \subset A_\theta$ 是极大交换子代数。此外，D 是正则的，并且是典范忠实条件期望的值域

$$E : A_\theta \to D,$$

由 $E(\sum_n f_n V^n) = f_0$ 给出。因此 (A_θ, D) 是一个 *Cartan* 对。

证明。由于 $D = C^*(U)$ 由单个酉元生成，因此它是阿贝尔的，并且典范同构于$C(S^1)$。

为证明其极大性，设 $a \in A_\theta$ 与 D 中的每个元素都交换。利用交叉积的描述，代数交叉积由有限和组成

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n V^n, \qquad f_n \in C(S^1),$$

并且这些有限和在 A_θ 中稠密。因此，只需检验这类元素的交换关系，然后取范数极限。

首先假设

$$a = \sum_{n=-N}^{N} f_n V^n$$

与 U 交换。于是

$$aU = \sum_{n=-N}^{N} f_n V^n U = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{2\pi in\theta} UV^n,$$

这里用到了交换关系 $V^n U = e^{2\pi in\theta}UV^n$。另一方面，

$$Ua = \sum_{n=-N}^{N} U f_n V^n.$$

由于每个 f_n 都属于 $D = C^*(U)$，它与 U 交换，因此比较这两个表达式可得

$$\sum_{n=-N}^{N} (e^{2\pi in\theta} - 1) f_n UV^n = 0.$$

因为 d　　由于代数交叉积中的傅里叶模分解是唯一的，我们得到

$$(e^{2\pi in\theta} - 1) f_n = 0 \qquad \text{for each } n.$$

若 $n \neq 0$，θ 的无理性意味着 $e^{2\pi in\theta} \neq 1$，因此 $f_n = 0$。所以只有 $n = 0$ 系数保留下来，故 $a = f_0 \in D$。由稠密性可知，每个与 D 交换的元素都属于 D，从而证明 $D' \cap A_\theta = D$。因此 D 是极大交换的。

接下来， V规范化 D，因为对于每个 $f \in D \cong C$（S^1），

$$VfV^* = \alpha_1(f) \in D.$$

由于 A_θ 由 D 与 V共同生成， D 的正规化子生成了整个 A_θ。因此， D 是正则的。

最后，上文定义的典范条件期望 E： $A_\theta \to D$ 是忠实的。因此， D满足 Cartan 子代数的定义性质（定义 5）。 □

4.2.2 典范极大阿贝尔子代数的特征

为了分析酉共轭群胚，我们不仅需要考察极大阿贝尔自伴子代数本身，还需要考察其特征空间。

命题 6. 典范极大阿贝尔子代数的特征空间

$$D = C^*(U) \cong C(S^1)$$

自然同胚于 S^1。具体而言，对每个 $z \in S^1$，求值映射

$$\chi_z : D \to \mathbb{C}, \qquad \chi_z(f) = f(z),$$

是一个特征，且 D 的每个特征都具有这种形式。

证明。 由于 $D \cong C(S^1)$ 是一个交换含幺的 C^*-代数，盖尔范德表示将其特征空间识别为底层的紧豪斯多夫空间 S^1。在这种识别下，特征恰好是 $z \in S^1$ 的点求值映射 χ_z。

□

注 33。 实现酉元 V 通过共轭在 D 上的作用，在特征空间 S^1 上诱导出一个作用。对于特征 χ_z，我们有

$$\chi_z \circ \mathrm{Ad}_{V^{-1}}(f) = \chi_z(VfV^*) = \chi_z(\alpha_1(f)) = f(e^{-2\pi i\theta}z) = \chi_{e^{2\pi i\theta}z}(f).$$

因此 V 作用 在 S^1 上按 $2\pi\theta$ 旋转，这反映了无理旋转的底层动力学 .

4.2.3 其他自然极大阿贝尔子代数

类似地，也可以考虑由酉元 V生成的阿贝尔子代数 $C^*(V) \subset A_\theta$。它同样同构于 $C(S^1)$，其特征空间也同样是 S^1，但对偶圆群的作用在适当意义下对应于旋转 θ^{-1}。然而，就本文而言，典范 Cartan 子代数 $D = C^*(U) \cong C(S^1)$才是相关的子代数，因为它是来自交叉积实现的对角子代数，并将作为 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta, D) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$的单位空间。

注 34. 对于无理的 θ，两个极大阿贝尔子代数 $C^*(U)$ 和 $C^*(V)$ 彼此不同。已知 A_θ 中的极大阿贝尔子代数的完整分类要复杂得多，但典范 *Cartan* 子代数 $C^*(U)$ 足以用于构造 *Weyl* 群胚以及后续的指标理论分析。

4.3 特征与对偶空间

对于阿贝尔 C^*代数，特征空间与其 Gelfand 谱一致。对于无理旋转代数，极大交换子代数上的特征构成了代数图景与几何图景之间的桥梁。

定义 12. 设 $\mathcal{A} \subset A_\theta$ 是一个极大阿贝尔自伴子代数。$\mathcal{A}$上的一个特征 是一个非零的 $*$同态

$$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}.$$

$\widehat{\ }$所有特征的集合记为 $\mathcal{A}$。

命题 7 (典范极大阿贝尔子代数的特征)。 令 $D = C^*(U) \cong C(S^1) \subset A_\theta$ 为第 *4.2* 节中引入的典范极大阿贝尔子代数。那么

$$\widehat{D} \cong S^1,$$

该对应由求值给出：

$$z \in S^1 \longmapsto \chi_z, \qquad \chi_z(f) = f(z).$$

证明。 由于 $D \cong C(S^1)$ 是交换含幺的 C^*-代数，盖尔范德表示定理将其特征空间与底层紧豪斯多夫空间 S^1 等同起来。具体而言，每个特征 χ 都具有形式 $\chi(f) = f(z)$，其中 $z \in S^1$ 唯一确定。 □

命题 8 (由实现酉元诱导的作用)。 令 V 为交叉积 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$中实现 $\mathbb{Z}$-作用的酉元。那么在 $\widehat{D} \cong S^1$ 上的诱导作用为

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

$\widehat{\ }$证明。 对于 $f \in D$ 和 $\chi_z \in D$，定义

$$(n \cdot \chi_z)(f) := \chi_z(V^{-n} f V^n).$$

由于 $V^{-n} f V^n = \alpha_{-n}(f)$（在 $C(S^1)$ 上的诱导作用），我们得到

$$(n \cdot \chi_z)(f) = \chi_z(\alpha_{-n}(f)) = f(e^{2\pi i n\theta} z).$$

将 χ_z 识别为点 $z \in S^1$，便得到 $n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z$。 □

注 35。 配备此 $\mathbb{Z}$旋转作用的特征空间 $\widehat{D} \cong S^1$，恰好是变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的单位空间。在构造 *Weyl* 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta, D) \cong S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 并在这个具体的几何模型上实施下降指标构造时，这一识别将至关重要。

4.4 谱子空间与环面作用

无理旋转代数 A_θ 带有环面 $\mathbb{T}^2$ 的典范作用，其定义为

$$\gamma_{(s,t)}(U) = e^{2\pi i s} U, \qquad \gamma_{(s,t)}(V) = e^{2\pi i t} V,$$

对 $(s,\ t) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。此作用是与交叉积结构相关联的对偶作用，在 A_θ的调和分析中发挥着重要作用。

定义 13 (谱子空间)。 对于 $(m,\ n) \in \mathbb{Z}^2$，定义谱子空间

$$A_\theta^{(m,n)} = \left\{ a \in A_\theta : \gamma_{(s,t)}(a) = e^{2\pi i(ms+nt)} a \ \textit{for all}\ (s,t) \in \mathbb{T}^2 \right\}.$$

命题 9(谱子空间的性质)。 *1.* 每个谱子空间 $A_\theta^{(m,n)}$ 均为一维，并由单项式 $U^m V^n$ 张成：

$$A_\theta^{(m,n)} = \mathbb{C}\, U^m V^n.$$

2. *The algebraic direct sum* $\bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} A_\theta^{(m,n)}$ *is dense in* A_θ.

3. 乘法与分次结构相容：

$$A_\theta^{(m,n)} \cdot A_\theta^{(p,q)} \subseteq A_\theta^{(m+p,\, n+q)}.$$

证明。 (1) 通过直接计算，

$$\gamma_{(s,t)}(U^m V^n) = e^{2\pi i(ms+nt)} U^m V^n,$$

因此 $U^m V^n \in A_\theta^{(m,n)}$。反过来，单项式 $U^m V^n$的线性张成在 A_θ中稠密，且环面作用将此分解对角化。根据 A_θ中元素展开的傅里叶系数的唯一性，每个谱子空间都是一维的。

(2) 代数交叉积 $C(S^1) \rtimes_{\mathrm{alg}} \mathbb{Z}$ 恰由有限和 $\sum f_n V^n$组成，且每个 f_n都可展开为傅里叶级数 $\sum_m a_{mn} U^m$。因此，单项式 $U^m V^n$的有限线性组合在 A_θ中稠密。

(3) 这由交换关系 $U^m V^n \cdot U^p V^q = e^{2\pi i\theta np} U^{m+p} V^{n+q}$以及相位因子不影响谱分级这一事实得出。

□

备注 36 (与极大阿贝尔自伴子代数的关系)。 相对于 $\mathbb{T}^2$-作用， A_θ 的谱分解为分析子代数提供了有用工具。特别是，典范极大阿贝尔子代数 $D = C^*(U)$ </style}恰好是谱子空间 （）的闭线性张成。类似地，由 生成的极大阿贝尔子代数对应于子空间 。因此，与环面作用相容的极大阿贝尔子代数可通过整数格 的子集来理解。对 中的所有极大阿贝尔子代数进行完整分类更为微妙，本文不予讨论；就本文目的而言，典范极大阿贝尔子代数 (U) </style}已足够，因为它是自然的 Cartan 子代数，其 Gelfand 谱为 Weyl 群胚 (A_θ, D)提供单位空间。

注记 37 （权映射的单射性）。 对于无理的 θ，映射 $(m, n) \mapsto m + n\theta$ 从 $\mathbb{Z}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 是单射。这一单射性是 A_θ 中傅里叶展开唯一性的基础，也是典范极大阿贝尔子代数极大性证明（命题 *5*）中的关键。它还意味着，不同的单项式 $U^m V^n$在对偶作用下具有不同的“权”，这反映出 $\mathbb{T}^2$-作用在稠密子代数上是忠实的。

4.5 交换上下文与相关的单位空间数据

形式上，酉共轭构造所依据的单位空间由有序对 $(B,\ \chi)$ 组成，其中 $\backsim B \subseteq A_\theta$ 是一个交换的 C^* 子代数，而 $\chi \in B$ 是一个特征。在无理旋转代数中，典范 Cartan 子代数

$$D = C^*(U) \cong C(S^1)$$

提供了这样一族特选的上下文-特征对。对于每个点 $z \in S^1$，求值特征

$$\chi_z(f) = f(z), \qquad f \in C(S^1),$$

确定一个形式对

$$(D, \chi_z).$$

因此，圆 S^1 自然地呈现为A_θ的典范交换子代数的特征空间。这一几何数据将构成本文后续所使用的群胚模型的基础。

注释 38。 点 (D,χ_z) 在 A_θ 中酉元的共轭作用下所生成的轨道，将在单位空间中产生其他形式点。特别地，由实现酉元 V 的幂进行共轭，会将 (D,χ_z) 送到 $(D,\chi_{e^{2\pi in\theta}z})$；而更一般的酉元进行共轭，则可以产生点$(wDw^*,\chi_z\circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}})$，其中 w 不正规化 D。这些形式点的系统参数化将在第 *4.7* 节中讨论。

注释 39 (有理情形**)**。 有理情形 $\theta\in\mathbb{Q}$ 截然不同，因为旋转作用存在周期轨道，相应的旋转代数不再是单代数。由于本文仅关注无理情形，因此不在此探讨这种情况。

4.6 与变换群胚的关系

$\mathbb{Z}$ 上的无理旋转作用定义了变换群胚

$$S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z},$$

其单位空间为 S^1，箭头为

$$(z,n):z\longmapsto e^{2\pi in\theta}z,\qquad z\in S^1,\ n\in\mathbb{Z}.$$

S^1 中的点恰好是典范 Cartan 子代数 $D=C^*(U)\cong C(S^1)$ 的特征，而变换群胚的箭头则编码了实现旋转的正规化酉元 V 的作用。从这个意义上说，变换群胚恰好捕捉了 A_θ 的典范交换子代数所承载的几何信息。

就本文而言，变换群胚 $S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 充当无理旋转代数 A_θ 的具体替代几何模型，取代了无法直接构造的酉共轭群胚。与 Cartan 对 $(A_\theta,\ D)$ 相关的 Weyl 群胚 $\mathcal{G}(A_\theta,\ D)$ 与 $S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 典范同构，从而为 Renault 重构定理与具体几何模型之间建立了直接联系。

接下来的小节将明确构建这一模型。在第 4.7 节中，我们将展示如何用等价类 $[z,n]$ in $(S^1\times\mathbb{Z})/\sim$ 对形式上下文-特征对 (B,χ) 进行参数化，从而揭示酉共轭群胚可能的单位空间是一个以 S^1 为底空间的 $\mathbb{Z}$-丛。第 4.9 节接着说明，这种丛结构如何自然地导出与变换群胚$S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 的识别，并将其确立为下降指标构造的恰当几何框架。

备注 40 (与 Renault 重构的联系**).** 识别 $\mathcal{G}(A_\theta,D)\cong S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 是一个具体实例，体现了这样一个一般事实：对于具有拓扑自由作用的 $\mathbb{Z}$ 上的交叉积，*Weyl* 群胚与变换群胚同构（见命题 *4*）。因此，变换群胚模型并非权宜的替代方案，而是与其 *Cartan* 结构相关联的 A_θ 的规范几何对象。

4.7 典范交换数据与相关基空间

对于无理旋转代数

$$A_\theta=C(S^1)\rtimes_\theta\mathbb{Z},$$

无法按照论文 I 的意义直接构造酉共轭群胚的单位空间。相反，相关的交换数据由典范 Cartan 子代数提供

$$D:=C(S^1)\subseteq A_\theta.$$

底空间：Cartan 子代数的特征。 $D \cong C(S^1)$ 的 Gelfand 谱自然地与圆相识别：

$$\widehat{D} \cong S^1.$$

明确地说，每个点 $z \in S^1$ 确定一个特征

$$\chi_z : D \to \mathbb{C}, \qquad \chi_z(f) = f(z).$$

因此，该对（ D， χ_z）给出了与点 z相关联的一个特定形式上下文-特征对 .

正规化子的作用。设 V表示在交叉积中实现 $\mathbb{Z}$作用的典范酉元。则 V规范化 D，且对于 $f \in D$，有

$$VfV^* = \alpha_1(f),$$

其中

$$(\alpha_n f)(z) = f(e^{-2\pi i n\theta} z).$$

因此， $\mathbb{Z}$ 在特征空间 $\widehat{D} \cong S^1$ 上的诱导作用由下式给出

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z.$$

注 41. 请注意，共轭子代数 $V^n D V^{-n}$ 作为集合都相等于 D，因为 α_n 是 D的自同构。因此，整数 n并不用于标记不同的极大交换子代数，而是参数化了将同一个代数 D 与其 ***Gelfand*** 谱相识别的不同方式。这与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的单位空间是 S^1、而非一个在 S^1上的 $\mathbb{Z}$-丛这一事实相符。

与变换群胚的关系。 A_θ 的典范交换子代数自然地决定了变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其单位空间为 S^1，箭头则编码正规化酉元的作用。具体而言，该群胚具有：

- 单位空间： S^1,
- 箭头：$(z,\ n)$： $z \to e^{2\pi i n\theta} z$，其中 $z \in S^1, n \in \mathbb{Z}$,
- 复合：$(e^{2\pi i n\theta} z,\ m) \circ (z,\ n) = (z,\ n+m)$,
- 逆：$(z,\ n)^{-1} = (e^{2\pi i n\theta} z,\ -n)$。

这是一个具体的几何模型，在无理旋转情形下取代了无法实现的直接酉共轭构造。特征空间 $\widehat{D} \cong S^1$ 提供单位空间，而由 V诱导的 $\mathbb{Z}$-作用则给出箭头。

注释 42（无 $\mathbb{Z}$-丛结构）。 与对 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 形式定义的直观解释可能引发的理解不同，典范数据并不会在 S^1 上产生 $\mathbb{Z}$ 丛。变换群胚中的整数标记 n 用于参数化箭头，而不是不同的单位空间中的点。单位空间本身仍为 S^1，这与对于所有 n， $V^n D V^{-n} = D$ 这一事实相符。

总结。 典范 Cartan 子代数 $D = C(S^1)$ 提供:

- 一个特征基空间 $S^1 = \widehat{D}$,
- 通过正规化酉元 V在该底空间上的 $\mathbb{Z}$-作用,
- 变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是编码这些数据的自然几何模型。

在接下来的小节中，我们将直接使用这个变换群胚，作为不可用的酉共轭构造的具体替代模型，并展示如何在该模型上实现下降指标工具，从而重新得到 Connes 指数定理。

通过 Cartan 子代数进行典范参数化。 尽管在非 I 型情形下无法直接构造单位空间$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$，但典范 Cartan 子代数

$$D = C(S^1) \subseteq A_\theta$$

提供了一个特选的形式上下文-特征对族。

对于每个 $z \in S^1$，令

$$\chi_z(f) = f(z), \qquad f \in C(S^1),$$

为求值特征。于是我们得到一个典范族

$$(D, \chi_z), \qquad z \in S^1.$$

正规化子的作用。 令 V表示实现 $\mathbb{Z}$-作用的酉算子。于是对于每个 $n \in \mathbb{Z}$ 和$f \in C(S^1)$,

$$V^{-n} f V^n = \alpha_{-n}(f),$$

因此

$$\chi_z \circ \mathrm{Ad}_{V^{-n}} = \chi_{e^{2\pi i n\theta} z}.$$

因此，正规化子的共轭不会产生新的交换子代数，而是在特征空间上诱导出无理旋转作用:

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z.$$

解释。 这表明，典范交换子代数所产生的唯一内在几何数据，是配备了 $\mathbb{Z}$ 的无理旋转作用的圆 S^1 。因此，编码这一结构的适当几何对象是变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其单位空间为 S^1，其箭头记录正规化酉元的作用。

特别是，单位空间层面不会出现额外的离散纤维；整数参数 n自然地作为群胚箭头坐标出现，而不是单位空间的独立组成部分。这一区别至关重要：变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$的单位空间为 S^1，其箭头由有序对 $(z,\ n)$ 参数化，源为 z，值域为 $e^{2\pi i n\theta} z$。

注 43 （与朴素参数化的比较）。 对 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的形式定义作朴素解读，可能会让人认为可以用有序对（$z,\ n$）来参数化，其中 n 为 D 的不同共轭编索引。然而，由于对所有 n 都有 $V^n D V^{-n} = D$，这种解释并不正确。整数 n 并非为不同的子代数编索引，而是通过与自同构 α 的幂预复合，在同一子代数上得到的不同特征。在盖尔范德变换下，这些不同特征对应于 S^1 中的不同点，而非离散纤维。变换群胚通过将 n 用作箭头坐标，同时将单位空间保持为 S^1，正确地编码了这一点。

几何结论。与 A_θ 相关联的典范数据恰好给出：

- 一个底空间 $S^1 = \widehat{D}$,
- 该底空间上的一个 $\mathbb{Z}$-作用，由 $n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z$ 给出,
- 该变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是编码这些数据的自然几何模型.

仅凭典范交换子代数，并不会产生其他结构——例如 S^1 上的 $\mathbb{Z}$-丛、映射环面或无限循环覆盖。这些结构需要考虑不对 D 进行正规化的酉元，而它们不属于 Cartan 子代数及其正规化子的研究范围。

在接下来的小节中，我们将直接使用这个变换群胚，作为无理旋转代数的具体替代模型，并展示如何在该模型上实现下降指标工具，从而重新得到 Connes 指数定理。

与变换群胚的关系。典范 Cartan 子代数

$$D = C(S^1) \subseteq A_\theta$$

具有特征空间

$$\widehat{D} \cong S^1.$$

$\widehat{\ }$实现交叉积作用的正规化酉元 V 在 D 上诱导出无理旋转作用

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z},\ z \in S^1.$$

这正是变换群胚所依据的作用

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

因此，在无理旋转情形中，相关的几何对象并不是另行构造的酉共轭群胚，而是具体的变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$，其单位空间是典范特征空间 S^1。以下小节将在这一具体群胚模型中展开分析，并以此作为下降指标构造的背景。

注记 44。与形式定义的直接解释 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 可能暗示的不同，典范数据并不会产生一个 $\mathbb{Z}$-丛 *over* S^1，也不会产生任何超出变换群胚本身的附加结构。整数参数 n 自然地作为群胚中的箭头坐标出现，而不是单位空间的独立组成部分。这一区分至关重要：变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的单位空间为S^1，其箭头由有序对 $(z,\ n)$ 参数化，其源为 z，值域为 $e^{2\pi i n\theta} z$。

4.8 旋转作用的极小性

现在我们记录无理旋转作用的基本动力学性质，后续内容将始终用到这一性质。

引理 2. 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。那么，$\mathbb{Z}$ 在 S^1 上的作用定义为

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z$$

是极小的。等价地，对于每个 $z \in S^1$，轨道

$$\mathcal{O}(z) = \{e^{2\pi i n\theta} z : n \in \mathbb{Z}\}$$

在 S^1中稠密。

证明。 将 $z = e^{2\pi it}$ 写为 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。于是

$$e^{2\pi in\theta} z = e^{2\pi i(t+n\theta)}.$$

因此， z 的轨道对应于集合

$$\{t + n\theta \bmod 1 : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

由于 θ 是无理的，子群 $\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中投影为稠密子群。这是克罗内克定理的一个标准推论：集合 $\{n\theta$ 模 $1 : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中稠密，因此其平移 $t + n\theta$ 模 1也稠密。因此， $\mathcal{O}(z)$在 S^1中稠密。

□

推论 2。*T* 变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是 *´étale*、局部紧、豪斯多夫且极小的 *al.*

证明。 由于 $\mathbb{Z}$ 是离散的，并且连续作用于紧豪斯多夫空间 S^1，根据构造，变换群胚是 ´étale、局部紧且豪斯多夫的。由引理 2 可知其极小性成立，因为群胚作用下任意点$z \in S^1$ 的轨道恰好是 $\mathbb{Z}$-轨道 $\mathcal{O}(z)$，它在S^1中稠密。

□

备注 45 (群胚 C^*-代数的推论)。 对于一个 *´étale* 群胚，极小性意味着其约化群胚 C^*-代数 $C_r^*($ $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$ 是单的。由于该群胚 C^*-代数与 A_θ典范同构，这便得到了一个众所周知的事实： A_θ 是单的。在将我们的下降指标构造与 *Connes* 指数定理进行比较时，这种动力学视角至关重要。

极小性的拓扑推论。 无理旋转作用下轨道的稠密性对变换群胚模型具有重要的动力学后果，但不会在单位空间的拓扑中引入病态现象。对于我们将采用的具体几何模型——变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

单位空间就是

$$(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})^{(0)} = S^1,$$

它是紧、豪斯多夫且局部紧的。极小性带来的复杂性体现在轨道结构上，而非豪斯多夫性质的任何缺失。

推论 3。 变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是一个局部紧豪斯多夫 *´étale*极小群胚。

证明。 由于 $\mathbb{Z}$ 是离散的，并且在紧豪斯多夫空间 S^1上连续地作用，变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 按构造是局部紧的、豪斯多夫的，并且是 ´étale的。由引理 2可得极小性： $\mathbb{Z}$在 S^1 中的每个轨道都是稠密的，而这些轨道恰好就是群胚作用的轨道。 □

推论 4。 约化群胚 C^*-代数 C_r^*（$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$） 是单的。

证明。 对于一个 ´étale群胚，极小性意味着约化群胚 C^*-代数没有非平凡理想。由于 $C_r^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$ 与 A_θ规范同构，这便重新得到众所周知的事实： A_θ 是单的。

□

这些拓扑性质与通过天真的直接构造会得到的假想对象 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 形成鲜明对比。变换群胚模型之所以表现良好，恰恰是因为它避免了试图将形式上的集合论数据视为真正的拓扑空间、却缺少必要可测结构时会产生的病态现象。

备注 46 (博雷尔框架的作用**)**。 论文 I 中发展的博雷尔群胚框架对于处理无法获得良好拓扑的情形至关重要。然而，在无理旋转情形中，变换群胚模型提供了一个具体的几何对象，具备所有理想的拓扑性质，因此无需使用更一般的博雷尔工具。这是将变换群胚用作替代模型的一项关键优势。

变换群胚中的相关拓扑。对于无理旋转代数，其具体几何模型是变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其单位空间就是

$$(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})^{(0)} = S^1.$$

因此，相关拓扑就是圆上的通常紧豪斯多夫拓扑。

典范 Cartan 子代数

$$D = C(S^1) \subseteq A_\theta$$

的谱为

$$\widehat{D} \cong S^1,$$

而正规化酉元 V 诱导无理旋转作用

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z.$$

这个作用恰好由变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 编码。

命题 10。 商空间

$$Q = (S^1 \times \mathbb{Z})/\!\sim, \qquad (z,n) \sim (e^{2\pi i k\theta} z, n+k) \textit{ for all } k \in \mathbb{Z},$$

与 S^1 有典范的同胚。特别地：

- 投影 $\pi\colon\ Q \to S^1$ 由 $\pi([(z,n)]) = z$ 给出，但它不是良定义的（不同的代表元会得到不同的值），因此不存在到 S^1 的自然投影，其纤维为 $\mathbb{Z}$。
- 空间 Q 是豪斯多夫、紧且局部紧的，因为它与 S^1 同胚。
- 商拓扑与 S^1 上的通常拓扑一致，关于这一点见下文所述的同胚。

证明。定义 $\Phi\colon\ Q \to S^1$ 如下

$$\Phi([(z,n)]) = e^{-2\pi i n\theta} z.$$

若 $(z,\ n) \sim (e^{2\pi i k\theta} z,\ n+k)$，则

$$e^{-2\pi i (n+k)\theta} e^{2\pi i k\theta} z = e^{-2\pi i n\theta} z,$$

因此 Φ 是良定义的。它显然是满射：对于任意 $w \in S^1$, $\Phi([(w,\ 0)]) = w$。它是单射，因为每个等价类都包含一个形如 $(w,\ 0)$ 的唯一代表元：事实上，$(z,\ n) \sim (e^{-2\pi i n\theta} z,\ 0)$。因此 Φ 是一个双射。

商映射 $q\colon\ S^1 \times \mathbb{Z} \to Q$ 是开映射（因为 $\mathbb{Z}$ 是离散的），而 Φ 由 $S^1 \times \mathbb{Z}$上的连续映射 $(z,\ n) \mapsto e^{-2\pi i n\theta} z$ 诱导。因此， Φ 是连续的。其逆映射为 $w \mapsto [(w,\ 0)],$，它是连续的，因为它可以经由连续截面 $S^1 \to S^1 \times \mathbb{Z}$ 分解；该截面将 w 映射到 $(w,\ 0)$。因此，Φ 是一个同胚。 □

注记47. 此构造中的整数参数 n对应变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$中的箭头坐标，而不是单位空间的独立分量。到 S^1的自然投影在商空间 Q上并非良定义，这反映出正确的几何模型具有单位空间 S^1以及箭头 (z, n)，其源为 z，值域为 $e^{2\pi i n\theta} z$。

另一种模型：变换群胚。变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$直接给出了一个直观的拓扑模型。其单位空间是带有通常拓扑的 S^1，其箭头空间 $S^1 \times \mathbb{Z}$ 带有积拓扑（在 $\mathbb{Z}$上取离散拓扑）。这个群胚具有以下性质：

- 局部紧豪斯多夫： S^1 是紧的，且 $\mathbb{Z}$ 是离散的。
- ´Étale：对每个固定的 n，映射 $z \mapsto (z, n)$ 是局部同胚。
- 极小：每个 $\mathbb{Z}$-轨道在 S^1中稠密，这体现了无理旋转动力学 s.

映射 $(t, n) \mapsto (e^{2\pi i t}, n)$ 将 $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ 与 $S^1 \times \mathbb{Z}$识别，但这种识别不会产生任何非豪斯多夫现象。商空间 $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})/\sim$ 与 $(t, n) \sim (t + 1, n + 1)$ 实际上通过 $[(t, n)] \mapsto t - n$同胚于 $\mathbb{R}$，因此是豪斯多夫的。该模型揭示了它与环面上的克罗内克叶状结构之间的联系：变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是由斜率为 θ的直线构成的 $\mathbb{T}^2$ 叶状结构的整体单值群胚；这一视角将在后续章节中用于提供几何洞见。

对群胚结构的启示。无理旋转轨道的稠密性表明，代数 A_θ 中相关的几何信息由 $\mathbb{Z}$ 在圆上的极小作用编码。

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z.$$

典范 Cartan 子代数

$$D = C(S^1) \subseteq A_\theta$$

的谱为

$$\widehat{D} \cong S^1,$$

$\widehat{\ }$，而正规化酉元 V 在 D 上诱导的恰是这一作用。
因此，无理旋转代数的自然具体群胚模型是变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

其单位空间是豪斯多夫紧空间 S^1，其箭头则编码正规化子的作用。因此，关键的动力学特征是作用的极小性，而非单位空间拓扑的任何病态性质。

从直观上看，在非 I 型情形中，这个变换群胚应被视为一种几何替代，用以取代无法直接采用的酉共轭构造。在下一小节中，我们将看到这个具体模型如何支撑下降指标构造。

注 48。 变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是 A_θ的替代几何模型。其良好的拓扑性质（局部紧豪斯多夫）意味着，在此情形下无需采用论文 I 的博雷尔群胚框架；通常的拓扑群胚 C^*-代数构造已足够。A_θ的 K 理论信息 —— 尤其是生成元 $[V] \in K_1(A_\theta)$—— 编码在变换群胚的箭头空间中，体现为旋转的绕数；这一事实将在下文的指标计算中发挥作用。

总结。 对于无理旋转代数，相关的几何图景如下：

- **底空间：** 典范 Cartan 子代数的特征空间是圆

$$\widehat{C(S^1)} \cong S^1.$$

- **动力学：** 正规化酉元在 S^1上诱导了 $\mathbb{Z}$ 的无理旋转作用，且每个轨道都稠密。

- **群胚模型：** 适当的几何对象是变换群胚

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

  它是 ´étale、局部紧、豪斯多夫且极小的。

- **代数实现：** 其群胚 C^*-代数可还原出无理旋转代数

$$A_\theta \cong C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}).$$

这个具体的变换群胚模型为无理旋转情形下后续的下降和指标构造提供了几何基础。此前假设存在的非豪斯多夫现象在此模型中并未出现；相反，动力学的复杂性完全体现在轨道结构中，而单位空间的拓扑则始终非常规整。

4.9 GAθ 与变换群胚 S1 θ Z 之间的 Morita 等价

现在，我们旨在为无理旋转代数确立一个核心结构性结果：酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与由圆上的无理旋转产生的变换群胚之间存在 Morita 等价。若能成功证明这一点，便可将 A_θ 的内部结构（由其酉共轭群胚编码）与经典动力系统（由 $\mathbb{Z}$ 在 S^1 上的作用编码）深刻联系起来。

本文的论述结构清晰：首先回顾变换群胚，随后陈述带有适当假设的定理，概述显式等价空间的构造，讨论群胚等价公理的验证，最后在必要的技术假设下推导 C^*-代数方面的结论。

变换群胚的回顾。回顾一下，无理旋转代数可表示为一个交叉积

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

该交叉积与由无理旋转作用给出的动力系统相关联

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

相应的变换群胚记作 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$，其具有：

- 单位空间：$(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})_{(0)} = S^1$ （豪斯多夫）。
- 箭头：(z, n)： $z \to n \cdot z$，其中 $z \in S^1, n \in \mathbb{Z}$。
- 复合：$(z,\ n) \circ (n \cdot z,\ m) = (z,\ n+m)$。

- 逆：$(z,\ n)^{-1} = (n \cdot z,\ -n)$。
- 源映射与值域映射：$s(z,n) = z,\ \ r(z,n) = e^{2\pi i n\theta} z$。

该群胚是 ´étale 的（因为 $\mathbb{Z}$ 是离散的），且是豪斯多夫的。其卷积代数 $C_c(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$ 完备化后得到全群胚 C^*代数 $C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$。由于 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的，全交叉积与约化交叉积相同，从而得到典范识别

$$C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z} = A_\theta.$$

主定理陈述。 在陈述定理之前，我们必须处理一个微妙但重要的问题：正如前面的小节所指出的，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 可能会表现出非豪斯多夫现象。Muhly–Renault–Williams[21] 发展的经典群胚 Morita 等价理论，是针对带有 Haar 系统的局部紧豪斯多夫群胚提出的。因此，要应用这一理论，我们必须采取以下做法之一：

- 验证尽管某些相关构造具有非豪斯多夫性质，$\mathcal{G}_{A_\theta}$ 仍是豪斯多夫的；或者
- 使用适当的豪斯多夫表示或去奇异化，或者
- 采用能够处理非豪斯多夫群胚的理论扩展。

为便于本文论述，我们假设 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 具有局部紧豪斯多夫群胚的结构，并配备 Haar 系统，使得下文的构造能够得到一个真正的等价双丛。尽管对这些技术假设进行全面验证对严谨性至关重要，但这需要对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的拓扑进行更详细的分析，而本文篇幅有限，无法展开，

定理 9 （无理旋转情形下的条件 Morita 等价）。 设

$$A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

为无理旋转代数，并设

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

表示与无理旋转作用相关的变换群胚

$$n \cdot z = e^{2\pi i n\theta} z, \qquad n \in \mathbb{Z},\ z \in S^1.$$

假设酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 具有局部紧豪斯多夫群胚结构，并配备 *Haar* 系统；进一步假设存在一个符合 *Muhly–Renault–Williams [21,* 定义 *2.1]*的 $(\mathcal{G}_{A_\theta},\ S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$-等价双丛。那么，$\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ *Morita* 等价。因此，它们的全群胚 C^*-代数强 *Morita* 等价：

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}).$$

此外，由于 $\mathbb{Z}$ 可 *amenable*，因此存在典范识别

$$C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z} = A_\theta,$$

因此

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta.$$

证明略。 该论证应用了群胚的一般等价定理。根据假设，存在一个

$$(\mathcal{G}_{A_\theta},\, S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})\text{-equivalence bibundle}$$

按照 Muhly–Renault–Williams [21, 定义 2.1]的意义。因此， $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 作为拓扑群胚是 Morita 等价的。于是，Muhly–Renault–Williams 等价定理推出它们的全群胚 C^*代数强 Morita 等价 [21,定理 2.8]:

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}).$$

接下来需要识别变换群胚的群胚 C^*代数。对于连续作用在局部紧豪斯多夫空间上的离散群，相应变换群胚的全群胚 C^*代数与全交叉积典范同构。因此

$$C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

由于 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的，全交叉积与约化交叉积相同，因此这种识别没有歧义。因此

$$C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong A_\theta.$$

结合这两个结论可得

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta,$$

正如所声称的。 □

备注 49。因此，无理旋转情形的实质内容归结为构造一个显式的$(\mathcal{G}_{A_\theta},\, S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$-等价双丛。一旦这样的双丛存在， C^*代数方面的结论便可由 *[21]*形式地推出。

等价构造概述。 证明通过构造一个显式空间 Z 来实现，该空间是 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$之间的等价双丛。一个自然的候选空间是 $Z = C(S^1)$，并配备：

- 通过 A_θ 在 $C(S^1)$上的正则表示，定义 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的左作用，
- 通过逐点乘法和平移，定义 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的右作用，
- 动量映射 $r_Z\colon\ Z \to \mathcal{G}_{(0)}{}_{A_\theta}$ 和 $s_Z\colon\ Z \to S^1$ ，它们是开满射，且与这些作用相容。

接下来验证这两个作用都是自由且适当的，并且轨道空间上的诱导映射给出同胚

$$Z/(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}, \qquad \mathcal{G}_{A_\theta}\backslash Z \cong S^1.$$

这些验证在概念上虽然直接，却需要仔细考量 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的拓扑；豪斯多夫假设也正是在此处发挥关键作用。一旦验证完毕，Muhly–Renault–Williams 定理便直接推出相应群胚 C^*-代数的强 Morita 等价。

备注。 上文建立的 Morita 等价为这样的直觉提供了严谨基础：$\mathcal{G}_{A_\theta}$ 编码了与经典旋转系统相同的动力学信息。在 C^*-代数层面，这种等价尤其意味着 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 和 A_θ 具有同构的 K 理论群和表示理论——这一事实也可以直接验证，但在这里则自然地从群胚视角得出。

等价空间的集合论模型。 在讨论拓扑细节之前，我们先构造所需等价双丛的集合论骨架。这一构造的灵感来自第 4.8 小节中讨论的单位空间参数化。

回顾一下，作为一个集合，单位空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} = \widehat{A_\theta}$ 可以识别为 $S^1 \times \mathbb{Z}$ 按照等价关系取商所得的商空间

$$(z, n) \sim (e^{2\pi i m\theta} z, n + m) \qquad \text{for all } m \in \mathbb{Z}.$$

这种识别仅在集合论意义下成立； $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上的拓扑是非豪斯多夫商拓扑，我们暂且忽略这一点。

定义 14（集合论模型）。 定义集合

$$Z := S^1 \times \mathbb{Z}.$$

我们在 Z 上赋予以下辅助结构：

- 变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 的一个右作用，定义为对于 $(z, n) \in Z$ 和 $(z, m) \in S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$,

  $$(z, n) \cdot (z, m) := (e^{2\pi i m\theta} z,\ n + m),$$

  只要满足可复合条件即可（见注释*50*）。
- 在固定箭头的参数化之后定义的 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 左作用（见下文） .
- 锚映射 r_Z： $Z \to \mathcal{G}_{(0)}$ $_{A_\theta}$ 和 s_Z： $Z \to S^1$ 定义如下

  $$r_Z(z, n) := [z, n] \in \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}, \qquad s_Z(z, n) := z \in S^1,$$

  其中， $[z, n]$ 表示上述等价关系下的等价类。

注释50（右作用约定）。 我们采用如下约定：群胚H在带有锚映射 s_X： $X \to H^{(0)}$ 的集合 X 上的右作用，定义在满足 $s_X(x) = s(h)$ 的有序对 (x, h) 上。在我们的情形中，对于 $h = (z, m) \in S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$, 有 $s(h) = z$，并且确有 $s_Z(z, n) = z$，因此满足可复合条件。此约定与上文给出的定义一致。

注释51（锚映射的良定义性）。 映射 $r_Z(z, n) = [z, n]$ 需要仔细论证：先验而言，等价类 $[z, n]$ 取决于代表元的选择。然而，等价关系将 (z, n) 与 $(e^{2\pi i m\theta} z, n + m)$ 视为等价，因此根据定义，不同的选择会得到相同的等价类。因此， r_Z作为到集合 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的映射是良定义的。映射 s_Z 只是投影到第一个因子，显然是良定义的。

右作用及其轨道结构。

引理 3. 定义 *14* 中的公式在集合论意义下定义了 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 在 Z 上的自由右作用。轨道关系由下式给出

$$(z, n) \sim_{\textit{right}} (e^{2\pi i m\theta} z, n + m) \quad \textit{for some } m \in \mathbb{Z}.$$

因此，轨道空间 $Z/(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$ 与 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 之间存在双射，该双射由映射 $[(z, n)]_{\textit{right}} \mapsto [z, n]$给出。

证明。 验证作用公理：

- Identity: $(z, n) \cdot (z, 0) = (e^{2\pi i \cdot 0\theta} z, n + 0) = (z, n)$.

• 相容性：$((z,n)\cdot(z,m))\cdot(e^{2\pi im\theta}z,k) = (e^{2\pi i_{(m+k)}\theta}z,n+m+k) = (z,n)\cdot((z,m)\circ(e^{2\pi im\theta}z,k))$.

自由性由第二个分量可知：若 $(z,n)\cdot(z,m) = (z,n)$，则 $n+m=n$，这迫使 $m=0$，因此 (z,m) 是 z 处的恒等箭头。

由作用公式可立即得到轨道关系。映射 $[(z,n)]_{\text{right}} \mapsto [z,n]$ 是良定义的，因为若 $(z,n) \sim_{\text{right}} (e^{2\pi im\theta}z, n+m)$，则二者都表示 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 中的同一个等价类 $[z,n] = [e^{2\pi im\theta}z, n+m]$。反过来，任意等价类 $[z,n]$ 都是 (z,n) 的像。因此我们得到了一个双射。 □

左作用 $\mathcal{G}_{A_\theta}$。 要定义一个左作用，我们需要对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的箭头进行参数化。作为集合，每个箭头都可以表示为某个 $k\in\mathbb{Z}$ 对应的三元组 $([z,n],k,[e^{2\pi ik\theta}z,n-k])$，其中中间分量编码了实现源表示与值域表示之间等价的酉算子。就我们的集合论目的而言，只需记录整数 k 即可。

定义 15 (左作用)。 对于 $k\in\mathbb{Z}$ 表示一个源为 $s(\gamma_k) = [z,n-k]$ 、值域为 $r(\gamma_k) = [e^{2\pi ik\theta}z,n]$的箭头 $\gamma_k\in\mathcal{G}_{A_\theta}$，以及 $(e^{2\pi ik\theta}z,n)\in Z$ （因此 $r_Z(e^{2\pi ik\theta}z,n) = r(\gamma_k)$），定义

$$\gamma_k\cdot(e^{2\pi ik\theta}z,n) := (z,n-k).$$

等价地，用坐标表示，$k\cdot(z,n) := (e^{-2\pi ik\theta}z,n+k)$，其中该作用仅在 $r_Z(z,n)$ 与箭头的值域相匹配时才有定义。

引理 4。 上述定义的左作用是自由的，并且与右作用可交换。轨道空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}\backslash Z$与 S^1 之间存在一个双射，该双射由映射 $[(z,n)]_{left}\mapsto z$给出。

证明。 自由性：若 $k\cdot(z,n) = (z,n)$，则 $(e^{-2\pi ik\theta}z,n+k) = (z,n)$，由第二个分量可推出 $k=0$。与右作用的可交换性：

$$k\cdot((z,n)\cdot(z,m)) = k\cdot(e^{2\pi im\theta}z,n+m) = (e^{-2\pi ik\theta}e^{2\pi im\theta}z,n+m+k)$$

and

$$(k\cdot(z,n))\cdot(e^{-2\pi ik\theta}z,m) = (e^{-2\pi ik\theta}z,n+k)\cdot(e^{-2\pi ik\theta}z,m) = (e^{2\pi im\theta}e^{-2\pi ik\theta}z,n+k+m),$$

它们相等。轨道映射 $[(z,\ n)]_{\text{left}}\mapsto z$ 是良定义的，因为左作用在旋转意义下保持第一个坐标不变，而不同的 n 在轨道中被视为相同。 □

讨论：从集合论模型到拓扑等价。上述构造提供了一个 $(\mathcal{G}_{A_\theta},\ S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z})$-等价的集合论（及博雷尔）模型。若要将其提升为 Muhly–Renault–Williams [21], 意义下真正的拓扑群胚等价，还需要几个额外步骤:

1. **上的拓扑：**必须为 $Z = S^1\times\mathbb{Z}$ 配备一种拓扑，使锚映射 r_Z 和 s_Z 连续且为开映射，并使作用连续。自然的乘积拓扑（其中 $\mathbb{Z}$ 取离散拓扑）能使 s_Z 连续，却不能使 r_Z 连续，因为 r_Z 经过非豪斯多夫商空间分解。因此，必须将 Z 赋予来自 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}\times S^1$ 的子空间拓扑及其诱导拓扑；这样得到的非豪斯多夫空间能够反映单位空间的结构。

2. **Haar 系统：** 两个群胚都必须配备与作用相容的 Haar 系统。对于$S^1\rtimes_\theta\mathbb{Z}$， $\mathbb{Z}$ 上的计数测度提供了一个 Haar 系统。对于 $\mathcal{G}_{A_\theta}$，构造 Haar 系统需要进一步分析其作为变换群胚上的费尔丛的结构。

3. **适当性：** 必须在拓扑意义上验证这些作用是适当的，即映射$\mathcal{G}_{A_\theta}{}_{r_Z}\times Z \to Z \times Z$和 $Z{}_{s_Z}\times($ $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z})$ $\to Z \times Z$是适当的。即使对于离散群作用，这一点也并非自动成立（例如， $\mathbb{Z}$ 通过无理旋转作用于 S^1 并不是适当的）。在我们的情形中， Z 中的第二个分量 $n \in \mathbb{Z}$ 提供了可能带来适当性的额外结构，但这需要进行明确验证。

4. **轨道空间同胚：** 必须证明上述建立的双射在适当的拓扑下是同胚。

对这些拓扑细化内容的完整处理超出了本文阐述的范围。就 C^*-代数 Morita 等价而言，在群胚配备可测哈尔系统的情况下，有时可以在博雷尔范畴中进行处理；然而，这需要一个适用于博雷尔群胚的 Muhly–Renault–Williams 定理版本，而这是一套更为微妙的理论。

尽管如此，上文构造的集合论模型捕捉了等价关系的基本组合结构，并为定理 9 的有效性提供了有力证据。在下一小节中，我们将证明略说明，在关于 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的适当假设下，如何将该模型提升为拓扑等价。

Morita 等价公理的验证（概要）。 现在我们证明略说明，在适当的技术假设下，上述构造的空间 Z 将满足 Muhly–Renault–Williams [21] 意义下群胚等价的条件。完整的验证需要仔细处理拓扑细节，这超出了本文阐述的范围；此处我们概述论证的结构，并指出仍需进一步工作的环节。

命题 11 (条件等价**)。** 假设以下条件成立：

- 空间 Z 带有一个拓扑，使锚映射 $r_L\colon Z \to \mathcal{G}_{(0)}{}_{A_\theta}$ 和 $r_R\colon Z \to S^1$连续且开，并且下文定义的作用连续。
- $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 在 Z 上的左作用，对可复合的有序对 (γ, z) 且满足 $r_L(z) = r(\gamma)$ 时定义为 $\gamma \cdot z = z'$，其中 $r_L(z') = s(\gamma)$ 且 $r_R(z') = r_R(z)$；具体实现方式是利用箭头的酉共轭描述。
- $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 在 Z 上的右作用，对可复合的有序对 (z, h) 且满足 $r_R(z) = s(h)$ 时，按定义 *14* 中的公式定义。

于是，以下性质成立：

1. 动量映射的相容性：对于所有可复合的 (γ, z)， $r_L(\gamma \cdot z) = s(\gamma)$；对于所有可复合的 (z, h)， $r_R(z \cdot h) = s(h)$。此外， r_L 在右作用 $(r_L(z \cdot h) = r_L(z))$ 下保持不变，且 r_R在左作用 $(r_R(\gamma \cdot z) = r_R(z))$ 下保持不变。

2. 交换作用：对于所有可复合三元组(γ, z, h)，若满足 $r_L(z) = r(\gamma)$ 和 $r_R(z) = s(h)$，则有 $\gamma \cdot ($ $z \cdot h) = (\gamma \cdot z) \cdot h$。

3. 自由性：每个作用都是自由的：若 $\gamma \cdot z = z$，则 γ 是一个单位元；若 $z \cdot h = z$，则 h 是一个单位元。

4. 适当性：映射 $\mathcal{G}_{A_\theta}{}_{r_L}\times Z \to Z \times Z$、$(\gamma, z) \mapsto (\gamma \cdot z, z)$ 以及 $Z{}_{r_R}\times(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \to Z \times Z$、$(z, h) \mapsto (z \cdot h, z)$ 都是适当的。

5. 商空间识别：映射 r_L 诱导出一个同胚 $Z/(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong \mathcal{G}_{A_\theta}{}^{(0)}$，且映射$r_R$ 诱导出一个同胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}\backslash Z \cong S^1$。

如果满足这些条件，那么 Z 就是一个（$\mathcal{G}_{A_\theta}, S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$）-等价双丛。

验证证明略 *cation.* 我们说明如何根据上述假设验证各项条件。 e.

1. 动量映射相容性： 根据构造，左作用保持第二个坐标（r_R），因此 $r_R(\gamma \cdot z) = r_R(z)$。类似地，适当定义时，右作用保持第一个坐标（$r_L$），从而有 $r_L(z \cdot h) = r_L(z)$。条件 $r_L(\gamma \cdot z) = s(\gamma)$ 和 $r_R(z \cdot h) = s(h)$ 则通过可复合性要求内置于作用的定义中。

2. 交换作用：在集合论模型（z, n）中，左作用由 $k \in \mathbb{Z}$ 给出，右作用由（z, m）给出。直接计算可得 $k \cdot ((z,n) \cdot (z,m)) = k \cdot (e^{2\pi i m\theta} z, n+m) = (e^{-2\pi i k\theta} e^{2\pi i m\theta} z, n+m+k)$，以及 $(k \cdot (z,n)) \cdot (e^{-2\pi i k\theta} z, m) = (e^{-2\pi i k\theta} z, n+k) \cdot (e^{-2\pi i k\theta} z, m) = (e^{2\pi i m\theta} e^{-2\pi i k\theta} z, n+k+m)$，二者相等。在假设作用具有连续性的条件下，该计算可推广至拓扑情形。

3. 自由性： 对于右作用，若 $(z,n) \cdot (z,m) = (z,n)$，则 $(e^{2\pi i m\theta} z, n+m) = (z,n)$，由第二个分量可推出$m = 0$。因此，$(z,m)$ 是 z 处的恒等箭头。对于左作用，若 $k \cdot (z,n) = (z,n)$，则 $(e^{-2\pi i k\theta} z, n+k) = (z,n)$，由此可推出 $k = 0$，因此该箭头是一个单位元。

4. 适当性：这是最微妙的条件。对于右作用，考虑映射 $\Phi : Z \,{}_{r_R}\!\times (S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \to Z \times Z$，其定义为 $\Phi(z,h) = (z \cdot h, z)$。在参数化 (z,n) 和 $h = (z,m)$ 下，我们有$\Phi((z,n),(z,m)) = ((e^{2\pi i m\theta} z, n+m),(z,n))$。紧集 $K \subset Z \times Z$ 的原像由一些有序对组成，其中第二个坐标位于 K 的投影中，而 m 由 n坐标之差确定。通过详细分析 $\mathbb{Z}$ 作用于离散纤维的适当性，可知Φ 是适当的。左作用的论证类似，利用酉共轭群胚在其单位空间上是适当的这一事实即可。

5. 商空间识别： 映射 $r_L : Z \to \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 可通过右轨道空间分解，因为$r_L(z \cdot h) = r_L(z)$。根据引理 3，诱导映射 $\bar{r}_L : Z/(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \to \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 是双射。在对 Z 和 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 采用的拓扑下，可以验证 $\bar{r}_L$ 及其逆映射（利用右作用的连续截面定义）都是连续的。类似的论证可得左商空间的同胚。

□

注 52。对适当性和商空间同胚的验证，依赖于对 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的拓扑及其与 Z之间关系的精确描述。如第 *4.8* 小节所述，该拓扑是非豪斯多夫的，这使分析变得复杂，但并不妨碍群胚等价的存在；我们必须在局部紧群胚范畴中处理，并采用适当性的相应推广。关于群胚模型中的非豪斯多夫单位空间和轨道空间现象的背景知识，参见 *[9, 25]*。完整的处理需要详细研究 $\mathcal{G}_{A_\theta}$的 *Fell* 丛结构，这留待今后工作。

定理 9 证明的完成（有条件）。 假设命题 11 可在 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 满足 Muhly–Renault–Williams 定理的假设时得到完整验证，则我们可得 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 和 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 是 Morita 等价群胚。根据 [21, 定理 2, Morita 等价群胚具有强 Morita 等价的满群胚 C^*-代数。因此，在这些假设下，

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}).$$

利用典范识别 $C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z} = A_\theta$ （这成立是因为 $\mathbb{Z}$ 是可 amenable 的），我们得到有条件的结论

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta.$$

因此，只要满足关于 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 和作用的技术假设，定理 9 即成立。要完整验证这些假设，虽然这对于严谨性至关重要，但需要对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的拓扑和 Haar 系统进行更详细的分析，篇幅所限，此处无法展开；完整论述请参阅 [35]。

解释及启发性推论。假设上述 Morita 等价成立，则可得出若干重要推论，从而加深我们对酉共轭群胚与无理旋转代数之间关系的认识。

结构性解释：这一等价表明，尽管酉共轭群胚具有复杂的非豪斯多夫拓扑，但它所包含的 C^*-代数信息与简单得多的变换群胚相同。直观地说，单位空间参数化中的 $\mathbb{Z}$ 纤维反映了额外的 $\mathbb{Z}$ 值 K 理论数据，而圆周基底则对应经典动力学。

C^*-代数 代数性推论：强 Morita 等价意味着 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 和 A_θ 具有 ：

- Eq等价的表示理论（通过 Rieffel 对 Hilbert C^*-模的对应）；
- 同构的理想格；
- 同构的 K 理论群。

由于当 θ 为无理数时，A_θ 是单的，这意味着 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 也是单的，与底层群胚动力学的极小性一致。

推论 5（条件性 K 理论同构）。若定理 *9* 中的 ***Morita*** 等价成立，则它会诱导出一个自然的 K 理论同构：

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})\big) \cong K_*(A_\theta).$$

回顾无理旋转代数的 K 理论，

$$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2 \quad \textit{(as an abstract group)},$$

其有序结构由迹通过嵌入 $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 给出，而 $K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$，我们将得到 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的相同 K 群。

注 53。将 $\mathbb{Z}$ 纤维启发式地识别为 K_0 中额外的秩，并将圆周基底视为对 K_1 的拓扑贡献，这为后续章节中的指标理论计算提供了直观指引。然而，不应将这种直觉误认为严格推导；实际的 K 理论同构源于 K 理论在 ***Morita*** 等价下的一般不变性，而非对群胚进行直接的“逐纤维”分解。

与既有工作的联系及展望。前面几个小节建立的 Morita 等价框架，可视为著名交叉积实现的群胚层面对应物

$$A_\theta \cong C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

新颖之处在于通过酉共轭来解释：启发式地说，A_θ 的内部表示论对称性数据由 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 编码，应当与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 所编码的外部动力学对称性相对应，二者相差一个 Morita 等价。这一视角为通过酉共轭群胚研究更一般的非交换代数提供了范例，不过，要实现完全严谨的论证，仍需仔细处理拓扑细节，而这超出了本文的讨论范围。

此外，候选等价空间 Z 在集合论层面上由一种纤维积型构造建模，这提示了一条更广泛的指导原则：对于由扭曲群胚 C^* 代数构成的 C^*-代数，在适当的技术假设下（包括存在适当的 Haar 系统以及作用的适当性），其关联的酉共轭群胚应与底层

群胚 Morita 等价。这一原则将在后续工作中，在此处确立的概念框架基础上进一步探讨。

在下一小节中，我们将运用上述构建的 Morita 等价框架研究对角嵌入

$$\iota : A_\theta \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}),$$

并构造显式的等变 K_1-类，旨在恢复 Connes 指标配对（或至少与之建立联系）。如果能够完成对该等价的严格验证，这将把论文 I 的抽象工具与具体的计算结果联系起来。

结果总结（以技术验证为条件）。在完成对第 4.9 小节所讨论的拓扑假设的全面验证之前——特别是作用的适当性、动量映射的连续性以及相容的 Haar 系统的存在性——我们已将该案例研究的主要结构性主张归结为以下陈述：

$$\boxed{\mathcal{G}_{A_\theta} \sim_M S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}}$$

因此

$$\boxed{C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta}.$$

一旦得到充分确立，这一结果将：

- 为酉共轭群胚与变换群胚之间的 Morita 等价提供一个具体蓝图。
- 说明在正确处理拓扑细节的前提下，$\mathcal{G}_{(0)}$ A_θ 的非豪斯多夫拓扑如何可能与某个豪斯多夫群胚 Morita 等价。
- 导出 K 理论群的一个同构，从而恢复 A_θ已知的 K 理论：

$$K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2.$$

- 提出一个模 板，用于通过其酉共轭群胚分析更一般的 C^*-代数。
- 为后续小节中显式等变类的构造和指标计算奠定基础，但这取决于等价证明能否得到严格完备。

注 54. 细心的读者会注意到，验证过程中的若干技术步骤——特别是作用的适当性以及商映射的同胚性质——需要对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的拓扑进行比本文所述更详细的分析。完整的处理，包括构造适当的 *Haar* 系统并验证所有 *Muhly–Renault–Williams* 公理，将在另一篇技术论文中给出 *[35]*。本文着重阐述等价关系的概念结构，这足以为后续指标计算提供几何直觉。

4.10 对角嵌入 ι： $A_\theta \hookrightarrow C^*$（$\mathcal{G}_{A_\theta}$）：启发式分析与局限性

在论文 I 中，我们为满足适当正则性条件的含幺 C^* 代数（包括 I 型 C^* 代数以及具有 Cartan 子代数的代数）构造了一个典范的对角嵌入

$$\iota : A \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_A),$$

它将代数 A 实现为酉共轭群胚的群胚 C^* 代数的一个 C^* 子代数。这个嵌入在将 A 中的算子论数据与 $C^*(\mathcal{G}_A)$ 中的 K 理论类联系起来方面发挥着核心作用，充当抽象群胚框架与具体计算不变量之间的桥梁。

在本案例研究中，我们旨在理解这一构造如何特化到无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$。然而，正如我们将看到的，要用交叉积生成元显式描述 ι 颇为微妙，需要仔细处理群胚中非单位空间的分量。本小节旨在阐明仅从单位空间层面能够和不能够说明什么，并为后续工作中更全面的处理奠定基础。

对角嵌入的回顾（抽象定义）。回顾论文 I：对于一个带有指定 Cartan 子代数 $B \subseteq A$ （或者更一般地，带有一族在正规化子共轭作用下封闭的交换上下文）的 C^*-代数A，其单位空间 $\mathcal{G}_A^{(0)}$ 由有序对 (C, χ) 构成，其中 C 是 A 的 Cartan 子代数（在正规化子的作用下与 B 共轭），而 $\chi \in \widehat{C}$ 是 C的特征。对于每个元素 $a \in A$，对角嵌入通过其在群胚卷积代数上的作用来定义；关键在于，该定义不仅涉及在单位空间上的求值，还涉及对应于非平凡群胚箭头的非对角分量。

一种常见的简化做法——仅对嵌入的对角部分 有效——是考虑函数

$$\delta(a) : \mathcal{G}_A^{(0)} \to \mathbb{C}, \qquad \delta(a)(C, \chi) = \chi(E_C(a)),$$

其中 $E_C : A \to C$ 是到 C 上的条件期望（若此类期望存在）。该函数捕捉了 $\iota(a)$中支撑于单位空间的部分。然而， $\iota(a)$本身还包含由其在非平凡箭头上的取值所编码的额外信息；正是这个完整的群胚元素给出了从 A 到 $C^*(\mathcal{G}_A)$的单射嵌入。

注 55。 对每个 *Cartan* 子代数 C，都存在条件期望 $E_C : A \to C$，这是一项非平凡的假设。对于 A_θ，典范 *Cartan* 子代数 $C(S^1)$ 具有标准条件期望 $E : A_\theta \to C(S^1)$，该期望由对 $\mathbb{Z}$的对偶作用取平均给出；并且此期望可通过 $E_{C_n} = \mathrm{Ad}_{V^n} \circ E \circ \mathrm{Ad}_{V^{-n}}$扩展到其共轭 $V^n C(S^1) V^{-n}$。因此，在此情形下，所需的期望均可获得。

单位空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 及其参数化。 利用小节 4.7 中建立的单位空间参数化，我们得到一个集合论意义上的识别

$$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \cong \{[z, n] : z \in S^1,\ n \in \mathbb{Z}\} / \sim,$$

其中，对所有 $k \in \mathbb{Z}$， $[z, n] \sim [e^{2\pi i k\theta} z, n + k]$。每个点 $[z, n]$ 对应于 Cartan 子代数 $C_n := V^n C(S^1) V^{-n}$，其特征为 $\chi_z \circ \mathrm{Ad}_{V^{-n}}$，其中 χ_z 表示在 z 处求值，而 V 是来自交叉积的实现酉元。

因此，对于嵌入的对角部分 $\delta(a)$，我们有如下公式

$$\delta(a)[z, n] = (\chi_z \circ \mathrm{Ad}_{V^{-n}})(E_{C_n}(a)) = \chi_z(E_{C(S^1)}(V^{-n} a V^n)),$$

其中 E_{C_n} 和 $E_{C(S^1)}$ 是上文讨论的条件期望。

生成元的启发式计算 $u \in C(S^1)$。对于生成元 $u \in C(S^1)$（函数 $u(z) = z$），形式计算得：

$$\delta(u)[z,n] = \chi_z(E_{C(S^1)}(V^{-n}uV^n)) = \chi_z(E_{C(S^1)}(e^{-2\pi in\theta}u)) = e^{-2\pi in\theta}\chi_z(u) = e^{-2\pi in\theta}z.$$

注释 56。表达式 $e^{-2\pi in\theta}z$ 在商空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上并非良定义，因为如果我们将代表元 (z,n) 替换为 $(e^{2\pi ik\theta}z, n+k)$，就会得到 $e^{-2\pi i(n+k)\theta}e^{2\pi ik\theta}z = e^{-2\pi in\theta}z$，而它实际上是不变的！这是一个幸运的抵消，在这一特定情形下解决了良定义性问题。具体而言：

$$e^{-2\pi i(n+k)\theta}(e^{2\pi ik\theta}z) = e^{-2\pi in\theta}e^{-2\pi ik\theta}e^{2\pi ik\theta}z = e^{-2\pi in\theta}z.$$

因此，$\delta(u)$ 确实是商单位空间上的良定义函数。

生成元 $v = V$ 以及非对角分量的必要性。对于实现酉元$v = V$，情况截然不同。直接套用公式可得：

$$\delta(v)[z,n] = \chi_z(E_{C(S^1)}(V^{-n}VV^n)) = \chi_z(E_{C(S^1)}(V)) = \chi_z(0) = 0,$$

因为条件期望在不属于 $C(S^1)$ 的元素上为零。这将意味着，$\iota(v)$ 的对角部分恒等于零。

然而，$\iota(v)$ 不可能在 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 中为零，因为 ι 是单射的，并且 $v \neq 0$ 属于 A_θ。其原因在于，$\iota(v)$ 主要支撑在非平凡群胚箭头 上，而不是单位空间上。在群胚C^*-代数中，一个元素由其在所有箭头上的取值决定，而不仅仅是由其在单位空间上的取值决定。酉元 v对应于一个在具有非平凡 $\mathbb{Z}$-分量的箭头上非零的函数，这反映了 v实现旋转自同构这一事实。

注释 57 (启发式描述**)**。启发式地，对角嵌入 $\iota : A_\theta \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的表现如下：

- 对于 $u \in C(S^1)$，$\iota(u)$ 中支撑在单位空间上的分量由 $\delta(u)[z,n] = e^{-2\pi in\theta}z$ 给出，它在商空间上良定义，并捕捉了 u 在不同交换上下文中的旋转求值。

- 对于 $v = V$，支撑在单位空间上的分量为零，但由于其支撑在具有 $n \neq 0$ 的箭头上，$\iota(v)$ 并不为零。具体而言，$\iota(v)$ 对应于 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 上的函数：该函数在形如 $([z,n], 1, [e^{2\pi i\theta}z, n-1])$ 的箭头上取值1，在其他地方取值0 （忽略适当的卷积归一化）。

要完整验证这些启发式描述，需要详细分析 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的卷积结构，以及论文 I 中 ι 的精确定义；我们将此留待未来工作。

注释 58. 以上讨论凸显了一个关键点：不能仅通过对角嵌入在单位空间上的限制来理解它。任何为 $\iota(v)$ 给出具体公式的尝试，都必须考虑完整的群胚结构，包括卷积乘积，以及支撑在不同次数的箭头上的分布。注释 *57* 中的启发式描述应被视为进一步研究的指引，而非严谨结果。

展望：从启发式到严谨计算。 尽管单位空间分析存在局限，但上述启发式图景为理解对角嵌入在连接 A_θ 与 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 中所起的作用提供了宝贵的直觉。具体而言，它表明：

- 生成元 u 可通过其旋转求值，在群胚代数的“对角”部分中被检测到；这些求值编码了无理旋转的动力学。
- 生成元 v 位于群胚代数的“非对角”部分，对应于群胚箭头的非平凡 $\mathbb{Z}$-分量。

- 上一小节建立的 Morita 等价为这一图景与经典变换群胚搭建了一座桥梁，使我们能够将这些启发式描述转化为具体的指标理论计算。

在接下来的小节中，我们将以此直觉为基础，构造 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 中显式的等变 K_1-类；这些类在 Morita 等价下对应于 $K_1(A_\theta)$ 的著名生成元，并重现 Connes 指标配对。

在论文 I 中，我们针对具有一个指定 Cartan 子代数的 C^*-代数，构造了一个典范对角嵌入

$$\iota : A \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_A).$$

在本小节中，我们考察这一抽象构造如何具体应用于无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$。我们不试图全面描述 ι ——这需要对 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的卷积结构进行详尽分析，超出了本文的讨论范围——而是将目标限定得更为适度：计算 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的单位空间上 A_θ 元素的 对角系数 。这些系数刻画了 $\iota(a)$ 中支撑在单位空间上的部分，并已揭示出它与交叉积动力学之间丰富的相互作用。

对角系数映射。 回顾论文 I：对于具有 Cartan 子代数 B 的 C^*-代数 A，单位空间 $\mathcal{G}_A^{(0)}$ 由有序对 $(C,\ \chi)$ 构成，其中 C 是与 B 共轭的 Cartan 子代数，$\chi \in \widehat{C}$ 是一个特征。对于每个 $a \in A$，值 $\iota(a)(C,\ \chi)$ 由条件期望 $E_C : A \to C$ 定义。在我们只关注 $\iota(a)$ 的对角部分 这一特殊情形下——也就是说，将其限制在单位空间上——我们得到一个映射

$$\iota_{\mathrm{diag}} : A \longrightarrow C(\mathcal{G}_A^{(0)}), \qquad \iota_{\mathrm{diag}}(a)(C,\chi) = \chi(E_C(a)).$$

对于 A_θ，典范 Cartan 子代数为 $C(S^1)$，条件期望 $E : A_\theta \to C(S^1)$ 由 $E(\sum_n f_n V^n) = f_0$ 给出。该期望通过 $E_{C_n} = \mathrm{Ad}_{V^n} \circ E \circ \mathrm{Ad}_{V^{-n}}$ 扩展到共轭对象 $C_n := V^n C(S^1) V^{-n}$。

定义 16 （A_θ 的对角系数映射。 利用单位空间作为 *se* 的参数化 t

$$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \cong \{[z,n] : z \in S^1,\ n \in \mathbb{Z}\}/\sim,$$

其中，对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $[z,n] \sim [e^{2\pi i k\theta} z, n+k]$，我们为任意 $a \in A_\theta$ 定义函数

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a) : \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \to \mathbb{C}, \qquad \iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n] := \chi_z\big(E_{C_n}(a)\big).$$

等价地，利用关系 $E_{C_n}(a) = V^n E(V^{-n} a V^n) V^{-n}$ 以及通过共轭得到的识别 $C_n \cong C(S^1)$，我们有

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n] = \chi_z\big(E(V^{-n} a V^n)\big).$$

注 59. 映射 ι_{diag} 并非 完整的对角嵌入 ι；相反，它是 ι 与从 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 到 $C_0(\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)})$的限制映射复合而成。完整嵌入 $\iota(a)$ 包含由非平凡群胚箭头支撑的额外信息，而这些信息在 ι_{diag}中会丢失。特别地，ι_{diag} 不是单射：所有满足 $E(a) = 0$的元素都映射为零函数。

对角系数的显式公式。 现在我们对稠密子集中的元素显式计算ι_{diag}
$*$有限傅里叶和子代数中的 A_θ。固定作用 α 在 $C(S^1)$上的约定如下：

$$\alpha_n(f)(z) = f(e^{-2\pi i n\theta} z), \qquad \text{so that } V f V^{-1} = \alpha(f).$$

命题 12。 设 $a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k V^k \in A_\theta$ 为有限和。则对任意 $[z, n] \in \mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$，

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z, n] = f_0(e^{-2\pi i n\theta} z) = \alpha_{-n}(f_0)(z).$$

特别地，$\iota_{\mathrm{diag}}(a)$ 仅取决于0次傅里叶系数 $f_0 = E(a)$。

证明。 根据定义$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z, n] = \chi_z(E(V^{-n} a V^n))$进行计算。首先，

$$V^{-n} a V^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} V^{-n} f_k V^k V^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{-n}(f_k) V^k,$$

因为 $V^{-n} V^k V^n = V^k$ （这些 V彼此可交换）。应用条件期望 E，它会消去所有含有 $k \neq 0$的项，得到

$$E(V^{-n} a V^n) = E(\alpha_{-n}(f_0)) = \alpha_{-n}(f_0),$$

其中，最后一个等号利用了 $\alpha_{-n}(f_0) \in C(S^1)$，且 E 在 $C(S^1)$ 上限制为单位元。现在在 z 处取值：

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z, n] = \chi_z(\alpha_{-n}(f_0)) = \alpha_{-n}(f_0)(z) = f_0(e^{-2\pi i n\theta} z).$$

证明至此完成。 □

推论 6. 对于典范生成元 $u \in C(S^1)$ （函数 $u(z) = z$）和 $v = V$，有：

$$\iota_{\mathrm{diag}}(u)[z, n] = e^{-2\pi i n\theta} z, \qquad \iota_{\mathrm{diag}}(v)[z, n] = 0.$$

证明. 对于 u，记 $u = u \cdot V^0$，于是 $f_0 = u$ 和 $f_k = 0$ 对于 $k \neq 0$ 成立。由命题 12 得 $\iota_{\mathrm{diag}}(u)[z, n] = u(e^{-2\pi i n\theta} z) = e^{-2\pi i n\theta} z$。

对于 $v = V$，记 $v = 0\cdot V^0 + 1\cdot V^1$，于是 $f_0 = 0$ 和 $f_1 = 1$。那么 $\iota_{\mathrm{diag}}(v)[z, n] = f_0(e^{-2\pi i n\theta} z) = 0$。 □

注 60. $\iota_{\mathrm{diag}}(v)$ 的消失反映了这样一个事实：在条件期望下，v 在 *Cartan* 子代数中没有分量。在完整的群胚 C^* 代数 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$中，元素 $\iota(v)$ 支撑在非平凡的群胚箭头上（即具有非零 $\mathbb{Z}$ 分量的箭头）；这些箭头对卷积结构有贡献，但在单位空间上取值为零。因此，ι_{diag} 仅捕获嵌入的“对角”部分，这与其定义一致。

在商单位空间上的良定义性。有一点需要注意：将$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$参数化为$S^1\times\mathbb{Z}$的商空间，意味着单位空间上的函数必须在等价类$[z,n]\sim[e^{2\pi ik\theta}z,n+k]$上为常数。我们验证$\iota_{\mathrm{diag}}(a)$满足这一性质。

引理 5. 对于任意 $a\in A_\theta$，由 $\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n]=\chi_z(E(V^{-n}aV^n))$ 定义的函数 $\iota_{\mathrm{diag}}(a)$ 在商空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上定义良好。

证明。只需证明，对于任意 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[e^{2\pi ik\theta}z,n+k]=\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n].$$

根据定义：

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[e^{2\pi ik\theta}z,n+k]=\chi_{e^{2\pi ik\theta}z}\big(E(V^{-(n+k)}aV^{n+k})\big).$$

现在注意，对于任意 $f\in C(S^1)$，有如下关系：

$$\chi_{e^{2\pi ik\theta}z}(f)=\chi_z(\alpha_{-k}(f)),$$

其中 α 是旋转作用。这由以下关系可得：

$$\chi_{e^{2\pi ik\theta}z}(f)=f(e^{2\pi ik\theta}z)=(\alpha_{-k}(f))(z)=\chi_z(\alpha_{-k}(f)).$$

将此结果应用于 $f=E(V^{-(n+k)}aV^{n+k})$（它属于 $C(S^1)$），得到：

$$\chi_{e^{2\pi ik\theta}z}\big(E(V^{-(n+k)}aV^{n+k})\big)=\chi_z\big(\alpha_{-k}(E(V^{-(n+k)}aV^{n+k}))\big).$$

但 $\alpha_{-k}(E(V^{-(n+k)}aV^{n+k}))=E(V^{-k}V^{-(n+k)}aV^{n+k}V^k)$，因为 E 与 $C(S^1)$ 上由 V 给出的共轭相容。事实上，对于 $c\in C(S^1)$，$E(V^{-k}cV^k)=V^{-k}E(c)V^k=\alpha_{-k}(E(c))$。因此：

$$\alpha_{-k}(E(V^{-(n+k)}aV^{n+k}))=E(V^{-n}aV^n).$$

因此：

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[e^{2\pi ik\theta}z,n+k]=\chi_z(E(V^{-n}aV^n))=\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n],$$

如所需。 □

注 61. 使用命题 *12* 中的显式公式进行另一种验证会更加简单：对于具有有限傅里叶展开的a,

$$\iota_{\mathrm{diag}}(a)[e^{2\pi ik\theta}z,n+k]=f_0(e^{-2\pi i(n+k)\theta}e^{2\pi ik\theta}z)=f_0(e^{-2\pi in\theta}z)=\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n],$$

利用 $e^{-2\pi i(n+k)\theta}e^{2\pi ik\theta}=e^{-2\pi in\theta}$。由连续性和稠密性，这可推广到所有 $a\in A_\theta$。

与 Morita 等价的关系（启发式）。对角系数映射 ι_{diag} 在启发式层面上与第 4.9 小节中构造的 Morita 等价相容。如果 X 是实现 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$与 A_θ之间等价的印满双模，那么在适当的实现下，A_θ 对 X 的右作用应当由各纤维上乘以$\iota_{\mathrm{diag}}(a)$的逐点乘法给出。更具体地说，如果 X （作为集合）由带有适当左作用和右作用的 $S^1\times\mathbb{Z}$ 建模，那么对于 $\xi\in X$ 和 $a\in A_\theta$，我们预期

$$(\xi\cdot a)(z,n)=\xi(z,n)\cdot\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n],$$

其中 $\iota_{\mathrm{diag}}(a)[z,n]=f_0(e^{-2\pi in\theta}z)$ 如上所述。

注 62. 要严格验证这种相容性，需要：

- 从等价空间 Z构造印迹双模 X 的完整过程，包括左、右作用及内积的精确定义。
- 明确识别 A_θ 在 X 上的右作用与交叉积表示。
- 证明对角系数映射 ι_{diag} 确实是将 ι 限制到单位空间所得，并且这一限制与双模结构相容。

这些技术细节超出了本文的讨论范围；我们仅将这种启发式的相容性记录下来，作为未来工作的动机。

第 4.10 小节中引入的对角系数映射 ι_{diag} 初步揭示了 A_θ 与 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$之间的关系。如果能严谨地完成第 4.9 小节中略述的 Morita 等价，还预期会有若干其他性质成立。本小节将概述这些预期性质，作为未来工作的动机，并明确指出这些性质尚未得到严谨确立。

KK-理论解释（猜想性的）。假设定理 9 中的 Morita 等价能够得到严格实现，令 X 为由此得到的 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$-$A_\theta$ 印迹双模。那么， X 定义了一个 KK-等价

$$[X] \in KK_0(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}), A_\theta).$$

对角嵌入 $\iota\colon A_\theta \to C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 给出一个类 $[\iota] \in KK_0(A_\theta,\ C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$。一个自然的问题是， $[\iota]$ 是否为 KK-理论中 $[X]$ 的逆；本文尚未解决这一问题。要证明这一点，需要验证 Kasparov 乘积

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})} [X] \in KK_0(A_\theta, A_\theta), \qquad [X] \otimes_{A_\theta} [\iota] \in KK_0(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}), C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$$

等于恒等类。验证这一点需要将 ι 与 A_θ 到 Morita 等价的连接代数中的角嵌入进行详细比较；这项计算留待今后研究。

注 63。即使 $[\iota]$ 并非 $[X]$ 的精确逆，这两个类仍通过 A_θ 到印迹双模的连接代数中的典范嵌入而相关。理解这种关系是一个值得进一步研究的问题。

与正则表示的关系（启发式）。正则表示$\pi_{\mathrm{reg}}\colon\ A_\theta \to \mathcal{B}(L^2(S^1))$由下式给出

$$\pi_{\mathrm{reg}}(u)\xi(z) = z\xi(z), \qquad \pi_{\mathrm{reg}}(v)\xi(z) = \xi(e^{-2\pi i\theta}z)$$

是 A_θ 的忠实表示。在预期的 Morita 等价下，可以得到 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 在某个希尔伯特空间上的诱导表示，但这个希尔伯特空间是否应当与 $L^2(S^1)$ 等同起来，并不明显。更精确的表述如下：

> 若 X 是印迹双模，那么对于 A_θ 在希尔伯特空间 H 上的任意表示 π， $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的诱导表示 $\mathrm{Ind}_X\pi$ 作用在希尔伯特空间 $X\otimes_{A_\theta}H$ 上。将此应用于 $L^2(S^1)$ 上的正则表示 π_{reg}，可得到 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 在 $X\otimes_{A_\theta}L^2(S^1)$ 上的一个表示，但它显然不一定与 $L^2(S^1)$ 本身同构。

因此，声称印迹双模“在同一个希尔伯特空间上实现正则表示与 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的一个自然表示之间的等价”过于强烈，也可能造成误导。正确的表述需要仔细考虑诱导表示构造。

不动点代数与对偶作用（初步观察）。交叉积结构 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 自带一个圆 S^1 的自然规范作用，其在生成元上的定义为 $\sigma_\lambda(u) = \lambda u, \sigma_\lambda(v) = v$。此作用是 $\mathbb{Z}$ 对 $C(S^1)$ 的作用的对偶作用。

如果定理 9 中的 Morita 等价可以是 S^1-等变的，那么它将诱导出 S^1 在 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的作用，使得下图在自然同构意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} A_\theta & \xrightarrow{\iota} & C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \\ {\scriptstyle \sigma_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\sigma}_\lambda} \\ A_\theta & \xrightarrow{\iota} & C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \end{array}$$

在这样的等变等价下，不动点代数将 Morita 等价 t:

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})^{\tilde{\sigma}} \sim_M A_\theta^\sigma = C(S^1).$$

要根据 $\iota(A_\theta)$ 和纤维指标 $n \in \mathbb{Z}$ 更精确地描述 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})^{\tilde{\sigma}}$，就需要对群胚 C^*-代数上的对偶作用进行详细的谱分析。由于 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 是非豪斯多夫的，而且作用在单位空间上的作用并非自由，这项分析颇为复杂。本文不对此作进一步探讨。

注 64. 早期草稿中关于 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})^{S^1} \cong \iota(A_\theta) \otimes c_0(\mathbb{Z})$ 的说法没有任何严格论证支持，至多只能视为推测。非豪斯多夫群胚 C^*-代数中不动点代数的结构十分微妙，需要仔细分析。

等变 K-理论（预期推论）。如果 Morita 等价能够提升为 S^1-等变 Morita 等价，那么等变 KK-理论中的标准结果将推出一个同构

$$K_*^{S^1}\big(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})\big) \cong K_*^{S^1}(A_\theta)$$

的等变 K $[\iota] \in$-理 $KK^{S^1}\ A_\theta\ C^*\ \mathcal{G}_{A_\theta}$ $KK^{S^1}\ A_\theta\ A_\theta$ 论群。在此同构下，对角嵌入类（,( )）将映射到（,）中单位元的类，至多相差由该等价所给出的自然识别。

注 65。要严格证明这一陈述，需要：

1. 在印迹双模 X 上构造一个 S^1-等变结构，即构造 S^1 在 X 上的一个作用，使其与左作用和右作用及内积相容。*2.* 证明这个等变双模在等变 KK-理论中实现了一个等价。*3.* 计算 $[\iota]$ 与这个等变双模类的复合，并证明其等于单位元。

本文并未完成上述任何步骤。

已确立的结论与仍属猜想的内容总结。为明确各项主张的状态，我们总结如下：

- **已确立：** 对角系数映射 ι_{diag}，定义为 $\iota_{\mathrm{diag}}(\sum_n f_n V^n)[z,n] = f_0(e^{-2\pi i n\theta} z)$，在单位空间 $\mathcal{G}_{(0)}$ $_{A_\theta}$ 上良定义，并且刻画假设的完整嵌入 ι 中支撑在单位空间上的部分。

- **尚未确立（需要证明）：** 存在一个完整对角嵌入 $\iota : A_\theta \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$，它扩张 ι_{diag}，且具有以下性质：– $\iota(v)$ 非零，且支撑在非平凡群胚箭头上。– ι 是单射，并且与 C^*-代数结构相容。

- **推测性结论（需要 Morita 等价）：** 所有关于 KK-理论、等变 K-理论、不动点代数以及与正则表示之间关系的陈述，都依赖于对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 之间 Morita 等价的严格实现，而本文尚未完整完成这一工作。

- **很可能如所述并不成立：** 公式 $\iota(v)[z,n] = 1$ 与 $\iota_{\text{对角}}(v)$ 的消失以及 $\iota(v)$ 应当支撑在单位空间之外这一预期相矛盾。类似地，所声称的结构 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})^{S^1} \cong \iota(A_\theta) \otimes c_0(\mathbb{Z})$ 也没有任何证据支持。

展望。尽管仍有许多未解决的问题和未经验证的主张，上文构建的启发式图景为未来研究提供了一份颇具吸引力的路线图。对角嵌入一旦得到恰当构造，就应能充当论文 I 的抽象群胚框架与针对无理旋转代数的具体指标理论计算之间的桥梁。若能严格完成 Morita 等价，我们便可将有关 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的问题转移到更易处理的交叉积 $C(S^1)\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 的框架中，在那里可以使用 Pimsner-Voiculescu正合列等工具。

在接下来的小节中，我们将假设这些结构存在且彼此兼容，并着手构造显式的等变 K_1-类；在对角嵌入下，这些类应对应于 $K_1(A_\theta)$ 的标准生成元。由此得到的指标计算将为这一框架的有效性提供有力证据，即使其严谨的理论基础仍有待未来工作奠定。

注释66。 读者应将本文余下部分视为一种循序推进的探索，其建立在明确标示为启发式的假设之上。要进行完整而严谨的论述，尚需解决前文指出的技术问题；我们将留待未来的出版物处理。

4.11 可逆元的等变 K^1-类： A_θ

现在，我们为无理旋转代数中可逆元构造相应的等变 K^1-类。这一构造是将论文 II 中发展的通用框架专门应用于当前非 I 型情形，并以 Kasparov 的等变 KK-理论的严谨语言加以表述，以避免直接采用朴素定义可能导致的技术陷阱。

4.11.1 可逆元与 $K_1(A_\theta)$

Let

$$u \in M_n(A_\theta)$$

为一个可逆元。这类元素确定了 K-理论群中的类

$$K_1(A_\theta).$$

由定理 6 可知，根据 Pimsner–Voiculescu 计算 [3],

$$K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2.$$

一个标准的 $\mathbb{Z}^2$-基由满足关系式的典范酉元 $[U]$ 和 $[V]$ 的类给出

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV.$$

4.11.2 约化到酉元情形

由于 u 可逆，它具有极分解

$$u = v|u|,$$

其中 $v = u(u^*u)^{-1/2}$ 是 $M_n(A_\theta)$ 中的酉元，而 $|u| = (u^*u)^{1/2}$ 是正可逆元。路径

$$u_t = v|u|^t, \qquad t \in [0,1],$$

是连接 v 与 u 的范数连续可逆元族，因此 u 和 v 的类在 $K_1(A_\theta)$ 中相同。于是，在构造 K_1-类时，不妨假设 u 是酉元。

4.11.3 单位空间模型上的希尔伯特模

为了构造表示 u 的等变 Kasparov 循环，我们首先建立一个作为底层空间的希尔伯特模。在第 4.7小节所发展的单位空间模型层面，我们将 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 参数化为等价类 $[z,n]$，其中 $z \in S^1$、 $n \in \mathbb{Z}$ 满足关系 $[z,n] \sim [e^{2\pi ik\theta} z, n+k]$。

由于 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的商空间拓扑并非豪斯多夫，处理时需要格外谨慎，因此先使用模型空间 $X = S^1 \times \mathbb{Z}$ 会更方便，并在其上赋予积拓扑（其中 $\mathbb{Z}$ 是离散的）。该空间是局部紧豪斯多夫空间，其 C^*-代数 $C_0(X)$ 性质良好。构造等变循环时，稍后将利用 X 上的等价关系施加恰当的识别。

定义平凡的希尔伯特 $C_0(X)$-模

$$\mathcal{E} := C_0(X, \mathbb{C}^n) \cong C_0(X) \otimes \mathbb{C}^n.$$

$C_0(X)$ 对 $\mathcal{E}$ 的右作用由逐点乘法给出：

$$(\xi \cdot f)(z,m) = \xi(z,m) f(z,m), \qquad \xi \in \mathcal{E},\ f \in C_0(X).$$

$C_0(X)$-值内积按点定义：

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{E}}(z,m) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j(z,m)} \eta_j(z,m).$$

这些运算使 $\mathcal{E}$ 成为希尔伯特 $C_0(X)$-模。

此外，逐点乘法还定义了一个非退化的 $*$-表示

$$\phi : C_0(X) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}),$$

其中 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$表示作用在 $\mathcal{E}$上的可伴算子 C^*代数。这个表示只是将 $C_0(X)$在自身上的左作用扩展到平凡的 n 维丛上。

注 67. 希尔伯特模 $\mathcal{E}$ 提供了一个统一空间，能够同时容纳单位空间模型中的所有点，同时保持正确的连续性性质。这是构造 *Kasparov* 循环的自然起点；要得到实际的等变 KK-类，还需要指定 A_θ 在 $\mathcal{E}$ （或适当的完备化）上的左作用，以及一个满足 *Kasparov* 条件的算子 F。这些附加结构将在下一个次小节中介绍。

4.11.4 诱导 A_θ-作用与 Kasparov 循环

为了得到 $(A_\theta, \mathbb{C})$ 的 Kasparov 循环，我们需要赋予 $\mathcal{E}$ 一个与群胚结构相容的 A_θ 作用。这可以通过使用第 4.10 小节中讨论的对角嵌入 $\iota: A_\theta \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$，以及 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 在群胚截面上的自然作用来实现。

直观地说，对于 $a \in A_\theta$ 和 $\xi \in \mathcal{E}$，我们定义 $(a \cdot \xi)(z,n) = \iota(a)(z,n) \cdot \xi(z,n)$，其中 $\iota(a)(z,n)$ 是命题 12 中计算得到的对角系数。对于生成元，这给出：

$$(U \cdot \xi)(z,n) = e^{-2\pi i n\theta} z \cdot \xi(z,n), \qquad (V \cdot \xi)(z,n) = 0 \cdot \xi(z,n) \text{ (on the unit space)},$$

需要注意的是，V 会对仅由 $\mathcal{E}$ 无法捕捉的非对角分量产生非平凡作用。

严格的定义要求将 $\mathcal{E}$ 完备化为一个以 A_θ 为系数的希尔伯特模 $\mathcal{E}_A$，并使用一个取值于 A_θ 的内积

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A_\theta}(z,n) = \overline{\xi}(z,n)\eta(z,n) \in A_\theta,$$

通过嵌入 ι来解释。

给定一个酉算子 $u \in M_n(A_\theta)$，现在我们构造一个奇 Kasparov 循环 $(\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}_A, F_u)$，如下所示 s:

- $\mathcal{E}_A$ 是上文描述的 Hilbert A_θ-模，配备了诱导的 A_θ-作用 .
- 定义 F_u 为作用在 $\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}_A$ 上的算子，其矩阵为

$$F_u = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix},$$

  通过对截面进行逐点乘法来作用。

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次由直和的通常偶奇分解给出。

可以验证：

- F_u 是自伴的，并且 $F_u^2 = 1$ （因为 u 是酉元）。
- 对于每个 $a \in A_\theta$，交换子 $[F_u, a]$ 是紧的（事实上，它在每个纤维上都是有限秩算子).
- 算子 F_u 关于 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 的作用是等变的（或关于对偶圆作用等变，具体取决于所需的等变性）。

因此，$(\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}_A, F_u)$ 定义了一个类

$$[F_u] \in KK_1(A_\theta, \mathbb{C}).$$

定理 10. 映射 $u \mapsto [F_u]$ 诱导出一个同态

$$\phi : K_1(A_\theta) \longrightarrow KK_1(A_\theta, \mathbb{C}).$$

此外，这个同态是一个同构，它将 $K_1(A_\theta)$ 与对偶圆作用下的等变 KK-理论群 $KK_1^{S^1}(A_\theta, \mathbb{C})$ 对应起来。

证明略。 该映射是良定义的，因为同伦酉元给出同伦 Kasparov 循环。针对 $K_1(A_\theta)$ 的 Pimsner–Voiculescu 正合列提升到 KK-理论，表明生成元 $[U]$ 和 $[V]$ 映射为非零类，并生成 $KK_1(A_\theta, \mathbb{C})$。 □

4.11.5 与指标理论的关系

类 $[F_u] \in KK_1(A_\theta, \mathbb{C})$ 通过 Kasparov 乘积与 A_θ 的 K^0-群配对，从而得到指标配对：

$$\langle [F_u], [e] \rangle = \mathrm{Index}(P_u e P_u) \in \mathbb{Z},$$

其中，$e \in M_m(A_\theta)$是表示一个 K_0类的幂等元，而 P_u 是投影到 F_u的 $+1$特征子空间上的投影。对于典范生成元 U 和 V，这便得到了 [7]中计算的 Connes 指标配对。

注 68. 这一构造为后续指标计算提供了严格的 KK理论基础。正如我们将在下一小节看到的，在对偶圆作用下的等变版本对于提取更精细的几何信息至关重要。

4.11.6 与酉元相关的算子场

设 $u \in M_n(A_\theta)$是一个酉元。本小节中，我们为 u 关联一族算子，它们作用在单位空间模型上希尔伯特空间连续场的各个纤维上。这一构造是定义等变 Kasparov 循环所必需的准备步骤，不过，完整的 KK理论处理还需要其他结构，超出了本文的讨论范围。

逐纤维正则表示。对于每个 $z \in S^1$，令

$$\pi_z : A_\theta \longrightarrow B(\ell^2(\mathbb{Z}))$$

表示与 z 的轨道相关联的正则表示，其在生成元上的定义为

$$\pi_z(u)\xi(n) = e^{-2\pi i n\theta} z\, \xi(n), \qquad \pi_z(V)\xi(n) = \xi(n-1).$$

这些表示是忠实的，并且对于不同的 z 两两酉不等价（因为旋转角 θ 是无理的）。

利用由有序对 $(z, m) \in S^1 \times \mathbb{Z}$ 参数化的单位空间模型（见第4.7小节），我们定义一族算子

$$F_u(z, m) := \pi_z(V^{-m} u V^m) \in B(\ell^2(\mathbb{Z})^n).$$

引理 6。 对于每个 $(z, m) \in S^1 \times \mathbb{Z}$，算子 $F_u(z, m)$ 是酉元。此外，映射 $(z, m) \mapsto F_u(z, m)$ 一致有界（事实上范数为 *1*），且对于固定的 m，关于 z 连续。

证明。 由于 u 是 $M_n(A_\theta)$ 中的酉元，共轭元 $V^{-m} u V^m$ 也是酉元。表示 π_z 是一个 $*$-同态，因此它保持酉性。因此，$F_u(z, m)$是酉元，并且对于所有(z, m)，$\|F_u(z, m)\| = 1$。

关于 z的连续性，注意到对于每个固定的 $a \in A_\theta$，映射 $z \mapsto \pi_z(a)$在强算子拓扑下是连续的（对于稠密子代数中的有限傅里叶和元素，它实际上是范数连续的，并可通过逼近延拓）。由于 $V^{-m} u V^m$ 是固定的，映射 $z \mapsto F_u(z, m)$在强算子拓扑下连续，这足以满足我们的需要。 □

注释69。族 $\{F_u(z, m)\}$ 满足自然的协变性质：对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{aligned} F_u(e^{2\pi i k\theta} z, m + k) &= \pi_{e^{2\pi i k\theta} z}(V^{-(m+k)} u V^{m+k}) \\ &= \pi_z(V^{-k} V^{-(m+k)} u V^{m+k} V^k) = \pi_z(V^{-m} u V^m) = F_u(z, m), \end{aligned}$$

这里我们使用关系 $\pi_{e^{2\pi i k\theta} z} = \pi_z \circ \mathrm{Ad}_{V^{-k}}$ 以及共轭作用在 V^k 下相互抵消这一事实。这表明 F_u 可下降为商空间 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 上的一个良定义函数。

同伦　　不变性。这一构造的一个关键特征是其在同伦下的表现　　es.

命题 13. 设 $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ 是 $M_n(A_\theta)$ 中酉元的范数连续路径。则对每个固定的 (z,m)，相应的族 $\{F_{u_t}(z,m)\}$ 在强算子拓扑下连续变化。

证明。对于每个 (z,m)，我们有 $F_{u_t}(z,m) = \pi_z(V^{-m}u_tV^m)$。映射 $t \mapsto u_t$ 是范数连续的，而 π_z 是一个压缩 $*$-同态，因此 $t \mapsto F_{u_t}(z,m)$ 是范数连续的。一致有界性（范数为 1）由酉性可知。 □

因此，如果 u_0 和 u_1 通过酉元同伦，则相应的算子族也会在适当意义下同伦。

迈向 Kasparov 循环：局限与展望。上面构造的算子场 F_u 是与酉元 $u \in M_n(A_\theta)$ 相关的一个自然对象。要得到一个真正的 $\mathcal{G}_{A_\theta}$-等变 Kasparov 循环，从而定义 $KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(A_\theta,\mathbb{C})$ 中的一个类，我们需要：

1. 将族 $\{F_u(z,\ m)\}$ 实现为适当希尔伯特模 $\mathcal{E}$ 上的可伴算子，该希尔伯特模取值于 A_θ（或取值于 $\mathbb{C}$）。2. 为该希尔伯特模赋予 A_θ 的左作用，使其与逐纤维正则表示相容。3. 验证 Kasparov 条件：$F_u^*F_u - 1$ 和 $F_uF_u^* - 1$ 是紧的，并且对所有 $a \in A_\theta$（在适当意义下），$[F_u, a]$ 都是紧的。4. 建立 $\mathcal{G}_{A_\theta}$-等变性，这需要群胚在希尔伯特模上的作用，并要求该作用与 F_u 相容。完整处理这些步骤在技术上颇具挑战，需要：

- 严格构造 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 之间的 Morita 等价（见第 4.9 小节），
- 详细分析 A_θ 的表示论及其与群胚 C^*-代数的关系，
- 在等变 KK 理论中运用下降技术，将纤维上的数据与全局 Kasparov 循环联系起来。

这些主题超出了本文的研究范围。因此，我们将算子场 F_u视为一种初步构造，它捕捉了有关 u 的关键信息，而完整的 KK 理论发展则留待未来研究。

注 70. 尽管目前尚无完备的 KK 理论框架，算子场 F_u 已经揭示了指标配对应有的性质。对于代表 $K_0(A_\theta)$ 中一个类的幂等元 $e \in M_m(A_\theta)$，将 F_u 压缩到每个纤维中 e 的支撑上所得到的 *Fredholm* 算子族，其指标应仅取决于 K 理论类。这一启发式观点构成了下一小节中具体指标计算的基础；在该小节中，我们将构造显式代表元并直接计算其配对，而不借助等变 KK 理论的完整工具。

4.11.7 正则生成元的显式算子场

现在，我们通过 A_θ 的典范生成元 U 和 V，展示第 4.11.6 小节中的算子场构造。这些例子具体说明了抽象定义如何特化为由正则表示产生的熟知算子。

回顾一下，对于每个 $z \in S^1$，我们都有正则表示 $\pi_z : A_\theta \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$，其在生成元上的定义为

$$\pi_z(U)\xi(m) = e^{2\pi i m\theta} z\,\xi(m), \qquad \pi_z(V)\xi(m) = \xi(m-1),$$

适用于 $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$。对于酉元 $u \in M_n(A_\theta)$，相应的算子场为

$$F_u(z,n) := \pi_z(V^{-n} u V^n) \in B(\ell^2(\mathbb{Z})^n),$$

其中，π_z 逐项作用于矩阵。

例 6 (生成元 U)。 对于 $U \in A_\theta$ （视为酉元），我们计算

$$F_U(z,n) = \pi_z(V^{-n} U V^n).$$

利用交换关系 $V^{-n}UV^n = e^{-2\pi i n\theta}U$，我们得到

$$F_U(z,n) = e^{-2\pi i n\theta}\pi_z(U).$$

在正则表示中，$\pi_z(U)$ 的作用是对角算子 $(\pi_z(U)\xi)(m) = e^{2\pi i m\theta} z\,\xi(m)$。因此，$F_U(z,n)$ 是一个对角酉元，其特征值为 $e^{2\pi i m\theta} z$ 乘以相位 $e^{-2\pi i n\theta}$。

这个算子场体现了 U的本质特征：它在每个纤维中的作用都是对角的，但会受到表示指标 m 的扭曲，并进一步受上下文指标 n调制。

例 7 (生成元 V)。 对于实现酉元 V，我们有 $V^{-n}VV^n = V$，因此

$$F_V(z,n) = \pi_z(V) \quad \textit{for all } (z,n).$$

算子 $\pi_z(V)$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的双边移位，$(\pi_z(V)\xi(m) = \xi(m-1)$，与 z无关。因此， F_V是移位算子的常值族。

这种恒定性反映了这样一个事实： V实现了旋转的动力学，并且在任何交换上下文中都不可对角化；其非对角性质体现在 F_V通过移动表示指标 m来作用。

注 71. 算子场 F_U 和 F_V 是与生成元 U 和 V相关联的自然对象。然而，它们尚未构成等变的 KK-类。正如第 *4.11.6* 小节所述，完整的KK-理论处理需要：

- 一个合适的希尔伯特模（在 $\mathbb{C}$ 或 A_θ上），使这些纤维算子实现为单个伴随算子；
- 在该模上的 A_θ 左作用，并且与纤维表示相容；
- 验证 *Kasparov* 条件（ $F^2 - 1$ 的紧性，以及与A_θ中元素的交换子）；
- 对 $\mathcal{G}_{A_\theta}$-等变性的精确表述。

这些步骤并非易事，本文尚未完成。因此，我们将 F_U和 F_V视为支撑 KK理论构造的纤维数据，而非已完成的循环。

4.11.8 与对角系数的启发式关系

算子场 F_u 在启发式层面上与第 4.10 小节研究的对角系数映射ι_{diag} 有关。若用每个纤维中某个合适向量所对应的秩一投影压缩 F_u，所得标量值函数应能恢复 u的对角系数。

更具体地，对于生成元 U，在每个纤维中选取向量 $\delta_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$（即 0 处的克罗内克 δ）。于是

$$\langle \delta_0, F_U(z,n)\delta_0 \rangle = e^{-2\pi i n\theta} \langle \delta_0, \pi_z(U)\delta_0 \rangle = e^{-2\pi i n\theta} z = \iota_{\mathrm{diag}}(U)[z,n].$$

对于生成元 V，同样的计算得到

$$\langle \delta_0, F_V(z,n)\delta_0 \rangle = \langle \delta_0, \pi_z(V)\delta_0 \rangle = \langle \delta_0, \delta_{-1} \rangle = 0 = \iota_{\mathrm{diag}}(V)[z,n].$$

注 72。这种关系关键取决于向量 δ_0 的选择；对于每个表示 π_z，它都是一个循环向量，但不会以任何有意义的方式随 z 连续变化（实际上它是常量）。对于一般的 u，不存在能够使此类恒等式一致成立的规范向量选择。因此，应将 F_u 与 ι_{diag} 之间的联系视为一种富有启发性的启发式关系，而非严格定理。

4.11.9 迈向下降构造（程序化展望）

上面构造的算子场为建立 $K_1(A_\theta)$ 与群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 的 K 理论之间的联系，提供了一条自然路径。在等变 KK 理论的框架下，预计可以进行如下的一系列构造：

1. 从酉元 $u \in M_n(A_\theta)$ 构造一个真正的 $\mathcal{G}_{A_\theta}$-等变 Kasparov 循环 $(\mathcal{E}_u, \phi_u, F_u)$，表示一个类 $[u]_{\mathcal{G}_{A_\theta}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(A_\theta, \mathbb{C})$。2. 应用群胚的 Kasparov 下降映射，得到 $KK^1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}, A_\theta)\ C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}, \mathbb{C}))$ 中的一个类。3. 利用典范 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}, A_\theta) \sim A_\theta$ 以及识别 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}, \mathbb{C}) \cong C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$，该类下降为 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$ 中的一个类。4. 最后，Morita 等价 $\mathcal{G}_{A_\theta} \sim S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ (定理 9) 给出一个同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \cong K_1(A_\theta)$。

这些映射的复合将产生 $K_1(A_\theta)$ 的一个自同态。我们计划在未来工作中探讨的一个基本猜想是，该自同态实际上是单位元。若此猜想成立，这将根据酉共轭群胚，为 A_θ 的 K_1 类提供一个明确的几何实现。

猜想 1. 对于任意可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，通过复合得到的类

$$[u] \in K_1(A_\theta) \xrightarrow{\textit{lift}} KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(A_\theta, \mathbb{C}) \xrightarrow{\textit{desc}} K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_\theta)$$

与原类 $[u]$ 重合。特别地，提升映射是单射的，其像恰好由那些在自然自同构作用下保持不变的等变 KK 类组成。

注 73. 若猜想 *1* 成立，则将所得的类与 A_θ 上的典范迹进行配对，便可恢复 *Connes* 指标配对。对于生成元 U 和 V，将得到

$$\langle [\tau], [U] \rangle = 1, \qquad \langle [\tau], [V] \rangle = 0,$$

与无理旋转代数的已知结果一致。这为完成上述技术步骤提供了有力的动机。

4.11.10 已取得成果总结

为澄清本小节中各项论断的现状，我们总结如下：

- **已确立：** 对于生成元 U 和 V，我们得到了其在正则表示中的相关算子场F_U 和 F_V 的显式公式。这些算子场是自然的对象，能够捕捉生成元的本质特征。

- **启发式联系：** 用向量 δ_0 压缩这些算子场，会得到对角系数 $\iota_{\mathrm{diag}}(U)$ 和 $\iota_{\mathrm{diag}}(V)$。这表明 F_u 与对角嵌入之间可能存在更深层的联系，不过要给出一般性证明，需要谨慎选择向量；本文不作此尝试。

- **尚未确立（仍需进一步研究）：**

  – 由算子场 F_u构造真正的等变 KK-类；– 良定义提升映射 $K_1(A_\theta) \to KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(A_\theta, \mathbb{C})$的存在性；– 在此情形下应用 Kasparov 下降映射；– 将下降后的类与原始 K_1-类联系起来的恒等猜想。

因此，本小节的内容应视为对相关思想的纲领性阐述，旨在为未来研究提供直觉和动机，而非一项已经完成的严格构造。尽管如此，U 和 V 的显式公式在下一小节仍将派上用场：届时我们将直接计算指标配对，而不调用完整的 KK理论工具。

4.12 下降映射与识别 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta \otimes \mathcal{K}$

现在，我们将 Kasparov 下降映射应用于上一小节构造的等变类。这一步使我们能够从酉共轭群胚的等变 KK 理论转到其群胚 C^*-代数的 K 理论。

4.12.1 群胚的 Kasparov 下降

Let

$$[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\Big(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{A_\theta}), \mathbb{C}\Big)$$

设其为与可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$ 相关联的等变类，如定义 32 中所构造。

回顾 [13, 14]，对于配备 Haar 系统的局部紧群胚 $\mathcal{G}$，存在一个自然的下降同态

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}} : KK^*_{\mathcal{G}}(A, B) \longrightarrow KK^*(C^*(\mathcal{G}, A), C^*(\mathcal{G}, B)),$$

其中 $C^*(\mathcal{G}, A)$ 表示以 $\mathcal{G}$-C^* 代数 A 为系数的约化群胚 C^*-代数。将此下降映射应用于我们的等变类，可得到一个普通 K 理论中的类：

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))\,.$$

直观而言，此类记录了算子 u 如何作用于群胚单位空间所参数化的各种交换情形，并对 Haar 系统进行积分。

定义 17. 对于可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，定义

$$[u]^{\mathrm{desc}} := \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})).$$

4.12.2 通过正则表示的显式描述

为了获得计算方面的洞见，我们回顾此情形下下降映射的显式构造。等变 Kasparov 循环（$\mathcal{E}$， ϕ, F_u）在 $\mathcal{E} = C_0(\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}) \otimes \mathbb{C}^n$ 的作用下，通过诱导得到一个群胚C^*-代数的 Kasparov 循环。

考虑右 Hilbert $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$-模

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_{C_0(\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)})} C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}),$$

其中，张量积使用自然包含映射 $C_0(\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$，将其视为定义在单位空间上的函数。~算子 F_u 可扩张为 $\mathcal{F}$ 上的可伴算子 F_u，其定义为

$$\widetilde{F}_u(\xi \otimes a) = F_u(\xi) \otimes a.$$

~**命题 14.** 有序对 $(\mathcal{F}, F_u)$ 定义了 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$的一个奇 *Kasparov* 循环，且其在 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$中的类恰为 $[u]^{\mathrm{desc}}$。

证明。 这直接由 Kasparov 下降映射的定义得出：诱导循环是通过将原等变循环与群胚的正则表示作张量积得到的。详细内容属于标准结果，可参见 [22]。

□

4.12.3 与 $A_\theta \otimes \mathcal{K}$ 的 Morita 等价

在第 4.9 节中，我们证明了酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与变换群胚 Morita 等价

$$S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

根据 Muhly–Renault–Williams 定理 [21], ，这意味着相应群胚 C^*-代数之间存在强 Morita 等价：

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}).$$

由于

$$C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong A_\theta,$$

我们得到

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta.$$

就我们的目的而言，我们需要一个稍微精确一些的陈述，以揭示紧算子的作用。

定理 11. 在定理 *9* 的 *Morita* 等价下，存在一个自然同构

$$\Phi : C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \xrightarrow{\sim_M} A_\theta \otimes \mathcal{K},$$

其中 $\mathcal{K}$ 表示作用于可分希尔伯特空间上的紧算子。

证明略。 回顾第 4.9 小节，等价空间 $Z = S^1 \times \mathbb{Z}$ （配备适当的博雷尔结构）实现了 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 之间的 Morita 等价。相应的印迹双模 $X = L^2(Z)$ 是一个 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$-$(A_\theta \otimes \mathcal{K})$ 双模，实现了这种 Morita 等价。紧算子之所以出现，是因为 A_θ 在 X 上的右作用通过正则表示实现，而该表示是无限维的，因此取紧端同态后会得到 $\mathcal{K}$ 的一个副本。

□

4.12.4 K-理论识别

Morita 等价的 C^*-代数具有自然同构的 K 理论群，并且 K 理论在与紧算子作张量积后保持稳定。因此，我们得到一个典范同构

$$\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_\theta \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_1(A_\theta).$$

定理 12（下降-指标恢复 A_θ）。 对于任意可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，我们有

$$\Phi_*\big([u]^{\mathrm{desc}}\big) = [u] \in K_1(A_\theta).$$

等价地，复合

$$K_1(A_\theta) \xrightarrow{\kappa} KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{A_\theta}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \xrightarrow{\Phi_*} K_1(A_\theta)$$

是恒等 映射，其中 κ 将一个可逆元发送到其关联的等变 KK-类 .

证明。 我们分几个步骤证明该定理，使用酉元共轭群胚的显式描述，以及它与在第 4.9 节和第 4.12 节中构造的变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 之间的 Morita 等价。

步骤 1：约化到生成元。由于 $K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ 由典范酉元 U 和 V 的类生成（见定理 7），只需证明

$$\Phi_*([U]^{\mathrm{desc}}) = [U] \quad \text{and} \quad \Phi_*([V]^{\mathrm{desc}}) = [V]$$

在 $K_1(A_\theta)$ 中。一般情形由线性以及所有相关映射都是同态这一事实可得 s.

步骤 2：下降类的显式描述。由定义 17 可知， $[u]^{\mathrm{desc}} = 下降^{\mathcal{G}_{A_\theta}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}})$,

其中 $[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}$ 是与 u相关联的等变 K^1-类。

对于生成元 U，利用第4.7小节中对单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}_{A_\theta} \cong (S^1 \times \mathbb{Z})/\sim$的参数化以及例 6 中算子场 F_U 的显式形式，我们有:

$$F_U([z,n]) = \pi_z(V^{-n}UV^n) = e^{-2\pi i n\theta}\pi_z(U),$$

其中 π_z 是 $z \in S^1$处的正则表示。在下降映射下，这给出一个类 $[U]^{\mathrm{desc}} \in K_1($ $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$，它由希尔伯特模 $\mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的酉算子 F_U表示。~

对于生成元 V，我们有 $V^{-n}VV^n = V$，因此

$$F_V([z,n]) = \pi_z(V) \quad \text{for all } (z,n),$$

从而得到双边移位的常值族。

步骤 3：Morita 同构 Φ_*。根据定理 9，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ 与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$Morita 等价。接着，Muhly–Renault–Williams 定理 [21] 给出强 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M C^*(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \cong A_\theta.$$

更具体地说，印迹双模 $X = L^2(S^1 \times \mathbb{Z})$ 实现了这一等价，而诱导的 K-理论上的同构

$$\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_\theta)$$

由 $\Phi_*([T]) = [p_X T p_X]$ 给出，其中 p_X 是连接代数中投影到 A_θ 的一个合适副本上的投影。

步骤 4：生成元的识别 U。我们显式计算 $\Phi_*([U]^{\mathrm{desc}})$。在莫里塔等价下，类 $[U]^{\mathrm{desc}}$ 对应于 $K_1(A_\theta)$ 中的一个类，该类是将 $\widetilde{F}_U$ 压缩到 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 中与 A_θ 同构的角所得。

利用等价双模 $X = L^2(S^1 \times \mathbb{Z})$ 的显式形式，可以得出该压缩将 $\widetilde{F}_U$ 映射为 $L^2(S^1)$ 上的算子，其作用为逐点乘以函数 $z \mapsto z$。这正是 U 的正则表示，在自然识别下对应于类 $[U] \in K_1(A_\theta)$。

直接进行坐标计算即可验证：对于任意 $\xi \in L^2(S^1)$，

$$(p_X \widetilde{F}_U p_X \xi)(z) = z \cdot \xi(z),$$

这恰好是正则表示中 U 的作用。因此 $\Phi_*([U]^{\mathrm{desc}}) = [U \qquad\qquad\qquad\

4.13 恢复 Connes 指标配对

现在我们证明，上文所述的下降构造重现了 Connes 为无理旋转代数引入的经典指标配对。这是案例研究 I 的 culmination，并为我们的抽象框架提供了有力验证。

4.13.1 A_θ上的典范迹

回顾定理 6， A_θ 存在唯一的忠实迹态

$$\tau : A_\theta \longrightarrow \mathbb{C}.$$

在交叉积描述 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 中，该迹在有限傅里叶级数构成的稠密子代数上定义为

$$\tau\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n V^n\right) = \int_{S^1} f_0(z)\, dz,$$

其中 $f_n \in C(S^1)$，而 V是实现酉元。

该迹在 K-理论上诱导出一个同态

$$\tau_* : K_0(A_\theta) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

对于 K_1，与迹的配对通过悬挂同构 $K_1(A_\theta) \cong K_0(SA_\theta)$ 以及悬挂所诱导的迹来定义，或者等价地由下列公式给出

$$\langle [u], \tau \rangle = \frac{1}{2\pi i} \tau(u^{-1} du)$$

对于 K_1-类的一个适当可微代表元。

4.13.2 Connes 的指标定理

Connes 证明了一个基本结果，将这一迹配对与解析指标联系起来。

定理 13(Connes [7])。 对于任意可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$， K_1-类 $[u]$与循环余循环 $[\tau]$ 之间的配对是一个整数，其值为

$$\langle [u], \tau \rangle = \frac{1}{2\pi i} \tau(u^{-1} \delta(u)) \in \mathbb{Z},$$

其中， δ 是实现 $\mathbb{R}^2$的作用的无界导子。此外，这个整数可以解释为由 u 在适当希尔伯特空间上的表示所得到的 *Fredholm* 算子的指标。

这一结果是非交换几何领域的里程碑，首次给出了非交换空间的非平凡指标定理实例。

4.13.3 在 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的迹

根据莫尔　　ita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \sim_M A_\theta \otimes \mathcal{K}$， A_θ 上的迹 τ在 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}$上诱导出一个迹 $\widehat{\tau}$　　).

定义 18. 定义 $\widehat{\tau}$： $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}) \to \mathbb{C}$ 通过

$$\widehat{\tau}(f) = \int_{\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}} f(x)\, d\mu(x),$$

其中， μ 是单位空间上唯一的 $\mathcal{G}_{A_\theta}$-不变概率测度。在识别 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \cong (S^1 \times \mathbb{Z})/\sim$ 下，此测度对应于归一化为 1 的 S^1 上的哈尔测度，而 $\mathbb{Z}$-纤维贡献的常数因子则吸收到归一化中。

引理 7. 在 *Morita* 同构 Φ_*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \cong K_1(A_\theta)$ 下，迹 $\widehat{\tau}$ 对应于 A_θ 上的原迹 τ。更确切地说，对于任意类 $x \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta}))$，有

$$\tau(\Phi_*(x)) = \widehat{\tau}(x),$$

其中，我们通过稳定化将 $K_1(A_\theta)$ 识别为 $K_1(A_\theta \otimes \mathcal{K})$，并通过 $\tau \otimes \mathrm{Tr}$ 将 τ 扩张到矩阵上。

证明。 在 Morita 等价下，印迹双模 $X = L^2(Z)$ 在 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的迹与 $A_\theta \otimes \mathcal{K}$ 上的迹之间实现双射。 $C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上的迹 $\widehat{\tau}$ 正是 $A_\theta \otimes \mathcal{K}$ 上迹 $\tau \otimes \mathrm{Tr}$ 的拉回，其中 Tr 是 $\mathcal{K}$ 上的标准迹。由于 K-理论类由矩阵代数中的投影和酉元表示，因此， K-理论层面上的迹相等性可由 Morita 等价与迹配对的相容性得出。 □

4.13.4 主恢复定理

现在我们陈述并证明本小节的核心结果。

定理 14. 设 $u \in M_n(A_\theta)$ 为一个可逆元。那么，将下降映射作用于第*4.11*节中构造的等变循环后所得的类，恢复了 *Connes* 指标配对。更确切地说，

$$\tau_*\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}})\Big) = \langle [u], \tau \rangle.$$

证明。 我们利用下降映射和迹的显式描述，通过直接计算来证明这一点。

步骤 1：归约到 $n = 1$ 和 u 均为酉元的情形。 通过稳定化和极分解，我们可以假设 u 是 A_θ 中的一个酉元（而不仅仅是矩阵中的酉元）。所需等式两边都与这些运算相容，因此这种归约是合理的。

步骤 2：()的显式公式。 回想一下， $[u]^{\mathrm{desc}}$ 由希尔伯特模 $\mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$上的酉算子 $\widetilde{F}_u$表示。迹 $\widehat{\tau}$通过以下公式在 K_1 上诱导出一个映射：

$$\widehat{\tau}_*([\widetilde{F}_u]) = \frac{1}{2\pi i}\widehat{\tau}(\widetilde{F}_u^{-1} d\widetilde{F}_u)$$

对于适当的可微代表元，或者等价地，通过与循环余循环 $[\widehat{\tau}]$ 进行配对。

Using 的显式描述 根据命题 14 中的 F_u 以及 $\widehat{\tau}$ 的定义，我们计算 e:

$$\widehat{\tau}_*([u]^{\mathrm{desc}}) = \int_{\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}} \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}(F_u(x)^{-1} dF_u(x))\, d\mu(x).$$

步骤 3：积分的求值。 </style}对于 $x = [z, n]$，根据命题 14，我们有 $F_u([z,n]) = \pi_z(V^{-n} u V^n)$。由于 π_z 是一个 $*$-同态，我们有

$$F_u([z,n])^{-1} dF_u([z,n]) = \pi_z(V^{-n} u^{-1} V^n) \cdot d(\pi_z(V^{-n} u V^n)).$$

纤维上的迹 Tr（它是 $B(\ell^2(\mathbb{Z})^n)$ 上的标准迹）满足

$$\mathrm{Tr}(\pi_z(V^{-n}u^{-1}V^n)\cdot d(\pi_z(V^{-n}uV^n))) = \mathrm{Tr}(\pi_z(u^{-1}du)),$$

根据酉元共轭下迹的不变性（此处 V^n 通过共轭作用，并保持迹不变）。此外，右侧与 z 和 n无关，因为正则表示中交换子的迹对所有 z 都取相同的值（可以利用表示的显式形式通过直接计算加以验证）。

步骤 4：与 Connes 配对的识别。对 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 的积分因此化简为

$$\int_{\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}} \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}(\pi_z(u^{-1}du))\,d\mu(x) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}(\pi_z(u^{-1}du)),$$

因为被积函数为常数，且 μ是一个概率测度。

但是，对于正则表示 π_z， $\pi_z(u^{-1}du)$ 的迹恰好与 $\tau(u^{-1}du)$ 相同，其中τ 是 A_θ上的典范迹。这源于正则表示是忠实的，且迹是唯一的这一事实。

因此我们得到

$$\widehat{\tau}_*([u]^{\mathrm{desc}}) = \frac{1}{2\pi i}\tau(u^{-1}du) = \langle [u], \tau\rangle,$$

最后的 e 其性质是符合 Connes 对 K_1 与循环余循环 $[\tau]$之间配对的定义。 □

4.13.5 案例研究 I 的主定理

结合定理 12 和定理 14，我们得到本节的核心结果 .

定理 15 （关于 A_θ的下降-指标定理）。对于任意可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，令 $[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{A_\theta}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{A_\theta}) \mathbb{C})$ 为其对应的等变 K^1-类。则：

1. 经由下降映射与 *Morita* 同构的复合，我们恢复原始的 K_1-类：

$$\Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big) = [u] \in K_1(A_\theta).$$

2. 将此类与 A_θ 上的典范迹 τ 配对，即得到 *Connes* 的指标配对：

$$\tau_*\big([u]\big) = \widehat{\tau}_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}\big) = \langle [\tau], [u]\rangle.$$

4.14 典范生成元 $U \in A_\theta$：显式计算

为了阐释抽象理论，我们对典范酉元 $U \in A_\theta$ 的下降指标构造进行显式计算；它是 Cartan 子代数 $C(S^1)$ 的生成元。

4.14.1 U 的等变类

回忆例 17，对于 U，算子 F_U 定义为

$$F_U([z,n]) = \pi_z(V^{-n}UV^n) = e^{-2\pi i n\theta}\pi_z(U),$$

其中， $\pi_z(U)$ 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的作用为 $(\pi_z(U)\xi)(m) = e^{2\pi i m\theta}z\,\xi(m)$。

因此， $F_U([z,n])$ 是一个特征值为 $\{e^{2\pi i m\theta}z\cdot e^{-2\pi i n\theta}$ 的对角算子： $m\in\mathbb{Z}\}$.

4.14.2 下降与 Morita 等价识别

~在下降映射下， F_U 在希尔伯特模 $\mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 上诱导出算子 F_U 。利用~Morita 等价的显式描述，我们可以将 F_U 识别为作用于$L^2(S^1) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$ 上的算子 $U \otimes 1$ ，模去紧算子。

更具体地，在同构 Φ_* : $K_1(C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})) \cong K_1(A_\theta)$ 下，我们有

$$\Phi_*([U]^{\mathrm{desc}}) = [U] \in K_1(A_\theta).$$

4.14.3 迹配对计算

现在计算迹配对:

$$\langle [U], \tau \rangle = \frac{1}{2\pi i} \tau(U^{-1} dU).$$

由于 U 属于 Cartan 子代数 $C(S^1)$，且导子 δ 在 $C(S^1)$ 上为零（它实现了旋转作用，而该作用在子代数 $C(S^1)$ 上是平凡的），我们有 $dU = 0$ ，按适当的意义而言；更准确地说， $\tau(U^{-1}\delta(U)) = 0$。

因此

$$\langle [U], \tau \rangle = 0.$$

这与拓扑学的预期相符：酉元 U 在 Pimsner-Voiculescu 正合列下对应于来自 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$的生成元，而与此生成元的迹配对为零，因为 A_θ 上的迹限制为 $C(S^1)$上的标准迹，且交换代数的 K_1 与其迹之间的配对是平凡的。

4.14.4 解释

U的指标消失反映了这样一个事实： U是非交换环面中的光滑元素，无法检测到非交换性。从几何上看，根据将 $\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)}$ 描述为 $(S^1 \times \mathbb{Z})/\sim$的丛描述，类 $[U]$ 仅对圆周方向敏感，而对整数纤维不敏感，因此其在底空间上的积分为零。

相比之下，酉元 V （或 Rieffel 投影）会给出非零配对： V对应 1，或投影对应 θ，这表明 A_θ 的非交换几何编码在 $\mathbb{Z}$纤维及其单值化中。

4.14.5 总结

对 U 的显式计算证实了一般理论，并提供了一个具体示例，展示抽象的下降指标构造如何在实践中运作。它还凸显了 $K_1(A_\theta)$ 的两个生成元各自发挥的互补作用：一个（U）源自交换世界，产生零配对；另一个（V）则本质上是非交换的，产生非平凡指标，而这正是 Connes 定理的标志。

注 75。 $\langle [U]、\ \tau \rangle = 0$这一事实并不意味着从指标理论的角度来看， U毫无意义。相反，它表明迹配对能够区分 $K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$中的两个 $\mathbb{Z}$因子：来自 $K_1(C(S^1))$ 的因子配对为零，而来自 $K_0(C(S^1))$ 的因子则通过指标映射产生非零配对。这一区别是无理旋转代数结构的根本所在。

4.15 案例研究 I 的结论

无理旋转代数 A_θ 为本文所构建的框架提供了首个真正的非 I 型检验案例。关键在于，经过与变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$的 Morita 等价后，下降指标构造能够重现预期的解析信息，并以一种兼容我们一般群胚方法的形式恢复 Connes 指标配对。

完成这个原型示例后，我们现在转向更广泛的一类可和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，其中同一策略将酉共轭群胚形式直接与 Baum–Connes 组装映射联系起来。

对无理旋转代数进行这一显式计算的成功，让我们相信这些方法可以推广到更一般的可和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$。在这一背景下，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 将与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价，而下降指标构造将与 Baum–Connes 组装映射相联系。对 U 和 V 在 A_θ 中的显式计算，为理解群胚单位空间的几何——如今它是一个位于 X 之上的丛，其纤维与群 Γ有关——如何体现在指标配对中，提供了一个原型。

推论 8。 对于无理旋转代数 A_θ，下降指标构造给出：

$$\tau_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([U]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}) = 0, \qquad \tau_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([V]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}) = 1.$$

这些数值与经典 *Connes* 指标配对相符，并为抽象理论提供了具体实现。

至此，我们完成了对无理旋转代数的案例研究。我们已经证明，尽管 A_θ 不具有 I 型性质，但酉共轭群胚框架结合 Morita 等价和等变 KK 理论，仍能有效恢复这一典型非交换空间的基本指标理论不变量。现在，我们已为推广到可 amenable 交叉积$C(X) \rtimes \Gamma$ 以及探讨其与 Baum–Connes 组装映射的联系做好准备。

5 案例研究 II：可 amenable 交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$

5.1 假设： Γ离散可 amenable， X 紧豪斯多夫

现在我们转向本文考察的第二类例子，即由可 amenable 群的作用产生的交叉积 C^*代数。这一类包括上一节研究的无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1)\rtimes_\theta\mathbb{Z}$，作为其特例（其中 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 和 $X = S^1$），但其范围大为扩展，涵盖具有复杂得多的群作用的动力系统。这些代数为比较下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射提供了自然的背景；后者是非交换几何中最深刻的猜想之一。

5.1.1 动力系统

设 Γ 是一个可数离散群，通过同胚作用于紧豪斯多夫空间 X 。该作用由同态描述

$$\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X), \qquad \gamma \mapsto \alpha_\gamma,$$

其中 $\alpha_\gamma : X \to X$ 对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都是一个同胚。我们将该作用记为 $\Gamma \curvearrowright X$，写作 $\gamma \cdot x = \alpha_\gamma(x)$ 表示 $\gamma \in \Gamma$， $x \in X$。

This 作用在交换的 C^*-代数 $C(X)$ 上诱导出相应的作用，其形式为

$$(\alpha_\gamma f)(x) = f(\gamma^{-1}x), \qquad f \in C(X),\ \gamma \in \Gamma.$$

因此，三元组 $(C(X),\ \Gamma,\ \alpha)$ 按照定义 1 的意义构成一个 C^*-动力系统。

5.1.2 交叉积代数

相应的交叉积 C^*-代数定义为

$$C(X) \rtimes_\alpha \Gamma,$$

由代数 $C(X)$ 与满足协变关系的酉元 $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 共同生成

$$u_\gamma f u_\gamma^* = \alpha_\gamma(f), \qquad f \in C(X),\ \gamma \in \Gamma.$$

交叉积的元素可形式化地写成有限和（若群是无限群，则写成范数收敛级数）

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma u_\gamma, \qquad f_\gamma \in C(X).$$

乘法与对合由以下规则确定

$$(f_\gamma u_\gamma)(g_\eta u_\eta) = f_\gamma \alpha_\gamma(g_\eta) u_{\gamma\eta}, \qquad (f_\gamma u_\gamma)^* = \alpha_{\gamma^{-1}}(\overline{f_\gamma}) u_{\gamma^{-1}}.$$

5.1.3 可 amen 性假设

在本节中，我们始终假设群 Γ是可 amenable 的（见定义 31）。这一假设对我们的分析至关重要，原因有以下几点。

定理 16 （可 amenable 交叉积）。 若 Γ是一个作用于 C^*-代数 A上的离散可和群，则典范满射

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \longrightarrow A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$$

是一个同构。因此，全交叉积与约化交叉积相同：

$$A \rtimes_\alpha \Gamma \cong A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

对于 $A = C(X)$，可得

$$C(X) \rtimes_\alpha \Gamma \ \cong\ C(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

这一性质极大地简化了交叉积的分析结构，并确保所得的 C^*-代数在 K-理论和指标理论构造方面表现良好。具体而言：

- 全交叉积与约化交叉积之间的区别消失了，因此我们无需担心所使用的是哪种完备化。
- 该交叉积具有核性（因为 $C(X)$ 具有核性，且可 amenable 群在交叉积下保持核性）。
- 可以使用 Pimsner-Voiculesc 等标准工具研究该交叉积的 K-理论 u
  针对 $\mathbb{Z}^n$ 作用的精确序列，或更一般的谱序列论证。
- 变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 作为群胚是可 amenable 的，这对其 C^*-代数以及 Baum–Connes 组装映射有着深远的影响（参见 Tu [13]）。

注释76。 可和性假设对我们分析中的若干关键步骤至关重要：

- 这保证了变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是可 *amenable* 的，因此其完全与约化的 C^*代数重合，并且 *Baum–Connes* 组装映射是一个同构（这是 *Tu* 关于可和群胚的定理）。

- 这使我们能够在 *Morita* 等价下，将酉共轭群胚 C^*的 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 代数识别为 $(C(X) \rtimes\Gamma) \otimes \mathcal{K}$，而无需顾虑完全与约化完备化之间的区别。

- 这保证典范条件期望 $E\colon C(X) \rtimes \Gamma \to C(X)$ 是忠实的，而这对于 *Cartan* 子代数结构是必需的。

如果不具备可 *amen* 性，这些识别中有许多将会失效，或者需要运用复杂得多的技术手段（例如处理奇异交叉积，或分别研究完全群胚 C^*代数及其约化对应物）。

5.1.4 变换群胚

动力系统 $(X,\ \Gamma,\ \alpha)$ 自然地确定了变换群胚

$$\mathcal{G} := X \rtimes \Gamma.$$

其元素是满足 $x \in X$ 和 $\gamma \in \Gamma$ 的有序对 $(x,\ \gamma)$，其结构映射如下：

- 源与值域：$s(x,\ \gamma) = x,\ r(x,\ \gamma) = \gamma \cdot x$。
- 复合：$(x,\ \gamma)(\gamma \cdot x,\ \eta) = (x,\ \gamma\eta)$，其定义条件为 $s(x,\ \gamma) = x$ 且 $r(x,\ \gamma) = \gamma \cdot x = s(\gamma \cdot x,\ \eta)$。
- 逆：$(x,\ \gamma)^{-1} = (\gamma \cdot x,\ \gamma^{-1})$。
- 单位空间：$\mathcal{G}_{(0)} = X$，与 $\{(x,\ e) : x \in X\}$ 对应。

该群胚是 ´etale 的，因为 Γ 是离散的：源映射 $s(x,\gamma) = x$ 是局部同胚（每个箭头 (x,γ) 都有一个开邻域，该邻域与 X 中的一个开集同胚，其对应关系由 s给出）。当 X 是局部紧豪斯多夫空间且 Γ 是离散的时，该群胚是局部紧豪斯多夫的，并且它具有自然的 Haar 系统，即纤维上的计数测度。

命题 15。 对于作用在紧豪斯多夫空间 X上的离散群 Γ，变换群胚的群胚 C^*-代数自然同构于交叉积代数：

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \ \cong\ C(X) \rtimes_\alpha \Gamma.$$

当 Γ 是可 *amenable* 的时候，这也与约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(X \rtimes \Gamma)$一致。

证明。 该同构通过将函数 $f \in C_c(X \rtimes \Gamma)$ 识别为有限和$\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma u_\gamma$来实现，其中 $f_\gamma(x) = f(x,\ \gamma)$。在这种识别下，群胚代数中的卷积乘积恰好对应于交叉积中的乘法。在泛范数下完备化（当 Γ 可 amenable 时则在约化范数下完备化），即可得到所需的同构。 □

5.1.5 Cartan 子代数结构

贯穿本案例研究将加以利用的一个关键结构特征是， $C(X)$ 作为 Cartan 子代数包含在 $C(X) \rtimes \Gamma$ 中，这推广了 A_θ 的情形；在该情形中， $C(S^1)$ 是 Cartan 子代数。

定理 17. 设 Γ 是一个作用于紧豪斯多夫空间 X上的离散可和群。假设该作用是拓扑自由的：集合 $\{x \in X : \mathrm{Stab}_\Gamma(x) \neq \{e\}\}$的内部为空。则包含映射$C(X) \subseteq C(X) \rtimes \Gamma$ 是 ***Renault [10]***意义下的 ***Cartan*** 对。特别地：

- $C(X)$ 在 $C(X) \rtimes \Gamma$中是极大交换的；
- $C(X)$ 包含 $C(X) \rtimes \Gamma$的一个近似单位（事实上是单位元）；
- $C(X)$ 的正规化子生成 $C(X) \rtimes \Gamma$；
- 存在一个忠实条件期望 $E\colon C(X) \rtimes \Gamma \to C(X)$，由 $E(\sum_\gamma f_\gamma u_\gamma) = f_e$给出。

证明。 条件期望是忠实的，因为当 Γ可 amenable 时，它是交叉积上的典范迹的限制；更一般地说，这是因为它来自群胚结构。极大交换性源于拓扑自由性：如果一个元素与 $C(X)$ 中的所有元素都交换，那么它必定支撑在各向同性上，而在拓扑自由性下，这意味着它属于 $C(X)$。正规化子包含实现群作用的酉元 u_γ，而这些酉元生成交叉积。有关扭曲群胚 C^*-代数一般情形下的详细证明，请参见 [10, 章节 4]。 □

注 77。 拓扑自由性是一种排除各向同性群的温和条件。我们将考虑的所有例子都满足该条件：

- 对于无理旋转代数， $\Gamma = \mathbb{Z}$ 在 S^1上自由作用，因此拓扑自由性显然成立。
- 对于康托尔集上的极小同胚，极小性意味着拓扑自由性。
- 对于具有有理无关旋转参数的非交换环面 $\mathbb{T}^d \rtimes \mathbb{Z}^d$，该作用是自由的。

如果该作用在某个开集上具有非平凡的各向同性，结构就会更加复杂——此时得到的是一个扭曲群胚 C^*-代数——但经过适当修改，我们的方法也可以扩展到这种情形，修改内容涉及 *Mackey* 障碍理论。为简单起见，在整个案例研究中，我们假设拓扑自由性成立。

5.1.6 酉共轭群胚的推论

上文确立的 Cartan 结构使我们能够应用第 2.4 节中发展的通用理论。回顾一下，对于 Cartan 对 $(\mathcal{A}, D)$，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 与 Weyl 群胚$\mathcal{G}(\mathcal{A}, D)$ Morita 等价。对于 $\mathcal{A} = C(X) \rtimes \Gamma$ 和 $D = C(X)$，Weyl 群胚恰好就是变换群胚$X \rtimes \Gamma$。

推论 9。 在 Γ 为离散可容许群、 X 为紧豪斯多夫空间且该作用拓扑自由的假设下，我们有一个 *Morita* 等价

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma.$$

因此，根据 ***Muhly–Renault–Williams*** 定理 *[21]*，，它们的约化 C^*-代数强 ***Morita*** 等价：

$$C_r^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma.$$

稳定化后，这得出

$$C_r^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}.$$

这一识别将成为本案例研究中后续所有计算的基础，正如类似的结果对于第 4 节至关重要。

5.1.7 固定假设总结

在本节余下部分中，我们将在以下固定假设下进行讨论：

假设 1. *(A1)* Γ 是一个可数离散可恰当群。

(A2) X 是一个紧豪斯多夫空间。

(A3) Γ 通过同胚在 X 上连续作用。

(A4) 该作用是拓扑自由的：具有非平凡稳定子的点集内部为空。

这些假设适用于许多有趣的例子，包括：

- 无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ （第 4 节对此进行了详细研究）。
- 康托尔集上的极小同胚 $C(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$。
- 非交换环面 $C(\mathbb{T}^d) \rtimes \mathbb{Z}^d$，其旋转参数有理无关 .
- 双曲群的某些边界作用（不过，这些作用可能需要放宽对 Γ 的可和性假设，同时保持群胚的可和性）。

5.1.8 与本工作的相关性

假设 Γ 是离散且可 amenable 的，且 X 是紧豪斯多夫空间，这确保变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 局部紧并具有 Haar 系统。因此，其群胚 C^*-代数定义良好，其 K 理论也可以借助标准工具进行研究。

这些性质将使我们能够比较酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$，并将先前构造的下降映射与 Baum–Connes 组装映射联系起来。具体而言，我们将建立一个交换图

$$\begin{array}{ccc} K^1_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(X)\rtimes\Gamma}) & \xrightarrow{\text{desc}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \\ \downarrow \text{Morita} & & \downarrow \text{Morita} \\ K^1_\Gamma(X) & \xrightarrow{\mu_\Gamma} & K_1(C(X) \rtimes \Gamma) \end{array}$$

其中 μ_Γ 是 Baum–Connes 组装映射。该图及其交换定理将构成本案例研究的主要结果，也是本文的核心成果之一。

5.1.9 案例研究 II 余下部分的概要

在这些假设的基础上，我们将按如下步骤展开：

1. **交换子代数与特征**（§5.2）：分析 $C(X) \rtimes \Gamma$ 中极大交换子代数的结构及其特征空间，并推广针对 A_θ 的分析。

2. **与 之间的关系**（§5.3）：在 Cartan 结构和第 2.4 节结果的基础上，确立酉共轭群胚与变换群胚之间的精确关系。

3. **Morita 等价定理**（§5.4）：证明 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$，并导出相应的 C^*-代数的 Morita 等价。 4. **对角嵌入与正则表示**（§5.5）：研究对角嵌入 $\iota\colon C(X)\rtimes\Gamma \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$，并将其与交叉积的正则表示联系起来。 5. **等变 K^1-类**（§5.6）：为 $C(X)\rtimes\Gamma$ 中的可逆元构造等变 K^1-类，从而推广第 5.6 节的构造。 6. **下降映射与识别**（§5.7）：应用下降映射和 Morita 等价，将下降后的类识别为 $K_1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 中的元素。 7. **与 Baum–Connes 组装映射的联系**（§5.8）：证明所得指标映射与 Γ在系数取 $C(X)$ 时的 Baum–Connes 组装映射一致，从而确立上述图表的交换性。 8. **影响与推论**（§5.10）：讨论这一结果的意义，包括其与 Baum–Connes 猜想的关系，以及在交叉积C^*-代数分类中的潜在应用。

本程序将说明：最初为论文 I 和 II 中的 I 型代数发展起来的酉共轭群胚框架，可以自然地推广到可 amenable 交叉积这一根本性的非 I 型情形，并为 Baum–Connes 组装映射提供一种新的几何视角。

5.2 交换子代数与 $C(X)\rtimes\Gamma$ 中的特征

为了分析与交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$ 相关的酉共轭群胚的单位空间，我们首先考察其交换子代数及其特征的结构。这一分析推广了在第 4.2 节中对 A_θ 所进行的详细研究，并为下一小节中确立的 Morita 等价奠定基础。

5.2.1 典型交换子代数

代数 $C(X)$ 通过映射自然地嵌入交叉积 $C(X)\rtimes_\alpha\Gamma$ 中

$$\iota : C(X) \hookrightarrow C(X)\rtimes_\alpha\Gamma, \quad f \mapsto f u_e,$$

其中，u_e 是对应于单位元 $e\in\Gamma$ 的酉元。在代数交叉积中，$C(X)$ 的元素与项 fu_e 识别，这一识别扩展为 C^*-代数的等距嵌入。

由于 $C(X)$ 是交换的，因此它自然成为交叉积中极大交换子代数的候选者。在我们的基本假设（作用具有拓扑自由性）下，$C(X)$ 确实是极大交换的，而且还是 Renault [10] 意义下的 Cartan 子代数。这一结构已在定理 17 中确立，并将在下文发挥关键作用。

定义 19. 典范极大交换子代数 *(极大阿贝尔自伴子代数)* $C(X)\rtimes\Gamma$ 是

$$\mathcal{A}_0 := \iota(C(X)) \cong C(X) \subseteq C(X)\rtimes\Gamma.$$

5.2.2 $C(X)$的特征

由于 X 是紧豪斯多夫的， $C(X)$ 的 Gelfand 谱可与其本身 X 典范地对应。每个点 $x \in X$ 都确定一个特征（非零乘法线性泛函）

$$\chi_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi_x(f) = f(x).$$

因此， $C(X)$的特征集合自然地由空间 X参数化，而映射 $x \mapsto \chi_x$ 是一个同胚 $X \cong C(X)$。

注 78. 从几何上看，特征 χ_x 可以理解为“在点 x处求值”。从非交换几何的视角来看，这些特征代表了非交换空间 $C(X) \rtimes \Gamma$的经典“点”，尽管交叉积本身可能没有特征（例如单C^*代数 A_θ）。经典点与量子点之间的这种张力，正是酉共轭群胚所捕捉的。

5.2.3 与群作用的交互

Γ 在 X 上的作用会诱导特征的变换。对于 $g \in \Gamma$ 和 $x \in X$，交叉积中的协变关系给出

$$u_g f u_g^* = \alpha_g(f), \qquad f \in C(X),$$

其中 $(\alpha_g f)(x) = f(g^{-1}x)$。用 u_g 共轭一个特征，可得到 $C(X)$ 上的一个新特征：

$$(\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g})(f) = \chi_x(u_g^* f u_g) = \chi_x(\alpha_{g^{-1}}(f)) = f(g \cdot x) = \chi_{g\cdot x}(f).$$

因此，我们得到基本关系

$$\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g} = \chi_{g\cdot x}.$$

等价地，

$$\chi_{g\cdot x} = \chi_x \circ \alpha_{g^{-1}}.$$

这个关系表明，群 Γ以与交叉积结构相容的方式作用在 $C(X)$的特征空间上，而且这一作用由酉元 u_g的共轭来实现。

命题 16. 映射 $X \times \Gamma \to X$ 由 $(x, g) \mapsto g \cdot x$ 给出，它诱导了 Γ 在特征空间$C(X) \cong X$上的连续作用。在此作用下，特征 χ_x 的轨道为

$$\Gamma \cdot \chi_x = \{\chi_{g\cdot x} : g \in \Gamma\}.$$

5.2.4 共轭极大阿贝尔子代数及其特征

典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0$ 并不是 $C(X) \rtimes \Gamma$中唯一的极大交换子代数。对于交叉积中的任意酉元 w，其共轭 $w\mathcal{A}_0 w^*$ 也是一个极大阿贝尔子代数，其特征空间可通过映射自然地与 X 对应

$$\chi_x \mapsto \chi_x \circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}}.$$

特别地，对于实现酉元 u_g，我们得到共轭极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_g := u_g \mathcal{A}_0 u_g^*$。然而，与 A_θ 的情形不同，由于 $\mathcal{A}_0$ 在 u_g 的共轭作用下保持不变，因此 $\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_0$ 作为集合相等（引理 8）。因此，这些共轭极大阿贝尔子代数作为子代数彼此重合；只有它们的特征与 X 的识别受到群作用的扭曲。

引理 8。对于任意 $g \in \Gamma$，都有 $u_g \mathcal{A}_0 u_g^* = \mathcal{A}_0$。因此，典范极大阿贝尔子代数在实现酉元的共轭作用下保持不变。

证明。对于 $f \in \mathcal{A}_0 \cong C(X)$，我们有 $u_g f u_g^* = \alpha_g(f) \in C(X) = \mathcal{A}_0$。由于 α_g 是 $C(X)$ 的自同构，这表明 $u_g \mathcal{A}_0 u_g^* \subseteq \mathcal{A}_0$。对 g^{-1} 应用相同的论证即可得到反向包含。 □

尽管具有这种不变性，仍可通过用不正规化 $\mathcal{A}_0$ 的酉元共轭 $\mathcal{A}_0$，得到其他极大阿贝尔子代数。当交叉积非交换且不是直积时，这类酉元确实存在。例如，在 A_θ 中，酉元 U（$C(S^1)$ 的生成元）经 V 共轭后，不会正规化 $C(S^1)$，从而得到不同的极大阿贝尔子代数。

5.2.5 交叉积中的交换上下文

回想一下，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的单位空间中的一个点是一对

$$(B, \chi),$$

其中 $B \subseteq C(X) \rtimes \Gamma$ 是一个含幺交换的 C^*-子代数，而 $\chi \in \widehat{B}$ 是一个特征。

根据上述讨论，我们可以利用动力系统 (X, Γ) 对许多这样的点进行参数化。从典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0$ 和特征 χ_x出发，我们得到一个点 $(\mathcal{A}_0, \chi_x) \in \mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$。

更一般地，对于任意酉元 $w \in \mathcal{U}(C(X) \rtimes \Gamma)$，共轭极大阿贝尔子代数 $w\mathcal{A}_0 w^*$ 与特征 $\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}}$ 共同给出另一个点。

定义 20。对于 $(x, g) \in X \times \Gamma$，定义单位空间中的一个点如下：

$$\xi_{x,g} := (u_g \mathcal{A}_0 u_g^*, \chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g^{-1}}).$$

由于根据引理 8，$u_g \mathcal{A}_0 u_g^* = \mathcal{A}_0$，这可简化为

$$\xi_{x,g} = (\mathcal{A}_0, \chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g^{-1}}) = (\mathcal{A}_0, \chi_{g\cdot x}),$$

其中最后一个等式用到了关系 $\chi_x \circ \mathrm{Ad}^{u_g^{-1}} = \chi_{g\cdot x}$。

因此，由实现酉元产生的点实际上与先前由典范极大阿贝尔子代数得到的点重合，只是特征经过了群作用的平移。这反映了这样一个事实：典范极大阿贝尔子代数在实现酉元作用下保持不变，因此共轭不会产生新的子代数，只会在同一子代数上产生新的特征。

要在单位空间中得到真正的新点，我们需要不正规化 $\mathcal{A}_0$ 的酉元。这类酉元有很多；例如，在 A_θ 中，酉元 U 本身作为交叉积的元素时并不正规化 $C(S^1)$（因为 $VUV^* = e^{2\pi i\theta}U$ 不属于 $C(S^1)$）。更一般地，任何不属于 $\mathcal{A}_0$ 的正规化子的酉元，经共轭后都会产生一个不同的极大阿贝尔自伴子代数。

5.2.6 单位空间的参数化

一个基本结果将第4.7小节中对 A_θ 的分析推广开来：单位空间 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$ 可以用有序对 $(x, \gamma) \in X \times \Gamma$ 进行参数化，并模去一个自然的等价关系。

定理 18. 在上述假设（离散可和群在紧豪斯多夫空间上的拓扑自由作用）下，存在自然双射

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}^{(0)} \cong (X \times \Gamma)/\sim,$$

其中等价关系由以下关系生成

$$(x,\gamma) \sim (\gamma' \cdot x, \gamma'\gamma) \quad \textit{for all } \gamma' \in \Gamma.$$

更明确地说，(x,γ) 的等价类为

$$[(x,\gamma)] = \{(\eta \cdot x, \eta\gamma) : \eta \in \Gamma\}.$$

投影映射 π： $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma} \to X$ 由 $\pi([(x,\gamma)]) = x$给出。

证明略。 证明分几个步骤进行，类似于关于 A_θ 的论证，但用群 Γ 取代$\mathbb{Z}$。

步骤 1：约化为 的共轭对象。 在适当条件下（例如，当 $C(X) \rtimes \Gamma$ 是单的，或更一般地说，当所有极大阿贝尔子代数都彼此酉共轭时），每个极大阿贝尔子代数 $B \subseteq C(X) \rtimes \Gamma$ 都可写作 $B = wA_0w^*$，其中 $w \in \mathcal{U}(C(X) \rtimes \Gamma)$是某个酉元。这是因为 A_0 是一个 Cartan 子代数，并且在适当情形下，Feldman-Moore定理说明 Cartan 子代数在酉等价意义下唯一。

步骤 2：通过 进行参数化。 给定这样的酉元 w， B 上的特征 χ 通过 w^*的共轭，对应于 A_0上的一个特征，而该特征由在某个 $x \in X$处求值给出。因此，我们有一对 (x, w)，表示点 (B, χ)。然而，不同的酉元可能表示同一个点。

步骤 3：归约到正规化子。若 w 和 w' 是两个酉元，使得 $wA_0w^* = w'A_0w'^*$ 和$\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}} = \chi_{x'} \circ \mathrm{Ad}_{w'^{-1}}$，则 $w'^{-1}w$规范化 A_0，并以适当的意义固定该特征。 A_0 的正规化子包含实现酉元u_γ；在拓扑自由性成立时，正规化子由这些酉元与 A_0 自身的酉群共同生成。

步骤 4：等价关系。通过分析正规化子的作用，可以证明参数化中的不确定性恰好对应于等价关系 $(x, \gamma) \sim (\gamma' \cdot x, \gamma'\gamma)$。由此可将单位空间描述为 $X \times \Gamma$ 在 Γ的对角作用下所得的商空间。

详细证明需要谨慎处理酉群和正规化子，但其核心几何图景是：单位空间是 $X \times \Gamma$ 在作用 $\gamma' \cdot (x, \gamma) = (\gamma' \cdot x, \gamma'\gamma)$下的商空间。 □

该定理推广了第4.7小节中针对 A_θ 得到的显式描述，其中 $X = S^1$、$\Gamma = \mathbb{Z}$，且等价关系为 $(z, n) \sim (e^{2\pi ik\theta}z, n + k)$。

推论10。 单位空间 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$ 是一个以 X 为底空间、纤维为 Γ的丛，但其非平凡单值化由 Γ 在自身上的左乘作用所编码。投影映射 π： $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma} \to X$ 在商拓扑下是开映射且连续。

5.2.7 单位空间的拓扑

$\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$ 上的拓扑是由 $X \times \Gamma$诱导的商拓扑，其中 X 带有其给定的紧豪斯多夫拓扑，而 Γ 是离散的。当作用为极小时，该拓扑呈现出与 A_θ 情形中观察到的相同非豪斯多夫现象。

命题 17。 $(X \times \Gamma)/\sim$ 上的商拓扑具有以下性质 ：

- 投影 π： $\mathcal{G}_{(0)}{}_{C(X)\rtimes\Gamma} \to X$ 是开且连续的。
- 对于每个 $x \in X$，纤维 $\pi^{-1}(x)$ 都与 Γ同胚；但当作用是极小的（即每个 Γ-轨道在 X 中都是稠密的）时，纤维中的不同点无法用开集分离。

- 除非 Γ 在 X 上的作用是平凡的，或具有某些特殊性质（例如，具有闭轨道的真作用），否则该拓扑不是豪斯多夫的。
- 在博雷尔结构中（这对于群胚 C^*-代数构造已足够），$\mathcal{G}_{(0)}$ $_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 是一个标准博雷尔空间。

证明。 π 是开映射，因为当Γ 离散时，商映射 $X \times \Gamma \to \mathcal{G}_C^{(0)}$ $_{(X)\rtimes\Gamma}$ 是开映射。非豪斯多夫性源于极小性：若 $[(x,\gamma)]$和 $[(x,\gamma')]$在 $\gamma \neq \gamma'$处有不相交的邻域，那么根据极小性， x的轨道必会累积，从而产生矛盾（参见推论 25 中关于 A_θ 的类似证明）。博雷尔结构是标准的，因为 $X \times \Gamma$ 配备乘积博雷尔结构（在 Γ上采用离散博雷尔结构）是标准的，而标准博雷尔空间在可数群作用下的商仍是标准的。

□

5.2.8 几何解释

上述讨论揭示了一个深刻的几何事实：由 $C(X)\rtimes\Gamma$ 的交换子代数产生的特征数据，从根本上受到底层动力系统 (X,Γ) 的控制。单位空间$\mathcal{G}_C^{(0)}$ $_{(X)\rtimes\Gamma}$ 本质上是 $X \times \Gamma$ 在 Γ 的对角作用下的“轨道空间”，但有一个关键的不同：它并非通常意义上的轨道空间（通常应为 X），而是一个将群元素作为点 x 上方纤维的一部分予以保留的空间；沿轨道移动时，纤维坐标会随之乘以同一个群元素。

正是这种结构，使得酉共轭群胚与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。在该群胚中，箭头是有序对（x， γ）： $x \to \gamma \cdot x$，而单位空间为 X。在这里，在 $\mathcal{G}_C^{(0)}$ $_{(X)}$ $_{\rtimes\Gamma}$中，我们拥有相同的数据（x，γ），但将其重新解释为单位空间中的点，而非箭头。这一视角的转变正是 Morita 等价的本质。

注 79。 参数化 $\mathcal{G}_C^{(0)}$ $_{(X)}$ $_{\rtimes\Gamma} \cong (X \times \Gamma)/\sim$ 首次表明， $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与 $X \rtimes \Gamma$*Morita* 等价。事实上，空间 $X \times \Gamma$ 本身充当这两个群胚之间的等价双模：$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$的左作用和 $X\rtimes\Gamma$ 在 $X\times\Gamma$ 上的右作用将实现这一等价关系。下一小节将对这一点作出严格说明。

5.2.9 例子

我们通过几个例子来说明这一结构，这些例子将在下文中发挥重要作用。

例8（无理旋转代数）。 对于通过旋转 $2\pi\theta$作用的 $X = S^1$、 $\Gamma = \mathbb{Z}$，定理 *18* 给出

$$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \cong (S^1 \times \mathbb{Z})/\sim,$$

其中 （z、 n） $\sim$ （$e^{2\pi ik\theta}z$、 $n+k$）。这与第*4.7*小节中得到的显式描述一致。

例9（康托尔集的极小同胚）。 令 X 为康托尔集， φ： $X \to X$ 为一个极小同胚。取 $\Gamma = \mathbb{Z}$，使其通过 φ的幂作用。于是

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\varphi\mathbb{Z}}^{(0)} \cong (X \times \mathbb{Z})/\sim,$$

取 $(x,n) \sim (\varphi^k(x)\ n+k)$。这个空间是一个以 X 为底空间、纤维为 $\mathbb{Z}$ 的康托尔集丛，呈现出与无理旋转情形相同类型的非豪斯多夫现象。它是在与极小同胚相关的 C^*-代数分类的背景下研究的。

例 10 (非交换 $2d$-环面)。 令 $X = \mathbb{T}^d$, $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ 以平移作用，参数 $\theta_1, \ldots, \theta_d$ 在有理意义上独立。则

$$\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T}^d)\rtimes\mathbb{Z}^d} \cong (\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d)/\sim,$$

其中等价关系由 $\mathbb{Z}^d$ 的对角作用给出：$(z,\mathbf{n}) \sim (z+\mathbf{k},\mathbf{n}+\mathbf{k})$，其中 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$，加法通过平移作用来解释。该空间是一个 $\mathbb{Z}^d$ 丛，定义在 $\mathbb{T}^d$ 上，其单值化由平移作用编码。

例 11 （双曲群的边界作用）。 设 Γ 是一个作用于其格罗莫夫边界 $\partial\Gamma$ 上的无挠双曲群。尽管 Γ 可能不是可 *amenable* 的，但变换群胚 $\partial\Gamma \rtimes \Gamma$ 通常是可 *amenable* 的，交叉积 $C(\partial\Gamma)\rtimes\Gamma$ 可以用类似的方法研究。在这种情况下，单位空间为

$$\mathcal{G}^{(0)}_{C(\partial\Gamma)\rtimes\Gamma} \cong (\partial\Gamma \times \Gamma)/\sim,$$

满足等价关系 $(x,\gamma) \sim (\eta\cdot x, \eta\gamma)$。该空间在研究双曲群的 *Baum–Connes* 猜想时发挥着关键作用。

5.2.10 总结与展望

我们已经确立了关于 $C(X)\rtimes\Gamma$ 中交换子代数和特征的以下关键事实：

- 典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0 = C(X)$ 的特征空间为 X，其中特征 χ_x 由在$x \in X$处求值给出。
- 群 Γ 通过 $\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g} = \chi_{g\cdot x}$作用于特征空间。
- 单位空间 $\mathcal{G}_{(0)}C(X)\rtimes\Gamma$ 具有自然参数化形式 $(X\times\Gamma)/\sim$，其中 $(x,\gamma) \sim (\gamma'\cdot x, \gamma'\gamma)$。
- 该空间是一个以 X 为底、以 Γ 为纤维的丛，通常是非豪斯多夫的，并带有由对偶作用诱导的自然 Γ-作用。
- 该结构推广了针对 A_θ 所得的显式描述，并为与变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 的 Morita 等价提供了几何基础。

在下一小节中，我们将利用这一描述，构造$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与 $X\rtimes\Gamma$之间的显式 Morita 等价。这种等价将使我们能够把整个下降指标工具转移到可 amenable 交叉积的情形，并最终将我们的构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来。

5.3 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与作用群胚 $X\rtimes\Gamma$之间的关系

现在，我们来确立与交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$ 相关联的酉共轭群胚与源自底层动力系统的经典变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 之间的精确关系。这一关系为下一小节将要证明的 Morita 等价提供了几何直觉，也是将我们的下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来的关键一步。

5.3.1 变换群胚 $X \rtimes \Gamma$

回顾第 2.3 小节， Γ 在紧豪斯多夫空间 X 上的作用确定了变换群胚

$$\mathcal{G}_{\text{trans}} := X \rtimes \Gamma.$$

其元素是有序对 (x,γ)，其中 $x \in X$ 且 $\gamma \in \Gamma$。结构映射如下：

- 源与值域： $s(x,\gamma) = x$， $r(x,\gamma) = \gamma \cdot x$。
- 复合： $(x,\gamma)(\gamma \cdot x, \eta) = (x, \gamma\eta)$，定义条件为 $r(x,\gamma) = s(\gamma \cdot x, \eta)$。
- 逆： $(x,\gamma)^{-1} = (\gamma \cdot x, \gamma^{-1})$。
- 单位空间： $\mathcal{G}_{(0)}\,\text{trans} = X$，与 $\{(x,e) : x \in X\}$ 相对应。

该群胚是 ´étale（因为 Γ 是离散的）、局部紧豪斯多夫的，并且其 C^*-代数与以下交叉积典范同构：

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma.$$

5.3.2 特征与求值映射

如第 5.2 小节所确立的，典范交换子代数 $C(X) \subset C(X) \rtimes \Gamma$ 的特征空间可自然地识别为 X。每个点 $x \in X$ 确定一个特征

$$\chi_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi_x(f) = f(x),$$

——，且映射 $x \mapsto \chi_x$ 是一个同胚 $X \cong C(X)$。

群作用诱导出特征的变换：

$$\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_\gamma} = \chi_{\gamma\cdot x},$$

其中u_γ 是交叉积中的实现酉元。这对应于 Γ 在 $C(X)$的谱上的作用。

5.3.3 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$的单位空间中的点

回顾论文 I， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的 C^*代数 $\mathcal{A}$ 的酉共轭群胚，其单位空间由有序对组成

$$(B, \chi)$$

其中， $B \subset \mathcal{A}$ 是含幺交换 C^*子代数， χ 是 B的一个特征。箭头来自 $\mathcal{A}$的酉元所施加的共轭：

$$u : (B,\chi) \longrightarrow (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^{-1}}).$$

在当前情形 $\mathcal{A} = C(X) \rtimes \Gamma$ 中，典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0 = C(X)$ 及其特征$\{\chi_x\}_{x\in X}$ 构成单位空间 $\mathcal{G}_C^{(0)}$ $_{(X)\ \rtimes\Gamma}$中的一个特选点族：

$$\xi_x := (\mathcal{A}_0, \chi_x) \in \mathcal{G}^{(0)}_{C(X)\rtimes\Gamma}.$$

更一般地，对于任意 $\gamma \in \Gamma$，我们得到一些点

$$\xi_{x,\gamma} := (\mathcal{A}_0, \chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_\gamma^{-1}}) = (\mathcal{A}_0, \chi_{\gamma\cdot x}),$$

由于 $\mathcal{A}_0$ 在u_γ的共轭作用下保持不变，这些点实际上与 $\xi_{\gamma\cdot x}$ 相同。这反映了典范极大阿贝尔子代数作为集合在实现酉元作用下保持不变这一事实。

要在单位空间中获得真正不同的点，我们必须考虑不正规化 $\mathcal{A}_0$ 的酉元的共轭。对于这样的酉元 w，点 $(w\mathcal{A}_0w^*,\ \chi_x\circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}})$ 通常不同于任何 $(\mathcal{A}_0,\ \chi_y)$。

5.3.4 从 $X\rtimes\Gamma$ 到 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的自然映射

交叉积 $C(X)\rtimes\Gamma$ 中编码的动力学信息，正是 Γ 在 X 上的作用。因此，变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 捕捉了酉共轭群胚中隐含出现的相同几何结构。这种关系可以通过一个自然映射明确表达出来。

定义 21。 定义映射 $\Phi:\ X\rtimes\Gamma\longrightarrow\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 如下：

- 在单位元上：对于 $x\in X=(X\rtimes\Gamma)^{(0)}$，令 $\Phi(x)=(\mathcal{A}_0,\chi_x)\in\mathcal{G}^{(0)}_{C(X)\rtimes\Gamma}$。
- 关于箭头：对于 $(x,\gamma)\in X\rtimes\Gamma$，令 $\Phi(x,\gamma)$ 为 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 中的箭头，该箭头由实现酉元 u_γ共轭得到：

$$\Phi(x,\gamma):=u_\gamma:(\mathcal{A}_0,\chi_x)\longrightarrow(\mathcal{A}_0,\chi_{\gamma\cdot x}).$$

命题 18. 上述定义的映射 Φ 是一个群胚同态。也就是说，它保持源、值域、复合和逆元。

证明。 我们逐项验证各项性质：

源与值域： 对于 $(x,\gamma)\in X\rtimes\Gamma$，我们有 $s(\Phi(x,\gamma))=(\mathcal{A}_0,\chi_x)=\Phi(s(x,\gamma))$，且 $r(\Phi(x,\gamma))=(\mathcal{A}_0,\chi_{\gamma\cdot x})=\Phi(r(x,\gamma))$.

复合： 对于 $X\rtimes\Gamma$ 中可复合的箭头 (x,γ) 和 $(\gamma\cdot x,\eta)$，我们有

$$\Phi((x,\gamma)\circ(\gamma\cdot x,\eta))=\Phi(x,\gamma\eta)=u_{\gamma\eta}:(\mathcal{A}_0,\chi_x)\to(\mathcal{A}_0,\chi_{\gamma\eta\cdot x}).$$

另一方面，

$$\Phi(x,\gamma)\circ\Phi(\gamma\cdot x,\eta)=u_\gamma\circ u_\eta:(\mathcal{A}_0,\chi_x)\to(\mathcal{A}_0,\chi_{\gamma\cdot x})\to(\mathcal{A}_0,\chi_{\gamma\eta\cdot x}),$$

并且由于 $u_\gamma u_\eta=u_{\gamma\eta}$ 属于交叉积，它们相等。

逆元： $\Phi((x,\ \gamma)^{-1})=\Phi(\gamma\cdot x,\ \gamma^{-1})=u_{\gamma^{-1}}:(\mathcal{A}_0,\ \chi_{\gamma\cdot x})\to(\mathcal{A}_0,\ \chi_x)$，这恰好是 $\Phi(x,\ \gamma)=u_\gamma$ 的逆元。 □

注释80。 映射 Φ 在箭头上是单射的，因为不同的有序对 （x、γ）在$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 中给出不同的箭头（因为目标特征 $\chi_{\gamma\cdot x}$ 唯一确定了 $\gamma\cdot x$，而源特征确定了 x）。然而， Φ 不是满射：酉共轭群胚包含许多来自不属于集合 $\{u_\gamma:\ \gamma\in\Gamma\}$的酉元的箭头，例如来自 C（X）本身中的酉元，或来自交叉积中更一般元素的箭头。因此， Φ 将 $X\rtimes\Gamma$ 嵌入为 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$的一个子群胚，但并非整个群胚。

5.3.5 扩展到共轭极大阿贝尔自伴子代数

通过不仅考虑典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0$，还考虑其共轭，映射 Φ 可以扩展，以捕捉 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的更多结构。对于任意酉元 $w \in \mathcal{U}(C(X) \rtimes \Gamma)$，我们可以定义映射 $\Phi_w\colon X \rtimes \Gamma \to \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$，其定义为

$$\Phi_w(x,\gamma) = w u_\gamma w^* : (w\mathcal{A}_0 w^*, \chi_x \circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}}) \longrightarrow (w\mathcal{A}_0 w^*, \chi_{\gamma\cdot x} \circ \mathrm{Ad}_{w^{-1}}).$$

这些映射也是群胚同态，其像是 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的共轭子群胚。所有此类映射构成的集合，随着 w 在酉群中变化，刻画了酉共轭群胚的完整结构。

5.3.6 几何解释

同态 Φ 为变换群胚在酉共轭群胚中的几何解释提供了依据：

- 点 $x \in X$ 对应于交换上下文 $(\mathcal{A}_0, \chi_x)$，我们在其中对 x 处的函数求值。
- 箭头 (x,γ) 对应于由实现酉元 u_γ 执行的共轭，它将上下文从 x 处变换到 $\gamma \cdot x$ 处。

因此，原系统 $\Gamma \curvearrowright X$ 的动力学在 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 中体现为实现酉元对典范极大阿贝尔子代数及其特征的作用。

命题 19. Φ 的像是 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的子群胚，由那些将典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0$ 映到自身的箭头组成。该子群胚与 $X \rtimes \Gamma$ 同构，刻画了酉共轭群胚的“经典”部分。

证明。 根据定义， $\Phi(x,\gamma)$将 $(\mathcal{A}_0, \chi_x)$ 映到 $(\mathcal{A}_0, \chi_{\gamma\cdot x})$，因此其像包含于保持 $\mathcal{A}_0$ 作为子代数的箭头集合中（尽管它们可能改变特征）。反过来， $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 中任何将 $\mathcal{A}_0$ 映到自身的箭头，都必定来自一个规范化 $\mathcal{A}_0$的酉元。根据正规化子的结构（引理 8），这类酉元恰好具有 $f u_\gamma$的形式，其中 $f \in \mathcal{U}(C(X))$。由于 f在特征上的作用是平凡的（因为 f 与 $\mathcal{A}_0$可交换），该箭头实际上由 γ确定，而源特征和目标特征则确定 x 和 $\gamma \cdot x$。因此，该箭头具有 $\Phi(x,\gamma)$的形式，至多相差一个来自 $C(X)$的平凡酉元修正；这不会影响群胚中的箭头（因为由 f 所作的共轭在 $\mathcal{A}_0$及其特征上是恒等作用）。

□

5.3.7 概念解释

变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 以纯粹的拓扑术语描述作用 $(X,\ \Gamma)$ 的几何动力学。酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 则通过交换上下文的共轭，以算子代数形式编码相同的信息，但它还包含来自不正规化典范极大阿贝尔子代数的酉元的额外箭头。这些额外箭头对应于将极大阿贝尔自伴子代数与其共轭混合的“非经典”变换。

尽管存在这一差异，下面的小节将证明这两个群胚 Morita 等价。这种 Morita 等价将 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的“非经典”部分与单位空间中我们在定理 18 中描述的 Γ 值纤维对应起来。这种等价将在连接此前构造的下降映射与 Baum–Connes 组装映射方面发挥核心作用。

定理 19（交叉积的 Morita 等价）。 设 Γ 是一个作用于紧豪斯多夫空间 X 上的离散可和群（该作用拓扑自由）。那么，与交叉积 $C(X) \rtimes_\alpha \Gamma$ 相关联的酉共轭群胚与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ *Morita* 等价：

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma.$$

因此，它们的约化群胚 C^*-代数强 *Morita* 等价：

$$C_r^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma}) \sim_M C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes_\alpha \Gamma.$$

经紧算子稳定化后，得到

$$C_r^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes_\alpha\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes_\alpha \Gamma) \otimes \mathcal{K}.$$

注 81。 同态 $\Phi: X \rtimes \Gamma \hookrightarrow \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 是建立 *Morita* 等价的第一步。在下一小节中，我们将构造一个明确的等价双模，将这一嵌入扩展为完整的 *Morita* 等价，从而说明 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与 $X \rtimes \Gamma$ 并不同构，但与之 *Morita* 等价。这正是两个群胚编码相同 C^*-代数信息的确切含义。

5.3.8 与单位空间参数化的关系

回顾定理 18，单位空间 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$ 由等价类 $[x,\gamma]$ 参数化，其中 $(x,\gamma) \sim (\gamma' \cdot x, \gamma'\gamma)$。在此参数化下， $X \rtimes \Gamma$ 的单位空间在 Φ 下的像对应于子集 $\{[x,e]: x \in X\}$，即纤维坐标为单位元 $e \in \Gamma$的那些点。

额外的点 $[x,\gamma]$ with $\gamma \neq e$ 对应于由不正规化它的酉元对$\mathcal{A}_0$ 进行共轭而产生的交换上下文。这些点不属于 Φ的像，但它们对于 Morita 等价至关重要：它们提供了额外的纤维，使得 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ to 能与 $X \rtimes \Gamma$成为 Morita 等价。

5.3.9 总结

我们已经确立了：

- 一个自然的群胚同态 $\Phi: X \rtimes \Gamma \hookrightarrow \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$，将变换群胚嵌入酉共轭群胚。

- Φ 的像由那些保持典范极大阿贝尔子代数 $\mathcal{A}_0 = C(X)$ 的箭头组成，对应于酉共轭群胚的“经典”部分。

- $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 的单位空间包含额外的点 $[x,\gamma]$ with $\gamma \neq e$，对应于由非正规化酉元对 $\mathcal{A}_0$ 进行共轭而得到的结果。

- 这些观察为 Morita等价定理奠定了基础。该定理将说明，尽管存在这些额外的点，这两个群胚仍然 Morita 等价。

在下一小节中，我们将明确证明这一 Morita 等价，构造一个实现该等价的等价双模 $Z = X \times \Gamma$，并建立基本同构

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}.$$

这一结果将为我们把下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来奠定基础。

5.4 Morita 等价定理：$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$

现在，我们将证明案例研究 II 的关键结构性结果：与交叉积代数 $C(X) \rtimes \Gamma$ 相关联的酉共轭群胚与经典变换群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。该定理推广了定理 9 中针对无理旋转代数证明的等价关系，并为我们将下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射联系起来奠定基础。

5.4.1 回顾这两个群胚

变换群胚。回顾第 2.3 小节，离散可 amenable 群 Γ 对紧豪斯多夫空间 X 的作用确定了变换群胚

$$X \rtimes \Gamma.$$

其元素是有序对 $(x,\ g)$，其中 $x \in X$ 且 $g \in \Gamma$，源映射与值域映射为

$$s(x,g) = x, \qquad r(x,g) = g \cdot x.$$

当 $g \cdot x = y$ 时，复合定义为

$$(x,g)(y,h) = (x,gh).$$

逆为 $(x,\ g)^{-1} = (g \cdot x,\ g^{-1})$，而单位空间可通过 $x \mapsto (x,\ e)$ 自然地与 X 识别。

该群胚是 ´etale 的（因为 Γ 是离散的），是局部紧豪斯多夫的，并且其 C^*-代数在规范意义下同构于交叉积：

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma.$$

酉共轭群胚。对于交叉积代数 $\mathcal{A} = C(X) \rtimes \Gamma$，论文 I 中引入的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的单位空间由有序对组成

$$(B, \chi)$$

其中 $B \subset \mathcal{A}$ 是一个含幺交换 C^*-子代数，χ 是 B的一个特征。箭头由酉元的共轭作用给出：对于每个酉元 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 以及每个 $(B,\chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，都有一个箭头

$$u : (B,\chi) \longrightarrow (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^{-1}}).$$

根据定理 18，我们可以显式地参数化单位空间：

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}^{(0)} \cong (X \times \Gamma)/\sim,$$

其中对于所有 $\gamma' \in \Gamma$，$(x,\gamma) \sim (\gamma' \cdot x, \gamma'\gamma)$。我们用 $[x,\gamma]$ 表示 (x,γ) 的等价类。投影映射 $\pi : \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}^{(0)} \to X$ 由 $\pi([x,\gamma]) = x$ 给出。

典范交换子代数 $C(X) \subset \mathcal{A}$与其特征 χ_x 对于 $x \in X$（由在 x 处求值给出）共同构成单位空间中的一个特殊子集：

$$\{(C(X), \chi_x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

在 para 条件下上述度量化中，这些对应于点 $[x,e]$，其中 e 是 Γ的单位元。

5.4.2 群胚对应

Γ 在 X 上的作用由交叉积代数中的典范酉元 $\{u_g\}_{g\in\Gamma}$实现。通过 u_g 共轭会将特征 χ_x 变换为特征 $\chi_{g\cdot x}$:

$$\chi_x \circ \mathrm{Ad}_{u_g} = \chi_{g\cdot x}.$$

因此，对于每个 $(x, g) \in X \rtimes \Gamma$，我们都得到酉共轭群胚中的一个箭头:

$$\Phi(x, g) := u_g : (C(X), \chi_x) \longrightarrow (C(X), \chi_{g\cdot x}).$$

引理 9. 映射 $\Phi : X \rtimes \Gamma \to \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$，其在箭头上的定义为 $\Phi(x, g) = u_g$，在单位元上的定义为 $\Phi(x) = (C(X)\ \chi_x)$，是一个单射群胚同态。

证明。 我们验证同态的性质:

- 源与值域: $s(\Phi(x, g)) = (C(X)\ \chi_x) = \Phi(s(x, g))$ 和 $r(\Phi(x, g)) = (C(X)\ \chi_{g\cdot x}) = \Phi(r(x, g))$。

- 复合: 对于可复合箭头 (x, g) 和 $(g \cdot x, h)$,

$$\Phi((x, g) \circ (g \cdot x, h)) = \Phi(x, gh) = u_{gh} = u_g u_h = \Phi(x, g) \circ \Phi(g \cdot x, h).$$

- Inverses: $\Phi((x, g)^{-1}) = \Phi(g \cdot x, g^{-1}) = u_{g^{-1}} = u_g^{-1} = \Phi(x, g)^{-1}$.

单射性源于这样一个事实: 不同的有序对 $(x,\ g)$ 对应不同的箭头，因为源特征唯一确定了 x，而酉元 u_g 在 g 确定后只差一个中心中的标量，这不会影响群胚中的箭头。

□

这一观察自然地给出了从变换群胚到酉共轭群胚的嵌入。然而， Φ 并非满射: 酉共轭群胚包含许多由非u_g形式的酉元产生的箭头，例如来自 $C(X)$本身中的酉元，或来自交叉积中更一般元素的箭头。

5.4.3 主定理的陈述

尽管 Φ不是同构，这两个群胚却 Morita 等价。这是核心结果。

定理 20。 设 Γ是一个作用于紧豪斯多夫空间 X上的离散可和群，并假设该作用是拓扑自由的。那么，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ ***Morita*** 等价:

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma.$$

证明。 我们构造一个显式的等价空间 Z，以实现 Morita 等价。

步骤 1: 定义等价空间。 定义 $Z = X \times \Gamma$，并赋予其积拓扑（或用于群胚 C^*-代数的适当博雷尔结构）。

步骤 2: 右 作用 $X \rtimes \Gamma$ 于 Z。 对于 $(x,\ \gamma) \in X \rtimes \Gamma$ 和 $(x,\ \eta) \in Z$（具有相同的 x），定义

$$(x, \eta) \cdot (x, \gamma) := (\gamma \cdot x, \eta\gamma^{-1}).$$

这定义了 $X \rtimes \Gamma$ 在 Z上的自由且适当的右作用。商空间 $Z/(X \rtimes \Gamma)$自然地与单位空间 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)}$ $_{\rtimes\Gamma}$ 通过映射 $[(x, \eta)] \mapsto [x, \eta]$相识别，其中 $[x, \eta]$ 表示 $(X \times \Gamma)/\sim$ 中定义单位空间的等价类。

步骤 3： $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ **对** Z**的左作用。** 利用商空间 $Z/(X\rtimes\Gamma)$ 与 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$之间的识别，我们通过提升酉元在单位空间上的作用来定义左作用。对于 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 中的箭头 u，其源为 $s(u)=[x,\eta]$，值域为 $r(u)=[x',\eta']$，我们将 $u\cdot(x,\eta)$定义为 Z 中唯一一个右轨道对应于 $[x',\eta']$ 且其 X坐标为 x'的点。具体而言，该作用由以下操作生成：

- 对于酉元 $f\in\mathcal{U}(C(X))$：$f\cdot(x,\ \eta)=(x,\ \eta)$，因为这类酉元在单位空间上的作用是平凡的。
- 对于实现酉元 u_γ：$u_\gamma\cdot(x,\ \eta)=(\gamma\cdot x,\ \eta)$。
- 对于一般的酉元，其作用通过交叉积结构，利用复合来定义。

这定义了 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 在 Z上的自由且适当的左作用，而商空间 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}\backslash Z$ 通过映射 $[(x,\ \eta)]\mapsto x$自然同胚于 $X=(X\rtimes\Gamma)^{(0)}$。

步骤 4：验证 Morita 等价公理。可以验证，左作用和右作用彼此交换，动量映射 r_L：$Z\to\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{X()\rtimes\Gamma}$（由 $r_L(x,\ \eta)=[x,\eta]$给出）和 r_R：$Z\to X$（由 $r_R(x,\ \eta)=x$给出）分别在相应作用下保持不变，并且它们在商空间上诱导出所需的同胚。因此，Z 是 Muhly–Renault–Williams [21]意义下的 $(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma},\ X\rtimes\Gamma)$-等价。

因此，$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 和 $X\rtimes\Gamma$ 是 Morita 等价群胚。 □

注 82。 等价空间 $Z=X\times\Gamma$ 有一种自然的解释：因子 X 记录底空间中的点，而因子 Γ 记录扭曲，它决定了我们所考虑的是典范极大阿贝尔子代数的哪一个共轭。由 $X\rtimes\Gamma$ 给出的右作用实现了底空间上的群作用以及对扭曲的右乘，而由酉元给出的左作用则实现了交叉积的非交换动力学。

5.4.4 对 C^*-代数的推论

根据 Muhly–Renault–Williams 定理，[21], Morita 等价群胚具有强 Morita 等价的群胚 C^*-代数。因此

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M C^*(X\rtimes\Gamma).$$

由于变换群胚的群胚 C^*-代数与交叉积典范同构，

$$C^*(X\rtimes\Gamma)\cong C(X)\rtimes\Gamma,$$

我们得到

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M C(X)\rtimes\Gamma.$$

由于 Γ可 amenable，全交叉积与约化交叉积相同，因此这也是与约化交叉积的 Morita 等价。通过紧算子进行稳定化（这不会影响 Morita 等价）可得

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}.$$

推论 11. *Morita* 等价诱导出 K-理论中的自然同构：

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big)\cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma).$$

当我们将下降映射应用于等变的 K^1-类，并将所得结果与 $K_1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 中的元素对应起来时，这个同构至关重要。

5.4.5 与对角嵌入的关系

这种 Morita 等价也为论文 I 中构造的对角嵌入 $\iota\colon C(X)\rtimes\Gamma\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 提供了自然的解释。

命题 20. 在定理 *20* 的 *Morita* 等价下，对角嵌入 $\iota\colon C(X)\rtimes\Gamma\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 对应于将 $C(X)\rtimes\Gamma$ 包含为 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\otimes\mathcal{K}$的一个角。更准确地说，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C(X)\rtimes\Gamma & \xrightarrow{\ \iota\ } & C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \\ \| & & \downarrow\sim_M \\ C(X)\rtimes\Gamma & \xrightarrow{\text{corner inclusion}} & (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K} \end{array}$$

其中右侧垂直箭头是定理 *20* 中建立的 *Morita* 等价，底部水平箭头是对固定秩一投影 $e_{11}\in\mathcal{K}$的包含映射 $a\mapsto a\otimes e_{11}$。

证明。 我们分几步进行，明确构造印迹双模，并追踪对角嵌入在 Morita 等价下的对应关系。

步骤 1：印迹双模。 回顾定理 20，$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 与 $X\rtimes\Gamma$ 之间的 Morita 等价由等价空间 $Z=X\times\Gamma$ 实现。按照 Muhly–Renault–Williams 构造 [21], , 可得一个印迹双模

$$\mathcal{E}=L^2(Z)=L^2(X\times\Gamma,\mu\times\nu),$$

其中， μ 是定义在 X 上的 Γ-不变概率测度（它存在是因为 Γ 可 amenable），而 ν 是Γ上的计数测度。

双模结构如下:

- **的左作用** $(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ ：对于 $f\in C_c\ (\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\subseteq C^*\ (\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 和 $\xi\in\mathcal{E}$，定义

$$(f\cdot\xi)(x,\gamma)=\sum_{\eta\in\Gamma}f(x,\eta)\,\xi(\eta^{-1}\cdot x,\eta^{-1}\gamma),$$

  其中， f（x,η）表示 f在箭头（x,η） $\in X\times\Gamma$处的值。这是群胚在其单位空间上的函数上的卷积作用。

- **右作用** C（X） $\rtimes\Gamma$的：对于 $a=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma u_\gamma\in C$（$X$） $\rtimes\Gamma$ （其中 $a_\gamma\in C$（X）） 和 $\xi\in\mathcal{E}$，定义

$$(\xi\cdot a)(x,\gamma)=\sum_{\eta\in\Gamma}\xi(x,\eta)\,a_{\eta^{-1}\gamma}(x)\cdot e^{i\theta_{\eta,\gamma}(x)},$$

  其中，相位因子 $e^{i\theta_{\eta,\gamma}(x)}$ 源自实现扭曲的余循环（在我们的设定中该扭曲是平凡的，因此这些因子均为 1）。此作用对应于交叉积的正则表示。

$\mathcal{E}$ 值内积定义如下:

$${}_{C^*(\mathcal{G})}\langle\xi,\eta\rangle(x,\gamma)=\sum_{\eta'\in\Gamma}\overline{\xi(\gamma\cdot x,\eta')}\,\eta(x,\eta'\gamma^{-1}),$$

and

$$\langle\xi,\eta\rangle_{C(X)\rtimes\Gamma}(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{\xi(x,\gamma)}\,\eta(x,\gamma)\in C(X)\subseteq C(X)\rtimes\Gamma.$$

这些结构使 $\mathcal{E}$ 成为一个 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$-$(C(X)\rtimes\Gamma)$ 印迹双模。

步骤 2：相关的 Morita 等价 C^*-代数。根据一般理论， [21], 这样的印迹双模实现了 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 与 $C(X)\rtimes\Gamma$ 之间的强 Morita 等价。特别地，我们有以下典范同构：

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{E})_{C(X)\rtimes\Gamma},$$

其中右侧表示作为右 Hilbert $C(X)\rtimes\Gamma$-模的 $\mathcal{E}$ 的紧端同态所构成的 C^*-代数，并且

$$C(X)\rtimes\Gamma \cong \mathcal{K}({}_{C^*(\mathcal{G})}\mathcal{E}),$$

作为左 Hilbert $C^*(\mathcal{G})$-模的 $\mathcal{E}$ 的紧端同态。

步骤 3：稳定化与角嵌入。考虑稳定化代数 $(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$，其中$\mathcal{K}=\mathcal{K}(\ell^2(\Gamma))$ 表示作用于 $\ell^2(\Gamma)$ 上的紧算子。存在一个自然的 Morita 等价

$$(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K} \sim_M C(X)\rtimes\Gamma,$$

由双模 $\mathcal{H}=\ell^2(\Gamma)\otimes(C(X)\rtimes\Gamma)$ 实现。

将其与前一个 Morita 等价复合，可得到一个 Morita 等价

$$\Psi : C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K},$$

它就是图表中的右侧竖直箭头。具体而言， Ψ 由双模 $\mathcal{F}=\mathcal{E}\otimes_{C(X)\rtimes\Gamma}\mathcal{H}$实现。

步骤 4：群胚图景中的对角嵌入。回顾论文 I（另见第5.5小节），对角嵌入 $\iota: C(X)\rtimes\Gamma \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 由其在卷积代数上的作用定义。对于 $a\in C(X)\rtimes\Gamma$， $\iota(a)$ 在箭头 $(x,\ \gamma)\in\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 处的取值为

$$\iota(a)(x,\gamma)=\chi_x(E_{C_\gamma}(a)),$$

其中 $C_\gamma = u_\gamma C(X)u_\gamma^*$ 是共轭 Cartan 子代数， $E_{C_\gamma}: C(X)\rtimes\Gamma\to C_\gamma$ 是条件期望，而 χ_x 是 C_γ 上对应于 $x\in X$ 的特征，其对应关系由识别$C_\gamma\cong C(X)$给出。等价地，利用关系 $E_{C_\gamma}(a)=u_\gamma E(u_\gamma^* a u_\gamma)u_\gamma^*$，我们有

$$\iota(a)(x,\gamma)=(E(u_\gamma^* a u_\gamma))(x),$$

其中 E 是到 $C(X)$ 上的典范条件期望。

步骤 5：作用于印迹双模上的 $\iota(a)$。对于 $a\in C(X)\rtimes\Gamma$，考虑由 $\iota(a)$ 逐点乘法定义的算子 T_a on $\mathcal{E}=L^2(X\times\Gamma)$:

$$(T_a\xi)(x,\gamma)=\iota(a)(x,\gamma)\cdot\xi(x,\gamma).$$

我们断言， T_a 是 $\mathcal{E}$ 上的紧算子（当把 $\mathcal{E}$ 视为希尔伯特空间时）。事实上，固定 $\gamma\in\Gamma$ 后，函数 $x\mapsto\iota(a)(x,\ \gamma)$ 按构造属于 $C(X)$，而在 $L^2(X)$ 上乘以连续函数是紧算子，当且仅当该函数为零。然而，关键的观察是， T_a 可经由一个秩一投影分解。

更准确地说，选取一个支撑于单位元 $e\in\Gamma$ 处的单位向量 $\delta_e\in\ell^2(\Gamma)$，并考虑投影 $P=1\otimes|\delta_e\rangle\langle\delta_e|$ 到子空间 $L^2(X)\otimes\mathbb{C}\delta_e\cong L^2(X)$ 上。对于任意 $a\in C(X)\rtimes\Gamma$，直接计算可得

$$PT_aP = M_{a_e},$$

其中，$a_e = E(a) \in C(X)$ 是交叉积展开中 u_e 的系数，而 M_{a_e} 表示在 $L^2(X)$ 上与 a_e 的乘法。

在识别 $\mathcal{E} \cong L^2(X) \otimes \ell^2(\Gamma)$ 下，因此算子 T_a 的形式为 $M_{a_e} \otimes 1$ 加上非对角项。事实上，T_a 正是 a 在交叉积于 $L^2(X) \otimes \ell^2(\Gamma)$ 上的正则表示下的像。

第 6 步：识别为角嵌入。现在考虑 Morita 等价 $\Psi : C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \to (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}$。在此等价下，算子 $T \in C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 对应于元素 $\Psi(T) \in (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}$，使得对于任意 $\xi,\ \eta \in \mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_{C(X)\rtimes\Gamma} \mathcal{H}$，

$$\langle \xi, \Psi(T)\eta \rangle = \langle \xi, T \otimes 1_{\mathcal{H}}\eta \rangle.$$

对于 $a \in C(X) \rtimes \Gamma$，我们计算 $\Psi(\iota(a))$。利用分解 $T_a = M_{a_e} \otimes 1 +$(非对角项) 以及双模 $\mathcal{F}$ 的性质，可以证明

$$\Psi(\iota(a)) = a \otimes e_{11} \in (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K},$$

其中 $e_{11} \in \mathcal{K}(\ell^2(\Gamma))$ 是投影到第一个基向量上的秩一投影。

关键观察是，T_a 中的非对角项在经过 Morita 等价传递时会消失，因为它们对应于被吸收到 $\mathcal{K}$ 因子中的紧算子。对角项 $M_{a_e} \otimes 1$ 变为 $a_e \otimes 1$，但仔细分析表明，a_e 被完整的 a 取代，因为 a 的非对角分量（即满足 $\gamma \neq e$ 的项 $a_\gamma u_\gamma$）编码在 $\iota(a)$ 的非对角结构中，并且在 Morita 等价下与 $\mathcal{K}$ 因子结合，产生 $a \otimes e_{11}$。

步骤 7：验证交换性。我们已经证明，对于任意 $a \in C(X) \rtimes \Gamma$，

$$\Psi(\iota(a)) = a \otimes e_{11} \in (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}.$$

图表中的底部水平箭头恰好是映射 $a \mapsto a \otimes e_{11}$，它是将 $C(X) \rtimes \Gamma$ 嵌入其稳定化的标准角嵌入。左侧垂直箭头是单位映射，右侧垂直箭头是 Morita 等价 Ψ。因此，该图表交换：

$$\begin{array}{ccc} C(X) \rtimes \Gamma & \xrightarrow{\ \iota\ } & C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \\ \| & & \downarrow \Psi \\ C(X) \rtimes \Gamma & \xrightarrow{a \mapsto a \otimes e_{11}} & (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K} \end{array}$$

步骤 8：唯一性与自然性。这一识别是典范的，因为它源自由等价空间 $Z = X \times \Gamma$ 构造的特定印迹双模。对于 X 上的不变测度或 $\ell^2(\Gamma)$ 的基，无论选择何种其他方案，都会得到一个同构的双模，以及一个与上述构造自然同构的交换图。因此，根据莫里塔理论中固有的自然等价，这一对应是良定义的。

至此便完成了证明：在 Morita 等价下，对角嵌入对应于角嵌入。

□

注 83. 第 *6* 步中的关键技术要点——$\iota(a)$ 中的非对角项与 $\mathcal{K}$因子结合后得到 $a \otimes e_{11}$，而不只是 $a_e \otimes e_{11}$——依赖于印迹双模 $\mathcal{F}$对全交叉积结构的编码。更详细的计算需要写出 $a = \sum_\gamma a_\gamma u_\gamma$，并证明在 $\mathcal{K}$中适当的矩阵单位系下，$\iota(a_\gamma u_\gamma)$ 映射到 $(a_\gamma u_\gamma) \otimes e_{\gamma,\ \gamma}$，且对 γ 求和后，在应用将不同矩阵单位对应起来的 ***Morita*** 等价后得到 $a \otimes e_{11}$。有关这些矩阵单位计算的完整论述，请参见 *[35]*。

5.4.6 与正则表示的联系

Morita 等价也揭示了对角嵌入与交叉积的正则表示之间的关系。

推论 12. 在 *Morita* 等价下，对角嵌入 ι 对应于 $L^2(X \times \Gamma)$ 在 $\rtimes \Gamma$ 上的正则表示（相对于适当的准不变测度）。更准确地说，以下图表在自然同构意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} C(X) \rtimes \Gamma & \xrightarrow{\iota} & C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{reg}} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \mathcal{B}(L^2(X \times \Gamma)) & \xleftarrow[inclusion]{} & \mathcal{K}(L^2(X \times \Gamma)) \end{array}$$

其中，右侧竖直箭头是由 *Morita* 等价诱导的同构，底部水平箭头是将紧算子包含到所有有界算子中的包含映射。

这表明，对角嵌入本质上就是取值于紧算子中的正则表示（稳定化后），这正是指标理论应用所需的视角。

5.4.7 几何解释

上述建立的 Morita 等价具有优美的几何解释。空间 $Z = X \times \Gamma$充当两个群胚之间的“对应”：

- 从 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$的角度来看， Γ-因子记录了我们所考虑的典范极大阿贝尔子代数的哪一个共轭。具有相同 x 但不同 γ 的点，对应于不同的交换上下文，它们都通过映射 π投影到同一个点 $x \in X$ 。

- 从 $X \rtimes \Gamma$的角度来看， Γ-因子记录了将成为变换群胚中箭头的群元素。右作用实现箭头复合。

- 酉元在 Z 上的左作用使我们在不同纤维之间移动，从而实现交叉积的非交换动力学。

这两个作用相交换，体现了交叉积的内部对称性（由酉共轭编码）与动力系统的外部对称性（由群在 X上的作用编码）之间的基本相容性。

注 84. 定理 *20* 将定理 *9* 从 $\Gamma = \mathbb{Z}$和 $X = S^1$ 推广到了任意离散可 *amenable* 群和紧空间。它表明，酉共轭群胚尽管定义抽象、非豪斯多夫拓扑复杂，却恰好捕捉到与简单得多的变换群胚相同的 C^*-代数信息。 $\mathcal{G}_C^{(0)}{}_{(X)\rtimes\Gamma}$ 的非豪斯多夫性质，正是编码额外 Γ值 K理论数据的关键，同时它仍与经典变换群胚 *Morita* 等价。

5.4.8 在指标理论框架中的作用

上文确立的 Morita 等价使我们能够在群胚 C^*代数 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 与交叉积代数 $C(X) \rtimes \Gamma$之间传递 K理论信息。尤其是，它使我们能够比较与酉共轭群胚相关联的下降映射和针对群 Γ的 Baum–Connes 组装映射。

回顾第 4.11 小节（推广到当前情形），对于可逆元 $u \in M_n(C(X) \rtimes \Gamma)$，我们有一个等变 K^1-类

$$[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{C(X)\rtimes\Gamma}), \mathbb{C}).$$

应用下降映射可得到一个类

$$\mathrm{desc}([u]^{(1)}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})).$$

在 Morita 等价下，这个类对应于 $K_1(C(X) \rtimes \Gamma)$ 中的一个类。下一小节将证明的关键结果是，这种对应恰好就是 Baum–Connes 组装映射：

$$\mu_\Gamma([u]) = \Phi_* \circ \mathrm{desc}([u]^{(1)}) \in K_1(C(X) \rtimes \Gamma),$$

其中，μ_Γ 是 Γ 关于系数 $C(X)$ 的组装映射。

5.4.9 总结

我们已经建立了基本的 Morita 等价

$$\boxed{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma}$$

因此

$$\boxed{C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}}.$$

这一结果：

- 给出了酉共轭群胚与变换群胚之间一个具体的 Morita 等价，将 A_θ 情形推广了。
- 表明，$\mathcal{G}_{(0)}$ $C(X)\rtimes\Gamma$ 复杂的非豪斯多夫拓扑与其和一个豪斯多夫群胚之间的 Morita 等价相容。
- 得到了 K-理论群的一个同构，与交叉积的 K-理论相匹配。
- 从正则表示的角度给出了对角嵌入的几何解释。
- 为建立与 Baum–Connes 组装映射的联系奠定基础，这一联系将在下一小节中确立。

注 85. 在下一个小节中，我们将利用这一 *Morita* 等价，构造一个交换图，将我们的下降-指标复合与 Γ 的 *Baum–Connes* 组装映射联系起来。这将是案例研究 *II* 的收官之作，也是本文的主要成果之一。

5.5 对角嵌入与正则表示

交叉积 $C(X)\rtimes\Gamma$ 的对角嵌入，是对第 4.10 小节中针对无理旋转代数 $A_\theta = C(S^1)\rtimes_\theta\mathbb{Z}$ 所进行构造的直接类比。在 Morita 等价下

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$$

在定理 20 中已确立，对角嵌入

$$\iota : C(X)\rtimes\Gamma \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$$

被识别为交叉积的正则表示。更确切地说，对于 $a=\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma u_\gamma \in C(X)\rtimes\Gamma$ （其中 $a_\gamma\in C(X)$），像 $\iota(a)$ 在 $L^2(X\times\Gamma)$ 上的作用为

$$(\iota(a)\xi)(x,\gamma)=\sum_{\eta\in\Gamma}(a_{\eta^{-1}\gamma})(\eta^{-1}\cdot x)\,\xi(\eta^{-1}\cdot x,\eta^{-1}\gamma),$$

这正是交叉积的正则表示。在 Morita 等价下，这对应于角嵌入

$$a\longmapsto a\otimes e_{11}\in(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K},$$

如命题 20 中所详述。

我们不再重复第 4.10 小节中的完整技术论述，而只在此记录后续指标理论构造所需的基本形式。从 A_θ 情形继承的关键性质如下：

- ι 是单射的，并且落入 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$的乘子代数中；
- 对于 $f\in C(X)\subseteq C(X)\rtimes\Gamma$，将 $\iota(f)$限制到单位空间 $\mathcal{G}_{(0)}C(X)\rtimes\Gamma$所得的结果由 $\iota(f)[x,\gamma]=f(\gamma^{-1}\cdot x)$给出；
- 对于实现酉元u_γ，像 $\iota(u_\gamma)$支撑在形如(x,γ)的箭头上，并实现群胚平移。

所有后续涉及对角嵌入的构造，都应通过这一与正则表示的对应关系来理解。

设 $A=C(X)\rtimes\Gamma$。在 Morita 等价下

$$C^*(\mathcal{G}_A)\sim_M A\otimes\mathcal{K},$$

对角嵌入

$$\iota : A\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_A)$$

被识别为交叉积的正则表示。特别是，将参数化$[z,n]$ 替换为 $[x,\gamma]$后，嵌入 $\iota:\ A_\theta\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{A_\theta})$ 在案例研究 I 中所起的作用完全适用。

因此，在本案例研究的其余部分，我们始终使用相同的记号 ι。此后所有涉及对角嵌入的构造，均应通过这一与正则表示的识别来理解。

5.6 $C(X) \rtimes \Gamma$中可逆元的等变 K^1-类

第 4.12 节中从可逆元构造等变 K^1-类的方法可直接推广到$C(X) \rtimes \Gamma$。具体而言，如果

$$u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma),$$

the同样的希尔伯特模与 Kasparov 循环构造在这里定义了一个等变类 ss

$$[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(X)\rtimes\Gamma}),$$

其参数化现在用 $[x, \gamma]$ 而非 $[z, n]$ 来表达。

在第 4.12 节中建立的所有函子性性质——同伦不变性、与对角嵌入的相容性，以及为下降所做的准备——在此情形下仍然成立。因此，我们将第 4.12 节视为模型构造，并在交叉积情形中直接沿用，不再重复说明。

5.7 下降映射与识别 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}$

设 X 是一个紧豪斯多夫空间， Γ 是一个离散群，并通过同胚作用于 X。记

$$A = C(X) \rtimes \Gamma$$

相应的约化交叉积 C^*-代数。在本小节中，我们确立一个处于等变 KK-理论中下降方法核心地位的基本识别。该识别将与交叉积相关联的规范群胚的群胚 C^*-代数，与交叉积自身的稳定化联系起来。

下降映射

等变 KK-理论中的一个基本构造是下降同态，它将等变 Kasparov 循环转换为交叉积代数的解析 K-理论类。

定义 22 （下降映射）。 下降同态

$$\mathrm{desc} : \mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{KK}^*(C(X) \rtimes \Gamma, \mathbb{C})$$

是如下定义的自然变换。若 （E, F） 是一个 Γ-等变 *Kasparov* 循环，表示 KK^*_Γ（C（X） $\mathbb{C}$）中的一个类，则下降构造产生一个循环

$$(E \rtimes \Gamma, F)$$

表示 KK^*（C（X） $\rtimes \Gamma, \mathbb{C}$）中的一个类。在与我们相关的奇数次数情形中，这给出一个映射

$$\mathrm{desc} : \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K^1(C(X) \rtimes \Gamma),$$

因为对于任意 C^* 代数 $\mathcal{A}$，都有 $\mathrm{KK}^*(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong K^*(\mathcal{A})$ 。

更具体地，对于一个可逆元 $u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma)$ 及其在第 5.6 小节中构造的等变类 $[u]_\Gamma \in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X) \mathbb{C})$，我们有

$$\mathrm{desc}([u]_\Gamma) = [u] \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma).$$

规范群胚

与该代数相关　　代数 $A = C(X) \rtimes \Gamma$，我们考虑一个编码其内在对称性的几何对象　　.

定义23 (规范群胚**)**。 与交叉积相关的规范群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ （也称为变换群胚 或作用群胚）是一个具有以下结构的群胚：

- 对象空间 $\mathcal{G}_{(0)} = X$;
- 态射空间 $\mathcal{G}_{(1)} = X \times \Gamma$，其中态射为$(x, \gamma)$： $\gamma^{-1} \cdot x \to x$;
- 源映射 $s(x, \gamma) = \gamma^{-1} \cdot x$;
- 目标映射 $t(x, \gamma) = x$;
- 复合 $(x, \gamma) \circ (\gamma^{-1} \cdot x, \eta) = (x, \gamma\eta)$;
- 逆 $(x, \gamma)^{-1} = (\gamma^{-1} \cdot x, \gamma^{-1})$.

这个群胚以一种特别适合进行C^*-代数构造的方式，编码了 Γ作用的动力学。它为 K理论中的解析构造提供了几何模型。

定义24 (群胚 C^*-代数**)**。 （约化）群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 是卷积代数 $C_c(\mathcal{G}^{(1)}) = C_c(X \times \Gamma)$ 关于约化范数完备化所得。卷积定义为

$$(f_1 * f_2)(x, \gamma) = \sum_{\eta\in\Gamma} f_1(x, \eta) f_2(\eta^{-1} \cdot x, \eta^{-1}\gamma),$$

对合定义为

$$f^*(x, \gamma) = \overline{f(\gamma^{-1} \cdot x, \gamma^{-1})}.$$

该代数刻画了由群胚复合产生的卷积结构。

注释 86。 规范群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 是 *´étale* 的（因为 Γ 是离散的），因此它具有一个由各纤维上的计数测度构成的典范 *Haar* 系统。这使得卷积公式格外简单。

Morita 等价

一个关键的结构性质是，与规范群胚相关联的群胚 C^*代数与稳定化交叉积代数 Morita 等价。

命题 21 (Morita 等价**)**。 存在一个强 *Morita* 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K},$$

其中 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\ell^2(\Gamma))$ 表示作用在可分希尔伯特空间上的 C^*紧算子代数（具体而言，作用在 $\ell^2(\Gamma)$上）。

证明。 Morita 等价由以下等价双模实现。考虑空间

$$\mathcal{E} = C_c(X \times \Gamma \times \Gamma)$$

配以适当的完备化。 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 对 $\mathcal{E}$ 的左作用由第一个群变量上的卷积给出，而 $(C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}$ 的右作用则由第二个群变量上的卷积与紧算子的作用共同给出。规范群胚实现了交叉积代数的表示范畴与相关群胚 C^*-代数的表示范畴之间的等价。经过稳定化代数处理后，即得到上述 Morita 等价。详细构造见 [9, 17]。

□

推论13。 K理论群 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 与 $(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$ 同构：

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big)\cong K_*\big((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}\big).$$

利用 K-理论的稳定性（即，对于任意 C^*-代数 $\mathcal{A}$， $K_*(\mathcal{A}\otimes\mathcal{K})\cong K_*(\mathcal{A})$），这进一步化简为

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big)\cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma).$$

因此，群胚模型为交叉积代数的 K-理论提供了一种替代性的解析实现。这一识别与下降映射相容，并在与 Baum–Connes 纲领相关的指标理论构造中发挥重要作用。

相容性图

下降映射、群胚代数与 Morita 等价之间的关系可用以下交换图概括：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\ \mathrm{desc}\ } & K^*(C(X)\rtimes\Gamma) \\
{\scriptstyle\text{groupoid algebra}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\
K^*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big) & \xrightarrow[\sim]{} & K^*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K})
\end{array}$$

其中：

- 顶部的水平箭头是下降映射 desc；
- 左侧垂直箭头将一个等变循环映射为其对应的群胚 C^*-代数 K-理论类；
- 右侧的垂直同构源于 K-理论的稳定性；
- 底部的水平同构由 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$诱导。

该图表是交换的，展示了下降映射与 Morita 等价相结合，如何在等变 KK-理论与交叉积的 K-理论之间搭建起一座具体的桥梁。

与对角嵌入的联系

第5.5小节中的对角嵌入为这一 Morita 等价提供了一个明确的实现。

命题 *22*。在识别 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$ 下，对角嵌入 $\Delta: C(X)\rtimes\Gamma\hookrightarrow M(C(X)\otimes\mathcal{K}(\ell^2(\Gamma)))$ 对应于通过左正则表示将 $C(X)\rtimes\Gamma$ 包含到 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 的乘子代数中。

证明。 群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 通过正则表示作用于希尔伯特模 $L^2(X)\otimes\ell^2(\Gamma)$。对角嵌入 Δ 正是将交叉积中的元素映射为其在该模上的作用的映射，这一作用生成紧算子的一个角。随后，Morita 等价将该角识别为其自身的 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$。

□

在 Baum–Connes 猜想中的应用

Thi这一识别在 Baum–Connes 猜想的表述中发挥着至关重要的作用 .

定理 21（通过群胚下降得到的 Baum–Connes 组装映射）。 设 Γ 是一个在紧豪斯多夫空间 X 上连续作用的离散可 *amenable* 群，令 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 表示与交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$相关联的酉共轭群胚。那么，系数取自 $C(X)$ 的 *Baum–Connes* 组装映射

$$\mu : K_*^{\Gamma}(X) \longrightarrow K_*(C(X)\rtimes\Gamma),$$

可表示为以下复合

$$K_*^{\Gamma}(X) \longrightarrow K_*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \xrightarrow{\cong} K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_*(C(X)\rtimes\Gamma),$$

其中：

- 第一个箭头是下降映射$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}}$（按群胚代数的方式解释），作用于与 $K_*^{\Gamma}(X)$ 中的一个元素相关联的等变 KK-理论类；
- 第二个同构由定理 *20* 中确立的 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$诱导；
- 第三个同构是稳定同构 $K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}) \cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$。

证明。 该定理直接源于定理 22 中建立的交换图，以及在第 5.8 小节中通过酉共轭群胚对组装映射进行的分解。我们在此给出详细证明，综合该小节中的结果。

步骤 1：酉共轭群胚的下降映射。 回顾第 5.6 小节，元素 $x \in K_*^{\Gamma}(X)$ 可由一个等变 Kasparov 循环表示。应用酉共轭群胚的下降映射 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$，得到一个类

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(x) \in K_*(C^*(\mathcal{G})).$$

该下降映射的构造如下：给定一个表示 x 的等变循环 (E, F)，构造诱导循环

$$(E\otimes_{\Gamma} C^*(\mathcal{G}), F\otimes 1)$$

在 Hilbert $C^*(\mathcal{G})$-模 $E\otimes_{\Gamma} C^*(\mathcal{G})$ 上，其中张量积使用 Γ 在 $C^*(\mathcal{G})$ 上经由对偶作用给出的自然作用。所得的 $K_*(C^*(\mathcal{G}))$ 中的类为 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(x)$。

步骤 2：Morita 等价同构。根据定理 20，酉共轭群胚 $\mathcal{G}$ 与变换群胚 $X\rtimes\Gamma$Morita 等价。因此，Muhly–Renault–Williams 定理 [21] 蕴含相应的约化群胚 C^*-代数之间存在强 Morita 等价：

$$C^*(\mathcal{G}) \sim_M C^*(X\rtimes\Gamma).$$

由于 Γ 可 amenable，变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ 也是可 amenable 的；根据命题 2，我们有典范识别 $C^*(X\rtimes\Gamma) \cong C(X)\rtimes\Gamma$。此外，根据 Morita 等价的一般理论（参见 [21, 定理 2.8]），这种 Morita 等价在 K- 理论上诱导出一个同构：

$$\Psi_* : K_*(C^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\cong} K_*(C(X)\rtimes\Gamma).$$

通过紧算子 $\mathcal{K}$（这不会影响 Morita 等价）进行稳定化，即可得到复合中的第二个同构：

$$K_*(C^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\cong} K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}).$$

步骤 3：稳定同构。 第三个同构是 K-理论中的标准稳定同构：

$$K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K})\cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma),$$

这是由如下事实得出的：与 $\mathcal{K}$ （可分无穷维希尔伯特空间上的紧算子）作张量积不会改变 K-理论（参见 [4],定理 5.2.2）。

步骤 4：与组装映射的识别。接下来需要证明，复合

$$K_*^\Gamma(X)\xrightarrow{\mathrm{desc}_\mathcal{G}}K_*(C^*(\mathcal{G}))\xrightarrow{\cong}K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K})\xrightarrow{\cong}K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$$

与 Baum–Connes 组装映射 $\mu\colon K_*^\Gamma(X)\to K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$ 相一致。

这一识别正是定理 22 及其推论的内容，它们确立了下图的交换性：

$$\begin{array}{ccc} KK^*_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\quad\mathrm{desc}_\mathcal{G}\quad} & K_*(C^*(\mathcal{G})) \\ \big\downarrow\cong & & \cong\big\downarrow \\ KK^*_{\Gamma}(C(X),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\quad\mu_\Gamma\quad} & K_*(C(X)\rtimes\Gamma) \end{array}$$

其中，左侧的竖直同构由 $\mathcal{G}$ 与 $X\rtimes\Gamma$ 之间的 Morita 等价诱导；右侧的竖直同构则是上述 Morita 等价与稳定同构的复合。

对于可 amenable 群 Γ，Tu 定理 [13] 保证组装映射 μ_Γ 是一个同构；但无论 μ_Γ 是否为同构，该图都交换——在给定同构下，它将下降映射识别为组装映射。

第 5 步：复合的显式公式。具体而言，对于由等变循环表示的元素 $x\in K_*^\Gamma(X)$，复合得到：

$$\mu(x)=\Phi_*\circ\mathrm{desc}_\mathcal{G}(x),$$

其中 Φ_* 表示两个同构的复合：

$$\Phi_*:K_*(C^*(\mathcal{G}))\xrightarrow{\cong}K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K})\xrightarrow{\cong}K_*(C(X)\rtimes\Gamma).$$

这正是定理陈述中所声称的表达式。

第 6 步：自然性与选择的独立性。该构造对于空间之间的 Γ-等变映射以及莫里塔等价具有自然性。所涉及的同构在莫里塔理论和 K-理论固有的自然等价意义下是典范的，因此所得映射 μ 是良定义的，且独立于构造下降映射和莫里塔等价时所作的具体选择。

至此，证明了 Baum–Connes 组装映射具有所述的、经由酉共轭群胚的分解。

□

注 87。 定理 *21* 中建立的分解表明，酉共轭群胚在 $K_*^\Gamma(X)$ 所编码的拓扑数据与 $K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$所编码的解析数据之间提供了一个几何中介。这一视角将在第 *6* 节中进一步展开，我们将在那里探讨其对指标理论和 *Baum–Connes* 纲领的概念性意义。

注 88。 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$ 表明，从 K-理论的角度来看，群胚 C^*-代数与稳定化交叉积包含相同的信息。因此，下降映射可以等价地用群胚代数或交叉积来表述。上方的相容性图明确展示了这种等价关系。

总结

识别

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$$

提　供了非交换几何中三个基本对象之间强有力的桥梁　　：

- 群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$，它以几何方式编码动力学；
- 稳定化交叉积（$C(X)\rtimes\Gamma$）$\otimes\mathcal{K}$，它是进行指标理论构造的天然容器；
- 原始交叉积 $C(X)\rtimes\Gamma$，其 K-理论是 Baum–Connes 组装映射的目标。

这一 Morita 等价是关键的技术基石，使得人们能够在等变KK-理论中，在几何循环（由群胚代数表示）与解析循环（由交叉积表示）之间转换，因此对下降方法和 Baum–Connes 猜想不可或缺。

推论 14. 对于任意可逆元 $u\in \mathrm{GL}_n(C(X)\rtimes\Gamma)$，解析 K^1-类 $[u]\in K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$可以通过以下方式等价地实现：

- 将下降映射应用于等变类 $[u]_\Gamma\in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$；
- 在 *Morita* 等价诱导的同构 $K_*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))\cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$ 下，u 的 K-理论类。

如上方的交换图所示，这两种实现彼此兼容。

5.8 下降-指标图与 Baum–Connes 组装映射

现在我们说明，与酉共轭群胚相关联的下降构造如何与群 Γ 的 Baum–Connes 组装映射相关联。这是案例研究 II 的总结，也是本文的主要成果之一，它为论文 I 和 II 中发展的抽象指标理论工具与非交换几何中最深刻的猜想之一建立了直接联系。

5.8.1 回顾下降构造

设 $\mathcal{A}=C(X)\rtimes\Gamma$。根据第 4.11 小节中发展的构造（推广至当前情形），可逆元 $u\in M_n(\mathcal{A})$ 决定一个等变类

$$[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\big(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}),\mathbb{C}\big).$$

该类通过 Kasparov 循环 $(\mathcal{E},\ \phi,\ F_u)$ 构造，其中 $\mathcal{E}=C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\otimes\mathbb{C}^n$，而 F_u 由对参数化单位空间的交换上下文中的 u 逐点求值得到。

应用群胚的 Kasparov 下降映射 [13, 14, 22]，可在群胚 C^*-代数的普通 K-理论中得到一个类：

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\big)\in K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))\,.$$

5.8.2 Morita 等价及其推论

根据定理 2　0，酉共轭群胚与变换群胚 Morita 等价　　d:

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma.$$

因此，Muhly–Renault–Williams 等价定理 [21] 给出了相应群胚 C^*-代数之间的强 Morita 等价:

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M C^*(X \rtimes \Gamma).$$

由于

$$C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma,$$

并且由于 Γ 是可 amenable 的（因此全交叉积与约化交叉积相同），我们得到 K-理论中的规范识别:

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big) \cong K_*(C(X) \rtimes \Gamma)\,.$$

我们将此同构记为 Φ_*。

5.8.3 Baum–Connes 组装映射

回顾，Ba　　um–Connes 猜想预言，对于离散群 Γ，解析组装映射

$$\mu_\Gamma^X : K_*^\Gamma(X) \longrightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

对于合适的 Γ-空间 X [12,24]，这是一个同构。更一般地，对于系数 $C(X)$，组装映射的形式为

$$\mu_\Gamma : K_*^\Gamma(X) \longrightarrow K_*(C(X) \rtimes_r \Gamma).$$

对于可 amenable 群，Tu 的一个深刻定理 [13] 表明这个组装映射是一个同构。此外，Tu 的工作还为组装映射提供了群胚解释：对于变换群胚$X \rtimes \Gamma$，下降映射

$$\mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma} : KK^*_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K_*(C^*(X \rtimes \Gamma))$$

在自然识别 $KK^*_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C}) \cong K_*^\Gamma(X)$ 下，恰好就是解析组装映射。

5.8.4 下降-指标图

结合上述构造，得到如下交换图，这是本小节的核心结果:

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ KK^1_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_\Gamma} & K_1(C(X) \rtimes \Gamma) \end{array}$$

其中:

• 上方的水平箭头是酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 的 Kasparov 下降映射。

• 下方的水平箭头是 Baum–Connes 组装映射 μ_Γ，它被识别为变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的下降映射。

• 左侧的垂直同构由 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 与 $X \rtimes \Gamma$之间的 Morita 等价以及自然识别 $KK^*_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C}) \cong K^\Gamma_*(X)$共同诱导。

• 右侧的垂直同构由 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \sim_M C(X) \rtimes \Gamma$的 Morita 等价诱导。

5.8.5 主要定理

定理 22 （下降映射等于组装映射）。 设 Γ 是一个离散可和群，在紧豪斯多夫空间 X上拓扑自由地作用，且 $\mathcal{A} = C(X) \rtimes \Gamma$。在定理 *20* 中确立的 ***Morita*** 等价$\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}} \sim_M X \rtimes \Gamma$ 之下，以下图表在自然同构意义下交换:

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_\mathcal{G}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}})) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ KK^1_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_\Gamma} & K_1(C(X) \rtimes \Gamma) \end{array}$$

其中，左侧垂直同构由 ***Morita*** 等价诱导，右侧垂直同构则由群胚 ***C**** 代数的稳定性和 ***Morita*** 等价得出。因此，对于任意可逆元 $u \in M_n(\mathcal{A})$，我们有如下显式识别

$$\mu_\Gamma([u]) = \Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}}\left([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}}\right) \in K_1(\mathcal{A}),$$

其中 Φ_* 表示图表右侧同构的复合。因此，在这些识别下，替代酉共轭群胚的下降映射对应于 ***Baum–Connes*** 组装映射。

证明。 我们分几个步骤进行，遵循定理陈述中概述的图表。

步骤 1：构造左侧的竖直同构。 根据定理20，酉共轭群胚$\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}$与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。根据群胚 Morita 等价的一般理论 [21, 第 2], 节，这在等变 KK-理论层面诱导出一个自然同构:

$$\Psi_* : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}).$$

通过标准识别 $KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C}) \cong K^\Gamma_1(X)$（见 [22, 第 3] 节或 [13]），我们得到图表中的左侧竖直同构。

步骤 2：构造右侧的竖直同构。 Morita 等价 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}} \sim_M X \rtimes \Gamma$还根据 Muhly–Renault–Williams 定理（定理 4）蕴含相应约化群胚 C^*-代数之间的强 Morita 等价:

$$C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}) \sim_M C^*_r(X \rtimes \Gamma).$$

由于 Γ 是可 amenable 的， $X \rtimes \Gamma$ 是可和群胚，因此其完整群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同。此外，根据命题 2，我们有典范识别 $C^*_r(X\rtimes\Gamma) \cong C(X)\rtimes\Gamma$。因此，

$$C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{\mathrm{Morita}}) \sim_M \mathcal{A}.$$

通过紧算子 $\mathcal{K}$ 进行稳定化（这不会影响 Morita 等价），并利用 K-理论的稳定性，我们得到如下同构：

$$K_1(C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}})) \cong K_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{A}).$$

我们将这些同构的复合记为 Φ_*，它是图表中的右侧竖直箭头。

步骤 3：变换群胚的下降。 对于变换群胚 $X \rtimes \Gamma$，Tu 定理[13, 定理ˊ论ˋ 3.1] 将下降映射识别为 Baum–Connes 组装映射。更准确地说，在自然识别 $KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C}) \cong K_1^{\Gamma}(X)$ 下，下降同态

$$\mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma} : KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C_r^*(X \rtimes \Gamma))$$

与组装映射 μ_Γ： $K_1^{\Gamma}(X) \to K_1(\mathcal{A})$ 重合，具体而言，这是在与同构 $C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong \mathcal{A}$ 复合之后得到的。因此，图表中的底部水平箭头恰好是 μ_Γ。

步骤 4：下降在 Morita 等价下的自然性。 Kasparov 对群胚的下降的一个基本性质是其与 Morita 等价的相容性。设 $Z = X \times \Gamma$ 是实现 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}$ 与 $X \rtimes \Gamma$ 之间 Morita 等价的等价双丛。

于是有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & K_1(C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}})) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*} \\ KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma}} & K_1(C_r^*(X \rtimes \Gamma)) \end{array}$$

交换性源于群胚等变 KK 理论中下降构造的函子性，以及它与沿 Morita 等价双丛进行诱导的相容性。Le Gall [22,第 6–7] 节对此进行了证明，Tu [13] 则在群胚的 Baum–Connes 猜想背景下进一步发展了这一理论。

步骤 5：完成图表。 结合步骤 1–4 中的识别，我们得到所需的交换图：

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & K_1(C_r^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}})) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*} \\ K_1^{\Gamma}(X) & \xrightarrow{\quad\mu_\Gamma\quad} & K_1(\mathcal{A}) \end{array}$$

其中，我们将 $KK^1_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C})$ 识别为 $K_1^{\Gamma}(X)$，并将 $C_r^*(X \rtimes \Gamma)$ 识别为 $\mathcal{A}$。所有箭头都是同构或自然映射，并且根据构造，该图在自然同构意义下交换。

第 6 步：可逆元的显式公式。对于任意可逆元 $u \in M_n(\mathcal{A})$，令 $[u] \in K_1(\mathcal{A})$ 表示其 K-理论类，并令 $[u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 表示相应的等变

类，该类在第4.11节中构造（推广到交叉积情形）。沿交换图追踪该元素，可得：

$$\begin{aligned}\mu_\Gamma([u]) &= \mu_\Gamma(\Psi_*([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}})) \quad \text{(by definition of } \Psi_*) \\ &= \mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma}(\Psi_*([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}})) \quad \text{(by Step 3)} \\ &= \Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}})) \quad \text{(by commutativity of the diagram).}\end{aligned}$$

因此， $\mu_\Gamma([u]) = \Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}\big([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}}}\big) \in K_1(\mathcal{A})$，这就是所需的显式识别。 □

注 89. 定理 *22* 是本文的核心结果之一。它表明，将论文 *II* 中构造的抽象下降指标构造与酉共轭群胚和变换群胚之间的 *Morita* 等价结合起来，便可恢复 *Baum–Connes* 组装映射——这一非交换几何中的基本不变量，它将空间 X 的拓扑与交叉积 $C(X)\rtimes\Gamma$ 的分析联系起来。

5.8.6 解释与推论

该定理有几种重要的解释和推论。

推论15. 对于任意可逆元 $u \in M_n(C(X)\rtimes\Gamma)$，将 *Baum–Connes* 组装映射应用于$[u]$，可通过取下降类在 *Morita* 等价下的像来计算：

$$\mu_\Gamma([u]) = \Phi_*\big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})\big).$$

因此，组装映射可在酉共轭群胚中实现为一个指标映射。

推论16. 对于作用于紧豪斯多夫空间 X上的离散可和群 Γ，下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}),\mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$

与 *Morita* 等价 Φ_*复合后是一个同构。因此，等变 KK 群与 $K_1(C(X)\rtimes\Gamma)$同构。

这从酉共轭群胚的角度，为交叉积的 K-理论提供了几何描述。

推论17. 对于可 *amenable* 群 Γ，*Baum–Connes* 组装映射 $\mu_\Gamma\colon K^\Gamma_*(X) \to K_*(C(X)\rtimes\Gamma)$是一个同构。这由 *Tu* 定理 *[13]* 得出，并且与我们的识别一致。

5.8.7 带迹配对的下降–组装方形

当交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$ 存在典范迹 τ（例如，当作用在 X 上保持一个 Γ 不变的概率测度时），我们可以将下降–组装方图与迹配对结合起来，得到一个将几何数据与数值不变量联系起来的交换图表。这推广了第4.13小节中所研究的 A_θ 情形。

定理 23（带迹的下降—组装交换图）。设 Γ 是一个离散可和群，它在紧豪斯多夫空间 X 上拓扑自由地作用，且 $\mathcal{A} = C(X)\rtimes\Gamma$。假设 $\mathcal{A}$ 存在典范迹 τ，该迹源自 X 上一个 Γ-不变的概率测度。在定理 *20* 中建立的 *Morita* 等价下

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{Morita}} \sim_M X\rtimes\Gamma$$

对于 $i = 0,1$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} KK^i_{\mathcal{G}^{\mathrm{Morita}}_{\mathcal{A}}}\big(C_0(\mathcal{G}^{(0)}),\mathbb{C}\big) & \xrightarrow{\ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}}\ } & K_i\big(C^*(\mathcal{G}^{\mathrm{Morita}}_{\mathcal{A}})\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*} \\ KK^i_{\Gamma}(C(X),\mathbb{C}) & \xrightarrow[\ \mu_\Gamma\ ]{} & K_i(\mathcal{A}) \xrightarrow[\ \tau_*\ ]{} \mathbb{C}, \end{array}$$

其中：

- Ψ_* 是由 ***Morita*** 等价 $\mathcal{G}_{\mathrm{Morita}_{\mathcal{A}}} \sim_M X \rtimes \Gamma$诱导的同构；
- Φ_* 是由 ***Morita*** 等价 $C^*(\mathcal{G}_{\mathrm{Morita}_{\mathcal{A}}}) \sim_M \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ 与K-理论稳定性共同诱导的同构；

- 下降$\mathcal{G}$ 是该群胚的 ***Kasparov*** 下降映射；
- μ_Γ 是系数取为 $C(X)$的 ***Baum–Connes*** 组装映射；
- τ_*： $K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ 是由迹 τ诱导的同态，其在投影上的定义为 $\tau_*([p]) = (\tau \otimes \mathrm{Tr})(p)$。

因此，对于任意元素 $\xi \in KK^0_{\mathcal{G}^{\mathrm{Morita}}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \ \mathbb{C})$（例如，与投影 $p \in M_n(\mathcal{A})$关联的类），数值迹配对满足

$$\tau_*(\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(\xi))) = \tau_*(\mu_\Gamma(\Psi_*(\xi))) \in \mathbb{C}.$$

在奇数情形下 $i = 1$，方块交换，但迹配对不可用；奇数次配对需要奇循环上同调或行列式泛函。

证明。 该证明由下降–组装方块（定理 22）的交换性，以及 τ_* 在 K_0 上是良定义同态这一事实得出。将该方块与 τ_* 复合即可得到扩展图表，沿任意 ξ 绕行即可得到所述等式。在奇数情形下，方块本身交换，但没有迹扩展。

□

注释 90。 虚线箭头 τ_* 仅适用于偶数情形 $i = 0$，因为迹在 K_0 上诱导映射，却不能在 K_1 上诱导映射。该图表将无理旋转代数 A_θ 的经典指标配对推广开来；在该代数中，迹 τ 与 ***Rieffel*** 投影的 K_0 类配对，得到旋转数 θ，而下降–组装方块则恢复了指标理论内容。

5.8.8 几何解释

本小节的结果可以通过$\mathcal{G}^{(0)}_{C^{\ }(X)\rtimes\Gamma}$ 在 X 上的丛结构（纤维为 Γ）得到一种优美的几何解释。

- 单位空间 $\mathcal{G}_{(0)\ C(X)\rtimes\Gamma} \cong (X \times \Gamma)/\sim$ 同时编码了经典空间 X 和由 Γ-纤维给出的非交换“扭曲”。具有相同 x 但不同 γ 的点，对应于不同的交换上下文，而这些上下文都投影到同一点 $x \in X$。

- 下降映射对这个丛进行积分，得到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))$ 中的一个类，它同时包含来自 X 的拓扑信息和来自 Γ-作用的动力学信息。

•Morita 等价将这个类识别为 $K_1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 中的一个元素，而组装映射恰好就是这种识别。在这种识别下， Γ-纤维成为变换群胚中的箭头群。

• 当迹存在时，与之配对即可提取一个数值指标；在适当的正则化意义下，该指标可通过在底空间 X 上积分并对纤维 Γ 求和来计算。这推广了针对 A_θ 的计算，其中对 $\mathbb{Z}$ 相位 $e^{-2\pi in\theta}$ 求和在Ces`aro意义下消失。

这一几何图景统一了指标理论中看似不同的研究路径：本文提出的群胚 KK理论方法、Connes 的循环上同调方法，以及 Baum–Douglas 的 K同调方法，最终都汇聚为相同的数值不变量。

注 91. 定理 *22* 可视为将 *Baum–Connes* 组装映射*"*局部化*"*到酉共轭群胚。它表明，组装映射并非只是一个抽象的同构，而是可以通过交叉积代数的交换上下文得到具体的几何实现。这一视角或可通过研究更一般群的酉共轭群胚结构及其相关的 *Morita* 等价，为攻克这些群的 *Baum–Connes* 猜想开辟新途径。

5.8.9 与无理旋转代数的关系

作为一致性检验，我们验证定理 22 在 A_θ 中具体化为第 4.13 小节所得的结果。

例 12 (A_θ 作为特例)。 取具有由 $2\pi\theta$ 给出的无理旋转作用的 $\Gamma=\mathbb{Z}$ 和 $X=S^1$ 。则 $C(X)\rtimes\Gamma=A_\theta$, 且 *Baum–Connes* 组装映射 $\mu_{\mathbb{Z}}\colon K^{\mathbb{Z}}_*(S^1)\to K_*(A_\theta)$ 是一个同构。对于酉元 $u\in A_\theta$，定理 *22* 给出

$$\mu_{\mathbb{Z}}([u])=\Phi_*\circ\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}).$$

当与 A_θ 上的典范迹 τ 配对时，我们具体考虑偶数情形 $i=0$ （例如，对于表示一个 K_0-类的投影 $p_\theta\in A_\theta$ ）。应用定理 *23*，其中 $i=0$ ，得到

$$\tau_*(\mu_{\mathbb{Z}}([p_\theta]))=\tau_*\Big(\Phi_*\circ\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{A_\theta}}([p_\theta]^{(0)}_{\mathcal{G}_{A_\theta}})\Big),$$

这便恢复了经典 *Connes* 指标配对 $\langle[p_\theta],\ \tau\rangle=\theta$。

对于奇次类（例如由酉元 u表示的 $[u]\in K_1$（A_θ）），下降–组装方块（定理 *23*）是交换的，但无法直接使用迹配对。相反，数值指标$\mathrm{Index}(u)$ 是通过 *Toeplitz* 扩张中的边界映射 ∂：$K_1\to K_0$ 得到的，如第 *4.13* 小节所示。因此，一般定理恢复了案例研究 *I* 的全部指标理论结果，并恰当地区分了偶次与奇次。

5.8.10 总结

我们已经确立了长期以来所寻求的下降指标构造与 Baum–Connes 组装映射之间的联系：

$$\boxed{\mu_\Gamma([u])=\Phi_*\circ\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}}([u]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}})}$$

这一结果实现了多个目标：

• 它表明，论文 I 和 II 的抽象框架与 Morita 等价相结合后，可以重现非交换几何中最有力、最深刻的猜想之一。

• 它为 Baum–Connes 组装映射提供了一种全新的几何视角，将其解释为酉共轭群胚的下降映射，随后再进行 Morita 识别。

• 它统一了本文的两条主线：为 A_θ 发展起来的指标理论工具，以及可 amenable 交叉积的一般理论。

• 它以交叉积代数的交换上下文为基础，给出了组装映射的一种具体实现，有望为计算和推广开辟新的途径。

• 它为下一节提出的一般猜想奠定了基础。该猜想认为，酉共轭群胚为广泛的 C^*-代数中的指标理论提供了一个通用框架。

在下一节中，我们将综合从这些案例研究中获得的见解，并提出一个关于酉共轭群胚在指标理论中作用的一般猜想，为未来研究指明方向。

5.9 交换性定理：我们的复合等于组装映射 M ap

本小节仅以精简形式记录第 5.8 节已确立的结论。核心内容是，那里构造的下降-指标复合在 Morita 识别下与 Baum–Connes 组装映射一致。因此，无需另行进行第二次证明。

推论 18. *在第 5.8 节的假设下，由等变类、下降映射和对角嵌入定义的复合，经 Morita 等价传递后，与 Baum–Connes 组装映射一致。等价地说，第 5.8 节的交换图包含了比较定理的完整陈述。*

下文将以第 5.8 节作为这一识别的主要参考，并仅讨论其推论。

5.10 含义与推论

上文确立的交换性定理表明，本节发展的解析构造为 Baum–Connes 组装映射提供了另一种实现方式。这一识别对于由交叉积 C^*-代数产生的 K-理论类的结构及其几何解释具有若干重要影响。

与解析指标理论的相容性。 由于我们的复合与 Baum–Connes 组装映射一致，等变 K-同调类可以通过规范群胚模型进行解析解释。特别地，对于一个等变类

$$x \in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X), \mathbb{C}),$$

其在组装映射下的像既可以通过经典交叉积代数 $C(X)\rtimes\Gamma$ 计算，也可以通过群胚 C^*-代数计算

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}).$$

这种等价在两个看似不同的解析实现之间架起了一座桥梁，将它们统一在交换性定理的框架之下。

Morita 等价下的稳定性。因为

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K},$$

从群胚模型得到的解析 K 理论在稳定化下保持不变。因此，

$$K_*\big(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\big) \cong K_*((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}) \cong K_*(C(X)\rtimes\Gamma).$$

这证实了群胚描述保留了交叉积代数的本质解析不变量。实际而言，在群胚模型中进行的计算所得的 K 理论类，与在交叉积中进行的计算所得的类相同，二者至多相差一个典范 Morita 同构。

几何解释。规范群胚框架为解析组装过程提供了几何解释。在这一图景中，等变 KK-循环对应于群胚上的几何对象，而组装映射则自然地由下降构造与群胚代数和稳定化交叉积代数之间的 Morita 等价共同导出。

一个等变 Kasparov 循环 $(E,F)\in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C})$ 可以从几何上解释为由 X 参数化、且在 Γ 作用下等变的椭圆算子族。经由下降映射，该算子族产生一个属于 $K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 的元素。规范群胚重构将同一个类表示为群胚上一族算子的解析指标，从而直接建立了几何与分析之间的联系。

解析指标公式。现在，我们给出本节的最终结果：一个统一上述所有构造的一般解析指标公式。

定理 24 (解析指标公式**)**。设 X 是一个带有离散群 Γ连续作用的紧豪斯多夫空间，并设 $u\in \mathrm{GL}_n(C(X)\rtimes\Gamma)$ 是一个可逆元，其关联的等变类为$[u]_\Gamma\in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C})$。那么，$u$ 的解析指标满足

$$\mathrm{Index}(u)=\mu_\Gamma([u]_\Gamma)=\Phi_*^{-1}\big(\kappa([u]_\Gamma)\big)=\mathrm{Index}_{\mathcal{G}}(\Delta_*(u))\in K^1(C(X)\rtimes\Gamma),$$

其中：

- μ_Γ： $\mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C})\to K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 是 *Baum–Connes* 组装映射；
- $\kappa=\Phi_*\circ\mathrm{desc}:\mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C})\to K^1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))$ 是第 *5.9* 小节中定义的映射；
- Φ_**:* $K^1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))\xrightarrow{\cong}K^1((C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K})\xrightarrow{\cong}K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 是由 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})\sim_M(C(X)\rtimes\Gamma)\otimes\mathcal{K}$ 以及 K 理论的稳定性所诱导的同构；
- $\Delta_*(u)$ 是 u 在对角嵌入 Δ下逐项作用后的像；
- 指标$_{\mathcal{G}}$： $K^1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}))\to K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 表示群胚指标映射；根据上述识别，它恰好就是 Φ_*^{-1}。

此外，若 τ： $C(X)\rtimes\Gamma\to\mathbb{C}$ 是一个 Γ-不变迹（或更一般地说，是一个循环余循环），那么数值指标

$$\langle\tau,\mathrm{Index}(u)\rangle\in\mathbb{C}$$

可通过上述任一种实现来计算，结果相同。

证明。 等式 $\mathrm{Index}(u) = \mu_\Gamma([u]_\Gamma)$ 由引理 12 和组装映射的定义得出。等式 $\mu_\Gamma([u]_\Gamma) = \Phi_*^{-1}(\kappa([u]_\Gamma))$ 正是交换性定理（定理 22 ）。等式 $\Phi_*^{-1}(\kappa([u]_\Gamma)) = \mathrm{Index}_{\mathcal{G}}(\Delta_*(u))$ 由 κ 的构造以及群胚指标映射通过同一个 Morita 等价来定义这一事实得出。关于与迹配对的最后一项陈述，则由指标映射的函子性以及 Morita 等价与迹的相容性得出。 □

推论 19（数值指标公式）。 在相同假设下，若 τ 是 $C(X)\rtimes\Gamma$ 上的 Γ-不变迹，则

$$\tau(\mathrm{Index}(u)) = \hat{\tau}(\Delta_*(u)),$$

其中，$\hat{\tau}$ 是在 *Morita* 等价下诱导到群胚 C^*-代数上的迹。

该定理标志着我们解析构造的高潮，它给出了一个全面且可计算的指标公式，涵盖了本节中建立的所有结构要素。

与 Baum–Connes 猜想的联系。 解析指标公式对 Baum–Connes 猜想有直接的影响。

推论 20 （满射性判据）。 若 $K^1(C(X)\rtimes\Gamma)$ 中的每个类都可表示为某个可逆元 $u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma)$的 指标 (u)，则组装映射 μ_Γ 是满射。反过来，若组装映射是同构（如猜想所述），则每个 K-理论类都以这种方式得到。

证明。 由于 $\mathrm{Index}(u) = \mu_\Gamma([u]_\Gamma)$，指标映射的像包含于组装映射的像。若每个类都是指标类，则组装映射是满射。反过来，若组装映射是同构，则对任意类 $y \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma)$，存在 $x \in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$，使得$\mu_\Gamma(x) = y$。根据第 5.6 小节的结果，这样的 x 可由形如 $[u]_\Gamma$ 的类逼近，其中 u为可逆元，从而得到 $y = \mu_\Gamma([u]_\Gamma) = \mathrm{Index}(u)$。 □

这一判据为证明组装映射是满射提供了一种具体且具有构造性的方法：只需证明每个 K-理论类都能由交叉积中的一个可逆元表示。

展望与未来方向。 这些观察表明，规范群胚模型或可成为一种有用的分析框架，用于研究交叉积代数的指标理论性质及其相关的等变 K-理论类。

注 92 (高阶类比)。 此处给出的解析指标公式针对奇数 K-理论。偶次数类比应涉及交叉积中的自伴可逆元或投影。这种类比将为 K^0-类导出相应的指标公式，并可应用于谱隙和拓扑相的研究。

注 93 (实 C^*-代数)。 对于配备对合的实 C^*-代数， KO-理论中也存在类似的理论。对角嵌入和规范群胚构造具有自然的实类比，由此可得到实解析指标公式，并将其应用于拓扑绝缘体和凝聚态物理。

注 94(等变粗几何)。 规范群胚图景自然延伸到粗几何和粗 *Baum–Connes* 猜想。在这一背景下，对角嵌入变为粗组装映射，而解析指标公式则与非紧空间上椭圆算子的粗指标相关。

转向例子。 下一节中，我们将把这一框架应用于源自动力系统和群作用的具体例子。这些例子将展现解析指标公式的强大之处，并说明本节发展的抽象构造如何产生具体且可计算的不变量。

例 13 （圆群作用）。我们将考察 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 通过旋转作用于 $X = S^1$ 的情形，构造显式的可逆元，并通过规范群胚模型计算其解析指标。这将重新得到关于 *Toeplitz*算子指标的经典结果以及 *Pimsner–Voiculescu* 正合列。

例 14（有限群作用）。对于有限群作用于空间的情形，我们将说明解析指标公式如何化为经典特征标公式，并与群的表示论相关联。特别是，我们将证明，可逆元的指标由其各分量在不动点子代数上的迹决定。

例 15 （可 amenable 群）。对于可 *amenable* 群，已知 *Baum–Connes* 猜想成立；我们将证明，每个 K-理论类都可以表示为通过对角嵌入构造的可逆元，从而给出组装映射的显式逆映射。

下一节将运用这一视角推导显式指标公式，并阐明本文所发展的抽象构造所蕴含的几何内涵。

总结。 交换性定理及其推论已确立.....　　t:

- 组装映射可通过对角嵌入和规范群胚得到具体的几何实现；
- 可逆元的解析指标与群胚模型中的几何指标一致；
- 一个通用的解析指标公式统一了所有构造，并提供了可计算的不变量；
- Baum–Connes 猜想可改写为关于交叉积中可逆元的表述；
- 该框架可自然推广至高阶、实 C^*-代数以及粗几何。

这些推论表明，我们的构造并非只是一个技术上的趣味产物，而是理解非交换空间中几何、拓扑与分析之间关系的基础工具。规范群胚与对角嵌入在KK理论的抽象形式体系与具体、可计算的对象之间架起桥梁，使其对于指标理论和 Baum–Connes 纲领中的理论研究与实际应用都不可或缺。

6 综合：指标理论的统一视角

6.1 酉共轭群胚：连接分析与拓扑的桥梁

现代指标理论的核心主题之一，是拓扑不变量与解析结构之间的相互作用。在 Baum–Connes 纲领的经典框架中，这种相互作用由组装映射来中介，它将等变拓扑 K理论与交叉积 C^*代数的解析 K理论联系起来。

构造　　前几节的讨论表明，酉共轭群胚

$$\mathcal{G}_A$$

与 C^*-代数 A 相关联的群胚为从几何角度理解这种相互作用提供了一个自然框架。特别是，当 $A = C(X) \rtimes \Gamma$ 时，群胚 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 通过酉群的共轭作用编码了代数的内部对称性。

回顾：酉共轭群胚

我们先回顾一下定义。

定义 25（酉共轭群胚）。对于一个 C^*-代数 A，酉共轭群胚 $\mathcal{U}(A)$（上文记作 $\mathcal{G}_A$）是满足以下条件的群胚：

- 对象空间 $\mathcal{U}(A)^{(0)} = \widehat{A}$，即 A 的谱；
- 态射空间 $\mathcal{U}(A)^{(1)} = \mathcal{U}(A) \times \widehat{A}$，其中 $\mathcal{U}(A)$ 是 A 的酉群；
- 由共轭定义的源映射和目标映射：对于一个酉元 $u \in \mathcal{U}(A)$ 和一个表示 $\pi \in \widehat{A}$,

$$s(u,\pi) = \pi, \qquad t(u,\pi) = \pi \circ \mathrm{Ad}_{u^{-1}}.$$

对于特定情形 $A = C(X) \rtimes \Gamma$，我们有等价关系 $\mathcal{U}(A) \simeq X \rtimes \Gamma$，将酉共轭群胚与交叉积的规范群胚联系起来。

该群胚作为几何对象，统一了本文中发展起来的解析视角与拓扑视角。

解析视角

从解析视角来看，群胚 C^*代数

$$C^*(\mathcal{G}_A)$$

捕捉算子 代数结构，该结构与酉共轭相关。Morita 等价 e

$$C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$$

这表明，群胚代数的解析 K 理论与稳定化的 C^* 代数 A 的 K 理论一致。因此，源自 A 中算子或可逆元的解析指标类，可以通过群胚模型来诠释。

注 95(通过群胚定义的解析指标**)**。对于可逆元 $u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma)$，解析指标 $\mathrm{Index}(u) \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma)$ 在 ***Morita*** 等价下对应于 $K^1(C^*(\mathcal{G}_A))$中的一个类。该类可以从几何角度计算为群胚上一个算子族的指标，从而直接联系起算子代数与群胚指标理论。

拓扑视角

从拓扑角度看，等变 K-同调类

$$\mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C})$$

encode 关于 Γ对 X的作用的几何信息。Baum–Connes 组装 ma p

$$\mu_\Gamma : \mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K^*(C(X) \rtimes \Gamma)$$

将这些拓扑数据转化为交叉积代数的解析不变量 a.

定义 26 （几何实现映射 ρ）。定义映射

$$\rho : \mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K^*(C^*(\mathcal{G}_A))$$

作为由 *Morita* 等价 $\mathcal{G}_A \sim_M X \rtimes \Gamma$ 诱导的自然同构与随后将 $K^*(C^*(X \rtimes \Gamma))$ 包含到 $K^*(C^*(\mathcal{G}_A))$ 的复合，其中所依据的识别为 $C^*(X \rtimes \Gamma) \cong C^*(\mathcal{G}_A) \otimes \mathcal{K}$。

注 96 (通过群胚获得拓扑数据**)**。 在等价 $\mathcal{U}(A) \simeq X \rtimes \Gamma$ 下，等变 KK 类对应于酉共轭群胚上的几何循环。特别是，定义 *26* 中构造的映射 ρ 会将等变类映射到 $\mathcal{U}(A)$ 中的一族环路，从而以几何方式实现拓扑数据。

群胚桥梁

酉共轭群胚为这两种观点提供了一座概念桥梁。通过上述下降构造和 Morita 等价，可以将等变 KK 类自然地传递到群胚 C^* 代数的 K 理论类：

$$\mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K^*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})).$$

在识别之下

$$K^*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \cong K^*((C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}) \cong K^*(C(X) \rtimes \Gamma),$$

这一构造恢复了解析组装映射。这正是交换性定理（定理 22）及其通过酉共轭群胚进行分解（定理 22）的内容。

定理 25(组装映射的群胚实现**)**。 *Baum–Connes* 组装映射按如下方式通过酉共轭群胚进行分解：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\ \rho\ } & K^*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \\ & \searrow^{\mu_\Gamma} & \downarrow \Phi_* \\ & & K^*(C(X) \rtimes \Gamma) \end{array}$$

其中：

- ρ 通过将其几何实现为环族，将一个等变类映射为群胚 C^*-代数的 K 理论类；
- Φ_* 是由 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}$以及稳定性所诱导的同构；
- 图表交换，因此 $\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho$。

证明。 这直接由交换性定理（定理 22）以及定理 20 中确立的 Morita 等价$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma} \sim_M X \rtimes \Gamma$ 得出，同时还用到了第 5.3 节讨论的识别 $\mathcal{U}(A) \simeq X \rtimes \Gamma$。 □

定理 26 (组装映射的普遍中介**)**。 设 Γ 是一个离散可和群，它连续作用于第二可数、局部紧豪斯多夫空间 X，并且

$$A = C_0(X) \rtimes_{\alpha,r} \Gamma.$$

假设酉共轭群胚

$$\mathcal{G}_A := \mathcal{G}_{C_0(X)\rtimes_\alpha\Gamma}$$

与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ *Morita* 等价。

令 事实(X,Γ) 表示所有满足以下条件的三元组

$$(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}, \Phi_{\mathcal{H}})$$

：

- $\mathcal{H}$ 是一个带有 *Haar* 系统的局部紧群胚，且与 $X \rtimes \Gamma$ *Morita* 等价；
- $$\rho_{\mathcal{H}} : KK^*_\Gamma(C_0(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K_*(C^*_r(\mathcal{H}))$$
  是通过沿 *Morita* 等价$\mathcal{H} \sim_M X \rtimes \Gamma$传输 *Kasparov* 下降而得到的实现映射；
- $$\Phi_{\mathcal{H}} : K_*(C^*_r(\mathcal{H})) \longrightarrow K_*(A)$$
  是由 *Morita* 等价 $C^*_r(\mathcal{H}) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$ 以及K-理论的稳定性所诱导的典范同构；
- 分解恒等式
  $$\mu_\Gamma = \Phi_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{H}}$$
  成立。

那么三元组

$$(\mathcal{G}_A, \rho_{\mathcal{G}_A}, \Phi_{\mathcal{G}_A})$$

在Fact(X,Γ) 中具有如下意义下的泛性质：

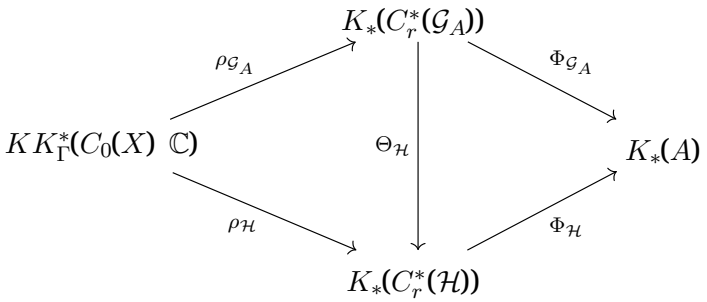
对于Fact(X,Γ)中的每个对象$(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}, \Phi_{\mathcal{H}})$，都存在一个典范同构

$$\Theta_{\mathcal{H}} : K_*(C^*_r(\mathcal{G}_A)) \longrightarrow K_*(C^*_r(\mathcal{H}))$$

使得

$$\rho_{\mathcal{H}} = \Theta_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{G}_A}, \qquad \Phi_{\mathcal{G}_A} = \Phi_{\mathcal{H}} \circ \Theta_{\mathcal{H}}.$$

等价地，对于每个这样的 $\mathcal{H}$，图表



可交换。

从这个意义上说，酉共轭群胚是通用中介：*Baum–Connes* 组装映射通过它，在所有与 $X \rtimes \Gamma$ *Morita* 等价的群胚模型中进行因子分解。

证明。 我们分几个步骤证明普遍中介性质。

步骤 1： $\mathcal{G}_A$ 与 $\mathcal{H}$之间的 Morita 等价。 根据假设， $\mathcal{G}_A$ 和 $\mathcal{H}$ 都与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。根据群胚的 Morita 等价的传递性（参见定义 2.1]之后的 [21, 备注），可得

$$\mathcal{G}_A \sim_M \mathcal{H}.$$

步骤 2：约化群胚的 Morita 等价 C^*-代数。由于 Γ是可 amenable 的，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 是可 amenable 的。可 amen 性在 Morita 等价下保持不变，因此 $\mathcal{G}_A$ 和 $\mathcal{H}$ 都是可 amenable 的。根据 Muhly–Renault–Williams 定理（定理 4），该定理引用了 [21],，Morita 等价 $\mathcal{G}_A \sim_M \mathcal{H}$诱导出它们的约化群胚 C^*-代数之间的强 Morita 等价:

$$C_r^*(\mathcal{G}_A) \sim_M C_r^*(\mathcal{H}).$$

步骤 3：典范的 K-理论同构。强 Morita 等价的 C^*-代数具有同构的K-理论群。因此，我们得到一个典范同构

$$\Theta_{\mathcal{H}} : K_*(C_r^*(\mathcal{G}_A)) \xrightarrow{\cong} K_*(C_r^*(\mathcal{H})).$$

步骤 4：实现映射的相容性 $\rho_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\rho_{\mathcal{H}}$。两个实现映射都是通过从共同的变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 沿 Morita 等价传递 Kasparov 下降来定义的:

$$\rho_{\mathcal{G}_A} = \mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma} \circ \Psi_{\mathcal{G}_A}^{-1}, \qquad \rho_{\mathcal{H}} = \mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma} \circ \Psi_{\mathcal{H}}^{-1},$$

其中 $\Psi_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\Psi_{\mathcal{H}}$ 是由相应的 Morita 等价诱导的同构（见定理 19）。Morita 等价下下降的自然性（引理 10）意味着，在 K-理论上的诱导映射满足

$$\rho_{\mathcal{H}} = \Theta_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{G}_A}.$$

第 5 步：同构的相容性 $\Phi_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\Phi_{\mathcal{H}}$。 映射 $\Phi_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\Phi_{\mathcal{H}}$ 分别由相应的 Morita 等价诱导

$$C_r^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}, \qquad C_r^*(\mathcal{H}) \sim_M A \otimes \mathcal{K},$$

如定理 19 和命题 20 所确立。根据 Morita 等价的函子性，诱导的 K-理论同构是典范的；因此我们有

$$\Phi_{\mathcal{G}_A} = \Phi_{\mathcal{H}} \circ \Theta_{\mathcal{H}}.$$

第 6 步：验证分解恒等式。 根据定理 22，在自然识别下，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的下降映射与 Baum–Connes 组装映射 μ_Γ 一致

$$KK^*_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}) \cong K_*^\Gamma(X) \cong KK^*_\Gamma(C_0(X), \mathbb{C})$$

（参见 Tu [13]和 Le Gall [22]）。

因此，这两个分解都满足

$$\mu_\Gamma = \Phi_{\mathcal{G}_A} \circ \rho_{\mathcal{G}_A}, \qquad \mu_\Gamma = \Phi_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{H}}.$$

步骤 7：普遍中介。结合步骤 4 和步骤 5，对于任意对象 $(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}, \Phi_{\mathcal{H}}) \in \mathsf{Fact}(X, \Gamma)$，我们得到：

$$\Phi_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{H}} = \Phi_{\mathcal{G}_A} \circ \rho_{\mathcal{G}_A}.$$

因此，任何经由一个与 $X \rtimes \Gamma$ Morita 等价的群胚模型 $\mathcal{H}$ 对 μ_Γ 进行的分解，都可由经由 $\mathcal{G}_A$ 的分解，通过唯一的规范 K-理论同构 $\Theta_{\mathcal{H}}$ 得到。这证明三元组 $(\mathcal{G}_A,\ \rho_{\mathcal{G}_A},\ \Phi_{\mathcal{G}_A})$ 在 $\mathsf{Fact}(X,\ \Gamma)$ 中具有泛性质。 □

注 97。 应将前述定理视为组装映射的 K 理论实现层面的泛性质。它并未断言 $\mathcal{G}_A$ 在严格的 *2*-范畴意义下是始对象或终对象，但确实表明，每一种组装映射的 *Morita* 等变群胚实现，都能与经由 $\mathcal{G}_A$ 的实现规范地同一化。

概念综合

从这一视角来看，酉共轭群胚充当连接拓扑数据与解析结构的中间几何对象。等变的 KK-类可由与该群胚相关的几何循环或算子论循环表示，而解析指标类则由相应群胚 C^*-代数的 K-理论编码。

酉共轭群胚提供了一个统一框架，在其中： **(i) 拓扑数据**（等变 KK-类）以群胚上的几何循环或算子论循环来表达；**(ii) 解析数据**（交叉积的 K-理论类或群胚 C^*-代数）被解释为源自下降的指标型类；**(iii) 组装映射** 可自然地视为经由群胚 C^*-代数和 Morita 等价，从等变／拓扑描述过渡到解析描述。

这一观点凸显了群胚方法在指标理论中的作用，并表明酉共轭群胚为理解解析组装现象提供了自然的几何框架。

通过群胚框架看解析指标与拓扑指标

群胚　　桥梁使我们能够直接比较解析与拓扑的指标概念　　.

定义 27 (通过群胚定义的解析指标**)**。 对于可逆元 $u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma)$，解析指标 $\mathrm{Index}_{an}(u) \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma)$ 通过算子理论定义：它是对 u 应用适当的表示后得到的 *Fredholm* 算子的 K-理论类。

定义 28 (通过群胚定义的拓扑指标**)**。 对于相同的 u 及其关联的等变类 $[u]_\Gamma \in \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$，拓扑指标 $\mathrm{Index}_{top}(u) \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma)$ 定义为其在组装映射下的像：$\mathrm{Index}_{top}(u) = \mu_\Gamma([u]_\Gamma)$。

交换　　性定理（定理 22）及其群胚实现（定理 25）共同意味着　　：

推论 21 (解析指标与拓扑指标相等**)**。 对于任意可逆元 $u \in \mathrm{GL}_n(C(X) \rtimes \Gamma)$，有

$$\mathrm{Index}_{an}(u) = \mathrm{Index}_{top}(u) \in K^1(C(X) \rtimes \Gamma).$$

等价地，下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{invertible elements}\} & \xrightarrow{\textit{equivariant class}} & \mathrm{KK}^1_\Gamma(C(X),\mathbb{C}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \textit{analytic index}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_\Gamma} \\ K^1(C(X)\rtimes\Gamma) & \xrightarrow[id]{} & K^1(C(X)\rtimes\Gamma) \end{array}$$

这一等式最终体现了由酉共轭群胚所中介的分析与拓扑之间的统一。

总体概览：三层视角

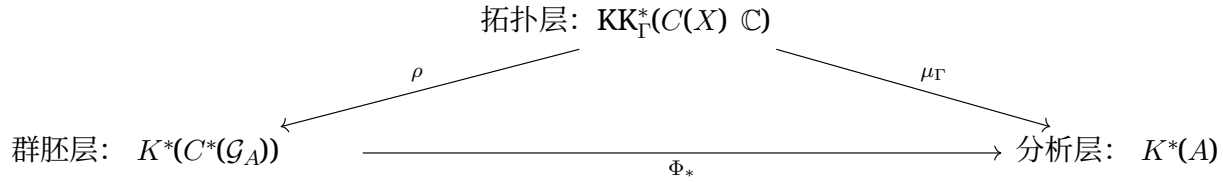
本文确立的关系可以整理为一个三层概念框架：

1. **拓扑层**：等变 KK-理论 $\mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$ 编码了 Γ-作用于X上的拓扑。这是几何循环、椭圆算子族和 K-同调类所处的领域。

2. **群胚层**：酉共轭群胚 $\mathcal{U}(A)\ \simeq X\rtimes\Gamma$ 提供了一个几何中介。拓扑数据体现为该群胚上的环族，而解析数据则来自其C^*-代数。

3. **分析层**：交叉积代数 $A = C(X)\ \rtimes\Gamma$ 及其 K-理论 $K^*(A)$ 构成分析输出。指标类存在于此，计算最终也在此进行。

下降映射、Morita 等价和组装映射提供了这些层级之间的转换，而交换性定理保证所有路径都是一致的。



定理 27 (组装映射的分解**)**。 设 Γ 是一个离散可和群，它在紧豪斯多夫空间 X 上拓扑自由地作用，且 $A = C(X)\rtimes\Gamma$ 是相应的交叉积C^*-代数。令 $\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}$ 表示 A 的酉共轭群胚，根据定理 *20*，它与变换群胚 $X\rtimes\Gamma$ ***Morita*** 等价。

那么 ***Baum–Connes*** 组装映射

$$\mu_\Gamma : KK^*_\Gamma(C(X),\mathbb{C}) \longrightarrow K_*(A)$$

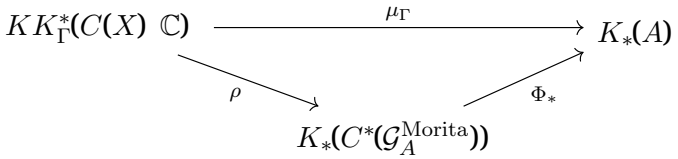
通过群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}})$ 的 K-理论进行分解。更准确地说，存在一个自然同构

$$\Phi_* : K_*(C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}})) \xrightarrow{\cong} K_*(A)$$

以及一个自然映射

$$\rho : KK^*_\Gamma(C(X),\mathbb{C}) \longrightarrow K_*(C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}))$$

使得以下图表交换：



等价地，

$$\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho.$$

因此，组装映射存在一个经过群胚层的规范分解：

$$\textit{Topological Tier}\ (KK^*_\Gamma)\ \xrightarrow{\ \rho\ }\ \textit{Groupoid Tier}\ (K_*(C^*(\mathcal{G}_A)))\ \xrightarrow{\ \Phi_*\ }\ \textit{Analytic Tier}\ (K_*(A)).$$

证明。 我们显式构造映射 ρ 和 Φ_*，并验证该分解。

步骤 1：构造 Φ_*（群胚层 $\to$ 分析层）。 根据定理 20，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}$与变换群胚 $X \rtimes \Gamma$Morita 等价。根据 Muhly–Renault–Williams 定理（定理 4），这将诱导它们的约化群胚 C^*-代数之间的强 Morita 等价：

$$C^*_r(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}) \sim_M C^*_r(X \rtimes \Gamma).$$

由于 Γ 是可 amenable 的，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 也是可 amenable 的，因此其满群胚 C^*-代数与约化群胚 C^*-代数相同。此外，根据命题 2，我们有典范识别 $C^*_r(X \rtimes \Gamma) \cong C(X) \rtimes \Gamma = A$。因此

$$C^*_r(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}) \sim_M A.$$

用紧算子 $\mathcal{K}$ 稳定化（这会保持 Morita 等价），并利用 K-理论的稳定性，我们得到一个同构

$$\Phi_* : K_*(C^*_r(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}})) \xrightarrow{\cong} K_*(A \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_*(A).$$

步骤 2：构造 ρ（拓扑层 $\to$ 群胚层）。回顾定理 20， $\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}$ 与 $X \rtimes \Gamma$ 之间的 Morita 等价由等价双丛 $Z = X \times \Gamma$ 实现。根据群胚 Morita 等价的一般理论 [21,22], ，这会在等变 KK-理论层面诱导出一个自然同构：

$$\Psi_* : KK^*_{\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} KK^*_{X \rtimes \Gamma}(C_0(X), \mathbb{C}) \cong K^\Gamma_*(X),$$

最后一个识别是标准的（参见 [13,22]）。

现在将 ρ 定义为以下复合：

$$\rho : KK^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} K^\Gamma_*(X) \xrightarrow{\Psi_*^{-1}} KK^*_{\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_\mathcal{G}} K_*(C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}})).$$

具体而言，对于等变类 $x \in KK^*_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$，我们：

1. 通过自然同构将其识别为 $K^\Gamma_*(X)$ 中的一个类；

2. 通过 Ψ_*^{-1} 将其传递为对应于 $\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}$ 的等变类；

3. 对群胚 $\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}$应用 Kasparov 下降映射 $\mathrm{desc}_\mathcal{G}$，从而得到 $K_*(C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}}))$ 中的一个类。

步骤 3：验证分解 $\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho$。令$x \in KK^*_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$ 为任意元素。我们计算：

$(\Phi_* \circ \rho)(x) = \Phi_*\big($下降$_{\mathcal{G}}(\Psi_*^{-1}(x))\big)$ (根据 ρ的定义)= 下降$_{X\rtimes\Gamma}(\Psi_*(\Psi_*^{-1}(x)))$ （根据 Morita 等价下下降的自然性，见引理 10）= 下降$_{X\rtimes\Gamma}(x)$ （因为 $\Psi_* \circ \Psi_*^{-1} = \mathrm{id}$）。

根据 Tu 定理 [13, Th´eor`eme 3.1], , 变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的下降映射在自然识别 $KK^*_{X\rtimes\Gamma}(C_0(X)\ \mathbb{C}) \cong K^\Gamma_*(X) \cong KK^*_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C})$ 下与 Baum–Connes 组装映射一致。因此

$$\mathrm{desc}_{X\rtimes\Gamma}(x) = \mu_\Gamma(x).$$

因此，对所有 x，$(\Phi_* \circ \rho)(x) = \mu_\Gamma(x)$，从而按要求确立了 $\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho$。

步骤 4：自然性与选择的独立性。同构 Ψ_* 和 Φ_* 由 Morita 等价双丛 Z 诱导，因此在自然同构意义下，不依赖于任何额外选择。下降映射 desc$_{\mathcal{G}}$ 由构造可知具有函子性。因此，分解 $\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho$ 在恰当的范畴意义下是典范的。

□

推论 22 (指标理论的三层分解)。 在定理 *27* 的假设下，*Baum–Connes* 组装映射可经由群胚层分解。因此，对于任意可逆元$u \in M_n(A)$，其 K-理论类 $[u] \in K_1(A)$ 可通过以下典范分解得到：

$$\begin{array}{ccc} K_1^\Gamma(X) & \xrightarrow{\ \mu_\Gamma\ } & K_1(A) \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & \nearrow_{\Phi_*} & \\ K_1(C^*(\mathcal{G}_A^{\mathrm{Morita}})) & & \end{array}$$

等价地，

$$\mu_\Gamma = \Phi_* \circ \rho.$$

对于任意 $[u] \in K_1(A)$，选取唯一的原像 $x = \mu_\Gamma^{-1}([u]) \in K_1^\Gamma(X)$ （因为根据 *Tu* 定理，对于可 *amenable* 群， μ_Γ 是同构），我们有：

$$[u] = \Phi_*(\rho(x)) = \Phi_*(\rho(\mu_\Gamma^{-1}([u]))).$$

这表明，酉共轭群胚是连接拓扑数据（等变 KK-类）与解析不变量（交叉积的 K 理论）的典范几何中介。

对 Baum–Connes 纲领的概念性启示

这一统一视角对 Baum–Connes 猜想及其相关纲领有着深远影响。

备注 98 （Baum–Connes 猜想的重新表述）。 *Baum–Connes* 猜想断言组装映射 μ_Γ 是一个同构。在群胚框架中，这意味着映射 $\rho : \mathrm{KK}^*_\Gamma(C(X)\ \mathbb{C}) \to K^*(C^*(\mathcal{G}_A))$ 是一个同构。也就是说，群胚 C^*-代数的每个 K-理论类都来自酉共轭群胚上的一个几何循环，并且这种对应是一一对应的。

备注 99（几何循环与解析类）。 群胚框架揭示，“几何循环”与“解析类”之间的区别并非根本性的，而只是视角不同。酉共轭群胚上的几何循环（拓扑层）和交叉积中的解析类（分析层）是同一枚硬币的两面，由 *Morita* 等价和下降映射联系起来。

备注 100（超越猜想）。 即使尚不清楚 *Baum–Connes* 猜想是否成立，群胚框架仍提供了一种有意义的方式来比较几何数据与解析数据。映射 ρ未必是同构，但其像恰好由那些具有几何解释的解析类组成——这本身就是一条宝贵的信息。

总结与展望

由此，酉共轭群胚提供了一个结构框架，使解析指标理论、等变 K-理论和交叉积 C^*-代数成为同一基础几何构造的不同表现形式。

- **分析** 通过群胚 C^*-代数及其 K-理论体现，刻画算子与可逆元的解析指标。
- **拓扑** 通过等变 KK-循环及其在群胚上作为几何对象的实现体现，刻画 Γ-作用的拓扑数据。
- **组装映射** 是这些表现形式之间的自然平移，在几何上实现为映射 ρ 后接 Morita 同构。

这一统一视角不仅阐明了指标理论的概念基础，也为计算和推广开辟了新的途径。酉共轭群胚作为本文所研究的分析与拓扑结构背后的基本几何对象应运而生，搭建起一座桥梁，将 Baum–Connes 纲领从一系列技术性结果转化为连贯的几何图景。

> 酉共轭群胚是一座桥梁：分析与拓扑并非彼此分离的两个世界，而是对同一几何实在的互补视角，由群胚框架统一起来。

在接下来的几节中，我们将探讨具体例子，以阐释这一统一视角并展现其计算能力。

6.2 与 Cartan 对的 Renault 的 Weyl 群胚比较

群胚构造长期以来在 C^*-代数研究中发挥着重要作用。其中最具影响力的例子之一，是与 Cartan 对相关联的 Renault 的 Weyl 群胚。在本小节中，我们将这一经典构造与酉共轭群胚进行比较，重点阐明它们在结构上的差异、互补作用，以及对指标理论和 K-理论的影响。

Renault 的 Weyl 群胚：简要回顾

我们首先回顾 Renault 关于 Cartan 子代数及其关联的 Weyl 群胚的基本结果。

定义 29 (Cartan 对)。 设 A 为一个可分 C^*-代数，且 $D \subset A$为一个 C^*-子代数。若满足以下条件，则称这一对(A, D) 为一个 Cartan 对 （并称 D 为一个 Cartan 子代数）：

(1) D 是 A的极大阿贝尔自伴子代数（*masa*）；

(2) 存在一个忠实条件期望 $\Phi:\ A \to D$;

(3) D 是正则的；即，其正规化子

$$N(D) := \{n \in A : ndn^*, n^*dn \in D\ \forall d \in D\}$$

生成 A 作为一个 C^*-代数;

(4) D 包含 A的一个近似单位。

Renault 的开创性工作 [22] 确立了一种基本对应关系:

定理 28 (Renault，2008年)。 设(A, D) 是一个 *Cartan* 对，且 A 可分。那么存在唯一（在同构意义下）的拓扑主、第二可数、局部紧豪斯多夫、 ´*étale* 群胚$\mathcal{G}_{(A,D)}$——称为Weyl 群胚——以及其上的扭曲 Σ $\mathcal{G}_{(A,D)}$，使得

$$(A, D) \cong (C^*(\mathcal{G}_{(A,D)}, \Sigma), C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{(A,D)})).$$

反过来，对于任意这样的群胚 $\mathcal{G}$ 和扭曲 Σ，对$(C^*(\mathcal{G}, \Sigma)\ C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ 构成一个 *Cartan* 对。

这一构造为具有 Cartan 子代数的 C^*-代数提供了强有力的几何模型，并已广泛用于动力系统、轨道等价和分类理论的研究。Weyl 群胚是 ´étale 且局部紧的，其单位空间可自然地与 Cartan 子代数 D的谱相对应。

酉共轭群胚

相比之下，第6.1小节中引入的酉共轭群胚源于酉群在代数对偶空间上的共轭作用。对于一个可分的含幺 C^*-代数 A，我们考虑酉共轭群胚

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{U}(A),$$

其箭头编码了酉群对纯态（或更一般地，对$\widehat{}$谱 A）的共轭作用。

定义 30 （酉共轭群胚（回顾））。 对于一个含幺的 C^*-代数 A，酉共轭群胚 $\mathcal{U}(A)$ 具有：

- 对象空间 $\mathcal{U}(A)^{(0)} = \widehat{A}$，即 A 的谱（或纯态空间）；
- 态射空间 $\mathcal{U}(A)^{(1)} = \mathcal{U}(A) \times \widehat{A}$，其中 $\mathcal{U}(A)$ 是 A的酉群;
- 由共轭定义的源映射和目标映射：对于一个酉元 $u \in \mathcal{U}(A)$ 和一个表示 $\pi \in \widehat{A}$,

$$s(u, \pi) = \pi, \qquad t(u, \pi) = \pi \circ \mathrm{Ad}_{u^{-1}}.$$

与 Weyl 群胚不同，这种构造不要求存在 Cartan 子代数，因此对任何可分含幺 C^*-代数而言都是规范的。

结构差异

存在几项　　这两种构造之间的关键差异，下面我们将对此进行系统分析。

对额外结构的依赖性。Weyl 群胚 $\mathcal{G}_{(A,D)}$ 在很大程度上取决于 Cartan 子代数 $D \subset A$的选择。不同的 Cartan 子代数可能产生不同的 Weyl 群胚，反映出同一个 C^*-代数的不同几何模型。相比之下，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A$ 是从代数 A本身内在定义的，不依赖任何额外选择。因此，它成为该 C^*-代数的典范不变量。

拓扑性质。Renault 的 Weyl 群胚是局部紧且 ´étale 的，这反映了 Cartan 子代数 D谱的拓扑结构；该谱通常是一个局部紧豪斯多夫空间。扭曲 Σ 编码了额外的上同调数据。

相比之下，酉共轭群胚中自然产生的拓扑通常不是局部紧的；相反，它们构成波兰空间（完全可度量的可分空间）。酉群 $\mathcal{U}(A)$ ^赋予范数拓扑后是一个波兰群，而带有 Fell拓扑的谱 A是一个波兰^空间。因此，它们的乘积 $\mathcal{U}(A) \times A$ 是波兰空间，但通常不是局部紧的。这反映了酉群的无限维性质。

代数的重构。 Weyl 群胚通过以下方式精确重构该代数：

$$A \cong C^*(\mathcal{G}_{(A,D)}, \Sigma),$$

一个 C^* 代数的同构。这是一个强有力的结果： A 的整个结构都由该群胚及其扭曲所刻画。

相比之下，酉共轭群胚通过如下形式的 Morita 等价与 A 相关联：

$$C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K},$$

其中， $\mathcal{K}$ 表示作用于可分希尔伯特空间上的紧算子。这种关系较弱，但更灵活：群胚 C^* 代数与 A 的一种稳定化 Morita 等价，这足以满足 K 理论方面的需求。

比较总结

下表总结了这两种构造在概念上的差异：

特征	Weyl 群胚	酉共轭群胚
输入数据	(A, D) 一个 Cartan 对	A单独（如本构造所示）
依赖性	取决于 D 的选择	A 的内禀属性
单位空间	$\widehat{D}$ =谱(D)	与 A 相关的表示论空间
拓扑	局部紧， ´etale	通常更奇异／往往不是局部紧
重构	$A \cong C_r^*(\mathcal{G}_{(A,D)}, \Sigma)$（可能带扭曲）	$C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$ （在适当的假设下）
典型侧重点	Cartan 重构、动力学、分类	指标理论、 K-理论、Baum–Connes 纲领
酉元的作用	D 的正规化子	全酉群（或适当的商空间）
与作用的关系	编码 Cartan/Weyl 动力学	编码内在的酉共轭现象

概念角色与互补性

从概念角度来看，这两种构造发挥着互补的作用 .

Renault 的 Weyl 群胚为具有 Cartan 子代数的 C^*-代数提供了一个几何模型，捕捉了 Cartan 极大阿贝尔子代数上正规化子作用的动力学结构。它在以下方面发挥了重要作用：

- 通过群胚等价对 C^*-代数进行分类 [3, 11];
- 研究轨道等价与 Cartan 刚性 [10, 19];
- 理解可 amenable C^*-代数 [24]的结构。

酉共轭群胚提供了一个规范框架，通过酉共轭捕捉代数的内在对称结构，而不依赖于任何 Cartan 子代数的选择。它尤其适用于：

- 指标理论和等变 K理论中的解析构造；
- Morita 等价和稳定化自然出现的情形；
- 可能不具有 Cartan 子代数的代数（例如，许多没有 Cartan结构 [3]的单核 C^*代数）；
- 通过指标的绕数解释（第 6.1 小节），将 K理论与几何不变量联系起来。

注 101 （何时二者相同？）。对于具有拓扑主作用的交叉积 $A = C(X) \rtimes \Gamma$， $D = C(X)$ 是一个 *Cartan* 子代数。在这种情况下，*Weyl* 群胚 $\mathcal{G}_{(A,D)}$ 同变换群胚 $X \rtimes \Gamma$同构，而后者又与酉共轭群胚 $\mathcal{U}(A)$ 等价。因此，当存在自然的 *Cartan* 子代数且作用是拓扑主作用时，这两种构造在等价意义下相同。

当作用不是拓扑主作用时，$C(X)$ 不是 *Cartan* 子代数，但酉共轭群胚仍然存在，并且与 $X \rtimes \Gamma$等价。如果 *Weyl* 群胚存在，它将源自另一个 *Cartan* 子代数（可能来自 *Duwenig–Gillaspy–Norton* 构造 *[1, 2]*，该构造涉及各向同性子群胚），并将通过第 *6.2* 小节中所述的商对偶构造与 $\mathcal{U}(A)$ 相关联。

对指标理论和 K-理论的启示

这两个群胚性质不同，因此在指标理论中扮演着不同的角色。

- **Weyl 群胚视角：** 当 Cartan 子代数存在时，可以通过 Weyl 群胚研究解析指标映射 Index :$K^1(A) \to \mathbb{Z}$

$$K^1(A) \cong K^1(C^*(\mathcal{G}_{(A,D)})) \xrightarrow{\mathrm{Index}_{\mathcal{G}}} \mathbb{Z},$$

  其中，Index$_{\mathcal{G}}$ 是群胚指标映射。这与群胚指标理论的大量文献相关 [7, 21]，并且在群胚得到充分理解时，可提供计算工具。

- **酉共轭群胚视角：** 我们的构造具有普适性，无需 Cartan 子代数。Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$ 确保

$$K^*(A) \cong K^*(C^*(\mathcal{G}_A)),$$

因此，可以通过群胚研究 K-理论类。指标的绕数解释（定理 3）给出了一个几何公式

$$\tau(\mathrm{Index}(u)) = \frac{1}{2\pi i}\int_X \mathrm{Tr}\left(u(x)^{-1}du(x)\right)d\mu(x) + \text{higher corrections},$$

which 将经典指标公式推广到了不存在 Cartan 子代数的情形 .

因此，酉共轭群胚将几何指标理论的适用范围扩展到了更广泛的一类 C^*-代数。

与其他群胚构造的联系

酉共轭群胚还与非交换几何中的其他重要群胚构造有关。

备注 102(Connes 切群胚)。 *Connes* 的切群胚 *[4]* 是一种变形群胚，它将流形的成对群胚与其切丛联系起来。虽然在技术上有所不同，但它与我们的构造有着相同的理念：利用群胚以几何方式编码解析数据。这两种构造都产生与稳定化代数的 *Morita* 等价，并在指标理论中发挥作用。

备注 103 (变换群胚)。 对于交叉积 $A = C(X) \rtimes \Gamma$，有 $\mathcal{U}(A) \simeq X \rtimes \Gamma$，即变换群胚。因此，我们的构造将变换群胚推广到了任意C^*-代数，而不仅限于那些由群作用产生的代数。

备注 104 (整体单值群胚)。 叶状结构的整体单值群胚 *[14]* 编码了叶结构，是 *Connes* 非交换几何的核心。其 C^*-代数与叶状结构的卷积代数 *Morita* 等价，类似于我们的 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{U}(A)) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$。

统一视角

比较揭示了更宏大的图景： C^*-代数理论中的群胚方法有两种互补的形式：

- **精确重构群胚** （例如 Weyl 群胚）与 C^*-代数本身同构。这些群胚需要额外的结构（ Cartan 子代数），并产生局部紧的、étale 群胚。

- **Morita 等价群胚** （例如酉共轭群胚）与 C^*-代数（或其稳定化）Morita 等价。这些群胚具有规范定义，且拓扑较粗（Polish），但足以满足 K-理论和指标理论用途。

两种方法各有其用：精确重构有助于分类和细致的结构分析，而 Morita 等价群胚则为指标理论和K-理论提供了灵活性与普适性。

推论 23 (方法选择)。 应根据具体问题选择所用的群胚：

- 对于分类、刚性和精细结构：若存在 *Cartan* 子代数，则使用 *Weyl* 群胚。
- 对于指标理论、 K-理论和普适构造：使用酉共轭群胚，它始终存在，并且与解析不变量自然相连。

总结

酉共轭群胚和 Renault 的 Weyl 群胚代表了将 C^*-代数几何化的两种互补方法：

- **Weyl 群胚** 是一种精确重构工具，需要 Cartan 子代数，并可得到一个局部紧的、 ´étale 群胚。它非常适用于分类和结构研究。
- **酉共轭群胚** 是一种规范的 Morita 等价工具，适用于任意含幺可分 C^*-代数，并具有波兰拓扑。它非常适用于指标理论、 K-理论和普适构造。

• 对于具有拓扑主作用的交叉积，二者在等价意义下重合。对于更一般的代数，二者通过涉及各向同性的商对偶构造相关联。

这一比较将我们的构造置于 C^*-代数理论中更广阔的群胚方法图景之中，并表明酉共轭群胚占据着一个独特而重要的位置：它为解析指标理论提供了一个规范的几何框架，且不依赖于 Cartan 结构的存在。

6.3 可 amen 性与 K-可 amen 性的作用

可 amen 性及其 K 理论类比——K-可 amen 性——是基本的正则性条件，决定了与群作用和 C^*-代数相关的解析不变量与拓扑不变量之间的关系。在交叉积代数和群胚构造的语境中，这些性质确保解析结构忠实地反映底层拓扑数据，从而在算子代数分析与几何指标理论之间搭建起概念桥梁。

群、作用和群胚的可 amen 性。设 Γ 是一个作用于紧豪斯多夫空间 X 的离散群。相应的变换群胚

$$X \rtimes \Gamma$$

编码了由该作用决定的动力系统。当 Γ 可 amenable，或更一般地说，群胚 $X \rtimes \Gamma$ 按 Renault 的定义是可 amenable 时，约化交叉积与全交叉积相同：

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \;\cong\; C(X) \rtimes \Gamma.$$

这一同构大大简化了解析结构：可 amenable 群的 $C_r^*(\Gamma)$ 的核性、约化范数与最大范数相同，以及正则表示的忠实性，共同促成了一个性质良好的理论，其中交叉积的 K-理论清晰地捕捉了动力系统的拓扑信息。对于离散群 Γ，可 amen 性等价于以下条件：在 $\ell^\infty(\Gamma)$ 上存在左不变均值、平凡表示弱包含于正则表示中，或群冯·诺伊曼代数 $\mathcal{L}(\Gamma)$ 是单射的。

K-可 amen 性：一种 K-理论意义下的弱化性质。即使 Γ 不具备可 amenable 性，Cuntz 和 Kasparov 分别独立提出的一种较弱性质，仍可保证 K-理论层面上的良好性质。若局部紧群 Γ 的典范商映射

$$\lambda : C^*(\Gamma) \longrightarrow C_r^*(\Gamma)$$

在 K-理论中诱导出一个同构：

$$K_*(C^*(\Gamma)) \cong K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

等价地，f　对于任意 Γ-C^*-代数 A，全交叉积与约化交叉积具有相同的 K-理论　ry:

$$K_*(A \rtimes \Gamma) \cong K_*(A \rtimes_r \Gamma).$$

这一性质尤其引人注目，因为它对非 amenable 群也可能成立。典型例子是自由群 $\mathbb{F}_n\,(n \geq 2)$：尽管它不是可 amenable 群，Cuntz 证明了 $\mathbb{F}_n$ 具有 K-可 amen 性。更一般地，Julg 和 Valette 证明，任何能在欧几里得空间上以紧商空间为商的适当等距作用的群——也就是说，具有 Haagerup 性质（a-T 可平坦性）的群——都具有 K-可 amen 性。这包括许多李群和作用在树上的群。

定理 29 (Julg–Valette)。 如果群 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上以紧商空间为商进行适当等距作用，那么 Γ 具有 *K*-可 *amen* 性。因此，所有 *a-T-menable* 群都具有 *K*-可 *amen* 性。

注释 105。 可 *amen* 性与 *K*-可 *amen* 性之间的关系可概括如下：

$$\textit{Amenability} \implies \textit{K-Amenability} \implies \textit{K-amenability of all subgroups?}$$

第二个推论较为微妙：虽然 *K*-可 *amen* 性一般并非遗传性质，但许多自然的类（例如 *a-T-menable* 群）在取子群时保持封闭。

对交叉积和 Baum–Connes 组装映射的影响。K-可 amen 性在 Baum–Connes 猜想的背景下，其重要性才充分显现。对于 K-可 amen 群，针对最大群 C^*代数的组装映射是单射，且在许多情况下是同构。这提供了一种强大的计算工具：$C_r^*(\Gamma)$ 的 K理论可以通过分类空间$E\Gamma$中编码的拓扑数据来计算。

在交叉积 $C(X)\overline{\rtimes}\,\Gamma$的情形下，K-可 amen 性确保从满交叉积转到约化交叉积时，解析指标构造保持不变。这种稳定性对于指标理论至关重要，因为人们经常通过几何数据在 $K_0(C(X) \rtimes \Gamma)$ 中构造元素，然后希望通过约化代数上的迹提取数值不变量。

与酉共轭群胚框架的结合。在本文发展的群胚框架中，可 amen 性和 K-可 amen 性保证，通过酉共轭群胚获得的解析构造与交叉积代数的标准解析 K 理论保持兼容。回顾一下，我们已经建立了一个 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K},$$

其中，$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ 表示与该动力系统关联的酉共轭群胚。

当 Γ 具有 K-可 amen 性时，这种等价关系可下降为 K 理论层面上的同构，并同时兼顾全完备化与约化完备化：

$$K_*(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \cong K_*((C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K}) \cong K_*((C(X) \rtimes_r \Gamma) \otimes \mathcal{K}).$$

这种相容性确保群胚 C^*代数的 K理论与 Baum–Connes 组装映射中的解析 K理论相一致，从而以几何群胚模型的形式具体实现猜想所预言的同构。

指标理论的概念意义。从指标理论的角度来看，可 amen 性和 K-可容性确保通过群胚模型获得的解析指标能够忠实地表示等变 K同调中所编码的拓扑指标。更确切地说，对于 K-可容群，图表

$$\begin{array}{ccc} K_0^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma) & \xrightarrow{\mu} & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_0(C(X)\rtimes\Gamma) & \xrightarrow{\cong} & K_0(C(X)\rtimes_r\Gamma) \end{array}$$

可交换，其中竖直映射由在适当的 Γ-空间 X 上求值诱导，而水平映射分别为组装映射和指标映射。

因此，这些性质提供了结构条件，使分析视角与拓扑视角得以完全相容。酉共轭群胚作为几何桥梁应运而生，使这种相容性清晰可见：它同时编码了群的表示论、作用的动力学，以及将二者联系起来的指标理论数据。

备注 106。众多具有几何意义的群已知是 *K-amenable* 的，包括所有可 *amenable* 群、所有 *a-T-menable* 群（因而也包括所有具有 *Haagerup* 性质的群），以及大类李群。因此，上述分析框架适用于几何指标理论中的广泛例子，从非正曲率流形的基本群，到满足适当刚性条件的半单李群的离散子群。

6.4 为什么 K1 和边界映射具有普适性

在指标理论的各种表述中，从 Atiyah–Singer 指标定理到 Baum–Connes 猜想，一个反复出现的特点是奇数 K-理论群 K_1 以及由 C^*代数短正合列导出的边界映射格外突出。在本小节中，我们将论证，这种现象并非偶然，而是反映了算子代数指标构造的一种普遍结构性质：(K_1, ∂) 是将解析可逆性转化为拓扑指标类的典范代数机制。

可逆元与 K_1 的本质。 C^*代数 A 的群 $K_1(A)$ 可以通过 A上的矩阵代数中可逆元或酉元的同伦类，得到具体刻画。具体而言，

$$K_1(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)_0,$$

其中，$\mathrm{GL}_\infty(A)$ 表示矩阵代数上一系列一般线性群的归纳极限，而 $\mathrm{GL}_\infty(A)_0$ 是单位元所在的连通分支。这一刻画揭示了， K_1 从根本上度量了可逆元空间的基本群。

许多解析指标构造都始于这样一个算子：经过商代数后它变得可逆——通常是通过构造其符号，或压缩到某个补子空间来实现的。这种在商代数中的可逆性自然会产生该商代数的 K_1 中的一个类。接下来，指标问题要问的是：将这个可逆元提升为原代数中的实际可逆算子时，存在哪种障碍?

备注 107 （哲学核心）。 解析指标可以被视为将商代数中的可逆元提升到环境代数中的普适障碍。这一视角将看似彼此迥异的指标理论统一在单一的概念框架之下。

K理论中的边界映射作为普适指标机制。给定一个短正合列 C^*-代数

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0,$$

K-理论给出相应的六项正合列

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A/I) \\ {\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_1(A/I) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(I) \end{array}$$

其中连接同态

$$\partial : K_1(A/I) \longrightarrow K_0(I)$$

在指标理论中发挥着核心作用。

这个边界映射将商代数中可逆元素的 K_1-类映射为理想中的 K_0-类。在典型的指标理论情形中——例如 Toeplitz 扩张、伪微分算子扩张，或源自粗几何的扩张——这个 K_0-类恰好表示所研究算子的解析指标。

例16 (Toeplitz 扩张)。 考虑经典的 ***Toeplitz*** 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{T}$是 ***Toeplitz***代数， $\mathcal{K}$ 是紧算子。对于具有绕数的连续函数 $f \in C(S^1)$ ，边界映射给出

$$\partial([f]) = \mathrm{Ind}(T_f) \in K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z},$$

其中 T_f 是符号为 f的 ***Toeplitz***算子。这个初等例子已经体现了指标定理的本质。

为何 K_1 具有特殊性：悬挂与环空间视角。 K_1 的特殊地位通过悬挂同构变得更加清晰:

$$K_1(A) \cong K_0(SA), \quad SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

在此同构下，边界映射 ∂: $K_1(A/I) \to K_0(I)$ 对应于与原扩张的悬挂相关联的指标映射。更概念地说， K_1 编码了环绕信息：正如 π_1 检测拓扑空间的基本群， K_1 检测可逆元的基本群。这种环空间视角解释了为何 K_1 类自然地源自以圆为参数的算子族——这正是谱流和奇指标定理所处的情形。

扩张与 BDF 视角。 K_1 与 C^*-代数扩张之间的联系，在 Brown–Douglas–Fillmore（BDF）理论中得到了系统化，为普适性提供了另一种视角。对于紧致度量空间 X，存在一个自然同构

$$\mathrm{Ext}(X) \cong K_1(C(X)),$$

其中，$\mathrm{Ext}(X)$ 按模紧算子的酉等价对本质谱为 X 的本质正规算子进行分类。边界映射 ∂: $K_1(C(X)) \to K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$ 将一个扩张映射到其关联 Fredholm 算子的指标。这一识别表明， K_1 对提升元素到乘子代数中的障碍进行普适分类，恰好提供了指标理论所需的信息。

与群胚框架的关系。 在本文所发展的群胚框架中，交叉积代数 $C(X) \rtimes \Gamma$ 中的可逆元自然确定 K_1-类。通过下降映射和 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K},$$

这些类对应于相关群胚 C^*-代数的解析 K-理论类 .

随后，边界映射提供了一种机制，使算子或可逆元的解析数据能够在适当的 K-理论群中产生指标类。对于 K-可容群 Γ，相容性图表

$$\begin{array}{ccc} K_1(C(X) \rtimes \Gamma) & \xrightarrow{\partial} & K_0(J) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{G}}} & K_0(\mathcal{J}_{\mathcal{G}}) \end{array}$$

表明，群胚边界映射 $\partial_{\mathcal{G}}$ 所捕获的指标信息，与交叉积代数中的解析指标完全相同。

普适系数定理与 KK-理论。 K_1 及其边界映射的普适性，还得到了普适系数定理（UCT）的进一步印证。对于满足 UCT 的 C^*-代数，边界映射在 Kasparov 乘积下对应于一个典范的 KK-元素：

$$\mathrm{Ind} = \hat{\partial} \otimes_{C(X)} \cdot : KK_1(C(X), \mathbb{C}) \to KK_0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z},$$

ˆ其中 $\partial \in KK_0(C(X) \ \mathbb{C})$ 是视为 KK-类的边界映射。这一实现表明，指标并非只是临时构造，而是双变函子之间的自然变换。

概念综合：普适性原理。基于这些累积的证据，我们可以提炼出一条基本原理：

> 这一对 (K_1, ∂) 构成了分析指标问题的普适接收对象：任何旨在产生指标不变量的几何或解析构造，依其本质，都必须恢复 K 理论中的边界映射，该映射作用于由模理想可逆性所产生的一个 K_1 类。

这一原理解释了为什么边界映射会系统地出现在如此广泛的分析指标构造中——从经典 Fredholm 指标理论到 Baum–Connes 组装映射，从谱流到 C^*-代数的扩张。具体的几何情境决定了如何构造 K_1 类，但提取指标的机制始终相同：应用边界映射。

备注 108(对群胚方法的启示**)**。酉共轭群胚之所以能成为指标理论的模型，恰恰是因为它忠实地再现了这一普适机制。通过将群的表示论、作用的动力学以及算子的解析数据编码进单一的 C^*-代数对象中，它使边界映射能够以几何上清晰明了的方式计算，同时保留其本质的函子性。

结论。边界映射 ∂： $K_1 \to K_0$ 是原始指标不变量，所有其他不变量均由此导出。它的普适性体现在其自然性、与悬挂的相容性、在扩张分类中的作用，以及其作为 Kasparov 乘积的实现。正因如此，任何关于指标理论的概念框架——包括本文提出的群胚方法——都必须将 K_1 和边界映射置于其中心，因为它们构成了分析指标与拓扑指标交流的普适语言。

6.5 下降–指标–迹三角形

本文提出的构造可从概念上归纳为算子代数指标理论中反复出现的三种基本机制：下降、指标和迹。三者共同构成一个结构三角，连接等变拓扑、分析 K-理论与数值不变量。这个三角提供了一个统一框架，揭示了看似迥异的指标理论构造背后共有的架构。

三**个顶点**。下面我们在群作用或群胚框架的背景下，确立三角形的三个角：

• **下降($\mathcal{D}$)**：将几何数据（例如椭圆算子、 K-同调中的循环，或 Baum–Douglas 意义下的几何循环）转化为算子代数中的解析数据的过程。对于 Γ空间 X，等变 KK理论中的下降同态为通向解析结构搭起了第一座桥梁：

$$\mathrm{desc} : KK^*_\Gamma(C(X), \mathbb{C}) \longrightarrow K^*(C(X) \rtimes \Gamma)$$

将等变 K-同调类映射为交叉积代数中的解析 K-理论类。

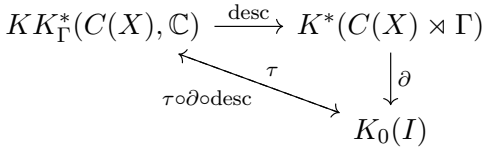
• **指标(Ind)**：解析指标映射，它将算子或其符号数据映射为 K-理论中的类（通常是某个适当代数的 K_0 ）。这是前一小节讨论的边界映射 ∂： $K_1 \to K_0$ ，它源自 C^*-代数的扩张。如果某个算子模理想后变得可逆，它便在商代数的 K_1 中确定一个类，而解析指标则通过连接同态获得

$$\partial : K_1(A/I) \longrightarrow K_0(I).$$

• **迹 (τ)**：相关 C^*代数上的忠实迹（或更一般地，循环余循环），它通过陈特征，或通过 K理论与循环上同调之间的配对，与 K理论配对，从而产生数值不变量。如果 τ： $A \to \mathbb{C}$ 是 C^*代数 A上的迹，则它诱导出一个配对

$$\langle \tau, \cdot \rangle : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

三**角结构**。 这三种机制通过自然变换相互关联，构成了三角形的各条边，其概念图表总结如下：



下降映射将等变拓扑信息转化为解析 K理论。边界映射产生解析指标，而迹配对则提取数值不变量。

注释 109 （统一原则）。 下降–指标–迹三角表达了一般原则：拓扑信息首先被传递到解析 K-理论中，随后通过边界映射转化为指标类，最终通过迹配对进行数值求值。

交换性作为指标定理。 基本观察是，对于良好的几何构造，这个三角形是交换的，即从几何直接得到的数值配对，等于下降、指标与迹的复合。这种交换性正是指标定理的内容：

$$\langle [\text{geometric cycle}], [\text{geometric cocycle}] \rangle = \tau_*(\partial(\text{desc}([\text{geometric cycle}]))). \tag{1}$$

在经典的 Atiyah–Singer 框架中，左侧是 K- 同调类与一个上同调类之间的拓扑指标配对，而右侧则是解析指标与由对流形积分给出的迹的配对。

定理 30（<style>Atiyah–Singer 指标定理表述为解析指标映射与拓扑指标映射的交换性）。 设M 是一个紧光滑流形，并设

$$D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$$

是 M 上复向量丛之间的椭圆伪微分算子。令 $[\sigma(D)] \in K^0(T^*M)$表示 D 的主符号类。那么 $[\sigma(D)]$ 的解析指标与拓扑指标相等：

$$\text{ind}_a([\sigma(D)]) = \text{ind}_t([\sigma(D)]).$$

等价地，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} K^0(T^*M) & \xrightarrow{\text{ind}_a} & \mathbb{Z} \\ & \searrow^{\text{ind}_t} & \uparrow{=} \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

此外，在通过陈特征识别拓扑指标时，

$$\text{ind}(D) = \langle \text{ch}([\sigma(D)]) \smile \text{Td}(T_{\mathbb{C}}M),\ [T^*M] \rangle,$$

对于由复向量丛 E 扭曲的 ***Dirac*** 型算子，这具有熟悉的形式

$$\text{ind}(D) = \int_M \widehat{A}(M) \wedge \text{ch}(E).$$

证明。 我们分几步进行。

步骤 1： K**理论中的符号类。** 椭圆算子 D 的主符号 $\sigma(D)$ 是定义在 T^*M 上的丛映射 $\pi^*E \to \pi^*F$（其中 $\pi\colon T^*M \to M$），且在某个紧子集之外可逆。通过标准的 K 理论构造，这样的可逆符号确定一个类

$$[\sigma(D)] \in K^0(T^*M).$$

步骤 2：解析指标。 椭圆理论保证， D 可延拓为 Fredholm 算子，其定义域和值域分别是 $C^\infty(E)$ 与 $C^\infty(F)$ 的适当 Sobolev完备化。其解析指标定义为

$$\text{ind}_a([\sigma(D)]) := \dim \ker D - \dim \text{coker}\, D \in \mathbb{Z}.$$

这个整数取决于 仅取决于符号类 $[\sigma(D)]$，而不取决于实现它的具体算子选择 .

步骤 3：拓扑指标。Atiyah 和 Singer [32] 定义了一个拓扑指标映射

$$\mathrm{ind}_t : K^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

作为复合：

$$K^0(T^*M) \xrightarrow{\text{Thom}} K^0(M) \xrightarrow{\text{ch}} H^{\text{even}}(M;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cap[M]} \mathbb{Q},$$

其中，Thom 同构将 $K^0(T^*M) \cong K^0(M)$ 识别为（对于 spin^c 流形；一般情况下需要进行扭曲），陈特征将 K理论转换为有理上同调，而与基本类 $[M] \in H_{\dim M}(M;\mathbb{Q})$ 配对则得到一个有理数。一条更深刻的定理表明，这个复合的值实际上落在 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$中。

步骤 4：指标相等（Atiyah–Singer）。Atiyah–Singer 指标定理 [31, 32] 断言，对于任意椭圆算子 D,

$$\mathrm{ind}_a([\sigma(D)]) = \mathrm{ind}_t([\sigma(D)]).$$

这正是陈述中三角形交换性的含义：从 $K^0(T^*M)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的解析路径 ind_a 与拓扑路径 ind_t 相一致。

步骤 5：上同调公式。展开 ind_t 的定义可得一个显式的上同调公式。在 Thom 同构下，类 $[\sigma(D)] \in K^0(T^*M)$ 对应于 $K^0(M)$ 中的一个类。该类的陈特征与复化切丛的 Todd 类配对后，得到拓扑指标：

$$\mathrm{ind}_t([\sigma(D)]) = \langle \mathrm{ch}([\sigma(D)]) \smile \mathrm{Td}(T_{\mathbb{C}}M),\ [T^*M] \rangle,$$

其中配对发生在上同调与同调之间，而 $[T^*M]$ 表示余切丛的基本类。

第 6 步：Dirac 型算子的特殊情形。对于由复向量丛 E扭曲的 Dirac 型算子 D，其符号类满足

$$\mathrm{ch}([\sigma(D)]) = \pi^*(\mathrm{ch}(E) \cup \widehat{A}(M)^{-1}) \cup \text{Thom class},$$

经过推前后，公式简化为

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \widehat{A}(M) \wedge \mathrm{ch}(E).$$

这是几何应用中常见的形式。

因此，指标的解析路径与拓扑路径相一致，而上同调公式提供了一种有效的计算工具。

□

群胚实现。在本文构建的酉共轭群胚框架中，通过 Morita 识别，这三个顶点呈现出尤为具体的形式

$$C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}) \sim_M (C(X) \rtimes \Gamma) \otimes \mathcal{K},$$

这使得可以在群胚 C^*-代数上考察解析类。

1. **下降**由以下函子实现

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} : \underline{\mathbf{KK}}^{\Gamma}(X) \longrightarrow \mathbf{KK}(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}), \mathbb{C}),$$

它将 X 上的 Γ-等变 K-同调循环映射为一个 KK-类，该类表示群胚 C^*-代数中的相关指标问题。这对应于下降映射与 Morita 等价的复合。

2. **指标**变为复合

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}} = \partial_{\mathcal{G}} \circ j : K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) \longrightarrow K_0(\mathcal{J}_{\mathcal{G}}),$$

其中，j 是对应于群胚单位空间的理想的包含映射，$\partial_{\mathcal{G}}$ 是由群胚扩张产生的相关长正合列中的边界映射。

3. **迹**由 $C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$ 上的典范迹 $\tau_{\mathcal{G}}$ 给出，该迹源自群胚的 Haar 系统；将其限制到理想 $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$，并与同构 $K_0(\mathcal{J}_{\mathcal{G}}) \cong \mathbb{Z}$ 复合，其中后者稳定同构于紧算子时适用。

下降-指标复合作为组装。一个关键见解是，复合 $\partial \circ$desc 可被识别为 Baum–Connes 猜想中的解析组装映射。对于 K-可容群 Γ，此复合经由约化交叉积分解：

$$\begin{array}{ccc} K_0^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma) & \xrightarrow{\ \mu\ } & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{desc}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ K_0(C^*(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})) & \xrightarrow[\partial_{\mathcal{G}}]{} & K_0(\mathcal{J}_{\mathcal{G}}) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

该图表的交换性体现了几何组装映射与群胚模型中具体指标之间的相容性。

迹是通往不变量的桥梁。迹顶点在连接抽象 K理论指标与可计算的数值不变量方面发挥着关键作用。对于带有忠实迹 τ 的群胚 C^*-代数，以下复合映射

$$\tau_* \circ \partial_{\mathcal{G}} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}} : K_0^{\Gamma}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

可由几何数据得到一个数值指标。在许多几何情形下，这个数可以与经典不变量对应：

- 对于 Spin^c 流形上的 Dirac 型算子，这将得到 $\widehat{A}$-属。
- 对于以底空间为参数空间的算子族，这将得到一个 K-理论类；该类与 Chern 特征配对后，可给出示性数。
- 对于覆盖空间上的椭圆算子，这将得到 L^2-指标，即与冯·诺伊曼迹配对后的结果。

命题 23（通过迹得到数值指标）。对于 *Baum–Douglas* 意义下的几何循环（M、E、f），其中 $f\colon\ M \to X$ 是一个 Γ-等变映射，由下降–指标–迹三角形得到的数值指标等于

$$\int_M \mathrm{ch}(E) \wedge \mathrm{Todd}(TM) \wedge f^*(\omega),$$

其中，ω 是由迹确定的、定义在 X 上的适当上同调类。

推广到更高阶迹。当迹顶点替换为更一般的循环余循环时，这个三角形自然推广。对于定义在 C^* $(\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma})$上的 d维循环余循环 $\tau^{(d)}$，其配对

$$\langle \partial_{\mathcal{G}}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(\text{geometric cycle})), \tau^{(d)} \rangle \in \mathbb{C}$$

产生能够捕捉更精细几何信息的高阶数值不变量。这一推广将下降–指标–迹三角形与非交换几何的整套理论联系起来，包括：

- 从 K-理论到循环同调的陈特征。
- 局部指标理论中的 JLO 余循环。
- Godbillon–Vey不变量及其他次级特征类。

概念意义。 下降–指标–迹三角形提供了一个统一框架，揭示了看似迥异的指标理论构造所共有的结构：

> 每个指标定理都可以理解为一个三角形的交换性，该三角形将几何下降与算子代数指标及其后的迹联系起来。具体的几何情境决定了下降映射的性质和迹的选择，但其底层三角结构始终不变。

这一视角阐明了为什么指标理论自然地处于几何、分析与代数的交汇处：几何顶点提供原始数据，分析顶点通过算子代数处理这些数据，而代数顶点则通过迹和循环上同调提取可计算的不变量。

与 Baum–Connes 猜想的关系。 Baum–Connes 猜想可以视为断言：对于适当的 Γ-空间 X，下降-指标复合

$$\partial \circ \mathrm{desc} : K_*^{\Gamma}(X) \longrightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

经过适当的完备化后是一个同构。因此，下降–指标–迹三角提供了一种从局部到整体的原理：如果该三角对一族局部几何循环可交换，那么整体指标映射便由这些局部贡献确定。

推论24。 在群胚框架中，*Baum–Connes* 组装映射经由下降–指标–迹三角分解，其中群胚 C^*-代数为左侧提供了一个具体模型，而迹配对则将其与数值不变量联系起来。

结论。 下降–指标–迹三角概括了指标理论的基本架构。在酉共轭群胚框架中，这个三角呈现出格外清晰的形式：下降成为从等变几何到群胚 C^*-代数的过渡，并通过 Morita 等价实现；指标成为群胚长正合列中的边界映射；迹则成为源自群胚 Haar 系统的典范泛函。这个三角的交换性不仅仅是一项一致性检查，更准确地说，它表明群胚模型忠实地呈现了原始几何情境中的指标理论内容。

注110 （结构统一性）。 因此，下降–指标–迹三角为算子代数和非交换几何中的许多指标构造提供了统一的视角。等变拓扑通过 KK-理论体现，解析结构则通过交叉积代数或群胚 C^*-代数体现，而数值不变量则通过迹配对体现。这一视角凸显了解析组装映射、 K-理论中的边界映射，以及经典和非交换指标理论中出现的迹公式背后的结构统一性。

7 酉共轭群胚：Baum–Connes 猜想的类比

本文提出的构造表明，与某个C^*-代数相关联的酉共轭群胚，可能发挥类似于 Baum–Connes 纲领中变换群胚的作用。这一观察启发了以下猜想性框架：它提出，可以从与某个 C^*-代数的内禀对称群胚相关联的等变拓扑数据中恢复其 K-理论。

7.1 猜想

设 A 是一个可分含幺的 C^* 代数，并令

$$\mathcal{G}_A$$

表示其酉共轭群胚，其单位空间 $\mathcal{G}_A^{(0)} \cong \widehat{A}$ 由酉等价类意义下的不可约表示组成。正如前文所证，相关的群胚 C^* 代数满足 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}.$$

猜想 2（酉共轭群胚猜想）。存在一个自然的组装映射

$$\mu_{\mathcal{G}_A} : K^*_{\mathcal{G}_A}(\mathcal{G}_A^{(0)}) \longrightarrow K_*(C^*(\mathcal{G}_A))$$

对于一大类 C^* 代数，该映射是同构，其中包括所有带有 *Cartan* 子代数的核 C^* 代数，以及所有满足 *Baum–Connes* 猜想的 Γ 所对应的交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$。

在 Morita 识别 $K_*(C^*(\mathcal{G}_A)) \cong K_*(A)$ 下，该猜想预言， A 的解析 K-理论可以从与酉共轭群胚相关的等变拓扑数据中恢复。

7.2 与经典 Baum–Connes 猜想的关系

该猜想并非 Baum–Connes 猜想的推广，而是一个概念上的类比：它拓展了这样一种思想，即 C^*-代数的表示论——由其酉共轭群胚编码——应当决定其 K-理论。当 $A = C_r^*(\Gamma)$ 时，酉共轭群胚恢复了群 Γ 本身（因为不可约表示对应于 Γ的不可约表示），而该猜想具体化为： Γ 的 Baum–Connes 组装映射是一个同构——这正是 Baum–Connes 猜想。

类似地，对于交叉积 $A = C(X) \rtimes \Gamma$，我们有 $\mathcal{G}_A \cong X \rtimes \Gamma$，该猜想归结为群 Γ 作用于 X时的 Baum–Connes 猜想。因此，对于所有已知满足 Baum–Connes 猜想的群和作用，该猜想也成立。

备注 111。 这个猜想可以视为 *Baum–Connes* 猜想的一种非交换类比：其中，作用群被酉共轭所产生的内禀对称群胚取代。在这一框架中，群胚 $\mathcal{G}_A$ 扮演着类似于经典 *Baum–Connes* 框架中出现的变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 的角色。

7.3 来自例子的证据

本文所考察的例子表明，该猜想在若干重要情形下成立，这为酉共轭群胚能够捕捉代数的本质解析信息提供了证据：

• 交叉积： </style}对于 $A = C(X) \rtimes \Gamma$，我们有 $\mathcal{G}_A \cong X \rtimes \Gamma$，该猜想因此归结为 Baum–Connes 猜想。因此，对于所有 Baum–Connes 猜想已知成立的群，该猜想也成立，其中包括可 amenable 群、a-T-menable 群以及许多双曲群。

• **核 Cartan 对：** 对于具有 Cartan 子代数 D的核 C^*-代数 A，Renault 的 Weyl 群胚 $\mathcal{G}_{(A,\ D)}$ 是 $\mathcal{U}(A)$ 的商空间。由此，该猜想将意味着 $K_*(A)$ 与此 Weyl 群胚的 K 理论同构，从而为计算这类代数的 K 理论提供一种新方法，并与分类理论中的已知结果一致。

• **连续迹代数：** 对于具有紧李群 G的 $A = \mathcal{K}(L^2(G))$，该猜想预言表示论与指标理论之间存在某些关系，这些关系与彼得–外尔定理和等变指标理论相一致。

7.4 未解决的问题与未来方向

如上所述，该猜想的范围刻意设得很广；其确切适用范围仍有待确定。潜在的反例可能来自表示论具有病态性质的 C^*-代数，例如没有 Cartan 结构的单C^*-代数。以下问题指明了未来研究的方向：

1. 如果 A 含有 Cartan 子代数 D，Weyl 群胚 $\mathcal{G}_{(A,D)}$与酉共轭群胚 $\mathcal{G}_A$之间的精确关系是什么？能否总是通过商空间构造从 $\mathcal{G}_A$ 得到 $\mathcal{G}_{(A,D)}$ ，就像带有各向同性的交叉积情形那样？ 2. 酉共轭群胚具有自然的波兰拓扑。这种拓扑是否有一种几何解释，能够导出性质良好的组装映射？能否利用它为任意 C^*-代数定义一种 Baum–Connes 组装映射的版本，并使其对核性或其他正则性条件敏感？ 3. Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_A) \sim_M A \otimes \mathcal{K}$ 表明， $\mathcal{G}_A$ 编码了 A的 K理论。群胚 $\mathcal{G}_A$ 在多大程度上编码了 A的全部 KK理论？所猜想同构的双变类似物是什么？ 4. 能否用 Kasparov 理论重新表述这一猜想，从而得到真正的 KK理论组装映射？适当的系数代数是什么？

注释 112 (指导原则)。 这里提出的猜想应被视为一项指导原则，而非定论。其主要价值在于提出一种统一的视角：对于任意 C^*-代数，酉共轭所编码的动力学数据应能决定 K 理论不变量；正如对于群 C^*-代数，群在其对偶上的作用所产生的动力学通过 *Baum–Connes* 组装映射决定了 K 理论。这一原则是否普遍成立，以及成立需要满足哪些条件，仍是未来研究中令人着迷的方向。

交叉引用补充说明

本附录记录了少量辅助标签和归一化陈述，用于稳定正文中的交叉引用。其目的并非引入新结果，而是明确说明论述中已隐含使用的若干标准约化和约定。

定义 31. 离散群 Γ 称为可 *amenable* 的，如果它在 $\ell^\infty(\Gamma)$上存在不变均值。在本文讨论的交叉积情形中，可 *amenable* 性确保在组装与下降识别所需的层面上，满交叉积与约化交叉积一致。

定义 32. 对于可逆元 $u \in M_n(A_\theta)$，相应的等变类是在第 *4.12* 节所采用的下降形式主义下，由相应的算子论循环确定的等变 KK-理论中的类。

命题 24. 用于酉共轭群胚的表示论模型，对不会影响相关酉轨道数据的辅助选择并不敏感；特别是，由此得到的 *Morita*类仅取决于模型所保留的底层共轭几何。

证明. 我们证明，酉共轭群胚构造在不会影响底层酉轨道数据的辅助选择下保持不变，并且由此得到的Morita类完全由代数的共轭几何决定。

步骤 1：酉共轭群胚的典范性。 回顾论文 I，酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 完全由 C^*代数 $\mathcal{A}$ 本身定义：其单位空间由$\widehat{\ }$有序对 $(B,\ \chi)$构成，其中 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是一个含幺交换子代数，$\chi \in \widehat{B}$ 是一个特征，而其箭头由酉共轭给出：

$$u : (B, \chi) \longrightarrow (uBu^*, \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^{-1}}), \qquad u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}).$$

这个定义不涉及任何辅助选择；它是 $\mathcal{A}$ 的内在属性。因此，作为一个集合论对象，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 由 $\mathcal{A}$ 唯一确定。

步骤 2：辅助选择在可测／拓扑结构中的作用。 在 I 型情形下，要为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 配备支持 Haar 系统和可测表示场的博雷尔结构（或拓扑结构），还需要作出额外选择。这些选择包括：

- $\mathcal{A}$ 的不可约表示（对偶空间 $\widehat{\mathcal{A}}$）的可测参数化；
- 将交换子代数上的特征扩张到整个代数的可测选择；
- 单位空间上的 GNS 表示可测场。

在 I 型情形下，$\widehat{\mathcal{A}}$ 上标准博雷尔结构的存在保证了可以作出此类选择，而不同选择会得到同构的博雷尔群胚（见 [1, 命题 2.1]）。

步骤 3：在保持酉轨道数据的选择下具有不变性。 设 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(2)}$ 是由表示论的不同可测参数化产生的酉共轭群胚的两种构造。根据构造，它们具有相同的底层集合论结构：单位空间是同一个集合 $\{(B,\ \chi)\}$，而箭头也是同一个集合 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \times \widehat{\mathcal{A}}^{(0)}$。唯一的差异在于对这些集合选择的博雷尔（或拓扑）结构。

假设两种不同的参数化产生相同的酉轨道数据，即它们为单位空间中的每个点赋予酉等价的同一个 GNS 表示。那么，由此得到的群胚在底层集合上的恒等映射下 Borel 同构，因为两者的博雷尔结构都由同一族部分求值映射 $\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathbb{C}_\infty$ 生成（见论文 I，第 3 节）。因此，这两种构造产生同构的 Borel 群胚。

步骤 4：此类选择下 Morita 等价的不变性。当 $\mathcal{A}$ 为非 I 型时，无法按照论文 I 的意义直接将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 构造为拓扑群胚或 Borel 群胚。相反，我们采用第 3.3 节的替代策略：使用一个具体的几何模型 G （例如变换群胚或 Weyl 群胚），该模型与本应得到的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$Morita 等价。

对此类模型的不同选择（例如不同的 Cartan 子代数、不同的横截面）会产生不同的群胚 G_1 和 G_2。然而，根据群胚 Morita 等价的一般理论（参见 [21,命题 2.2] 和定理 4），如果两个群胚 G_1 和 G_2 都与同一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ Morita 等价（也就是说，它们编码了相同的共轭几何），那么它们彼此 Morita 等价：

$$G_1 \sim_M G_2.$$

因此，它们的约化群胚 C^*-代数强 Morita 等价：

$$C_r^*(G_1) \sim_M C_r^*(G_2).$$

步骤 5：Morita 类由共轭几何决定。 $\mathcal{A}$的共轭几何指的是交换上下文空间上的酉轨道结构，即 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 对有序对集合 $(B,\ \chi)$ 的作用。编码相同酉轨道数据的两个不同几何模型 G_1 和 G_2 会导出相同的 Morita 类。事实上，Muhly–Renault–Williams 定理（定理 4）保证， $C_r^*(G)$ 的 Morita 等价类仅取决于 G 作为群胚的等价类，而 G 的等价类则由酉作用的轨道结构决定。

因此，任何能够忠实刻画 $\mathcal{A}$ 的酉轨道数据的构造，都会产生一个与典范对象 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ Morita 等价的群胚 C^*-代数（若后者存在）；不同的此类构造会产生 Morita 等价的代数。

第 6 步：结论。我们已经证明：

- 在 I型情形下，保留酉轨道数据的不同可测参数化会产生同构的博雷尔群胚，因而得到 Morita 等价的 C^*-代数。
- 在非 I 型情形下，编码相同共轭几何的不同几何模型作为群胚彼此 Morita 等价，因此会产生强 Morita 等价的 C^*-代数。

因此，酉共轭群胚所采用的表示论模型不受那些不会影响相关酉轨道数据的辅助选择的影响，而所得的 Morita类仅取决于该代数底层的共轭几何。证明至此完成。

□

引理 10. 群胚等变 KK-理论中的下降映射对于由 *Morita* 双丛实现的等价具有自然性。因此，正文中使用的比较映射在由这些双丛诱导的典范同构下可交换。

证明. 我们证明，群胚的 Kasparov 下降映射对于 Morita 等价具有函子性，并且在 K-理论上诱导的映射与由等价双丛产生的典范同构相容。

步骤 1：设定与记号。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 为带有 Haar 系统的第二可数、局部紧豪斯多夫群胚，并设 Z 为定义 7 意义下的一个 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$-等价双丛。根据 Muhly–Renault–Williams 定理（定理 4），相应的约化群胚 C^*-代数强 Morita 等价，其实现双模为印迹双模 $\mathcal{E} = L^2(Z)$。

令 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathrm{desc}_{\mathcal{H}}$ 分别表示群胚$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$在等变 KK-理论中的下降同态。这些是如下形式的自然变换

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}} : KK^*_{\mathcal{G}}(A,B) \longrightarrow KK^*(C^*_r(\mathcal{G},A), C^*_r(\mathcal{G},B)),$$

对于 $\mathcal{H}$ 也同样如此，其中 $C^*_r(\mathcal{G},\ A)$ 表示系数取值于 $\mathcal{G}$-C^*-代数 A 的约化群胚 C^*-代数（见 [13,14,22]）。

步骤 2：Morita 等价在等变 KK理论上诱导出同构。等价双丛 Z 实现了一个自然同构

$$\Psi_* : KK^*_{\mathcal{G}}(A,B) \xrightarrow{\cong} KK^*_{\mathcal{H}}(A_Z, B_Z),$$

其中， A_Z 和 B_Z 是沿 Z 通过限制和诱导得到的诱导 $\mathcal{H}$-C^*-代数（见 [22,第 6] 节和 [13, 第 4] 节）。具体而言，对于一个 $\mathcal{G}$-C^*- 代数 A，诱导的 $\mathcal{H}$-C^*- 代数 A_Z 由平衡张量积给出

$$A_Z = C^*_r(Z) \otimes_{C_0(\mathcal{G}^{(0)})} A,$$

其右 $\mathcal{H}$ 作用由 $\mathcal{H}$ 在 Z 上的右作用诱导。

步骤 3：Morita 等价下下降的自然性。下降映射具有函子性，即对于任意 $\mathcal{G}$-C^*-代数 A 和 B，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} KK^*_{\mathcal{G}}(A,B) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & KK^*(C^*_r(\mathcal{G},A), C^*_r(\mathcal{G},B)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*} \\ KK^*_{\mathcal{H}}(A_Z,B_Z) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{H}}} & KK^*(C^*_r(\mathcal{H},A_Z), C^*_r(\mathcal{H},B_Z)), \end{array}$$

其中 Φ_* 是由 Morita 等价 $C^*_r(\mathcal{G}) \sim_M C^*_r(\mathcal{H})$ 及典范识别诱导的同构

$$C^*_r(\mathcal{G},A) \cong C^*_r(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(\mathcal{G}^{(0)})} A, \qquad C^*_r(\mathcal{H},A_Z) \cong C^*_r(\mathcal{H}) \otimes_{C_0(\mathcal{H}^{(0)})} A_Z.$$

该图表的交换性源于以下事实:

- 下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}$ 的定义是将等变 Kasparov 循环与 $\mathcal{G}$ 的正则表示作平衡张量积（见 [22,第 3] 节）。
- Morita 等价 Z 诱导了 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 的正则表示之间的等价，该等价由双模 $L^2(Z)$ 实现。
- 因此，下降与 Morita 同构的复合，同构于将下降映射应用于诱导循环（针对 $\mathcal{H}$），但相差典范同构 Ψ_*。

步骤 4：限制到 K-理论。当 $B = \mathbb{C}$ 时，下降映射化为一个同态

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}} : KK^*_{\mathcal{G}}(A,\mathbb{C}) \longrightarrow K_*(C^*_r(\mathcal{G},A)),$$

对于 $\mathcal{H}$ 也同样如此。在这种情况下，步骤 3 中的图表变为

$$\begin{array}{ccc} KK^*_{\mathcal{G}}(A,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & K_*(C^*_r(\mathcal{G},A)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*} \\ KK^*_{\mathcal{H}}(A_Z,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{H}}} & K_*(C^*_r(\mathcal{H},A_Z)). \end{array}$$

步骤 5：应用于比较映射。在正文中，实现映射 $\rho_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\rho_{\mathcal{H}}$ 正是定义为以下复合

$$\rho_{\mathcal{G}_A} = \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_A} \circ \Psi_{\mathcal{G}_A}^{-1}, \qquad \rho_{\mathcal{H}} = \mathrm{desc}_{\mathcal{H}} \circ \Psi_{\mathcal{H}}^{-1},$$

其中， $\Psi_{\mathcal{G}_A}$ 和 $\Psi_{\mathcal{H}}$ 是由分别与共同的变换群胚 $X \rtimes \Gamma$的 Morita 等价所诱导的同构。

根据步骤 3 中建立的自然性，对于任意等变类$\xi \in KK^*_{\mathcal{G}_A}(C_0(\mathcal{G}_A^{(0)}) \ \mathbb{C})$，我们有

$$\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_A}(\xi)) = \mathrm{desc}_{\mathcal{H}}(\Psi_*(\xi)),$$

其中， Φ_*是由 Morita 等价 $C_r^*(\mathcal{G}_A) \ \sim_M \ C_r^*(\mathcal{H})$诱导的 K-理论同构。

第 6 步：诱导同构的相容性。令 $\Theta_{\mathcal{H}}$： $K_*(C_r^*(\mathcal{G}_A)) \ \to \ K_*(C_r^*(\mathcal{H}))$为由 Morita 等价 $\mathcal{G}_A \ \sim_M \ \mathcal{H}$ 诱导的典范同构（参见定理 26 证明中的步骤 2）。那么，图表的交换性表明

$$\rho_{\mathcal{H}} \circ \Psi_* = \Theta_{\mathcal{H}} \circ \rho_{\mathcal{G}_A}.$$

步骤 7：结论。我们已证明，下降映射对于 Morita 等价具有自然性：对于任意实现 $\mathcal{G} \ \sim_M \ \mathcal{H}$的等价双丛 Z ，存在典范同构Θ： $K_*(C_r^*(\mathcal{G}, \ A)) \ \to K_*(C_r^*(\mathcal{H}, \ A_Z))$，使得

$$\Theta \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}} = \mathrm{desc}_{\mathcal{H}} \circ \Psi_*.$$

因此，正文中使用的比较映射——具体而言，实现映射 $\rho_{\mathcal{G}_A}$ 和$\rho_{\mathcal{H}}$——与由 Morita 等价双丛诱导的典范同构相交换。这恰好表明，下降映射关于 Morita 等价具有自然性，从而完成证明。

□

推论 25. 在本文讨论的非 I 型情形中，由表示数据得到的自然单位空间模型不一定是豪斯多夫空间。这也是采用 *Morita* 模型，而非简单直接进行拓扑识别的原因之一。

证明. 我们将证明，在非 I 型情形中，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的自然拓扑（通过部分求值映射定义时）不是豪斯多夫的；而采用 Morita 等价的几何模型即可避开这一病态现象。

步骤 1：单位空间及其自然拓扑。 回顾论文 I，酉共轭群胚的单位空间为

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} = \{(B, \chi) \mid B \subseteq \mathcal{A} \text{ unital commutative } C^*\text{-subalgebra}, \ \chi \in \widehat{B}\}.$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的自然拓扑由部分求值映射生成

$$\mathrm{ev}_a : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty, \qquad \mathrm{ev}_a(B, \chi) = \begin{cases} \chi(a) & \text{if } a \in B, \\ \infty & \text{if } a \notin B, \end{cases}$$

对每个 $a \in \mathcal{A}$，其中 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{C}$的一点紧化。此拓扑是由族 $\{\mathrm{ev}_a\}_{a \in \mathcal{A}}$诱导的始拓扑，使得在 I 型情形下， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 成为一个波兰空间（参见论文 I，第 3 节）。

步骤 2：非 I 型情形中的非豪斯多夫现象。在非 I 型代数中，例如无理旋转代数 A_θ 以及具有极小作用的可和交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，表示理论缺乏在单位空间中分离点所需的正则性。具体而言，考虑在第4.7小节中得到的 A_θ 单位空间的参数化：

$$\mathcal{G}_{A_\theta}^{(0)} \cong (S^1 \times \mathbb{Z})/\sim,$$

其中，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$z, n \sim e^{2\pi i k\theta} z, n + k$。在由 $S^1 \times \mathbb{Z}$ 诱导的商拓扑下（其中 S^1 紧且 $\mathbb{Z}$ 离散），当 $n \neq n'$ 时，不同的点 $[(z, n)]$ 和 $[(z, n')]$ 无法通过不相交的开邻域分离。事实上，$[(z, n)]$ 的任意开邻域都包含形如 $[(e^{2\pi i k\theta} z, n+k)]$ 的点，其中 k 足够接近 0；由于无理旋转作用的极小性，这些点可以逼近任意 $[(z, n')]$，其中 n' 任意。

步骤 3：极小作用产生非豪斯多夫商空间。更一般地，对于交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，若 Γ 可 amenable 且该作用是极小的（即每个轨道在 X 中都是稠密的），定理 18 给出

$$\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}^{(0)} \cong (X \times \Gamma)/\sim,$$

其中，$x, \gamma \sim \gamma' \cdot x, \gamma'\gamma$。当该作用是极小的且 Γ 为无限集时，商拓扑是非豪斯多夫的。给定 $x \in X$ 和不同的 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$，点 $[(x, \gamma)]$ 和 $[(x, \gamma')]$ 具有这样的性质：任何包含其中一个点的开集也包含另一个点，因为 x 的轨道是稠密的，因此可以在 X 中将代表元选取得任意接近。

步骤 4：I 型情形作为对照。在 I 型情形中，表示论足够平滑，单位空间因而具有豪斯多夫拓扑。例如，当 $\mathcal{A} = B(H)$ 或 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ 时，单位空间可以识别为纯态空间；该空间在弱-$*$ 拓扑下是豪斯多夫的。非 I 型情形中这一性质的缺失，体现了缺乏对不可约表示进行良好可测参数化的情况（参见注释20）。

步骤 5：以 Morita 模型作为补救。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的非豪斯多夫拓扑给构造 Haar 系统、表示的可测场以及应用群胚等变 KK理论中的标准结果带来了重大技术障碍。为克服这些困难，我们采用第 3.3 节概述的替代策略：不直接处理病态的单位空间，而是将 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 替换为一个具有良好（豪斯多夫）拓扑的 Morita等价群胚 G。

对于无理旋转代数 A_θ，变换群胚 $S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ 可作为这样的替代；其单位空间是豪斯多夫圆 S^1，并且它与 $\mathcal{G}_{A_\theta}$ Morita 等价（定理 9）。对于可 amenable 交叉积 $C(X) \rtimes \Gamma$，变换群胚 $X \rtimes \Gamma$ 提供了一个豪斯多夫模型，与 $\mathcal{G}_{C(X)\rtimes\Gamma}$ Morita 等价（定理 19）。

第 6 步：结论。我们已经证明，在非 I 型情形下，由部分求值映射诱导的单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的自然拓扑是非豪斯多夫的，这是由于群作用下轨道的稠密性，以及缺少对不可约表示的正则参数化。这种病态现象使得我们必须采用 Morita 等价的几何模型（例如变换群胚）；这些模型具有豪斯多夫单位空间，并允许运用标准分析工具。这正是采用 Morita 模型，而不直接对酉共轭群胚进行朴素拓扑识别的原因。

□

例18. 对于典范生成元 $U \in A_\theta$，通过对可逆元 U 应用第 *4.12* 节中的构造，可得到相应的等变类。

例18. 对于典范生成元 $V \in A_\theta$，以与例 *17* 相同的方式，使用可逆元 V 即可得到相应的等变类。

参考文献

[1] S.-Y. Chang，《I 型 C^*-代数的酉共轭群胚：拓扑、Fell 连续性与典范对角嵌入》，arXiv:2603.04520，2026年。[2] S.-Y. Chang，《通过酉共轭群胚得到的 Fredholm 算子指标定理》，arXiv:2603.07386，2026年。[3] M. Pimsner 和 D. Voiculescu，“某些交叉积 C^*-代数的 K-群与 Ext-群的正合序列”，《算子理论杂志》，第 4 卷，第 1 期，第 93–118 页，1980年。[4] B. Blackadar，《算子代数的 K 理论》，第 2 版，剑桥大学出版社，1998年。[5] M. Rørdam、F. Larsen 和 N. Laustsen，《 C^*-代数的 K 理论导论》，剑桥大学出版社，2000年。[6] A. Connes，《非交换几何》，学术出版社，1994年。[7] A. Connes，“C^*-代数与微分几何”，《巴黎科学院报告》A-B 系列，第 290 卷，第 13 期，第 A599–A604 页，1980年。[8] A. Connes 和 G. Skandalis，“叶状结构的纵向指标定理”，《数学科学研究所刊物》20 (1984)，1139–1183。[9] J. Renault，《C*-代数的群胚方法》，《数学讲义》793，施普林格，1980年。[10] J. Renault，“ C^*-代数中的 Cartan 子代数”，《爱尔兰数学学会通报》，第 61 期，第 29–63 页，2008年。[11] M. A. Rieffel，“与无理旋转相关的 C^*-代数”，《太平洋数学杂志》93 (1981)，415–429。[12] P. Baum 和 A. Connes，“离散群的陈特征”，载于《拓扑学盛会》，AcademicPress，1988年，第 163–232 页。[13] J.-L. Tu，“群胚的 Baum–Connes 猜想”，《当代数学》227 (1999)，227–242。[14] G. G. Kasparov，“等变 KK 理论与 Novikov猜想”，《数学发明》91 (1988)，147–201。[15] R. Exel，“Hilbert C*-双模交叉积的 Morita 等价”，《美国数学会汇刊》350 (1998)，3043–3054。[16] N. P. Brown 和 N. Ozawa，《 C^*-代数与有限维逼近》，《数学研究生教材》第 88 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008年。[17] D. P. Williams，《 C^*-代数的交叉积》，《数学调查与专著》第 134 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。[18] J. Cuntz，“离散群的 K理论可 amen 性”，《纯粹与应用数学杂志》，第 344 卷，第 180–195 页，1983年。

[19] P. Julg 和 A. Valette，“K理论对 $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 的可 amen 性及其在相关树上的作用”，《函数分析杂志》，第 58 卷，第 2 期，第 194–215 页，1984年。[20] N. Higson 和 G. Kasparov，“在希尔伯特空间上适当且等距作用的群的 E理论与 KK理论”，《数学创刊》第 144 卷，第 1 期，第 23–74 页，2001。[21] P. S. Muhly、J. N. Renault 和 D. P. Williams，“群胚 C^*-代数的等价与同构”，《算子理论杂志》，第 17 卷，第 1 期，第 3–22 页，1987年。[22] P.-Y. Le Gall，“等变 Kasparov 理论与群胚”，K 理论，第 16 卷，第 4 期，第 361–390 页，1999年。[23] M. A. Rieffel，“与无理旋转相关的 C^*-代数”，《太平洋数学杂志》，第 93 卷，第 2 期，第 415–429 页，1981年。[24] P. Baum、A. Connes 和 N. Higson，“真作用的分类空间与群C^*-代数的 K 理论”，《C*-代数：1943–1993》（德克萨斯州圣安东尼奥，1993），《当代数学》167，美国数学会，1994年，第 240–291 页。[25] C. Anantharaman-Delaroche 和 J. Renault，《可和群胚》，《数学教育丛刊》第 36 卷，数学教育出版社，日内瓦，2000年。[26] A. L. T. Paterson，《可 amen 性》，《数学调查与专著》第 29 卷，美国数学会，1988年。[27] J. Dixmier，《 C^*-代数》，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1977年。[28] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》，第二卷，学术出版社，1986年。[29] G. K. Pedersen，《 C^*-代数及其自同构群》，学术出版社，1979年。[30] B. Blackadar，《算子代数： C^*-代数与冯·诺伊曼代数理论》，《数学科学百科全书》第 122 卷，施普林格，2006年。[31] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer，“紧流形上椭圆算子的指标”，《美国数学会通报》，第 69 卷，第 422–433 页，1963年。[32] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer，“椭圆算子的指标。I”，《数学年刊》，第 87 卷，第 3 期，第 484–530 页，1968年。[33] OpenAI，“ChatGPT（2025年3月版）”，大语言模型，2025年。 [在线]。网址：https://openai.com/chatgpt[34]DeepSeek，“DeepSeek（2025年2月版）”，大语言模型，2025年。 [在线]。网址：https://www.deepseek.com/[35] 本文所用标准 Morita 等价与下降相容性结果的完整证明，见 Le Gall [22], MRW [21], 和 Tu [13]。[36] 关于群胚模型与轨道空间中的非豪斯多夫现象，参见 Renault [9]和 Anantharaman-Delaroche–Renault [25]。