ON 余交换霍普夫幺半群的半阿贝尔性 S

ANDREA SCIANDRA 和 Zhenbang Zuo

摘要。通过为余交换 Hopf 代数中已知的 Newman 双射对应提供适当的推广，我们证明，在满足忠实（余）平坦条件时，任意阿贝尔对称幺半范畴中余交换霍普夫幺半群所构成的范畴都是半阿贝尔的。这一结果统一并推广了迄今已知的余交换霍普夫代数和余交换着色霍普夫代数的半阿贝尔性。作为半阿贝尔性的推论，余交换霍普夫幺半群范畴也具有作用可表示性。最后，我们证明，余交换霍普夫幺半群范畴中的阿贝尔对象恰好是交换且余交换的霍普夫幺半群，因此它们构成一个阿贝尔范畴。

arXiv:2603.22200v1 [math.CT] 23 Mar 2026

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 尖点性、极限与原型模性 5 4. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的余等化子 8 5. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的纽曼定理 11 6. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中核的一个等价刻画 20 7. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性 24 8. 关于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的半阿贝尔性 35 参考文献 40

1. 引言

余交换 Hopf 代数在许多方面与群相似，正如[51, 52] 中所指出的，其中在 Hopf 代数的框架下证明了群的一些经典同构定理。事实上，余交换 Hopf 代数与余交换余代数这一笛卡尔幺半范畴中的内群范畴相一致，因此分裂短五引理对它们成立。此外，M. Gran、F. Sterck 和 J. Vercruysse 在 [27], 中证明了它们构成一个半阿贝尔范畴，从而推广了 [22] 中得到的先前结果；该结果假设基域具有零特征。余交换 Hopf 代数范畴的半阿贝尔性可视为 Takeuchi 结果的一种非交换推广。Takeuchi 结果断言，域上的交换且余交换 Hopf 代数构成一个阿贝尔范畴 [48], ，而这一结果推广了 Grothendieck 关于有限维情形的结论。

半阿贝尔范畴于 [33]年被引入，旨在概括群、环和代数所具有的典型代数性质。它们为研究非阿贝尔结构的根理论、交换子理论以及（余）同调理论提供了良好的范畴框架，也自然地呈现了半直积、 [18], 内作用 [19]和交叉模[32]等概念。半阿贝尔范畴的经典例子包括群、李代数、环（不一定含单位元）以及交换的 $\mathbb{C}^*$-代数。

余交换 Hopf 代数的半阿贝尔性随后被推广到余交换颜色霍普夫代数 [45], ，即阿贝尔群分次向量空间范畴中的余交换霍普夫幺半群 G，条件是后者为有限生成的，且基域的特征

2020 数学主题分类。主要分类号：18E13、16T05；次要分类号：18M05、18G50。关键词和短语。余交换霍普夫幺半群，半阿贝尔范畴，纽曼双射。

不等于 2（若 G 的基数有限且为奇数，则无需此条件）。这引出了一个问题：通过考察任意辫编织幺半范畴中的余交换霍普夫幺半群，这一结果能够推广到什么程度?

本文证明，在任意阿贝尔对称幺半范畴（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$）中，余交换霍普夫幺半群所构成的范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 按 [9], 的意义是正合的；也就是说，它是一个正则范畴，且其中任意等价关系都是一个核对——前提是（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$）满足某些忠实（余）平坦条件。由于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Grp}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 按 [14], 的意义也是原型模的，因此只要它具有二元余积，它就是半阿贝尔的。本文的主要结果涉及范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性，前提是范畴（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$）满足上述条件。对于余交换 Hopf 代数，这一结果已于[27] 利用纽曼定理 [39]证明：对于任意余交换 Hopf 代数 A, 其 Hopf 子代数集合与商左 A-模余代数集合之间存在双射对应。更具体地说，给定一个 Hopf 子代数 $i: K \to A$ 和一个商左 A-模余代数 $\pi: A \to Q$，互为逆映射的双射 ϕ_A 和 ψ_A 定义如下

$$(1) \quad \phi_A(i) : A \to A/AK^+, \quad \psi_A(\pi) : A^{\mathrm{co}Q} := \{x \in A \mid (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A(x) = \pi(1_A) \otimes x\} \to A.$$

为了证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性，我们将上述结果推广到这一更一般的情形。一旦范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是半阿贝尔的，我们还将证明它是作用可表示的，并且 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中阿贝尔对象构成的阿贝尔范畴与交换且余交换 Hopf 幺半群范畴重合。

本文的组织结构如下。首先，在第 2 节中，我们回顾全文会用到的一些概念和事实。在第 3 节中，我们证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是带基点的（引理 3.1），并且有限完备（命题 3.7）。此外，由于它与有限完备范畴 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中内群构成的范畴 $\mathrm{Grp}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 重合，因此它也是原型模的（命题 3.11）。在第 4 节中，我们在范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中构造余等化子（命题 4.2）；在第 5 节中，我们利用这些余等化子，证明对于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中给定的 A，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 A 的一类子对象与 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中 A的一类商对象之间存在双射对应（定理 5.4）。这一结果将 Newman's Theorem 推广到了任意（阿贝尔）辫幺半范畴中的余交换 Hopf 幺半群；Newman's Theorem 针对余交换 Hopf 代数的版本见 [39]，针对余交换着色霍普夫代数的推广见[45], 。该双射对应限制为 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核与 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的商对象；这些商对象对应于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射（推论 6.10 ）。事实上，正如定理 6.8 所证明的，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核等价地可描述为定义 6.1 意义下的正规单态射。在第 7 节中，我们利用广义 Newman 定理证明：若阿贝尔对称幺半范畴（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$）满足"忠实余平坦条件"（定义 7.5）和"忠实平坦条件"（定义 7.20），则 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正则的。更具体地说，我们为 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意态射得到正则满单分解（命题 7.8），由此证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射和单态射，分别与 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中作为 $\mathcal{M}$ 的满态射和单态射的态射相一致（推论 7.10）。利用这一点，我们得到 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射在拉回下稳定（命题 7.22）。在第 8 节中，我们得出 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正合的；因此，只要它有二元余积，它就是半阿贝尔的（定理 8.3）。最后，我们证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中阿贝尔对象构成的范畴与 $\mathcal{M}$ 中交换且余交换 Hopf 幺半群构成的范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc,com}}(\mathcal{M})$ 重合（命题 8.9）；并且证明只要（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$）是闭幺半的，范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 就是作用可表示的（命题 8.10）。

记号与约定。范畴 $\mathcal{M}$中对象 X 的恒等态射记作 Id_X 或 1_X。给定态射 $f: A \to B$ in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ 中 f 的核记作 $\ker(f) : \mathrm{Ker}(f) \to A$，而 f 的余核记作 $\mathrm{coker}(f): B \to \mathrm{Coker}(f)$。幺半范畴记作 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$。有 MacLane 相干定理作为依据，我们将始终对结合约束和单位约束采取宽松处理。给定幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$，我们分别用 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{Comon}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中幺半群和余幺半群所成的范畴。给定辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$，我们用 $\mathrm{Bimon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{Hopf}(\mathcal{M})$ 表示其中

的双幺半群和霍普夫幺半群所成的范畴，并用 $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中余交换余幺半群所成的范畴，即满足 $\sigma_{C,C}\Delta=\Delta$ 的余幺半群 (C,Δ,ε)。$\mathbf{Hopf}(\mathcal{M})$ 中对象A的对极记作 S_A。若 (A,m,u) 是 $\mathbf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的对象，我们用 ${}_A\mathcal{M}$（分别用 $\mathcal{M}_A$）表示 $\mathcal{M}$ 中左（分别右） A- 模及左（分别右） A- 线性态射所成的范畴。若 (C,Δ,ε) 是 $\mathbf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的对象，我们用 ${}^C\mathcal{M}$（分别用 $\mathcal{M}^C$）表示 $\mathcal{M}$ 中左（分别右） C-余模及左（分别右） C-余线性态射所成的范畴。给定笛卡尔幺半范畴 $(\mathcal{M},\times,1)$， $\mathcal{M}$ 中内群所成的范畴记作 $\mathbf{Grp}(\mathcal{M})$。

2. 预备知识

这里我们回顾一些预备概念和结果，它们将在全文中发挥作用。关于范畴论的基本概念，请读者参阅 [12] 和 [35]。

定义 2.1（[33]）。若范畴 $\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为半阿贝尔 范畴:

1) $\mathcal{C}$ 是带基点的，即它具有一个零对象（既是始对象又是终对象的对象）；
2) $\mathcal{C}$ 是（Barr）-正合的，即满足以下两个事实:
   i. $\mathcal{C}$ 是正则的：它具有有限极限，任意态射都可分解为一个正则满态射（即一对态射的余等化子）后接一个单态射，且正则满态射在拉回下稳定，i
   i. $\mathcal{C}$ 中的任意等价关系都是一个核对，即某个态射沿其自身的拉回， lf;
3) $\mathcal{C}$ 是（Bourn）-原型模的：由于 $\mathcal{C}$ 是带基点的且有限完备，这等价于分裂短五引理在 $\mathcal{C}$ 中成立（例如参见 [13, 命题 3.1.2]）；
4) $\mathcal{C}$ 具有二元余积。

半阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 自动具有任意一对态射的余等化子，例如参见[13, 命题 5.1.3], ，因此它是有限余完备的。当 $\mathcal{C}$ 带基点、正则且原型模时，称其为同调的，例如参见 [13, 定义 4.1.1]。

设 $(\mathcal{M},\otimes,1)$ 是一个具有余等化子的幺半范畴，(A,m,u) 是 $\mathbf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，且 $X\in{}_A\mathcal{M}$、 $M\in\mathcal{M}_A$ 分别带有结构态射 $\mu_X\colon A\otimes X\to X$ 和 $\nu_M\colon M\otimes A\to M$。那么，$(M\otimes_A X, q_{M,X})$ 定义为 $\mathcal{M}$ 中态射对 $(\nu_M\otimes\mathrm{Id}_X,\mathrm{Id}_M\otimes\mu_X)$ 的余等化子:

$$M\otimes A\otimes X \underset{\mathrm{Id}_M\otimes\mu_X}{\overset{\nu_M\otimes\mathrm{Id}_X}{\rightrightarrows}} M\otimes X \xrightarrow{q_{M,X}} M\otimes_A X \tag{2}$$

这一构造给出函子 $M\otimes_A(-)\colon {}_A\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 和 $(-)\otimes_A X\colon \mathcal{M}_A\to\mathcal{M}$，其中 M 是 $\mathcal{M}_A$ 中的任意对象， X 是 ${}_A\mathcal{M}$ 中的任意对象。对于 ${}_A\mathcal{M}$ 中的任意态射 $f\colon X\to Y$ 及 $\mathcal{M}_A$ 中的任意对象 M，$\mathrm{Id}_M\otimes_A f\colon M\otimes_A X\to M\otimes_A Y$ 是 $\mathcal{M}$ 中满足 $(\mathrm{Id}_M\otimes_A f)q_{M,X}=q_{M,Y}(\mathrm{Id}_M\otimes f)$ 的唯一态射。类似地，给定 $\mathcal{M}_A$ 中的 $g\colon M\to N$ 和 ${}_A\mathcal{M}$ 中的 Y， $g\otimes_A\mathrm{Id}_Y\colon M\otimes_A Y\to N\otimes_A Y$ 是 $\mathcal{M}$ 中满足 $(g\otimes_A\mathrm{Id}_Y)q_{M,Y}=q_{N,Y}(g\otimes\mathrm{Id}_Y)$ 的唯一态射。对于 $M\in\mathcal{M}_A$ 和 $Y\in{}_A\mathcal{M}$，在 $\mathcal{M}$ 中有典范（自然）同构 Υ_M,Υ'_Y：

- $\Upsilon_M\colon\ M\otimes_A A\to M$，由 $\Upsilon_M q_{M,\,A}=\nu_M$ 唯一确定；
- $\Upsilon'_Y\colon\ A\otimes_A Y\to Y$，由 $\Upsilon'_Y q_{A,\,Y}=\mu_Y$ 唯一确定。

可以验证 $\Upsilon_M^{-1}=q_{M,\,A}(\mathrm{Id}_M\otimes u_A)$ 和 $\Upsilon_Y'^{-1}=q_{A,\,Y}(u_A\otimes\mathrm{Id}_Y)$。

设 $(\mathcal{M},\ \otimes,\ 1)$ 是一个具有等化子的幺半范畴，且 $(C,\ \Delta,\ \varepsilon)$ 是 $\mathbf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。回顾例如 [2, 定义 2.2.1]，给定 $\mathcal{M}$ 中的右 C-余模 $(V,\ \rho_V)$ 和左 C-余模 $(W,\ \lambda_W)$，它们在 $\mathcal{M}$ 中关于 C 的余张量积 定义为 $\mathcal{M}$ 中态射对 $(\rho_V\otimes\mathrm{Id}_W,\ \mathrm{Id}_V\otimes\lambda_W)$ 的等化子 $(V\square_C W,\ e_{V,\,W})$:

$$V\square_C W \xrightarrow{e_{V,W}} V\otimes W \underset{\mathrm{Id}_V\otimes\lambda_W}{\overset{\rho_V\otimes\mathrm{Id}_W}{\rightrightarrows}} V\otimes C\otimes W \tag{3}$$

此构造为任意$V\in\mathcal{M}^C$ 和任意 $W\in{}^C\mathcal{M}$提供函子 $V\square_C(-)\colon {}^C\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 和 $(-)\square_C W\colon \mathcal{M}^C\to\mathcal{M}$。对于 ${}^C\mathcal{M}$ 中的任意态射 $f\colon\ X\to Y$ 以及 $\mathcal{M}^C$中的任意对象 V，

$V\square_C f\colon V\square_C X \to V\square_C Y$是 $\mathcal{M}$中的唯一态射，满足 $e_{V,\,Y}(V\square_C f) = (\mathrm{Id}_V \otimes f)e_{V,\,X}$。类似地，对于 ${}^C\mathcal{M}$中的任意态射 $g\colon M \to N$以及 ${}^C\mathcal{M}$中的任意对象 Y， $g\square_C Y\colon M\square_C Y \to N\square_C Y$是 $\mathcal{M}$ 中的唯一态射，满足 $e_{N,\,Y}(g\square_C Y) = (g\otimes \mathrm{Id}_Y)e_{M,\,Y}$。对于 $M \in \mathcal{M}^C$和 $Y \in {}^C\mathcal{M}$，我们有以下典范（自然）同构 $\Lambda_M, \Lambda'_Y \in \mathcal{M}$:

- $\Lambda_M\colon\ M \to M\square_C C$，由 $\rho_M = e_{M,\,C}\Lambda_M$ 唯一确定；
- $\Lambda'_Y\colon\ Y \to C\square_C Y$，由性质 $\lambda_Y = e_{C,\,Y}\Lambda'_Y$ 唯一确定。

容易验证， $\Lambda_M^{-1} = (\mathrm{Id}_M \otimes \varepsilon_C)e_{M,\,C}$ 且 $(\Lambda'_Y)^{-1} = (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}_Y)e_{C,\,Y}$。

本文通常讨论阿贝尔幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$，即同时是阿贝尔范畴，且对于任意 $M \in \mathcal{M}$，函子 $M\otimes(-)\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 和 $(-)\otimes M\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 都是加性且正合的范畴。我们称 $\otimes$ 保持等化子和余等化子，是指后者对于任意 $M \in \mathcal{M}$，都由 $M \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes M$ 保持。回顾一下，由于 $\otimes$ 在 $\mathcal{M}$ 中保持余等化子，范畴 $({}_A\mathcal{M}_A, \otimes_A, A)$ 是一个幺半范畴，并且对于 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的任意对象 A， $\otimes_A$ 在 ${}_A\mathcal{M}_A$ 中保持余等化子，参见例如 [4, 定理 1.12]。对偶地，由于 $\otimes$ 保持等化子，范畴 $({}^C\mathcal{M}^C, \square_C, C)$ 是一个幺半范畴，并且对于 $\mathsf{Comon}(\mathcal{C})$ 中的任意对象 C， $\square_C$ 在 ${}^C\mathcal{M}^C$ 中保持等化子。

回顾一下，对于带零对象范畴 $\mathcal{M}$， $\mathcal{M}$ 中一个态射的核和余核分别定义为该态射与零态射的等化子和余等化子。对于一个带零对象幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$，若其余核在 $M \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes M$ 下对任意 $M \in \mathcal{M}$ 均保持不变，则 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中对象 (A, m, u) 的一个理想是一个对 (I, i)，其中 I 是 ${}_A\mathcal{M}_A$ 中的一个对象，且 $i\colon I \to A$ 是 ${}_A\mathcal{M}_A$ 中的一个态射（其中 A 的 A-双模结构由 m_A 给出），并且它是 $\mathcal{M}$ 中的单态射。注意，对象 $\mathsf{Coker}(i)$ 在 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中具有唯一的结构，使得 $\pi := \mathsf{coker}(i)$ 是 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。给定 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的对象 (C, Δ, ε) 和 $\mathcal{M}$ 中的单态射 $i\colon I \to C$，回顾一下，若 $\varepsilon_C i = 0$ 且 $(\pi \otimes \pi)\Delta_C i = 0$，则称 (I, i) 是 C 的一个双边余理想，其中 $\pi := \mathsf{coker}(i)$；因此存在唯一态射 $\varepsilon_{\mathsf{Coker}(i)}\colon \mathsf{Coker}(i) \to \mathbf{1}$ 和 $\Delta_{\mathsf{Coker}(i)}\colon \mathsf{Coker}(i) \to \mathsf{Coker}(i) \otimes \mathsf{Coker}(i)$，它们属于 $\mathcal{M}$，且使得 π 是 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。给定一个辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$、$\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中的对象 B 以及 $\mathcal{M}$ 中的单态射 $i\colon I \to B$，若 (I, i) 既是 B 的一个理想，又是其双边余理想，则称 (I, i) 是 B 的一个双理想。给定 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 中的对象 H 和 $\mathcal{M}$ 中的单态射$i\colon I \to H$，若 (I, i) 是 H 的一个双理想，且 $\pi S_H i = 0$，则称 (I, i) 是 H 的一个 Hopf 理想，其中 $\pi :=\mathsf{coker}(i)$，因而存在唯一态射 $S_{\mathsf{Coker}(i)}\colon \mathsf{Coker}(i) \to \mathsf{Coker}(i)$，它属于 $\mathcal{M}$，且满足 $S_{\mathsf{Coker}(i)}\pi = \pi S_H$。给定一个 Hopf 理想 (I, i)，对象 $\mathsf{Coker}(i)$ 在 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 中具有唯一的结构，使得 π 是 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。

我们还回顾一下，对于阿贝尔范畴 $\mathcal{M}$ 中的任意态射 $f\colon A \to B$，都有以下分解图（即所谓的像分解）

$$\begin{array}{ccccccc} \mathsf{Ker}(f) & \xrightarrow{\ker(f)} & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\mathsf{coker}(f)} & \mathsf{Coker}(f) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{coker}(\ker(f))} & & \uparrow{\scriptstyle \ker(\mathsf{coker}(f))} & & \\ & & \mathsf{Coker}(\ker(f)) & \xrightarrow{-\cong\to} & \mathsf{Ker}(\mathsf{coker}(f)) & & \end{array}$$

因此我们可以写成 $f = \mathsf{ker}(\mathsf{coker}(f))\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(f))$。

最后，我们回顾一下，对于辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$，范畴 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 都是幺半范畴，其幺半单位分别为 $\otimes$ 和 $\mathbf{1}$ （且约束也相同）。我们有以下范畴等价

$$\mathsf{Mon}(\mathsf{Comon}(\mathcal{M})) \cong \mathsf{Bimon}(\mathcal{M}) \cong \mathsf{Comon}(\mathsf{Mon}(\mathcal{M})),\quad \mathsf{Comon}(\mathsf{Comon}(\mathcal{M})) \cong \mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}), \tag{4}$$

参见例如 [7, 第 12] 页。注意，幺半范畴 $(\mathsf{Mon}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1})$ 和 $(\mathsf{Comon}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1})$ 可能不是辫状的，而范畴 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 可能不是幺半的。不过，如果 σ 是对称的，即对 $\mathcal{M}$ 中所有对象 A、B，都有 σ_A^{-1}、$_B = \sigma_B$、$_A$，那么 σ_A、$_B$ 是幺半群和余幺半群的态射。因此，$(\mathsf{Mon}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 和 $(\mathsf{Comon}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 都是对称幺半范畴。迭代这些结果并应用 (4)，可以推得 $(\mathsf{Bimon}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 和 $(\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 也都是对称幺半范畴。此外，如果 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个

对称幺半范畴，那么 (Hopf($\mathcal{M}$) $\otimes$, $\mathbf{1}$, σ) 和 (Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) $\otimes$, $\mathbf{1}$, σ) 也都是对称幺半的，参见例如 [7, 第 12] 页。

在下文中，我们将看到，证明 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 是半阿贝尔的过程中，辫编织幺半范畴 ($\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$) 是阿贝尔的且为对称的这一假设至关重要。对于由 $\Bbbk$-向量空间构成的阿贝尔对称幺半范畴 (Vec$_\Bbbk, \otimes_\Bbbk, \Bbbk, \tau$)，其中 τ 是典范交换映射；更一般地，对于由 G-分次向量空间构成的 (Vec$_G, \otimes_\Bbbk$, $\Bbbk, \sigma$)，其中 G 是有限生成阿贝尔群且 char($\Bbbk$) $\neq 2$ （若 G 是奇数阶有限群，则不需要此条件），我们已经知道，在任意域 $\Bbbk$ 上的余交换 Hopf 代数范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_\Bbbk$) =Hopf$_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$，以及更一般的余交换着色霍普夫代数范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)，分别已在 [27] 和 [45], 中证明为半阿贝尔范畴。

3. 尖点性、极限与原型模性

首先，以下结果表明范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 是带基点的。

引理 3.1. 设 ($\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$) 是一个辫编织幺半范畴。范畴 Bimon($\mathcal{M}$) 是带基点的，其零对象为 $\mathbf{1}$。因此，Hopf($\mathcal{M}$) 和 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 也都是带基点的。

证明。显然，$\mathcal{M}$的单位对象$\mathbf{1}$ 是 Hopf($\mathcal{M}$) 中的一个对象。对于 Bimon($\mathcal{M}$) 中的任意对象 H，以及 Bimon($\mathcal{M}$) 中的任意态射 $f\colon H \to \mathbf{1}$，有 $\varepsilon_H = \varepsilon_{\mathbf{1}} f = f$。这意味着余单位$\varepsilon_H\colon H \to \mathbf{1}$ 是 Bimon($\mathcal{M}$) 中从 H 到 $\mathbf{1}$ 的唯一态射（事实上，它也是 Comon($\mathcal{M}$) 中的唯一态射）。类似地，单位 $u_H : \mathbf{1} \to H$ 是 Bimon($\mathcal{M}$) 中从 $\mathbf{1}$ 到H 的唯一态射（事实上，它也是 Mon($\mathcal{M}$) 中的唯一态射）。因此，$\mathbf{1}$ 是范畴 Bimon($\mathcal{M}$) 的零对象。对于 Hopf($\mathcal{M}$) 和 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 也可得出相同结论。□

现在，我们研究范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 中的极限。设 ($\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$) 是一个具有等化子的对称幺半范畴，并且对于任意 $X \in \mathcal{M}$，$(-) \otimes X$和 $X \otimes (-)$ 都保等化子。接下来的目标是证明范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 有限完备。

3.1. **Hopf() 中的二元积**。如第 2 节所述，由于 ($\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$) 是一个对称幺半范畴，因此范畴 (Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) $\otimes$,$\mathbf{1}, \sigma$) 也是一个对称幺半范畴。给定 A, B，其中 B 属于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$)，已知下列

$$(A \otimes B, \pi_A := \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_B, \pi_B := \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_B) \tag{5}$$

是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 中 A 和 B 的二元积，参见例如 [47, 命题 1.2], 其中该结果针对范畴 Bimon$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 给出。事实上，对于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 中的两个态射 $f\colon C \to A$ 和 $g\colon C \to B$，满足 $\pi_A\langle f, g\rangle = f$ 和 $\pi_B\langle f, g\rangle = g$ 的唯一态射 $\langle f, g\rangle\colon C \to A \otimes B$（其中 $C \to A \otimes B$ 属于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 由 $\langle f, g\rangle := (f \otimes g)\Delta_C$ 给出。我们注意到，由于 C 是余交换的，这个态射属于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$)。注意，这种二元积构造无法推广到非余交换情形。事实上，假设 (5) 是 Hopf($\mathcal{M}$) 中的一个二元积。那么，对于 Hopf($\mathcal{M}$) 中的任意对象 A，态射 $\langle \mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_A\rangle = \Delta_A$ 属于 Hopf($\mathcal{M}$)。这意味着 A 是余交换的。

注 3.2. 回顾一下，若一个幺半范畴（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}$）中，两个对象的张量积与它们的二元积重合，且单位对象是终对象，则称其为笛卡尔。由于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 的单位对象是终对象，幺半范畴（Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) $\otimes$,$\mathbf{1}$）是笛卡尔的。我们指出，对于任意对称幺半范畴（$\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma$），幺半范畴（Comon$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) $\otimes$,$\mathbf{1}$）也是笛卡尔的，例如参见 [34, 推论 2.24]。

范畴 Comon$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 可能没有等化子。在对 $\mathcal{M}$ 作出某些适当假设的情况下，由以下结果可知这一点：

命题 3.3（参见 [43, 定理 2 的对偶）3]。设 ($\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}$) 是一个幺范畴，使得$\mathcal{M}$ 具有等化子，且这些等化子被函子 $X \otimes (-)$和 $(-) \otimes X$保持，其中任意 X 均属于 $\mathcal{M}$。对于 Comon($\mathcal{M}$)中的任意一对态射 $\alpha, \beta\colon A \to X$，考虑 $\mathcal{M}$中的以下等化子：

$$E \xrightarrow{\ e\ } A \underset{\Lambda_\beta := (\mathrm{Id}_A \otimes \beta \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\overset{\Lambda_\alpha := (\mathrm{Id}_A \otimes \alpha \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\rightrightarrows}} A \otimes X \otimes A \tag{6}$$

于是， E 带有一个（唯一的）余幺半群结构，使得 e 成为 Comon$(\mathcal{M})$中的态射，并且

$$E \xrightarrow{e} A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X$$

是余单$(\mathcal{M})$中的一个等化子。特别地，范畴余单$(\mathcal{M})$具有等化子。

注 3.4. 等化子 (6) 是一个余反射等化子，即具有公共截面（在此情形下为 $\varepsilon_A \otimes \varepsilon_X \otimes \mathrm{Id}_A$）的平行态射的等化子。事实上，要使前述结果成立，只需 $\mathcal{M}$ 具有余反射等化子，且这些等化子在函子 $X \otimes(-)$ 和 $(-) \otimes X$ 下保持不变，其中任意 X 均属于 $\mathcal{M}$。同一假设也足以推出推论 3.5、推论 3.6、命题 3.7 和命题 3.11。

在余交换性假设下，等化子的形式可以简化。

推论 3.5. 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个辫编织幺半范畴，使得 $\mathcal{M}$ 具有等化子，且函子 $X \otimes(-)$ 和$(-) \otimes X$ 对任意属于 $\mathcal{M}$ 的 X 均保持这些等化子。于是，范畴余单$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 具有等化子。特别地，当 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是阿贝尔辫子幺半范畴时，情形亦然。

更明确地说，给定态射 $\alpha, \beta\colon\ A \to X$ 属于 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，则这对态射 (α, β)在 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的等化子，由这对态射 $((\alpha \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, (\beta \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)$ 在 $\mathcal{M}$中的等化子给出。

证明。 由命题 3.3，(α, β)这对态射在 Comon$(\mathcal{M})$中的等化子，由$(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta)$这对态射在 $\mathcal{M}$中的等化子 (6)给出。要证明后者也是(α, β)在 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的等化子，只需证明 E 属于 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。由于 $\sigma_{A,A}\Delta_A = \Delta_A$，我们有

$$(e \otimes e)\sigma_{E,E}\Delta_E = \sigma_{A,A}(e \otimes e)\Delta_E = \sigma_{A,A}\Delta_A e = \Delta_A e = (e \otimes e)\Delta_E,$$

因此 $\sigma_{E,E}\Delta_E = \Delta_E$，因为 $e \otimes e$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射。因此，范畴 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$也有等化子。此外，$(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta)$这对态射在 $\mathcal{M}$ 中的等化子，与$((\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})\Lambda_\alpha, (\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})\Lambda_\beta)$这对态射在 $\mathcal{M}$中的等化子同构，因为 $\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A}$ 是 $\mathcal{M}$中的同构。此外，由于 A 是余交换的，我们得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})\Lambda_\alpha &= (\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})(\mathrm{Id}_A \otimes \alpha \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \alpha)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A)\Delta_A \\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \alpha)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A)\Delta_A \\ &= (\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_X)(\mathrm{Id}_A \otimes \alpha)\Delta_A.\end{aligned}$$

因此，由于 $\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_X$ 在 $\mathcal{M}$ 中有回缩 $\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_X$，所以 $\mathcal{M}$ 中 $((\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})\Lambda_\alpha, (\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{X,A})\Lambda_\beta)$ 的等化子同构于 $\mathcal{M}$ 中 $((\mathrm{Id}_A \otimes \alpha)\Delta_A, (\mathrm{Id}_A \otimes \beta)\Delta_A)$ 的等化子，继而也同构于 $\mathcal{M}$ 中这一对 $((\alpha \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, (\beta \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)$ 的等化子。□

回顾一下，一个范畴有限完备，当且仅当它有一个终对象、二元积和等化子，参见例如 [12, 命题 2.8.2]。正如注 3.2 中所述，当 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是对称的时，(Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ $\otimes$,$\mathbf{1}$) 是笛卡尔幺半的。由推论 3.5 可得以下结果。

推论 3.6。 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴，其等化子在任意 $X \in \mathcal{M}$ 下均由 $X \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes X$ 保持。则范畴 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是有限完备的。特别地，当$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是阿贝尔对称幺半范畴时，以上条件成立。

现在，我们将注意力转向 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。正如注 3.2 中所述，(Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ $\otimes$，$\mathbf{1}$) 是笛卡尔幺半的。于是我们得到关于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中极限的如下结果：

命题 3.7。 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴，具有等化子，且对任意 $X \in \mathcal{M}$，这些等化子均由 $X \otimes(-)$ 和 $(-) \otimes X$ 保持。则范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是有限完备的。特别地，当 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是阿贝尔对称幺半范畴时，以上条件成立。

证明。 由推论 3.6 可知，Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 有限完备。由于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ =Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$)，参见例如 [41, 备注 3.3], ，我们得到 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 有限完备，参见例如 [16, 练习 3.1.2]。□

3.2. **Hopf() 中的等化子**。 假设辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 存在等化子，且这些等化子在任意 $X \in \mathcal{M}$ 下都被 $X \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes X$ 保持。

由命题 3.7 和 [12, 命题 2.8.2], 可知，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 对任意一对态射都存在等化子。此外，由于遗忘函子 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Grp}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})) \to \mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 保持极限，我们可以明确描述 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的等化子和核。请注意，命题 3.7 中对辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 的对称性假设用于二元积，而等化子则不需要这一假设。我们回顾 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中等化子和核的构造。事实上，$\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中等化子的构造相同，例如可见于 [47]。

引理 *3.8.* 对于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射 $f, g\colon A \to B$，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射对 (f, g) 的等化子由 $\mathcal{M}$ 中态射对 $((g \otimes Id)\Delta_A, (f \otimes Id)\Delta_A)$ 的等化子给出。因此，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 f 的核，记为 $hker(f)\colon HKer(f) \to A$，是 $\mathcal{M}$ 中态射对 $((f \otimes Id_A)\Delta_A, u_B \otimes Id_A)$ 的等化子。

注记 3.9. 回顾一下，一个范畴是局部可呈现 的，当且仅当它是可达 且完备的；这又当且仅当它是可达且余完备的，参见例如 [6, 推论 2.47] （关于范畴局部可呈现性和可达性的定义，参见 [6] ）。根据 [41,命题 4.1.1] ，我们知道，对于任意对称幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 总是可达的。因此，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是局部可呈现的，当且仅当它是完备的；这又当且仅当它是余完备的。

注 3.10. 若 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴，且 $\mathcal{M}$ 是局部可呈现的（在 [42] 中称为可容许幺半），则由 [30,命题 2.9]可知，$\mathrm{Comon}(\mathcal{M})$ 是局部可呈现的。因此，$\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Comon}(\mathrm{Comon}(\mathcal{M}))$ 也局部可呈现。特别地，$\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（有限）完备的，因此 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是有限完备的，参见例如 [16,练习 3.1.2]。

3.3. **原型模性**。 在前述结果对 $\mathcal{M}$ 的相同假设下，我们可知 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（Bourn）原型模的。

命题 3.11。 设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个具有等化子的对称幺半范畴，且对于任意 $X \in \mathcal{M}$，这些等化子在 $X \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes X$ 下保持不变。那么，范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（*Bourn*）原型模的。特别地，当 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是阿贝尔对称幺半范畴时，以上结论成立。

证明。 回想一下，若 $\mathcal{C}$ 有有限极限，则 $\mathrm{Grp}(\mathcal{C})$ 是原型模的，参见 [17, 命题 3.24]。由推论 3.6 可知，$\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是有限完备的。由于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Grp}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$，因此 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是原型模的。□

由注 3.10 和 [17, 命题 3.24], ，我们还可得到：

推论 3.12。 设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴，且 $\mathcal{M}$ 局部可呈现。那么，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（*Bourn*）原型模的。

注 3.13。如第 2 节所述，对于有基点的有限完备范畴 $\mathcal{C}$，原型模性等价于分裂短五引理在 $\mathcal{C}$中成立。因此，由命题 3.11 可知，分裂短五引理在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中成立。对于任意辫幺半范畴，这也可以利用 [29,定理 3.104], 显式证明；该定理源自 [10]的预印本版本（另见 [11]）。

我们回顾一下，在任意带基点的有限完备原型模范畴 $\mathcal{C}$中，正则满态射恰好是满足以下条件的态射：f 在 $\mathcal{C}$ 中，$f = \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$，参见例如 [13, 命题 3.1。23],因此，在 $\mathcal{C}$中，正则满态射与余核一致。于是，我们得到以下结果：

推论 3.14. 设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个具有等化子的对称幺半范畴，且这些等化子在 $X \otimes (-)$和 $(-) \otimes X$ 下保持，对任意 $X \in \mathcal{M}$ 均成立。在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中，正则满态射与余核重合。

证明。 这是因为 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是带基点的（引理 3.1）、有限完备的（命题 3.7），且是原型模的（命题 3.11）。 □

由于我们知道 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中等化子和二元积的显式形式，因此可以计算 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的拉回 [12, 命题 2.8.2]。为求完整起见，我们将其描述如下。

3.4. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的拉回。设 $f\colon A \to C$ 和 $g\colon B \to C$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射。 A 和 B 在 C 上的拉回对象由 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一对 $(f\pi_A, g\pi_B)$ 的等化子给出，其中 $(A\otimes B, \pi_A, \pi_B)$ 是在 (5) 中构造的 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 A 和 B 的二元积（例如，参见 [12, 命题 2.8.2]的证明）。我们知道，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 $(f\pi_A, g\pi_B)$ 的等化子由 $\mathcal{M}$ 中的一对 $((f\pi_A\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B}, (g\pi_B\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B})$ 的等化子给出。我们计算

$$\begin{aligned}(f\pi_A\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B} &= (f(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_B)\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (f\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\varepsilon_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (f\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_B)\end{aligned}$$

并且，类似地，

$$\begin{aligned}(g\pi_B\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B} &= (g(\varepsilon_A\otimes \mathrm{Id}_B)\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (g\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes B})(\sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_B)\\ &= (\sigma_{A,C}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes g\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_B),\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中有序对 (f, g) 的拉回对象由有序对 $((f\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_B, (\sigma_{A,C}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes(g\otimes \mathrm{Id}_B)\Delta_B)$ 在 $\mathcal{M}$ 中的等化子给出。由于 $\sigma_{A,C}\otimes \mathrm{Id}_B$ 在 $\mathcal{M}$ 中的逆为 $\sigma_{C,A}\otimes \mathrm{Id}_B$ 和 $\sigma_{C,A}(f\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A = (\mathrm{Id}_A\otimes f)\sigma_{A,A}\Delta_A = (\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta_A$，前述等化子也可以表示为 $\mathcal{M}$ 中有序对 $((\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_B, \mathrm{Id}_A\otimes(g\otimes \mathrm{Id}_B)\Delta_B)$ 的等化子。因此，该拉回对象是余张量积 $A\square_C B$，其描述如式 (3) 所示，其中 $\rho_A := (\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta_A$ 且 $\lambda_B := (g\otimes \mathrm{Id}_B)\Delta_B$。

4. Coequalizers in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$

本节中，$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 表示一个具有等化子和余等化子的辫编织幺半范畴，且这些等化子和余等化子由 $\otimes$保持。我们在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中构造余等化子，并用它们证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性。更一般地，我们描述 $\mathrm{Hopf}(\mathcal{M})$ 中的余等化子。

给定两个平行态射 $f, g\colon A \to B$ in $\mathrm{Hopf}(\mathcal{M})$，我们考虑由下式定义的态射 $\phi_f, \phi_g\colon B\otimes A\otimes B \to B$ in $\mathcal{M}$

$$\phi_f := m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B), \qquad \phi_g := m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes g\otimes \mathrm{Id}_B) \tag{7}$$

并定义 $\pi := \mathrm{coeq}(\phi_f, \phi_g)\colon B \to \mathrm{Coeq}(\phi_f, \phi_g)$ in $\mathcal{M}$。注意到

$$\begin{aligned}\phi_f(u_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes u_B) &= m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(u_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes u_B)\\ &= m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(u_B\otimes \mathrm{Id}_B\otimes u_B)f = f,\end{aligned}$$

这意味着 $\pi f = \pi\phi_f(u_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes u_B) = \pi\phi_g(u_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes u_B) = \pi g$。

引理 4.1。 态射 π 属于$\mathrm{Hopf}(\mathcal{M})$。

证明。 由于 $(-)\otimes B$ 在 $\mathcal{M}$ 中保留余等化子，因此 $\pi\otimes \mathrm{Id}_B$ 是 $\mathcal{M}$ 中一对态射 $(\phi_f\otimes \mathrm{Id}_B, \phi_g\otimes \mathrm{Id}_B)$ 的余等化子。我们计算

$$\begin{aligned}\pi m_B(\phi_f\otimes \mathrm{Id}_B) &= \pi m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(m_B\otimes \mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_{B\otimes B})\\ &= \pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes m_B)(m_B\otimes \mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_{B\otimes B})\\ &= \pi m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes m_B)\\ &= \pi m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes g\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes m_B)\\ &= \pi m_B(\phi_g\otimes \mathrm{Id}_B),\end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $\psi\colon \mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\otimes B\to\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)$ in $\mathcal{M}$，使得 $\psi(\pi\otimes\mathrm{Id}_B)=\pi m_B$。此外，由于 $\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\otimes(-)$ 在 $\mathcal{M}$ 中保留余等化子，因此 $\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\pi$ 是 $\mathcal{M}$ 中一对态射 $(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_f,\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_g)$ 的余等化子。于是，由于

$$\begin{aligned}\pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\phi_f)&=\pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes m_B)(\mathrm{Id}_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_{B\otimes B}\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\&=\pi m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_{B\otimes B}\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\&=\pi m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes B})\\&=\pi m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes g\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes B})\\&=\pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\phi_g),\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_f)(\pi\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes A\otimes B})&=\psi(\pi\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\phi_f)=\pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\phi_f)=\pi m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\phi_g)\\&=\psi(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_g)(\pi\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes A\otimes B}).\end{aligned}$$

由于 $\pi\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes A\otimes B}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，我们得到 $\psi(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_f)=\psi(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\phi_g)$。因此，存在唯一态射 $m_{\mathsf{Coeq}}\colon \mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\otimes\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\to\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)$，它属于 $\mathcal{M}$，并满足 $m_{\mathsf{Coeq}}(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\pi)=\psi$。通过定义 $u_{\mathsf{Coeq}}:=\pi u_B$，可以证明 $(\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g),m_{\mathsf{Coeq}},u_{\mathsf{Coeq}})$ 属于 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$，且 $\pi m_B=\psi(\pi\otimes\mathrm{Id}_B)=m_{\mathsf{Coeq}}(\pi\otimes\pi)$ 和 $\pi u_B=u_{\mathsf{Coeq}}$，即 π 属于 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$。

由于

$$\begin{aligned}&\Delta_B\phi_f=\Delta_B m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\=&(m_B\otimes m_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B)(\Delta_B\otimes\Delta_B)(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\=&(m_B\otimes m_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\\&(\Delta_B\otimes\Delta_B\otimes\Delta_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\=&(m_B\otimes m_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\\&(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B),\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(\pi\otimes\pi)\Delta_B\phi_f\\=&(\pi\otimes\pi)(m_B\otimes m_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\\&(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B)(m_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\\&(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B\otimes B})(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}})(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)(m_B\otimes m_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\\&(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B\otimes B})(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}})(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}})(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}})\\&(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B}\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}})(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}})(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}})\\&(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)(\Delta_B\otimes(f\otimes f)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}})(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}})(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes m_{\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}})\\&(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}}\otimes\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}\otimes\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)(\Delta_B\otimes(g\otimes g)\Delta_A\otimes\Delta_B)\\=&(\pi\otimes\pi)\Delta_B\phi_g.\end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $\Delta_{\mathsf{Coeq}}\colon \mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\to\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\otimes\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)$ in $\mathcal{M}$使得 $\Delta_{\mathsf{Coeq}}\pi=(\pi\otimes\pi)\Delta_B$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon_B\phi_f&=\varepsilon_B m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)=(\varepsilon_B\otimes\varepsilon_B)(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes\mathrm{Id}_B)\\&=\varepsilon_B\otimes\varepsilon_B f\otimes\varepsilon_B=\varepsilon_B\otimes\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B=\varepsilon_B\otimes\varepsilon_B g\otimes\varepsilon_B=\varepsilon_B\phi_g,\end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $\varepsilon_{\mathsf{Coeq}}:\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\to 1$ in $\mathcal{M}$ 使得 $\varepsilon_{\mathsf{Coeq}}\pi=\varepsilon_B$。可以证明，$(\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)\ \Delta_{\mathsf{Coeq}},\varepsilon_{\mathsf{Coeq}})$ 属于 Comon($\mathcal{M}$)，因此 π属于 Comon($\mathcal{M}$)。此外，由于 B属于 Bimon($\mathcal{M}$)，$\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)$ 也属于 Bimon($\mathcal{M}$)，因此 π是 Bimon($\mathcal{M}$)中的一个态射。

最后，我们计算

$$\begin{aligned}S_B\phi_f &= S_Bm_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B) = m_B\sigma_{B,B}(S_B\otimes S_B)(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)\\ &= m_B\sigma_{B,B}(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_B\otimes S_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)\\ &= m_B\sigma_{B,B}(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B)\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}&\pi S_B\phi_f = \pi m_B\sigma_{B,B}(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B) = m_{\mathsf{Coeq}}(\pi\otimes\pi)\sigma_{B,B}(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B)\\ &= m_{\mathsf{Coeq}}\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}(\pi\otimes\pi)(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B) = m_{\mathsf{Coeq}}\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi)(\sigma_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)\\ &(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B) = m_{\mathsf{Coeq}}\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Coeq}})(\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi)\\ &(\mathrm{Id}_B\otimes f\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B) = m_{\mathsf{Coeq}}\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}(m_{\mathsf{Coeq}}\otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Coeq}})(\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Coeq}})(\pi\otimes\pi\otimes\pi)\\ &(\mathrm{Id}_B\otimes g\otimes \mathrm{Id}_B)(S_B\otimes S_A\otimes S_B) = \pi S_B\phi_g.\end{aligned}$$

根据泛性质，存在唯一态射 $S_{\mathsf{Coeq}}:\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)\to\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)$ in$\mathcal{M}$，使得 $\pi S_B=S_{\mathsf{Coeq}}\pi$。可以验证 $(\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)\ m_{\mathsf{Coeq}},\ u_{\mathsf{Coeq}},\ \Delta_{\mathsf{Coeq}},\ \varepsilon_{\mathsf{Coeq}},\ S_{\mathsf{Coeq}})$ 属于 Hopf($\mathcal{M}$)，因此 π 属于 Hopf($\mathcal{M}$)。□

命题 4.2。给定态射 $f,g:\ A\to B$属于 Hopf($\mathcal{M}$)，$\pi:\ B\to\mathsf{Coeq}(\phi_f,\phi_g)$ 是 (f,g) 在 Hopf($\mathcal{M}$)中的余等化子。对于范畴 $\mathsf{Hopf}_{\mathsf{coc}}(\mathcal{M})$，结论也成立。

证明。根据引理 4.1，我们已经知道 π 属于 Hopf($\mathcal{M}$)，并且在 Hopf($\mathcal{M}$) 中使这一对态射 $(f,\ g)$ 相等。设存在态射 $l:\ B\to D$ 属于 Hopf($\mathcal{M}$)，使得 $lf=lg$。由于l 是 Mon($\mathcal{M}$) 中的态射，因此有 $l\phi_f=l\phi_g$。于是，存在唯一态射$p:\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)\to D$ in $\mathcal{M}$，使得 $p\pi=l$。由于 l 和 π是 Mon($\mathcal{M}$) 中的态射，且 $\pi\otimes\pi$是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，因此 p 是 Mon($\mathcal{M}$) 中的态射（因而是 Mon($\mathcal{M}$) 中满足 $p\pi=l$ 的唯一态射）。此外，由于 l 和 π 是 Comon($\mathcal{M}$) 中的态射，我们有

$$\Delta_Dp\pi=\Delta_Dl=(l\otimes l)\Delta_B=(p\otimes p)(\pi\otimes\pi)\Delta_B=(p\otimes p)\Delta_{\mathsf{Coeq}}\pi,\ \varepsilon_Dp\pi=\varepsilon_Dl=\varepsilon_B=\varepsilon_{\mathsf{Coeq}}\pi,$$

因此，态射 p 属于 Comon($\mathcal{M}$)，因为 π 是 $\mathcal{M}$中的满态射。因此，p是 Hopf($\mathcal{M}$) 中满足 $p\pi=l$ 的唯一态射，这意味着 $(\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)\ \pi)$ 是 Hopf($\mathcal{M}$) 中这对态射 $(f,\ g)$ 的余等化子。

若我们考虑 $\mathsf{Hopf}_{\mathsf{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射 $f,\ g:\ A\to B$，那么 $\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)$ 属于 $\mathsf{Hopf}_{\mathsf{coc}}(\mathcal{M})$。事实上，由

$$\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}\Delta_{\mathsf{Coeq}}\pi=\sigma_{\mathsf{Coeq},\mathsf{Coeq}}(\pi\otimes\pi)\Delta_B=(\pi\otimes\pi)\sigma_{B,B}\Delta_B=(\pi\otimes\pi)\Delta_B=\Delta_{\mathsf{Coeq}}\pi,$$

我们得到 $\sigma_{\mathsf{Coeq},\ \mathsf{Coeq}}\Delta_{\mathsf{Coeq}}=\Delta_{\mathsf{Coeq}}$。因此，$(\mathsf{Coeq}(\phi_f,\ \phi_g)\ \pi)$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathsf{coc}}(\mathcal{M})$ 中这对态射 $(f,\ g)$ 的余等化子。□

根据 Hopf($\mathcal{M}$) 中余等化子的显式描述，我们可以推导出 Hopf($\mathcal{M}$) 中的余核如何构造。

推论 *4.3*。态射 $f:\ A\to B$ 在 *Hopf($\mathcal{M}$)* 中的余核（记作 *hcoker(f)*：$B\to$*HCoker(f)*）由 $\mathcal{M}$ 中这对态射 $(m_B(m_B\otimes Id_B)(Id_B\otimes f\otimes Id_B)\ m_B(Id_B\otimes\varepsilon_A\otimes Id_B))$ 的余等化子给出。*Hopf*$_{\mathsf{coc}}$*($\mathcal{M}$)* 中也有同样的结论。

正如第 2 节所回顾的，半阿贝尔范畴的定义并不要求任意一对态射都存在余等化子（见定义 2.1），但余等化子的存在可由此推出。在我们的策略中，我们将利用 $\mathsf{Hopf}_{\mathsf{coc}}(\mathcal{M})$ 中余等化子的显式构造，推导出该范畴的正则性。

另一方面，半阿贝尔范畴的定义要求存在二元余积。关于这一点，我们作一些说明。众所周知，对于任意幺半范畴 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1})$，遗忘函子 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ 会创造余极限（关于余极限的创造的定义，请参见[35, V 1]）。正如第 2 节所回顾的，给定一个对称幺半范畴 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$，范畴 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M}) \cong \mathsf{Comon}(\mathsf{Mon}(\mathcal{M}))$ 是幺半的。因此，遗忘函子

$$\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) \cong \mathsf{Comon}(\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})) \cong \mathsf{Comon}(\mathsf{Comon}(\mathsf{Mon}(\mathcal{M}))) \to \mathsf{Comon}(\mathsf{Mon}(\mathcal{M})) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{M})$$

具有余极限。因此，如果 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 具有二元余积，那么 $\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 也具有二元余积。因此，若 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 在 $\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中对二元余积封闭，那么 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 也具有二元余积。

备注 4.4. 如果 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1})$ 是阿贝尔幺半范畴，并且遗忘函子 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$具有左伴随，那么 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 具有二元余积，参见例如 [43, 定理 3.5]。此外，如果遗忘函子 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ 是极端单子性的，那么 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 在 $\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中对二元余积封闭，参见例如 [40, 命题 52]。

备注 4.5. 回想一下，若 $\mathcal{M}$ 是局部可呈现的，则根据命题 2.9]，$\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 都是局部可呈现的。由于 $\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) \cong \mathsf{Comon}(\mathsf{Comon}(\mathsf{Mon}(\mathcal{M})))$，重复这一论证可得 $\mathsf{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是局部可呈现的。特别地，它是完备且余完备的。不过，一般而言，$\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 在 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中不对（余）极限封闭。若 $\mathcal{M}$是局部可呈现的，则 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 在 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中对余极限封闭这一事实，等价于命题 49]中给出的其他条件。我们还指出，定理 5.10]给出了关于辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ 的条件，使得 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 在 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中对余极限封闭。

5. $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的纽曼定理

本节中，$(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ 将是一个具有等化子和余等化子的辫编织幺半范畴，且这些等化子和余等化子在 $\otimes$ 下保持不变。

回顾一下，余交换 Hopf 代数的 Hopf 子代数与同时也是双边余理想的左理想之间存在一个众所周知的双射对应，该对应由 K. Newman 在[39, 定理 4.1] 中证明。本节的目标是以一种恰当的方式将这一对应推广到 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的情形，这将有助于证明范畴 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性。为此，以下命题给出了上述双射对应映射的精确定义。

命题 5.1. 设 A 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，且 $i: K \to A$ 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个单态射。设 $\pi: A \to Q$ 是态射对 $(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i),\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$在 $\mathcal{M}$ 中的余等化子。那么，我们有以下结果。

1) </style}态射 是$\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$中的满态射。2) 以下图表
是 $\mathcal{M}$中的一个余等化子

$$A\square_Q A \overset{(\varepsilon_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}}{\underset{(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A}}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\ \pi\ } Q \tag{8}$$

其中 $e_{A,A}: A\square_Q A \to A\otimes A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的等化子，定义如(3) 所示； A 是$^Q\mathcal{M}$ 中的一个对象，带有结构$(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A$，并且在 $\mathcal{M}^Q$ 中带有结构$(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A$。

证明。 1). 首先，我们证明 $\pi: A \to Q$ 属于 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$。由于 $A\otimes(-)$ 保持 $\mathcal{M}$中的余等化子，我们得到 $\mathrm{Id}_A\otimes\pi$ 是对偶态射对 $(\mathrm{Id}_A\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i),\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\varepsilon_K)$ 在 $\mathcal{M}$中的余等化子。由于

$$\begin{aligned}\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)) &= \pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)(m_A\otimes\mathrm{Id}_K) = \pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K)(m_A\otimes\mathrm{Id}_K)\\ &= \pi m_A(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\varepsilon_K),\end{aligned}$$

存在唯一态射 $\mu_Q\colon A\otimes Q\to Q$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $\mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)=\pi m_A$。可以验证，$Q$ 在作用 μ_Q 下成为 ${}_A\mathcal{M}$ 中的一个对象。这是因为 (A,m_A,u_A) 属于 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$，且 π 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，而满态射在 $A\otimes(-)$ 作用下保持不变。由于 $\varepsilon_A m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)=\varepsilon_A\otimes\varepsilon_A i=\varepsilon_A(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K)$，存在唯一态射 $\varepsilon_Q\colon Q\to\mathbf{1}$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $\varepsilon_Q\pi=\varepsilon_A$。由于 $\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)=\pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K)$，我们有

$$\pi i=\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)(u_A\otimes\mathrm{Id}_K)=\pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K)(u_A\otimes\mathrm{Id}_K)=\pi u_A\varepsilon_K.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&(\pi\otimes\pi)\Delta_A m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)=(\pi\otimes\pi)(m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\pi)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\pi\otimes\pi)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\pi\otimes\pi)(\Delta_A\otimes(i\otimes i)\Delta_K)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\Delta_A\otimes(\pi u_A\varepsilon_K\otimes\pi u_A\varepsilon_K)\Delta_K)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A)(\Delta_A\otimes\varepsilon_K)\\
&=(\pi m_A\otimes\pi m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes u_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes u_A)(\Delta_A\otimes\varepsilon_K)\\
&=(\pi\otimes\pi)\Delta_A(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K).
\end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $\Delta_Q\colon Q\to Q\otimes Q$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\Delta_Q\pi=(\pi\otimes\pi)\Delta_A$。可以验证，$(Q,\Delta_Q,\varepsilon_Q)$ 是 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，因为 $(A,\Delta_A,\varepsilon_A)$ 属于 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$，且 π 是 $\mathcal{M}$ 中的一个满态射，因此 π 是 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。注意，Q 的余交换性继承自 A 的余交换性。要证明 π 属于 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_A\mathcal{M})$，还需证明 Q 属于 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_A\mathcal{M})$，也就是说，还需证明 Δ_Q 和 ε_Q 是 ${}_A\mathcal{M}$ 中的态射。由于 $\mu_{Q\otimes Q}=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_{Q\otimes Q})$，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\mu_{Q\otimes Q}(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\Delta_A\otimes\Delta_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)(\Delta_A\otimes(\pi\otimes\pi)\Delta_A)\\
&=(\mu_Q\otimes\mu_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\pi)(\mathrm{Id}\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\\
&=(\pi\otimes\pi)(m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\\
&=(\pi\otimes\pi)\Delta_A m_A=\Delta_Q\pi m_A=\Delta_Q\mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi).
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Id}_A\otimes\pi$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，我们得到 $\mu_{Q\otimes Q}(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_Q)=\Delta_Q\mu_Q$。此外，考虑单位对象 $\mathbf{1}$ 的平凡左 A-模结构 $\mu_{\mathbf{1}}:=\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}\colon A\otimes\mathbf{1}\to\mathbf{1}$，我们有

$$\mu_{\mathbf{1}}(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)=\mu_{\mathbf{1}}(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)=\varepsilon_A\otimes\varepsilon_A=\varepsilon_A m_A=\varepsilon_Q\pi m_A=\varepsilon_Q\mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi).$$

由此可得 $\mu_{\mathbf{1}}(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_Q)=\varepsilon_Q\mu_Q$。因此，$\pi$ 属于 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_A\mathcal{M})$。由于 π 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，它也是 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的满态射。

2). 我们验证 π 是 $\mathcal{M}$ 中这对态射 $((\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A},(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A})$ 的余等化子。由于 $((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}=(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)e_{A,A}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A}&=(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_Q\otimes\varepsilon_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}\\
&=(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_Q\otimes\varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)e_{A,A}=\pi(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A},
\end{aligned}$$

即 π 使这一对态射 $((\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A},(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A})$ 相等。定义以下 $\mathcal{M}$ 中的态射

$$\zeta:=(\mathrm{Id}_A\otimes m_A)(\Delta_A\otimes i):A\otimes K\to A\otimes A.$$

我们计算

$(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)\zeta=(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A)(\Delta_A\otimes i)=(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A\otimes m_A)$
$(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes\Delta_A)(\Delta_A\otimes i)=(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_A,$
$_A\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes i\otimes i)(\Delta_A\otimes\Delta_K)=(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_A,$
$_A\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes i\otimes i)(\Delta_A\otimes\Delta_K)=(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}$
$_{A\otimes A}\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes i\otimes i)(\Delta_A\otimes\Delta_K)$

$= (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,Q} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \pi \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A \otimes u_A\varepsilon_K \otimes i)(\Delta_A \otimes \Delta_K)$
$= (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,Q} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \pi \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes i) =$
$(\mathrm{Id}_A \otimes \mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \pi \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes i) = (\mathrm{Id}$
$_A \otimes \mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \pi \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes i) = (\mathrm{Id}_A \otimes \pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})$
$(\Delta_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes i) = (\mathrm{Id}_A \otimes \pi \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes i) = ((\mathrm{Id}_A \otimes \pi)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}$
$_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes i) = ((\mathrm{Id}_A \otimes \pi)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\zeta.$

根据泛性质，存在唯一态射 $\xi: A \otimes K \to A\square_Q A$ in $\mathcal{M}$，使得 $e_{A,A}\xi = \zeta$。设有态射 $f: A \to C$ in $\mathcal{M}$，使得 $f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}$。我们有

$$\begin{aligned} fm_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) &= f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes i) = f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)\zeta = f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\xi \\ &= f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}\xi = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)\zeta = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes i) \\ &= f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)(\Delta_A \otimes i) = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K). \end{aligned}$$

由于 π 是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$ 的余等化子，存在唯一态射 $p: Q \to C$，使得 $p\pi = f$。因此，π 是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $((\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}, (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A})$ 的余等化子。□

命题 5.1 将 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射 $i: K \to A$ 映为 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的满态射 $\pi: A \to Q$。接下来的目标是找出逆对应。根据推论 3.5，我们知道 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 有等化子。因此，我们可以考虑 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中两个特定态射的等化子。按照通常的做法，我们用 $A^{\mathrm{co}Q}$ 表示 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中这一对态射 $(\pi, \pi u_A\varepsilon_A)$ 的等化子，它也是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 的等化子（见推论 3.5）。

命题 *5.2*。设 A 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，且 $\pi: A \to Q$ 是 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的一个满态射，其中 A 属于 ${}_A\mathcal{M}$，其作用由 m_A给出。设 $i: A^{\mathrm{co}Q} \to A$ 是 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射对 $(\pi, \pi u_A\varepsilon_A)$ 的等化子，即 $\mathcal{M}$中态射对 $((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 的等化子。那么，我们有以下结果。

1) 态射 i 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个单态射。2) 以下图表是 $\mathcal{M}$中的一个等化子

$$A^{\mathrm{co}Q} \xrightarrow{\ i\ } A \underset{q_{A,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)}{\overset{q_{A,A}(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)}{\rightrightarrows}} A \otimes_{A^{\mathrm{co}Q}} A \tag{9}$$

其中 $q_{A,\,A}: A \otimes A \to A \otimes_{A^{\mathrm{co}Q}} A$ 是 $\mathcal{M}$ 中按(2) 所定义的余等化子，而 A 是 ${}_{A^{\mathrm{co}Q}}\mathcal{M}$ 中的一个对象，其结构为 $m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)$，并且在 $\mathcal{M}_{A^{\mathrm{co}Q}}$ 中的结构为 $m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i)$。

证明。 1）。我们已经知道 $i: A^{\mathrm{co}Q} \to A$ 属于 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。只需证明 $A^{\mathrm{co}Q}$属于 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$，且它具有一个对极。考虑下面的图表:

$$\begin{array}{ccccc} A^{\mathrm{co}Q} \otimes A^{\mathrm{co}Q} & \xrightarrow{i\otimes i} & A \otimes A & \underset{\mathrm{Id}_A \otimes \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A}{\overset{\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\rightrightarrows}} & A \otimes Q \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle m_{A^{\mathrm{co}Q}}} & & \downarrow{\scriptstyle m_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{Q\otimes A}} \\ A^{\mathrm{co}Q} & \xrightarrow[i]{} & A & \underset{\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A}{\overset{(\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\rightrightarrows}} & Q \otimes A \end{array}$$

为简洁起见，我们先计算

$$\begin{aligned} (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A m_A &= (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A) \\ &= (\mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \pi \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A) \\ &= (\mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,Q} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_{Q\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A) \\ &= \mu_{Q\otimes A}(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A m_A(i\otimes i) &= \mu_{Q\otimes A}(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(i\otimes i) = \mu_{Q\otimes A}(i\otimes(\pi i\otimes i)\Delta_{A^{coQ}})\\ &= \mu_{Q\otimes A}(i\otimes(\pi u_A\varepsilon_A i\otimes i)\Delta_{A^{coQ}}) = \mu_{Q\otimes A}(i\otimes(\pi u_A\varepsilon_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i)\\ &= \mu_{Q\otimes A}(i\otimes \pi u_A\otimes i) = (\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_{Q\otimes A})(i\otimes \pi u_A\otimes i)\\ &= (\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)(i\otimes i\otimes \pi u_A\otimes i)(\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}})\\ &= (\mu_Q\otimes m_A)(i\otimes \pi u_A\otimes i\otimes i)(\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}})\\ &= (\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes u_A)\otimes m_A)(i\otimes i\otimes i)(\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}})\\ &= (\pi i\otimes m_A(i\otimes i))(\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}}) = (\pi u_A\varepsilon_A i\otimes m_A(i\otimes i))(\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}})\\ &= (\pi u_A\varepsilon_A\otimes m_A)(\Delta_A i\otimes i) = (\pi u_A\otimes \mathrm{Id}_A)m_A(i\otimes i).\end{aligned}$$

由推论 3.5 可知，$i\colon A^{coQ}\to A$ 是 $\mathcal{M}$中这一对态射 $((\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A, \pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A)$ 的等化子。因此，根据泛性质，存在唯一态射 $m_{A^{coQ}}\colon A^{coQ}\otimes A^{coQ}\to A^{coQ}$ in $\mathcal{M}$，使得 $m_A(i\otimes i) = i m_{A^{coQ}}$。此外，由于 $(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A u_A = (\pi u_A\otimes \mathrm{Id}_A)u_A$，存在唯一态射 $u_{A^{coQ}}\colon \mathbf{1}\to A^{coQ}$ in $\mathcal{M}$，使得 $iu_{A^{coQ}} = u_A$。容易验证 $(A^{coQ}, m_{A^{coQ}}, u_{A^{coQ}})$ 属于 Mon($\mathcal{M}$)，因为 (A, m_A, u_A) 属于 Mon($\mathcal{M}$)，且 i 是 $\mathcal{M}$中的单态射，因此 $i\colon A^{coQ}\to A$成为 Mon($\mathcal{M}$) 中的态射。由此可得 $(A^{coQ}, m_{A^{coQ}}, u_{A^{coQ}}, \Delta_{A^{coQ}}, \varepsilon_{A^{coQ}})$ 属于 Bimon$_{coc}$($\mathcal{M}$)（因此 i 是 Bimon$_{coc}$($\mathcal{M}$) 中的态射），因为 $(A, m_A, u_A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ 属于 Bimon($\mathcal{M}$)，且 i 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，并且该单态射在$\otimes$作用下保持不变。进一步地，我们计算

$$\begin{aligned}\pi i = \pi u_A\varepsilon_A i = \pi m_A(S_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i = \mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)(S_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i = \mu_Q(S_A\otimes \mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A i\\ = \mu_Q(S_A\otimes \mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A)i = \mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A)S_A i = \pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes u_A)S_A i = \pi S_A i\end{aligned}$$

并且，由于 $\Delta_A S_A = (S_A\otimes S_A)\Delta_A$ 是余交换的，我们还有

$$\begin{aligned}(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A S_A i &= (\pi\otimes \mathrm{Id}_A)(S_A\otimes S_A)\Delta_A i = (\pi S_A i\otimes S_A i)\Delta_{A^{coQ}} = (\pi i\otimes S_A i)\Delta_{A^{coQ}}\\ &= (\pi u_A\varepsilon_A i\otimes S_A i)\Delta_{A^{coQ}} = (\pi u_A\varepsilon_A\otimes S_A)\Delta_A i = (\pi u_A\otimes \mathrm{Id}_A)S_A i.\end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $S_{A^{coQ}}\colon A^{coQ}\to A^{coQ}$ 属于 $\mathcal{M}$，使得 $iS_{A^{coQ}} = S_A i$。由于 S_A 是 A 的对极，且 i 属于 Bimon$_{coc}$($\mathcal{M}$)，我们得到 $S_{A^{coQ}}$ 是A^{coQ}的对极。因此，态射 i 属于 Hopf$_{coc}$($\mathcal{M}$)。由于 i 在 $\mathcal{M}$中是单态射，它在 Hopf$_{coc}$($\mathcal{M}$)中也是单态射。

2). 现在我们证明 i 是 $\mathcal{M}$中一对态射 $(q_{A,A}(u_A\otimes \mathrm{Id}_A)q_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes u_A))$ 的等化子。我们有

$$\begin{aligned}q_{A,A}(u_A\otimes \mathrm{Id}_A)i &= q_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes m_A(i\otimes \mathrm{Id}_A))(u_A\otimes \mathrm{Id}_K\otimes u_A)\\ &= q_{A,A}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)\otimes \mathrm{Id}_A)(u_A\otimes \mathrm{Id}_K\otimes u_A) = q_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes u_A)i,\end{aligned}$$

也就是说，i 使一对态射 $(q_{A,A}(u_A\otimes\mathrm{Id}_A)q_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes u_A))$ 相等。接下来需要验证泛性质。通过定义如下 $\mathcal{M}$中的态射

$$\zeta := (\pi\otimes m_A)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A) : A\otimes A\to Q\otimes A,$$

我们计算

$\zeta(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)\otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi\otimes m_A)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)\otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi\otimes m_A)(m_A\otimes m_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A\otimes\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A) = (\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes m_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes i\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_A) = (\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes m_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}\otimes A})(\Delta_A\otimes\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_A) = (\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\varepsilon_A\otimes m_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}\otimes A})(\Delta_A\otimes\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi\otimes m_A)(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes u_A\varepsilon_A)\otimes m_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_{A^{coQ}\otimes A})(\Delta_A\otimes\Delta_{A^{coQ}}\otimes \mathrm{Id}_A)$

$= (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes i \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_{A^{coQ}} \otimes \mathrm{Id}_A)$
$= (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \varepsilon_A i \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_{A^{coQ}} \otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \varepsilon_{A^{coQ}} \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_{A^{coQ}} \otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A)(\Delta_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A) = (\pi \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)) = \zeta(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))$.

因此，存在唯一态射 $\xi : A \otimes_{A^{coQ}} A \to Q \otimes A$ in $\mathcal{M}$，使得 $\xi q_{A,A} = \zeta$。假设存在一个态射 f: $C \to A$ in $\mathcal{M}$，使得 $q_{A,A}(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f = q_{A,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)f$。我们有

$$\begin{aligned}(\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A f &= (\pi \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes u_A)\Delta_A f = (\pi \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)f \\ &= \zeta(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)f = \xi q_{A,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)f = \xi q_{A,A}(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f = \zeta(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f \\ &= (\pi \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f = (\pi \otimes m_A)(u_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f = (\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)f.\end{aligned}$$

由于 i 是 $\mathcal{M}$中这对态射 $((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 的等化子，存在唯一态射p： $C \to A^{coQ}$ in $\mathcal{M}$，使得 $ip = f$。因此， i 是 $\mathcal{M}$中这对态射 $(q_{A,A}(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)q_{A,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A))$ 的等化子。□

现在我们证明，命题 5.1 和命题 5.2 在 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中 A 的子对象与在 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中 A 的商对象之间定义映射。在 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中， A 的子对象是指单态射 $i : K \to A$in Hopf $_{coc}(\mathcal{M})$ 的同构类；在 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中， A 的商对象是指满态射 $\pi : A \to Q$ in $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 的同构类。有时我们会写子对象（分别是商对象）之间的等式，意指它们作为类相等，即它们的定义域（分别是陪域）之间存在同构。

命题 5.3. 设 A 是 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。

1) 存在一个良定义映射 ϕ_A，将$\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$中 A 的子对象映射到$\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中 A 的商对象，定义为 $\phi_A(i) := \pi$，如命题 *5.1* 所示。2) 存在一个良定义映射 ψ_A，将$\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中 A 的商对象映射到$\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中 A 的子对象，定义为 $\psi_A(\pi) := i$，如命题 *5.2* 所示。

证明。1). 对于 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中的任意单态射 i: $K \to A$ 以及同构 $j : K' \to K$，分别记 π: $A \to Q$ 和 $\pi' : A \to Q'$ 为 $\mathcal{M}$中 $(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$ 和 $(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes ij), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{K'})$ 的余等化子，如命题 5.1 所示。只需证明存在一个同构 $t : Q' \to Q$，它属于 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 且满足 $\pi = t\pi'$。由于 $\pi m_A(\mathrm{Id}_A \otimes ij) = \pi(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K j) = \pi(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{K'})$，存在唯一态射 t: $Q' \to Q$，它属于 $\mathcal{M}$ 且满足 $\pi = t\pi'$。由于 $j : K' \to K$ 是 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 中的同构，存在一个态射 $j' : K \to K'$，它属于 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$，且满足 $jj' = \mathrm{Id}_K$ 和 $j'j = \mathrm{Id}_{K'}$。因此， $\pi' m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \pi' m_A(\mathrm{Id}_A \otimes ijj') = \pi'(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{K'} j') = \pi'(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$。由此可知，存在唯一态射 $t' : Q \to Q'$，它属于 $\mathcal{M}$ 且满足 $\pi' = t'\pi$。因此， t: $Q' \to Q$ 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，其逆为 t'。容易验证， t 和 t' 确实属于 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$。

2）。对于任意满态射 $\pi : A \to Q$ in $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 和同构 $j : Q \to Q'$ in Comon_{coc} $({}_A\mathcal{M})$，分别将 $(\pi, \pi u_A \varepsilon_A)$ 和 $(j\pi, j\pi u_A \varepsilon_A)$ 在 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中的等化子记为 $i : A^{coQ} \to A$ 和 $i' : A^{coQ'} \to A$，如命题 5.2 所示。我们证明存在一个同构 $t : A^{coQ} \to A^{coQ'}$ in $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$, 使得 $i = i't$。由于 $A^{coQ} = \mathrm{Eq}((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 和 $A^{coQ'} = \mathrm{Eq}((j\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, j\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 在 $\mathcal{M}$ 中，且 $(j\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i = (j\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)i$，因此存在唯一态射 t: $A^{coQ} \to A^{coQ'}$ in $\mathcal{M}$，使得 $i = i't$。由于 $j : Q \to Q'$ 是 $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$ 中的同构，因此存在态射 $j' : Q' \to Q$ in $\mathrm{Comon}_{coc}({}_A\mathcal{M})$，使得 $jj' = \mathrm{Id}_{Q'}$ 和 $j'j = \mathrm{Id}_Q$。于是，$(\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i' = (j'j\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i' = (j'j\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)i' = (\pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)i'$。因此，存在唯一态射 $t' : A^{coQ'} \to A^{coQ}$，使得 $i' = it'$。由此，t 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，其逆为 t'。容易验证， t 和 t' 确实属于 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$。□

最后，我们可以在 $\mathrm{Hopf}_{coc}(\mathcal{M})$ 的框架下，将已知的余交换 Hopf 代数的双射对应 (1) 推广（其源自 [39]），

定理 5.4. 设 A 是$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个对象。那么，以下各项之间存在双射对应：

1) A 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的子对象，它们是如(9)所示的等化子；2) A 在 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的商对象，它们是如(8)所示的余等化子。

这两个互逆双射由 ϕ_A 和 ψ_A 给出，定义如命题 *5.3* 所示 .

证明。 首先，我们证明 $\psi_A\phi_A = \mathrm{Id}$。给定 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个子对象 $i: K \to A$ of A，定义$\pi := \phi_A(i): A \to Q$ in $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 和 $i' := \psi_A(\pi): A^{\mathrm{co}Q} \to A$ in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。只需证明 K 在 $\mathcal{M}$中与 $A^{\mathrm{co}Q}$ 同构，因此它们在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中同构，因为它们是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 A 的子对象。根据 π的定义，我们知道 $\pi m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \pi(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$，因此有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_A \otimes \pi)\Delta_A i &= (\mathrm{Id}_A \otimes \pi)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(u_A \otimes \mathrm{Id}_A))\Delta_A i\\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \pi)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_A)(i \otimes i)\Delta_K\\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \pi)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i)(i \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_K)\Delta_K\\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \pi)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)(i \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_K)\Delta_K\\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \pi)(i \otimes u_A)(\mathrm{Id}_K \otimes \varepsilon_K)\Delta_K = (\mathrm{Id}_A \otimes \pi u_A)i.\end{aligned}$$

因此，由于 $i'\colon A^{\mathrm{co}Q} \to A$是态射对 $((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A,\ \mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A)$ 在 $\mathcal{M}$中的等化子，存在唯一态射 $\varphi\colon K \to A^{\mathrm{co}Q}$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $i'\varphi = i$。根据假设，i 是态射对 $(q_{A,\,A}(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)q_{A,\,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A))$ 在 $\mathcal{M}$ 中的等化子。我们在 $\mathcal{M}$ 中定义如下态射

$$\zeta := (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) : A \otimes A \to Q \otimes A.$$

因为

$$\begin{aligned}&\zeta(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes i \otimes i)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K) \otimes m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i))(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_K) \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_Q \otimes \mathrm{Id}_A \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)\\ &= (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))\\ &= \zeta(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)),\end{aligned}$$

根据余等化子 $q_{A,\,A}\colon A \otimes A \to A \otimes_K A$的泛性质，存在唯一态射 $\overline{\mathsf{can}}: A \otimes_K A \to Q \otimes A$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\overline{\mathsf{can}}q_{A,\,A} = \zeta$。我们计算

可以$q_{A,A}(u_A \otimes$恒等映射$_A) = \zeta(u_A \otimes$ 恒等映射$_A) = ($恒等映射$_Q \otimes m_A)((\pi \otimes$ 恒等映射$_A)\Delta_A \otimes$ 恒等映射$_A)(u_A \otimes$ 恒等映射$_A) = \pi u_A \otimes$ 恒等映射$_A$和

可$q_{A,\,A}(\mathrm{Id}_A \otimes u_A) = \zeta(\mathrm{Id}_A \otimes u_A) = (\mathrm{Id}_Q \otimes m_A)((\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes u_A) = (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A.$

因此，下面的图表在 $\mathcal{M}$ 中交换：

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\ i\ } & A & \underset{q_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes u_A)}{\overset{q_{A,A}(u_A\otimes\mathrm{Id}_A)}{\rightrightarrows}} & A\otimes_K A \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\mathsf{can}}} \\ A^{\mathrm{co}Q} & \xrightarrow[\ i'\ ]{} & A & \underset{(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\overset{\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A}{\rightrightarrows}} & Q\otimes A \end{array} \tag{10}$$

注意， $\zeta = (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}$，其中 $\mathsf{can} := (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$。注意，由于 A 属于 $\mathrm{Hopf}(\mathcal{M})$，can 是 $\mathcal{M}$ 中的一个同构，且其逆为 $\mathsf{can}^{-1} = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$，例如参见 [50, 定理 1.8]。由于 π 是下列态射对的余等化子

$(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i),\ \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$ 属于 $\mathcal{M}$，且 $(-) \otimes A$ 保持余等化子，因此态射 $\pi \otimes \mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$中下列态射对 $(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A,\ \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K \otimes \mathrm{Id}_A)$ 的余等化子。于是，$\zeta = (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}$ 是 $\mathcal{M}$ 中态射对 $(\mathsf{can}^{-1}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A),\ \mathsf{can}^{-1}(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K \otimes \mathrm{Id}_A))$ 的余等化子。由于

$\mathsf{can}^{-1}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)((m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)((m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes i \otimes i)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)((m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)((\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_A m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A)$

and

可以$^{-1}$(恒等态射$_A \otimes \varepsilon_K \otimes$ 恒等态射$_A$) = (恒等态射$_A \otimes m_A$)(恒等态射$_A \otimes S_A \otimes$ 恒等态射$_A$)($\Delta_A \otimes$ 恒等态射$_A$)(恒等态射$_A \otimes \varepsilon_K \otimes$ 恒等态射$_A$)= (恒等态射$_A \otimes m_A$)(恒等态射$_A \otimes u_A \otimes m_A$)((恒等态射$_A \otimes S_A$)$\Delta_A \otimes \varepsilon_K \otimes$ 恒等态射$_A$)= (恒等态射$_A \otimes m_A$)(恒等态射$_A \otimes u_A \otimes m_A$)(恒等态射$_A \otimes \varepsilon_K \otimes$ 恒等态射$_{A\otimes A}$)((恒等态射$_{A\otimes K} \otimes S_A$)(恒等态射$_A \otimes \sigma_{A,K}$)($\Delta_A \otimes$ 恒等态射$_K$) $\otimes$恒等态射$_A$)

= (恒等态射$_A \otimes m_A$)(恒等态射$_A \otimes i \otimes$ 恒等态射$_A$)(恒等态射$_A \otimes u_K \varepsilon_K \otimes m_A$)((恒等态射$_{A\otimes K} \otimes S_A$)(恒等态射$_A \otimes \sigma_{A,\ K}$)($\Delta_A \otimes$ Id_K) $\otimes \mathrm{Id}_A$)

$= (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_K(\mathrm{Id}_K \otimes S_K)\Delta_K \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_K \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_K \otimes S_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_K \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_K \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_K \otimes S_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K\otimes K})(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_K \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes (S_K \otimes S_A)\sigma_{A,K})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K\otimes K} \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \sigma_{A,K}(S_A \otimes S_K))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes i \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \sigma_{A,K}(S_A \otimes S_K))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes i \otimes m_A)$ ($(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \sigma_{A,K}(S_A \otimes S_K))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A) \otimes \mathrm{Id}_A)$ ($(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K}(S_A \otimes S_K))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A\sigma_{A,A}(S_A \otimes S_A i) \otimes \mathrm{Id}_A)$ ($(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) = (\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_A m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A)$ ($(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A)$

我们得到

$$
\begin{aligned}
& q_{A,A}\mathsf{can}^{-1}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) \\
&= q_{A,A}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_A m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) \\
&\quad ((\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) \\
&= q_{A,A}(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(i \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes S_A m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) \otimes \mathrm{Id}_A) \\
&\quad ((\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,K} \otimes \mathrm{Id}_K)(\Delta_A \otimes \Delta_K) \otimes \mathrm{Id}_A) \\
&= q_{A,A}\mathsf{can}^{-1}(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K \otimes \mathrm{Id}_A).
\end{aligned}
$$

因此，存在唯一态射 $\mathsf{can}^{-1}\colon Q\otimes A\to A\otimes_K A$ in $\mathcal{M}$，使得 $\mathsf{can}^{-1}\zeta = q_{A,\,A}$。我们证明 can^{-1} 确实是 can 的逆。由于 can 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，且 $\pi\otimes\mathrm{Id}_A$是 $\mathcal{M}$中的满态射，因此 $\zeta = (\pi\otimes\mathrm{Id}_A)$ can 是 $\mathcal{M}$中的满态射。注意，$q_{A,\,A}$ 也是 $\mathcal{M}$中的满态射。因此，等式 $\mathsf{can}\,\mathsf{can}^{-1}\zeta = \mathsf{can} q_{A,\,A} = \zeta$ 和 $\mathsf{can}^{-1}\,\mathsf{can} q_{A,\,A} = \mathsf{can}^{-1}\zeta = q_{A,\,A}$ 意味着 can^{-1} 是 can 的逆。由于图表 (10) 中的两条线都是 $\mathcal{M}$ 中的等化子，且 can 是 $\mathcal{M}$中的同构，因此 φ 也是 $\mathcal{M}$中的同构。

现在，我们证明 $\phi_A\psi_A = \mathrm{Id}$。给定一个 quotient $\pi\colon A\to Q$in $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$，令 $i := \psi_A(\pi)\colon A^{\mathrm{co}Q}\to A$ in $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，以及 $\pi' := \phi_A(i)\colon A\to Q'$ in $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$。我们证明 Q 与 Q' 在 $\mathcal{M}$ 中同构，因此 Q与 Q' 在 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中同构，因为它们是 A in $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 的 quotient。回顾一下，i 是 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中偶对 $(\pi, \pi u_A\varepsilon_A)$ 的 equalizer，而 $\pi'\colon A\to Q'$ 是 $\mathcal{M}$ 中偶对 $(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i), \mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})$ 的 coequalizer。我们计算

$$\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i) = \mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi i) = \mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\varepsilon_A i) = \pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes u_A\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}) = \pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}).$$

因此，存在唯一态射 $\varphi\colon Q'\to Q$ in $\mathcal{M}$，使得 $\varphi\pi' = \pi$。如前所述，由于 A is in $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$，$\mathsf{can} := (\mathrm{Id}_A\otimes m_A)(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)$ 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，参见例如 [50, 定理 1.8]。考虑 $\mathcal{M}$ 中的以下态射：

$$f := (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_{Q\otimes A})(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_{Q\otimes A})\colon A\otimes Q\otimes A\to A\otimes Q\otimes A.$$

我们计算

$$\begin{aligned}
&f(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_{Q\otimes A})(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A\otimes A}\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A)((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes A})((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q(\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A)\otimes m_A)((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes u_A)\otimes m_A)((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes m_A)((\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= ((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A)(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= ((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\mathsf{can}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&f(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_{Q\otimes A})(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,Q}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A\otimes A}\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A)\Delta_A\otimes\Delta_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\mu_Q\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A)\Delta_A\otimes\Delta_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\pi m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A)\Delta_A\otimes\Delta_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\sigma_{A,A}\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes\Delta_A)(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes\pi\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A m_A)(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)\\
&= (\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)\mathsf{can}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到以下交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
A\otimes A^{\mathrm{co}Q} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_A\otimes i} & A\otimes A & \underset{\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\overset{\mathrm{Id}_A\otimes\pi u_A\otimes\mathrm{Id}_A}{\rightrightarrows}} & A\otimes Q\otimes A\\
\downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{can}} & & \downarrow{\scriptstyle f}\\
A\square_Q A & \xrightarrow[e_{A,A}]{} & A\otimes A & \underset{\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A}{\overset{(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A}{\rightrightarrows}} & A\otimes Q\otimes A
\end{array}$$

其中， ξ 由泛性质得到。事实上，由于 $i\colon A^{\mathrm{co}Q} \to A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个等化子，并且$A \otimes (-)$在 $\mathcal{M}$中保等化子，因此前一个图表中的第一行是 $\mathcal{M}$中的一个等化子，而第二行根据定义是 $\mathcal{M}$ 中的一个等化子。此外，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes i) &= f(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) = f(\mathrm{Id}_A \otimes \pi u_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i)\\ &= ((\mathrm{Id}_A \otimes \pi)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes i).\end{aligned}$$

由于 A 具有对极 S_A 且它是余交换的，很容易验证 f 是 $\mathcal{M}$ 中的一个同构，其逆由下式给出

$$f^{-1} := (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_Q \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_Q \otimes S_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,Q} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A \otimes \mathrm{Id}^{Q\otimes A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}^{Q\otimes A})。$$

由于 can 和 f 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，且两条线在 $\mathcal{M}$中都是等化子，我们得到 ξ 是 $\mathcal{M}$中的同构。此外，我们计算

$$\begin{aligned}(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\xi &= (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes i) = (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i)\\ &= m_A(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}\xi &= (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes i) = (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i)\\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A i = \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}.\end{aligned}$$

因此，我们在 $\mathcal{M}$中有如下交换图表：

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A^{\mathrm{co}Q} & \underset{\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}}{\overset{m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)}{\rightrightarrows}} & A & \xrightarrow{\pi'} & Q' \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A\square_Q A & \underset{(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A}}{\overset{(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}}{\rightrightarrows}} & A & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array}$$

由于两行都是 $\mathcal{M}$ 中的余等化子（第二行由假设得出），且 ξ 是 $\mathcal{M}$中的同构，因此 φ 也必然是 $\mathcal{M}$ 中的同构。□

我们指出，对子对象和商对象所作的条件假设，是为了证明对于任意的 $A \in \mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，映射 ϕ_A 和 ψ_A 互为逆映射，而不是为了定义它们。

注 5.5. 将定理 5.4 应用于 $(\mathcal{M}, \otimes, 1, \sigma) = (\mathsf{Vec}_{\Bbbk}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \tau)$，可以重新得到余交换 Hopf 代数的著名双射对应 (1)，该对应可追溯至 [39,定理 4.1]，；而对于 $(\mathcal{M}, \otimes, 1, \sigma) = (\mathsf{Vec}_G, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \sigma)$，其中 G 是有限生成阿贝尔群，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ （如果 G 是有限的奇数维对象，则不需要此条件），可以重新得到 [45, 定理 5.20]。我们还回顾一下， [39] 中针对余交换 Hopf 代数给出的双射对应，也在 [23, 24] 中推广到了霍普夫代数胚的框架；并且我们注意到，关于商对象的相应余等化子条件此前已在 [44]中得到观察和研究。给定 $(\mathcal{M}, \otimes, 1, \sigma) = (\mathsf{Vec}_{\Bbbk}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \tau)$，我们关于纽曼定理的范畴证明重新得到 [23, 24]中给出的证明。在该情形下，正如 [44, 第 10 页 (b)], 所指出的，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 A 的任意子对象都是如 (9) 中的等化子，而 $\mathsf{Comon}({}_A\mathcal{M})$ 中 A 的任意商对象都是如 (8) 中的余等化子。一般而言，对于任意具有等化子和余等化子的辫编织幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, 1, \sigma)$，且这些等化子和余等化子由 $\otimes$保持的 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，我们并不知道何时这一点成立。我们将在下一节回到这个问题。

在推论 6.10 中，我们将证明，一旦范畴 $\mathcal{M}$ 是带基点的，定理 5.4 给出的双射对应便会在 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核与 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的商对象之间诱导出一个双射对应；这些商对象在 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中是正则满态射。我们以证明一个将用于此目的的结果来结束本节。首先，我们需要以下简单的观察。

注 5.6. 设 $f\colon A \to B$是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。考虑 f 在 $\mathcal{M}$中的核 $\ker(f) : \mathrm{Ker}(f) \to A$，我们有 $\mathrm{Ker}(f)$ 是一个 Hopf 理想（见第 2 节）。事实上，容易验证态射 $\ker(f)$ 属于 ${}_A\mathcal{M}_A$，其中 f在 ${}_A\mathcal{M}_A$中的结构由 A诱导。在

此外，Ker(f) 是一个双边余理想。事实上，对于 $\pi{:=}\mathsf{coker}(\ker(f))$ 和 $h{:=}\ker(\mathsf{coker}(f))$ in$\mathcal{M}$，我们得到

$$0 = \Delta_B f\ker(f) = (f\otimes f)\Delta_A\ker(f) = (h\otimes h)(\pi\otimes\pi)\Delta_A\ker(f),$$

并且，由于 $h\otimes h$ 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，我们得到 $(\pi\otimes\pi)\Delta_A\ker(f) = 0$。此外，$\varepsilon_A\ker(f) = \varepsilon_B f\ker(f) = 0$。最后，由于 $0 = S_B f\ker(f) = fS_A\ker(f) = h\pi S_A\ker(f)$，且 h 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，我们得到 $\pi S_A\ker(f) = 0$。因此，Ker(f) 是一个 Hopf 理想。于是，π 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，而事实上它也是 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的一个态射。此外，h 也属于 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，因为 $f = h\pi$ 与 π 和 f 一起属于 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，且 π 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。

下一个章节中将会用到以下结果。

引理 5.7. 以下陈述成立：

1) 设 $\pi: A\to Q$ 是 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中 A 的一个商对象，同时也是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射。则 $\psi_A(\pi) = \mathsf{hker}(\pi)$。*2)* 设 $f: A\to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，且 $\mathsf{coker}(\ker(f))$ 是如 *(8)* 中所述的余等化子。则 $\phi_A(\mathsf{hker}(f)) = \mathsf{coker}(\ker(f))$。

证明。1)。由于 $\pi: A\to Q$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，我们有 $\pi u_A\varepsilon_A = u_Q\varepsilon_A$。因此，$\psi_A(\pi)$（定义为 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射对 $(\pi,\pi u_A\varepsilon_A)$ 的等化子）确实是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射对 $(\pi,u_Q\varepsilon_A)$ 的等化子，即 $\mathsf{hker}(\pi)$。

2)。我们令 $\pi{:=}\mathsf{coker}(\ker(f))$，并令 $h{:=}\ker(\mathsf{coker}(f))$，使得 $f = h\pi$。根据注 5.6，我们已经知道 π 和 h 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射。由于 $h\otimes\mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{hker}(f) &= \ker((f\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A - u_B\otimes\mathrm{Id}_A)\\ &= \ker((h\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A - hu_{\mathsf{Ker}(\mathsf{coker}(f))}\otimes\mathrm{Id}_A)\\ &= \ker((h\otimes\mathrm{Id}_A)((\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A - u_{\mathsf{Ker}(\mathsf{coker}(f))}\otimes\mathrm{Id}_A))\\ &= \ker((\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A - u_{\mathsf{Ker}(\mathsf{coker}(f))}\otimes\mathrm{Id}_A)\\ &= \mathsf{hker}(\pi) = \mathsf{hker}(\mathsf{coker}(\ker(f))).\end{aligned} \tag{11}$$

由 1) 我们已经知道 $\psi_A(\mathsf{coker}(\ker(f))) = \mathsf{hker}(\mathsf{coker}(\ker(f)))$，因此得到

$$\mathsf{coker}(\ker(f)) = \phi_A(\psi_A(\mathsf{coker}(\ker(f)))) = \phi_A(\mathsf{hker}(\mathsf{coker}(\ker(f)))) \overset{(11)}{=} \phi_A(\mathsf{hker}(f)),$$

这里第一次等号用到了定理 5.4，因为 $\mathsf{coker}(\ker(f))$ 是 (8) 中的余等化子。 □

在下一节中，我们将给出 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中核的一个等价描述。

6. An equivalent characterization for kernels in $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$

在本节中，$(\mathcal{M},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \sigma)$ 将是一个辫编织幺半范畴，它具有等化子和余等化子，且这些等化子和余等化子由 $\otimes$ 保持。如有需要，我们还会作出其他假设。

作为定理 5.4 的一个应用，我们可以得到 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中核的另一种刻画。为此，回顾一下 $\mathcal{M}$ 中伴随态射的定义：

$$\mathrm{ad}_A := m_A(m_A\otimes\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A})((\mathrm{Id}_A\otimes S_A)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A) : A\otimes A\to A.$$

等价地，$\mathsf{ad}_A = m_A(m_A\otimes S_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,\ A})(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)$。注意，态射 ad_A 定义了 A 在其自身上的左作用，参见例如 [29,命题 3.7.1]。

我们引入以下定义：

定义 6.1. 设 A 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，$i: K\to A$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个单态射。若存在 $\mathcal{M}$ 中的态射 $\psi: A\otimes K\to K$，使得下图交换，则称 i 是左正规的

$$\begin{array}{ccc} A\otimes K & \xrightarrow{\ \psi\ } & K\\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_A\otimes i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i}\\ A\otimes A & \xrightarrow[\ \mathrm{ad}_A\ ]{} & A\end{array} \tag{12}$$

。

对于霍普夫$\mathcal{M}$，也可以用同样的方式定义正规单态射，而不必假设余交换性。本文只讨论霍普夫$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。

注 6.2. 给定 A in Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，也可以定义

$$\mathrm{ad}'_A := m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A) : A \otimes A \to A.$$

若存在态射ψ'：$K \otimes A \to K$ in $\mathcal{M}$，使得 $i\psi' = \mathrm{ad}'_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)$，则称单态射 $i : K \to A$ in Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$为右正规。

以下结果表明，i 是左正规的，当且仅当 i 是右正规的。下文中，我们将简称 i 为正规单态射。

引理 6.3. 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺范畴。设 i：$K \to A$ 是霍普夫$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的单态射。那么，$i$ 是左正规的，当且仅当它是右正规的。

证明。由于 A 是余交换的，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A(S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A} &= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})((\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A} \\
&= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})((S_A \otimes S_A^2)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A} \\
&= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})((S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A} \\
&= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})\sigma_{A,A\otimes A}(\mathrm{Id}_A \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A) \\
&= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A}^2)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A) \\
&= \mathrm{ad}'_A.
\end{aligned}$$

如果 i 是左正规的，那么存在态射 ψ：$A \otimes K \to K$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $i\psi = \mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i)$。定义 ψ'：$= \psi(S_A \otimes \mathrm{Id}_K)\sigma_{K,\,A}$：$K \otimes A \to K$，属于 $\mathcal{M}$。我们得到

$i\psi' = i\psi(S_A \otimes \mathrm{Id}_K)\sigma_{K,A} = \mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i)(S_A \otimes \mathrm{Id}_K)\sigma_{K,A} = \mathrm{ad}_A(S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}(i \otimes \mathrm{Id}_A) = \mathrm{ad}'_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)$。

因此，i 是右正规的。反过来，如果 i 是右正规的，也就是说，存在 ψ'：$K \otimes A \to K$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $i\psi' = \mathrm{ad}'_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)$，定义 $\psi := \psi'(\mathrm{Id}_K \otimes S_A)\sigma_{A,\,K}$。那么，

$$\begin{aligned}
i\psi = i\psi'(\mathrm{Id}_K \otimes S_A)\sigma_{A,K} &= \mathrm{ad}'_A(i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_K \otimes S_A)\sigma_{A,K} \\
&= \mathrm{ad}_A(S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}(i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_K \otimes S_A)\sigma_{A,K} \\
&= \mathrm{ad}_A(S_A^2 \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}^2(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i).
\end{aligned}$$

这意味着 i是左正规的。 □

我们还得到以下结果，这一结果在后文中非常有用。

引理 6.4. 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴。设 A 是Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个对象。以下性质成立：

1) ad_A 是 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。2) 给定 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的 g：$A \to B$，则 $\mathrm{ad}_B(g \otimes g) = g\mathrm{ad}_A$。3) 设 $\mathcal{M}$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴。给定 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的 g：$A \to B$，它是 $\mathcal{M}$ 中的一个满态射，以及 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个正规单态射 i: $D \to A$，则 ker(coker(gi)) 是正规的。

证明。1)。由于$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$是一个对称幺半范畴，对于 Comon$(\mathcal{M})$中的任意对象 X, Y，$\sigma_{X,Y}$都属于 Comon$(\mathcal{M})$。因此，态射 ad_A 属于 Comon$(\mathcal{M})$（因而属于 Comon$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$），因为它是 Comon$(\mathcal{M})$中态射的复合。我们指出，利用 A的余交换性，可以得到 S_A 和 Δ_A 是 Comon$(\mathcal{M})$中的态射。

2）。这很直接，而且不需要用到 σ 是对称性这一事实。

3）。根据注 5.6，我们已经知道 ker(coker(gi)) 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个单态射。为简洁起见，我们设 t:= ker(coker(gi))，并设 t' :=coker(ker(gi))。由于 i 是正规的，存在一个态射ψ_D：$A \otimes D \to D$，属于 $\mathcal{M}$，使得 $\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = i\psi_D$。根据 2），我们有

$$\text{余核}(gi)\mathrm{ad}_B(g \otimes tt') = \text{余核}(gi)\mathrm{ad}_B(g \otimes gi) = \text{余核}(gi)g\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \text{余核}(gi)gi\psi_D = 0.$$

由于 g 和 t' 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，且 $\otimes$ 保持它们，因此我们得到 $g \otimes t'$ 也是 $\mathcal{M}$中的满态射。因此，余核$(gi)\mathrm{ad}_B(\mathrm{Id}_B \otimes t) = 0$。于是，根据核的泛性质，存在唯一态射 $\psi\colon B \otimes$Ker(余核$(gi)) \to$ Ker(余核 (gi))，它属于 $\mathcal{M}$ ，使得 $t\psi = \mathrm{ad}_B(\mathrm{Id}_B \otimes t)$。 □

注 6.5. 给定一个正规单态射 $i : K \to A$ in Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 及其对应的态射 $\psi\colon A \otimes K \to K$ in $\mathcal{M}$, 可立即得出 $\varepsilon_K\psi = \varepsilon_A i\psi = \varepsilon_A\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_A i = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_K$，因为 ad_A 是余单位的。因此，给定对应的$\psi' := \psi(S_A \otimes \mathrm{Id}_K)\sigma_{K,\,A}\colon K \otimes A \to K$，我们有 $\varepsilon_K\psi' = \varepsilon_K \otimes \varepsilon_A$。

借助正规单态射，我们得到了上述关于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中核的刻画。这是由以下两个结果证明的。

命题 6.6. 设 $i\colon K \to A$ 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射，其中 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴。若 i 是正规的，则 $\pi := \phi_A(i) =$ coeq$(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$ 是Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。

证明。 由命题 5.3 的 1) 可知， $\pi := \phi_A(i) =$ coeq$(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)\colon A \to Q$ 是 Comon$_{\mathrm{coc}}$ $({}_A\mathcal{M})$ 中的满态射。我们证明 π 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射。首先，我们计算

$$
\begin{aligned}
&m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})\\
&(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes u_A\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A)\\
&= m_A(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes u_A\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes\\
&\mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A(\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_A,\\
&{}_{A\otimes A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes (\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(m_A \otimes m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A\otimes A} \otimes \mathrm{Id}_A)\\
&(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes (\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(m_A \otimes m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_A,\\
&{}_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_{A\otimes A\otimes A} \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A)\\
&= m_A(m_A \otimes m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(\\
&m_A \otimes m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A))(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A) = m_A(\\
&m_A \otimes \mathrm{ad}'_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A),
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(m_A \otimes \mathrm{ad}'_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A). \tag{13}
$$

由于 i 是正规的，利用引理 6.3，存在一个态射 $\psi'\colon K \otimes A \to K$ 属于 $\mathcal{M}$ ，使得 $\mathrm{ad}'_A(i \otimes \mathrm{Id}_A) = i\psi'$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A) &\overset{(13)}{=} m_A(m_A \otimes \mathrm{ad}'_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)\\
&= m_A(m_A \otimes \mathrm{ad}'_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A)\\
&= m_A(m_A \otimes i\psi')(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A).
\end{aligned}
$$

因此，根据注 6.5，我们有

$$
\begin{aligned}
\pi m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A) &= \pi m_A(m_A \otimes i\psi')(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A)\\
&= \pi m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i)(m_A \otimes \psi')(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A)\\
&= \pi(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)(m_A \otimes \psi')(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A)\\
&= \pi(m_A \otimes \varepsilon_K \otimes \varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{K,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes K} \otimes \Delta_A)\\
&= \pi m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K \otimes (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)\Delta_A)\\
&= \pi m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K \otimes \mathrm{Id}_A).
\end{aligned}
$$

由于 $\pi\otimes \mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中一对 $(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)\otimes \mathrm{Id}_A,\ \mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K\otimes \mathrm{Id}_A)$ 的余等化子，存在唯一态射 $\xi: Q\otimes A\to Q$，使得

$$\xi(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)=\pi m_A. \tag{14}$$

因此，

$$\begin{aligned}\xi(\mathrm{Id}_Q\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i))(\pi\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes K})&=\xi(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i))\overset{(14)}{=}\pi m_A(\mathrm{Id}_A\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i))\\&=\pi m_A(m_A\otimes i)=\pi(m_A\otimes\varepsilon_K)=\xi(\mathrm{Id}_{Q\otimes A}\otimes\varepsilon_K)(\pi\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes K}).\end{aligned}$$

由于 $\pi\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes K}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，我们得到 $\xi(\mathrm{Id}_Q\otimes m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i))=\xi(\mathrm{Id}_{Q\otimes A}\otimes\varepsilon_K)$。根据余等化子 $\mathrm{Id}_Q\otimes\pi$ 的泛性质，存在唯一态射 $m_Q: Q\otimes Q\to Q\mathrm{in}\ \mathcal{M}$，使得 $m_Q(\mathrm{Id}_Q\otimes\pi)=\xi$。此外，我们定义 $u_Q:=\pi u_A$。容易验证 (Q,m_Q,u_Q) 属于 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$，因为 A 属于 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$，且 π 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，并且该满态射由 $\otimes$ 保持。此外，由于 $\pi m_A=\xi(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)=m_Q(\pi\otimes\pi)$ 且 $u_Q=\pi u_A$，我们得到 π 属于 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$。事实上，$Q$ 属于 $\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，因为 A 属于 $\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，且 π 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，因此 $\pi: A\to Q$ 属于 $\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。为了得出 π 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，还需证明 Q 存在对极。因为

$$\begin{aligned}\pi S_A m_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)&=\pi m_A\sigma_{A,A}(S_A\otimes S_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)=\pi m_A\sigma_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes i)(S_A\otimes S_K)\\&=\pi m_A(i\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,K}(S_A\otimes S_K)=m_Q(\pi\otimes\pi)(i\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,K}(S_A\otimes S_K)\\&=m_Q(\pi u_A\varepsilon_K\otimes\pi)\sigma_{A,K}(S_A\otimes S_K)=m_Q(\pi\otimes\pi)\sigma_{A,A}(\mathrm{Id}_A\otimes u_A\varepsilon_K)(S_A\otimes S_K)\\&=\pi m_A\sigma_{A,A}(S_A\otimes u_A\varepsilon_K)=\pi m_A(u_A\otimes \mathrm{Id}_A)(S_A\otimes\varepsilon_K)=\pi S_A(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_K),\end{aligned}$$

存在唯一态射 $S_Q: Q\to Q$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\pi S_A=S_Q\pi$。利用 S_A 是 A的对极这一事实，可以验证S_Q 是 Q 的对极。因此，π 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。□

命题 6.7。设 $i: K\to A$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个单态射，其中 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ 是一个对称幺半范畴。若 i 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个核，则它是正规的。

证明。设对于某个 $f: A\to B$，$i=$是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的 $\mathrm{hker}(f)$，即 i 是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $((f\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, u_B\otimes \mathrm{Id}_A)$ 的等化子（见引理 3.8）。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_B(f\otimes u_B)=&m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B})((\mathrm{Id}_B\otimes S_B)\Delta_B\otimes \mathrm{Id}_B)(f\otimes u_B)\\=&m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B})(\mathrm{Id}_B\otimes S_B\otimes \mathrm{Id}_B)(f\otimes f\otimes u_B)\Delta_A\\=&m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_B\otimes\sigma_{B,B})(f\otimes f\otimes u_B)(\mathrm{Id}_A\otimes S_A)\Delta_A\\=&m_B(m_B\otimes \mathrm{Id}_B)(f\otimes u_B\otimes f)(\mathrm{Id}_A\otimes S_A)\Delta_A\\=&m_B(f\otimes f)(\mathrm{Id}_A\otimes S_A)\Delta_A=fm_A(\mathrm{Id}_A\otimes S_A)\Delta_A\\=&fu_A\varepsilon_A=u_B\varepsilon_A\end{aligned}$$

以及 $(f\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A i=u_B\otimes i$，利用引理 6.4 的 1) 和 2) 可得

$$\begin{aligned}(f\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)=&(f\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{ad}_A\otimes \mathrm{ad}_A)\Delta_{A\otimes A}(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\=&(f\mathrm{ad}_A\otimes \mathrm{ad}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\=&(\mathrm{ad}_B\otimes \mathrm{ad}_A)(f\otimes f\otimes \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\=&(\mathrm{ad}_B\otimes \mathrm{ad}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_A)(f\otimes \mathrm{Id}_A\otimes f\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(\mathrm{Id}_A\otimes i)\\=&(\mathrm{ad}_B\otimes \mathrm{ad}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_A)(f\otimes \mathrm{Id}_A\otimes u_B\otimes i)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_K)\\=&(\mathrm{ad}_B\otimes \mathrm{ad}_A)(f\otimes u_B\otimes \mathrm{Id}_A\otimes i)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_K)\\=&(u_B\varepsilon_A\otimes \mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A\otimes i))(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_K)=u_B\otimes \mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A\otimes i).\end{aligned}$$

因此，根据等化子的泛性质，存在唯一态射 $\psi: A\otimes K\to A\,\mathrm{in}\mathcal{M}$，使得 $i\psi=\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A\otimes i)$，所以 i 是正规的。□

我们最终得到以下结果：

定理 6.8. 设 $i : K \to A$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个单态射，并且它是式 (9)所示的等化子，其中 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴。以下条件等价:

1) i 是正规的；2) $\pi := \phi_A(i) = \mathsf{coeq}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i), \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_K)$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射；3) i 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个核。

蕴含关系3) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) 成立，无需假设 i 是 *(9)* 中的等化子。

证明。 1) $\Rightarrow$ 2)。这是命题 6.6。

2) $\Rightarrow$ 3)。由于 i 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射，且是 (9) 中的等化子，根据定理 5.4，我们有 $i = \psi_A(\phi_A(i))$。又由于 $\pi := \phi_A(i)$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射，根据引理 5.7 的 1)，我们得到$i = \psi_A(\pi) = \mathsf{hker}(\pi)$。

3) $\Rightarrow$ 1)。这是命题 6.7。 □

通常，如果一个单态射是某个态射的核，就称它为正规。前一个定理说明了定义 6.1 中采用“正规”这一名称的合理性。

引理 6.9. 设 $f : A \to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。那么， $\phi_A(\mathsf{hker}(f)) = \mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))$。

证明。 根据定理 6.8 的 3) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2)，我们知道 $\pi := \phi_A(\mathsf{hker}(f))$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。令 $\zeta := m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(f)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}$，使得 $\pi = \mathsf{coker}(\zeta)$。由于 $\mathsf{coker}(\zeta)$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射，因此 $\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(\zeta)) : \mathrm{Im}(\zeta) \to A$ 也是 $\mathcal{M}_A$ 中的一个态射；又由于 $\mathsf{and}\, \mu_{\mathrm{Im}(\zeta)}$ and $\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(\zeta)) \otimes \mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f)) &= \mathsf{coker}(m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(f) \otimes \mathrm{Id}_A) - m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)} \otimes \mathrm{Id}_A)) \\
&= \mathsf{coker}(m_A(\zeta \otimes \mathrm{Id}_A)) = \mathsf{coker}(m_A(\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(\zeta)) \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(\zeta)) \otimes \mathrm{Id}_A)) \\
&= \mathsf{coker}(m_A(\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(\zeta)) \otimes \mathrm{Id}_A)) = \mathsf{coker}(\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(\zeta))\mu_{\mathrm{Im}(\zeta)}) \\
&= \mathsf{coker}(\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(\zeta))) = \mathsf{coker}(\zeta) = \phi_A(\mathsf{hker}(f)),
\end{aligned}$$

即 $\phi_A(\mathsf{hker}(f)) = \mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))$。 □

因此，回想一下，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射恰好是满足 $f = \mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))$ 的那些态射 f（见推论 3.14），我们得到以下两个结果:

推论 6.10。 设 A 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。定理 *5.4* 给出的双射对应限制为： A 的子对象中在 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中为核的子对象，与 A 在 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中为商对象且在 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中为正则满态射的商对象之间的双射对应。

推论 6.11。 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射（等价地，余核）都是如 (8) 所示的余等化子。

证明。 由于 $f = \mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))$，由引理 6.9 可得 $f = \phi_A(\mathsf{hker}(f))$，因此根据命题 5.1 的 2)， f 是如 (8) 所示的余等化子。□

正如我们将在下一节看到的，为了使 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意态射都有正则满态射-单态射分解，我们需要 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中所有在 $\mathcal{M}$ 中为满态射（等价地说，为余核）的态射都是像式 (8) 那样的余等化子，而不只是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的余核。

7. $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的正则性

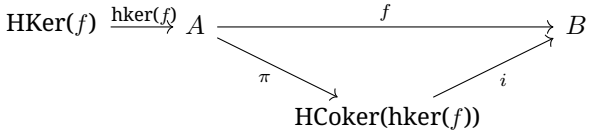
现在，我们用（$\mathcal{M}$， $\otimes$， $\mathbf{1}$， σ）表示一个阿贝尔对称幺半范畴。本节旨在利用定理 5.4 证明 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正则的。根据命题 3.7，我们知道 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是有限完备的。只需证明 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任意态射都可分解为一个正则满态射后接一个单态射，并且 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射在拉回下稳定。为此，我们需要范畴 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 满足一些特殊性质。

7.1. **Hopf() 中态射的分解**。首先，我们考虑 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射的正则满态射—单态射分解。以下结果表明，任何满足条件 coker(ker(f)) 是 (8) 中余等化子的态射 f in Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，都可以按预期进行分解。注意，Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射与余核一致，见推论 3.14。

命题 *7.1.* 设 f 是 *Hopf*$_{\mathrm{coc}}$*(*$\mathcal{M}$*)* 中的一个态射，且 *coker(ker(*f*))* 是 $\mathcal{M}$ 中如 *(8)* 所示的余等化子。则态射 f 可分解为 *Hopf*$_{\mathrm{coc}}$*(*$\mathcal{M}$*)* 中的一个正则满态射，后接 *Hopf*$_{\mathrm{coc}}$*(*$\mathcal{M}$*)* 中的一个单态射。更具体地说，$f = i\pi$ 其中 $\pi :=$ *hcoker(hker(*f*))* $=$*coker(ker(*f*))*，且 $i =$*ker(coker(*f*))*。

证明。 我们已经知道 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是带基点的（引理 3.1）、有限完备的（命题 3.7），并且具有余等化子（命题 4.2）。特别地，Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任意态射都有核和余核。对于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射 f: $A \to B$，我们考虑 hker(f) : HKer(f) $\to A$Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射，以及 $\pi :=$ hcoker(hker(f)) : $A \to$HCoker(hker(f))，它属于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。根据余核的泛性质，存在唯一态射 i : HCoker(hker(f)) $\to B$ Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，使得下图交换：

(15)



根据定义，态射 π 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射。接下来需要证明 i 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射。

考虑 ker(f) : Ker(f) $\to A$，即 $\mathcal{M}$ 中 f 的核，以及它的余核 π':=coker(ker(f)) :$A \to$Coker(ker(f)) in $\mathcal{M}$. 根据引理 6.9，我们知道 hcoker(hker(f)) $= \phi_A$(hker(f))。由于 π' 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射（注 5.6 ），我们有

$$\mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f)) = \phi_A(\mathsf{hker}(f)) \overset{(11)}{=} \phi_A(\mathsf{hker}(\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(f)))) = \phi_A(\mathsf{hker}(\pi')) = \phi_A\psi_A(\pi')$$

在最后一个等式中使用引理 5.7 的 1）。由于 π' 是如 (8) 所示的余等化子，根据定理 5.4，我们得到 hcoker(hker(f)) $=$coker(ker(f))。因此，利用 $\mathcal{M}$ 中 f 的像分解，我们得到 $i =$ ker(coker(f))。这意味着态射 i 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射。由于 i 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射，我们得到 i 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射。□

注 7.2. 如命题 7.1 所证明，对于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射 f，若 coker(ker(f)) 是式 (8) 中的余等化子，则 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中 f 的正则满单分解由 f 在阿贝尔范畴 $\mathcal{M}$中的像分解给出。这意味着该分解在同构意义下是唯一的。

注 7.3. 根据推论 3.14，我们知道 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射与余核一致。我们还指出，如果 $\mathcal{C}$ 是一个同调范畴，则正则满单分解可写为 $f = i$coker(ker(f))，参见例如 [13，命题 4.12]。这支持了我们关于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的结果。

此外，注意对于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射 f，态射 coker(ker(f)) 属于 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$（注 5.6），并且是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。因此，若要使 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任意态射的分解 (15) 与 $\mathcal{M}$ 中的像分解一致，我们需要 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任何在 $\mathcal{M}$ 中为满态射的态射都是式 (8) 中的余等化子。

受前一条评注的启发，我们证明如下结果。

命题 7.4. 设 $\pi : A \to Q$ 是 Comon$(\mathcal{M})$ 中的一个态射，且它在 $\mathcal{M}$ 中是满态射。假设函子 $(-)\square_Q A$ 保满态射且反映满态射。那么，$\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\square_Q\pi$ 在 $\mathcal{M}$中是满态射。因此， π 是 (8)中的余等化子。

证明。 由于 ker(π) $\otimes$ Id$_Q$ 是范畴 $\mathcal{M}$ 中态射 $\pi \otimes$ Id$_Q$ 的核，并且 ($\pi \otimes$ Id$_Q$)(Id$_A \otimes\pi$)$\Delta_A$ker(π) $= \Delta_Q\pi$ ker(π) $= 0$，因此存在唯一态射 $\rho_{\mathsf{Ker}(\pi)}$: Ker(π) $\to$ Ker(π) $\otimes Q$，它属于 $\mathcal{M}$，满足 (ker(π) $\otimes$ Id$_Q$) $\rho_{\mathsf{Ker}(\pi)} =$ (Id$_A \otimes \pi$)$\Delta_A$ker(π)。可以验证，$\rho_{\mathsf{Ker}(\pi)}$ 是 Ker(π)上的右 Q-余作用，因此，考虑 $\mathcal{M}^Q$ 中满足 (Id$_A\otimes\pi$)Δ_A的 A，可知 ker(π)是 $\mathcal{M}^Q$ 中的态射。

此外， A 是 ${}^{Q}\mathcal{M}^{Q}$ 中的一个对象，带有左余模结构 $(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A$，因此 π 成为 ${}^{Q}\mathcal{M}^{Q}$中的一个态射。由于 $({}^{Q}\mathcal{M}^{Q},\ \square_Q,\ Q)$ 是一个幺半范畴，态射 $\mathrm{Id}_A\square_Q\pi$ 和$\pi\square_Q\mathrm{Id}_A$ 属于 ${}^{Q}\mathcal{M}^{Q}$。

令 $\Lambda'_A:\ A\to Q\square_Q A$ 为由 $e_{Q,A}\Lambda'_A=\lambda_A$ =$(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A$确定的 $\mathcal{M}$ 中的典范同构。存在一个态射 $\Delta'_A:\ A\to A\square_Q A$，它属于 $\mathcal{M}$，且满足 $e_{A,A}\Delta'_A=\Delta_A$。考察 $(\Lambda'_A)^{-1}(\pi\square_Q\mathrm{Id}_A):\ A\square_Q A\to A$, 其中 $(\Lambda'_A)^{-1}=(\varepsilon_Q\otimes\mathrm{Id}_A)e_{Q,A}$。容易验证 $(\Lambda'_A)^{-1}(\pi\square_Q\mathrm{Id}_A)\Delta'_A=\mathrm{Id}_A$。因此， $\pi\square_Q\mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个分裂满态射。所以，$\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\square_Q\pi\square_Q\mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个分裂满态射；进而，由于 $(-)\square_Q A$反映满态射，我们得到 $\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\square_Q\pi$ 是 $\mathcal{M}$中的一个满态射。

现在证明 π 是 (8) 中的余等化子。由于

$$\begin{aligned}\pi(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}&=(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_Q\otimes\varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)e_{A,A}\\&=(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_Q\otimes\varepsilon_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}=\pi(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A},\end{aligned}$$

也就是说， π 使这一对态射 $((\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A},(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A})$ 相等，因此只需证明泛性质。假设存在态射 $f:\ A\to Z$ in $\mathcal{M}$，使得 $f(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}=f(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A}$。我们有

$$\begin{aligned}f\mathsf{ker}(\pi)(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}&=f(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)(\mathsf{ker}(\pi)\otimes\mathrm{Id}_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}\\&=f(\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,A}(\mathsf{ker}(\pi)\square_Q\mathrm{Id}_A)\\&=f(\varepsilon_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}(\mathsf{ker}(\pi)\square_Q\mathrm{Id}_A)\\&=f(\varepsilon_A\mathsf{ker}(\pi)\otimes\mathrm{Id}_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}\\&=f(\varepsilon_Q\pi\mathsf{ker}(\pi)\otimes\mathrm{Id}_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}=0.\end{aligned}$$

因为

$$(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}=(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_Q\pi)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}=(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_Q)e_{\mathsf{Ker}(\pi),Q}(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\square_Q\pi),$$

并且，正如预备知识中所述，态射 $(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_Q)e_{\mathsf{Ker}(\pi),Q}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的同构，因此我们得到 $(\mathrm{Id}_{\mathsf{Ker}(\pi)}\otimes\varepsilon_A)e_{\mathsf{Ker}(\pi),A}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。因此，前面的计算推出 $f\mathsf{ker}(\pi)=0$。由 $\pi=\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(\pi))$ 的泛性质，存在唯一态射 $\varphi:\ Q\to Z$ in $\mathcal{M}$，使得 $\varphi\pi=f$。□

我们现在引入以下定义：

定义 7.5. 设 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴。若对于任意属于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的对象 A，以及任意态射 $\pi:A\to Q\in\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$，只要它是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，就有 A 关于 Q 是忠实余平坦的，即 $(-)\square_Q A$ 保持并反映满态射，则称 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ 满足“忠实余平坦条件”。

注 7.6. 这一条件的原型是 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{1},\sigma)$ =$(\mathbf{Vec}_{\Bbbk},\otimes_{\Bbbk},\Bbbk,\tau)$。众所周知，对于任意属于 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 的 A，以及任意商态射 $\pi:\ A\to Q\in\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathfrak{M})$， A 关于 Q 是忠实余平坦的；这一结论已在 [37, 定理 1.3 (2)] 中得到证明。

在余交换性假设下，$(-)\square_Q A$ 保持并反映满态射，当且仅当 $A\square_Q(-)$ 也如此。

引理 7.7。 给定态射 $\pi:\ A\to Q$，属于 $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，则 $\mathrm{Id}_A\square_Q\pi$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，当且仅当 $\pi\square_Q\mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。

因此， $A\square_Q(-)$ 保持并反映满态射，当且仅当 $(-)\square_Q A$ 保持并反映满态射。

证明。 由于 A是余交换的，我们有

$$\begin{aligned}((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)e_{A,A}&=(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A)e_{A,A}=(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes\mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}\Delta_A)e_{A,A}\\&=(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q})(\mathrm{Id}_A\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A)e_{A,A},\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}e_{A,A}\\
&=(\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A\otimes Q}(\mathrm{Id}_A\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A)e_{A,A}\\
&=(\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q})(\sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_A\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A)e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_Q\otimes\sigma_{A,A})(\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma_{A,Q})(\mathrm{Id}_A\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A)e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_Q\otimes\sigma_{A,A})(\sigma_{A,Q}\otimes \mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_Q\otimes\sigma_{A,A})((\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_Q\otimes\sigma_{A,A})((\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
((\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A,A}e_{A,A}&=(\sigma_{Q,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_Q\otimes\sigma_{A,A})((\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\\
&=\sigma_{Q\otimes A,A}((\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_A\otimes(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\sigma_{A,A}e_{A,A}.
\end{aligned}$$

由等化子的泛性质，存在唯一态射 $\xi_{A,A}:\ A\square_Q A\to A\square_Q A$in $\mathcal{M}$，使得 $e_{A,A}\xi_{A,A}=\sigma_{A,A}e_{A,A}$。类似地，存在唯一态射 $\xi_{Q,A}:\ Q\square_Q A\to A\square_Q Q$ in $\mathcal{M}$，使得$e_{A,Q}\xi_{Q,A}=\sigma_{Q,A}e_{Q,A}$；事实上，只需令$\xi_{Q,A}=\Lambda_A(\Lambda'_A)^{-1}$即可立即得到。更确切地说,

$$\begin{aligned}
e_{A,Q}\xi_{Q,A}=&e_{A,Q}\Lambda_A(\Lambda'_A)^{-1}=(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\Delta_A(\varepsilon_Q\otimes \mathrm{Id}_A)e_{Q,A}=(\varepsilon_Q\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\sigma_{A,A}\Delta_A)e_{Q,A}\\
=&\sigma_{Q,A}(\varepsilon_Q\otimes(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)e_{Q,A}=\sigma_{Q,A}((\varepsilon_Q\otimes \mathrm{Id}_Q)\Delta_Q\otimes \mathrm{Id}_A)e_{Q,A}=\sigma_{Q,A}e_{Q,A}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
e_{A,Q}\xi_{Q,A}(\pi\square_Q\mathrm{Id}_A)&=\sigma_{Q,A}e_{Q,A}(\pi\square_Q\mathrm{Id}_A)=\sigma_{Q,A}(\pi\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}=(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)\sigma_{A,A}e_{A,A}\\
&=(\mathrm{Id}_A\otimes\pi)e_{A,A}\xi_{A,A}=e_{A,Q}(\mathrm{Id}_A\square_Q\pi)\xi_{A,A}.
\end{aligned}$$

由于 $e_{A,Q}$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射，我们得到 $\xi_{Q,A}(\pi\square_Q\mathrm{Id}_A)=(\mathrm{Id}_A\square_Q\pi)\xi_{A,A}$。由于 $\sigma_{Q,A}$ 和$\sigma_{A,A}$ 是 $\mathcal{M}$中的同构，可以验证 $\xi_{Q,A}$ 和 $\xi_{A,A}$ 是 $\mathcal{M}$中的同构，因此，若且唯若 $\pi\square_Q\mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$中的满态射，so$\mathrm{Id}_A\square_Q\pi$才是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。□

从现在起，设 $(\mathcal{M},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \sigma)$ 是一个满足“忠实余平坦条件”的阿贝尔对称幺半范畴，参见定义 7.5。借助忠实余平坦条件，我们能够证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意态射都可按命题 7.1 中的方式分解。

命题 7.8。 $\mathit{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的每个态射 $f:\ A\to B$ 都满足：余核(核(f)) 是式(8)中的一个余等化子。

因此，$\phi_A(\mathsf{hker}(f))=\mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))=$余核(核$(f)$)和 f在$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中分解为一个正则满态射（事实上是一个余核），后接一个$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的单态射。

证明。 我们知道，$\pi:=\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(f)):\ A\to\mathrm{Im}(f)$ 是 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的一个态射（注 5.6），并且是 $\mathcal{M}$ 中的一个满态射。因此，根据关于 $\mathcal{M}$的假设，函子 $(-)\square_{\mathrm{Im}(f)}A$ 保满态射且反映满态射。因此，由命题 7.4 可得，π 是式 (8) 中的一个余等化子。由命题 7.1，我们可以得出结论。□

根据命题 7.8，我们可以描述 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射和单态射。为此，我们注意到，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射是单态射，当且仅当它在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的零态射。

引理 7.9。 设 $f:\ A\to B$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射。那么，$f$ 是$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射，当且仅当 $\mathsf{hker}(f)$是$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的零态射，即$\mathsf{hker}(f)=u_A\varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}$。

证明。 假设 f是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射。由于 $f\mathsf{hker}(f)=u_B\varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}=fu_A\varepsilon_A\mathsf{hker}(f)$，我们得到 $\mathsf{hker}(f)=u_A\varepsilon_A\mathsf{hker}(f)=u_A\varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}$。反之，若 f在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核为零，则 $\pi:=\mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f))=\mathsf{hcoker}(u_A\varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)})=\mathrm{Id}_A$，见推论 4.3。因此，由于 $f=i\pi$ 根据命题 7.8，我们得出 $f=i$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射。□

因此，我们得到：

推论 7.10. 以下事实在$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中成立：

1) $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射（等价地，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的余核）与$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中在 $\mathcal{M}$里为满态射的态射一致；2) $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的单态射恰好是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中在 $\mathcal{M}$里为单态射的态射。

证明。 1)。一方面，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的余等化子是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射，且在 $\mathcal{M}$中是满态射，见第 4 节。另一方面，对于$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个态射 f，若它在 $\mathcal{M}$中是满态射，则（15）中给出的分解 $f = i\pi$ 表明 i 在$\mathcal{M}$中是同构。因此， f 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个余等化子。

2). 显然，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中在 $\mathcal{M}$ 中为单态射的态射，在 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中也是单态射。反过来，对于 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的单态射 $f\colon A \to B$，由引理 7.9 可知，$\mathsf{hker}(f) = u_A \varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}$。因此，$\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(f)) = \mathsf{hcoker}(\mathsf{hker}(f)) = \mathsf{hcoker}(u_A \varepsilon_{\mathsf{Hker}(f)}) = \mathrm{Id}_A$，继而有 $f = \mathsf{ker}(\mathsf{coker}(f))$。所以， f 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射。□

7.2. 正则满态射沿拉回的稳定性。 为了证明有限完备范畴 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正则的，尚需证明 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射沿 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任意态射的拉回保持稳定。在本小节中，设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个满足“忠实余平坦条件”的阿贝尔对称幺半范畴，见定义 7.5。

根据 [27, 引理 2.1], $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射在$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中沿任意态射的拉回下稳定这一事实，以下结论等价：

1）给定任意正则满态射 $f\colon A \to B$ 以及$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的任意对象 E，所诱导的箭头$\mathrm{Id}_E \times f\colon E \times A \to E \times B$ 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射；2）$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射在$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中沿分裂单态射的拉回下稳定。

第一个条件显然成立，以下结果对此作出说明：

引理 7.11。设 $f\colon A \to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射，且 E 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个对象。那么，所诱导的箭头 $\mathrm{Id}_E \times f\colon E \times A \to E \times B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射。

证明。 回忆一下，二元积 $E \times A$和 $E \times B$分别由 $E \otimes A$和 $E \otimes B$给出，诱导态射 $\mathrm{Id}_E \times f$为 $\mathrm{Id}_E \otimes f$，见第 3.1 小节。由推论 7.10 的 1)，我们知道 f是 $\mathcal{M}$中的满态射。因此，$\mathrm{Id}_E \otimes f$是 $\mathcal{M}$中的满态射。于是，由推论 7.10 的 1)，$\mathrm{Id}_E \otimes f$是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射。□

因此，剩下要证明的是，$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射沿 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的分裂单态射作拉回后仍然稳定。为此，我们先证明以下结果。

引理 7.12. 设 $p : A \to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，且 $i\colon C \to B$ 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个单态射。我们用 $(p^{-1}(C)\ p_1, p_2)$ 表示 $\mathcal{M}$中的以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C) & \xrightarrow{p_2} & C \otimes A \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle i \otimes \mathrm{Id}_A} \\ A & \xrightarrow[(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A]{} & B \otimes A \end{array} \tag{16}$$

那么， $p^{-1}(C)$ 属于 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，且 p_1 和 p_2 是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的态射。

证明。 我们计算

$$\begin{aligned}(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A m_A(p_1\otimes p_1) &= (p\otimes \mathrm{Id}_A)(m_A\otimes m_A)(\mathrm{Id}_A\otimes \sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(p_1\otimes p_1)\\ &= (m_B\otimes m_A)(p\otimes p\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A\otimes \sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(p_1\otimes p_1)\\ &= (m_B\otimes m_A)(\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_A)(p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)(p_1\otimes p_1)\\ &= (m_B\otimes m_A)(\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{A,B}\otimes \mathrm{Id}_A)(i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(p_2\otimes p_2)\\ &= (m_B\otimes m_A)(i\otimes i\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_C\otimes \sigma_{A,C}\otimes \mathrm{Id}_A)(p_2\otimes p_2)\\ &= (i\otimes \mathrm{Id}_A)(m_C\otimes m_A)(\mathrm{Id}_C\otimes \sigma_{A,C}\otimes \mathrm{Id}_A)(p_2\otimes p_2)\\ &= (i\otimes \mathrm{Id}_A)m_{C\otimes A}(p_2\otimes p_2),\end{aligned}$$

因此，根据拉回的泛性质，存在唯一态射 $m_{p^{-1}(C)}\colon\ p^{-1}(C)\otimes p^{-1}(C)\ \to p^{-1}(C)$，其属于 $\mathcal{M}$，满足 $p_1 m_{p^{-1}(C)}\ = m_A(p_1\otimes p_1)$ 以及 $p_2 m_{p^{-1}(C)}\ = m_{C\otimes A}(p_2\otimes p_2)$。此外，我们有

$$(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A u_A = (p\otimes \mathrm{Id}_A)(u_A\otimes u_A) = u_B\otimes u_A = (i\otimes \mathrm{Id}_A)(u_C\otimes u_A),$$

因此，存在唯一态射 $u_{p^{-1}(C)}\colon\ \mathbf{1}\to p^{-1}(C)$，其属于 $\mathcal{M}$，满足$u_A\ = p_1 u_{p^{-1}(C)}$以及$p_2 u_{p^{-1}(C)}\ = u_{C\otimes A}$。由于 i 是 $\mathcal{M}$中的单态射， $i\otimes \mathrm{Id}_A$ 也是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，进而 p_1 也是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，因为单态射在拉回下保持。然后，利用 p_1 是 $\mathcal{M}$ 中的单态射以及 (A, m_A, u_A) 是 Mon($\mathcal{M}$) 中的一个对象，可以证明 $(p^{-1}(C) m_{p^{-1}(C)}\ u_{p^{-1}(C)})$ 是 Mon($\mathcal{M}$) 中的一个对象，从而 p_1 和 p_2 是 Mon($\mathcal{M}$) 中的态射。注意，由于我们考虑的是阿贝尔幺半范畴，有 $\otimes$ 保持二元积。因此，由于 $\otimes$ 保持等化子，我们有 $\otimes$ 也保持拉回。于是我们在 $\mathcal{M}$ 中得到以下拉回:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C)\otimes A & \xrightarrow{p_2\otimes \mathrm{Id}_A} & C\otimes A\otimes A \\ {\scriptstyle p_1\otimes \mathrm{Id}_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle i\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A}} \\ A\otimes A & \xrightarrow[(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A]{} & B\otimes A\otimes A \end{array}$$

由于$((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes\Delta_A)\Delta_A p_1 = (i\otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_C\otimes\Delta_A)p_2$，存在唯一态射 $\psi\colon\ p^{-1}(C)\ \to p^{-1}(C)\ \otimes A$ 属于 $\mathcal{M}$，使得 $(p_1\otimes \mathrm{Id}_A)\psi\ = \Delta_A p_1$ 且 $(p_2\otimes \mathrm{Id}_A)\psi\ = (\mathrm{Id}_C\otimes\Delta_A)p_2$。此外，以下图表也是 $\mathcal{M}$中的一个拉回:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C)\otimes C\otimes A & \xrightarrow{p_2\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A}} & C\otimes A\otimes C\otimes A \\ {\scriptstyle p_1\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A}} \\ A\otimes C\otimes A & \xrightarrow[(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A}]{} & B\otimes A\otimes C\otimes A \end{array}$$

由于 $\mathrm{Id}_{B\otimes A}\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个单态射，并且

$(\mathrm{Id}_{B\otimes A}\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\Delta_{C\otimes A}p_2 = (\mathrm{Id}_{B\otimes A}\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)(i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})(\mathrm{Id}_C\otimes \sigma_{C,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_C\otimes\Delta_A)p_2 = (\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{B,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(i\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_C\otimes\Delta_A)p_2 = (\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{B,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_B\otimes\Delta_A)(i\otimes \mathrm{Id}_A)p_2 = (\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{B,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_B\otimes\Delta_A)(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (\mathrm{Id}_B\otimes \sigma_{B,A}\otimes \mathrm{Id}_A)((p\otimes p)\Delta_A\otimes\Delta_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes \sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes \sigma_{A,A}\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\sigma_{A,A}\Delta_A p_1 = (p\otimes \mathrm{Id}_A\otimes p\otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A\otimes\Delta_A)\sigma_{A,A}(p_1\otimes \mathrm{Id}_A)\psi = ((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes (p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1)\sigma_{p^{-1}(C)\ A}\psi = ((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes (i\otimes \mathrm{Id}_A)p_2)\sigma_{p^{-1}(C)\ A}\psi = (\mathrm{Id}_{B\otimes A}\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A)((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})(\mathrm{Id}_A\otimes p_2)\sigma_{p^{-1}(C)\ A}\psi$,

我们得到

$$(i \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\Delta_{C\otimes A} p_2 = ((p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes p_2)\sigma_{p^{-1}(C),A}\psi.$$

因此，存在唯一态射 $\psi' : p^{-1}(C) \to p^{-1}(C) \otimes C \otimes A$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $(p_2 \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\psi' = \Delta_{C\otimes A} p_2$ 且 $(p_1 \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\psi' = (\mathrm{Id}_A \otimes p_2)\sigma_{p^{-1}(C)\,A}\psi$。此外，以下图表也是 $\mathcal{M}$中的一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C) \otimes p^{-1}(C) & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes p_2} & p^{-1}(C) \otimes C \otimes A \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes p_1}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes i\otimes \mathrm{Id}_A} \\ p^{-1}(C) \otimes A & \xrightarrow[\mathrm{Id}\otimes(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A]{} & p^{-1}(C) \otimes B \otimes A \end{array}$$

由于

$$(p_1 \otimes \mathrm{Id}_A)\psi = \Delta_A p_1 = \sigma_{A,A}\Delta_A p_1 = \sigma_{A,A}(p_1 \otimes \mathrm{Id}_A)\psi = (\mathrm{Id}_A \otimes p_1)\sigma_{p^{-1}(C),A}\psi,$$

我们得到

$$\begin{aligned} &(p_1 \otimes \mathrm{Id}_{B\otimes A})(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)\psi' = (\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(p_1 \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\psi' \\ =&(\mathrm{Id}_A \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes p_2)\sigma_{p^{-1}(C),A}\psi = (\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes p_1)\sigma_{p^{-1}(C),A}\psi \\ =&(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(p_1 \otimes \mathrm{Id}_A)\psi = (p_1 \otimes \mathrm{Id}_{B\otimes A})(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\psi. \end{aligned}$$

由于 $p_1 \otimes \mathrm{Id}_{B\otimes A}$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射，我们得到 $(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes i \otimes \mathrm{Id}_A)\psi' = (\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\psi$。因此，存在唯一态射 $\Delta_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \to p^{-1}(C) \otimes p^{-1}(C)$，它在$\mathcal{M}$ 中满足 $(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes p_2)\Delta_{p^{-1}(C)} = \psi'$ 且 $(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes p_1)\Delta_{p^{-1}(C)} = \psi$。然后，我们有

$$(p_1 \otimes p_1)\Delta_{p^{-1}(C)} = (p_1 \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes p_1)\Delta_{p^{-1}(C)} = (p_1 \otimes \mathrm{Id}_A)\psi = \Delta_A p_1$$

以及

$$(p_2 \otimes p_2)\Delta_{p^{-1}(C)} = (p_2 \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})(\mathrm{Id}_{p^{-1}(C)} \otimes p_2)\Delta_{p^{-1}(C)} = (p_2 \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes A})\psi' = \Delta_{C\otimes A} p_2.$$

此外，我们定义 $\varepsilon_{p^{-1}(C)} := \varepsilon_A p_1$，它也等于

$$\varepsilon_A p_1 = (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_A)(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_A)(i \otimes \mathrm{Id}_A)p_2 = (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_A)p_2.$$

可以验证，$(p^{-1}(C)\ \Delta_{p^{-1}(C)}\ \varepsilon_{p^{-1}(C)})$ 是 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，因此 p_1 和 p_2 成为 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 中的态射。由于 A 是 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象，我们立即得到 $p^{-1}(C)$ 是 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。最后，我们计算

$$\begin{aligned} (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A S_A p_1 &= (p \otimes \mathrm{Id}_A)(S_A \otimes S_A)\Delta_A p_1 = (S_B \otimes S_A)(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (S_B \otimes S_A)(i \otimes \mathrm{Id}_A)p_2 \\ &= (i \otimes \mathrm{Id}_A)(S_C \otimes S_A)p_2 = (i \otimes \mathrm{Id}_A)S_{C\otimes A} p_2. \end{aligned}$$

因此，存在唯一态射 $S_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \to p^{-1}(C)$ in $\mathcal{M}$，使得 $p_1 S_{p^{-1}(C)} = S_A p_1$，并且 $p_2 S_{p^{-1}(C)} = S_{C\otimes A} p_2$。由于 S_A 是 A 的对极，可以验证 $S_{p^{-1}(C)}$ 是 $p^{-1}(C)$ 的一个对极，而后者因此是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。作为结果，p_1 和 p_2 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射。□

现在我们利用前面的结果，构造 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中沿单态射$i: C \to B \in \mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的态射 $p : A \to B$ 的拉回。

引理 7.13。设 $p : A \to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，且 $i : C \to B$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个单态射。那么，图表

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C) & \xrightarrow{(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2} & C \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ A & \xrightarrow[p]{} & B \end{array} \tag{17}$$

是$\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的一个拉回，其中$(p^{-1}(C)\ p_1, p_2)$ 是按(16)中的定义在 $\mathcal{M}$ 中的拉回。

证明。 根据前一个引理，我们知道 $p^{-1}(C)$是Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中的一个对象，而 p_1, p_2 是Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中的态射。因此，图表(17)位于Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中，且图表可交换:

$$pp_1 = (\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_A)(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A p_1 = (\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_A)(i \otimes \mathrm{Id}_A)p_2 = i(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2.$$

现在，我们证明该泛性质。设有态射 $\alpha : D \to A$ 和 $\beta : D \to C$属于 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$，且满足 $p\alpha = i\beta$。由于 $(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\alpha = (p \otimes \mathrm{Id}_A)(\alpha \otimes \alpha)\Delta_D = (i \otimes \mathrm{Id}_A)(\beta \otimes \alpha)\Delta_D$，根据拉回 $(p^{-1}(C)\ p_1, p_2)$ 的泛性质，存在唯一态射ψ： $D \to p^{-1}(C)$ 属于 $\mathcal{M}$，使得 $p_1\psi = \alpha$ 并且 $p_2\psi = (\beta \otimes \alpha)\Delta_D$。于是，$(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2\psi = (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)(\beta \otimes \alpha)\Delta_D = (\beta \otimes \varepsilon_D)\Delta_D = \beta$。由于 p_1 和 α 是 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 中的态射，且 p_1是一个单态射，可以验证 $\psi : D \to p^{-1}(C)$ 是 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 中的态射。因此，我们可以得出结论。□

注记 7.14. 利用第 3.4 小节中给出的 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 内拉回的描述，可以推出 $p^{-1}(C)$ 同构于 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 中的 $A\square_B C$，其中涉及的 B-余作用为$\rho_A := (\mathrm{Id}_A \otimes p)\Delta_A$ 和 $\lambda_C := (i \otimes \mathrm{Id}_C)\Delta_C$。

利用引理 7.13，我们将证明：满足忠实平坦条件所涵盖的一项技术条件时，Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射沿 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 中的分裂单态射作拉回后仍为正则满态射。为此，我们先证明以下结果。

引理 *7.15.* 设 $p: A \to B$ 是 ***Hopf***$_{coc}$***(*** $\mathcal{M}$***)*** 中的一个态射，且 $i: C \to B$ 是 ***Hopf***$_{coc}$***(*** $\mathcal{M}$***)*** 中的一个单态射。考虑 ***Hopf***$_{coc}$***(*** $\mathcal{M}$***)*** 中的拉回 ***(17)***。那么，$_C \otimes \varepsilon_A$***(Id***$_C \otimes \varepsilon_A$***)***p_2 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，当且仅当存在一个单态射 $\iota : D \to A$，它属于 ***Hopf***$_{coc}$***(*** $\mathcal{M}$***)***，使得 $i =$***ker(coker(***$p\iota$***)***。

证明。 假设 $(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2$ 是 $\mathcal{M}$中的一个满态射。由于 $pp_1 = i(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2$，我们有 ker(coker($pp_1$)) = ker(coker($i$)) = i，因为根据推论 7.10 的 2)，i 是 $\mathcal{M}$ 中的一个单态射。定义 $D := p^{-1}(C)$和 $\iota := p_1$。由于根据引理 7.12，$\iota := p_1$ 是 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中的一个态射，且是 $\mathcal{M}$中的一个单态射，因此根据推论 7.10 的 2)，它是 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中的一个单态射。

反过来，假设存在 Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$中的一个单态射 $\iota : D \to A$，使得$i =$ker(coker($p\iota$))。我们按照引理 7.12，考虑 $\mathcal{M}$ 中态射对 $((p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A,\ i \otimes \mathrm{Id}_A)$的拉回 $(p^{-1}(C)\ p_1,\ p_2)$。由于

$$(i \otimes \mathrm{Id}_A)(\text{余核}(\text{核}(p\iota)) \otimes \iota)\Delta_D = (\text{核}(\text{余核}(p\iota)) \otimes \mathrm{Id}_A)(\text{余核}(\text{核}(p\iota)) \otimes \iota)\Delta_D = (p\iota \otimes \iota)\Delta_D$$
$$= (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\iota,$$

由拉回的泛性质，存在唯一态射 $j : D \to p^{-1}(C)$ in $\mathcal{M}$，使得 $p_1 j = \iota$ and $p_2 j = (\text{余核}(\text{核}(p\iota)) \otimes \iota)\Delta_D$。由于

$$\mathsf{ker}(\mathsf{coker}(p\iota))(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2 j = i(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2 j = pp_1 j = p\iota = \mathsf{ker}(\mathsf{coker}(p\iota))\mathsf{coker}(\mathsf{ker}(p\iota)),$$

我们得到 $(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2 j = \text{余核}(\text{核}(p\iota))$。因此，$(\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_A)p_2$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。 □

以下结果将在命题 7.17 中使用。

命题 7.16。 考虑一个正则满态射 $p: A \to B$ ***in*** Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$ 以及一个单态射 $i: C \to B$ ***in*** Hopf$_{coc}(\mathcal{M})$。设 $\pi := \phi_B(i): B \to Q$ ***in*** 科莫$_{coc}({}_B\mathcal{M})$。那么， πp 是 ***(8)*** 中的余等化子。

证明。 给定 Q 的 B-作用 μ_Q，它自动赋予一个左 A-模结构 $\mu_Q(p \otimes \mathrm{Id}_Q)$。由于 $\pi p m_A = \pi m_B(p \otimes p) = \mu_Q(\mathrm{Id}_B \otimes \pi)(p \otimes p) = \mu_Q(p \otimes \mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_A \otimes \pi p)$，我们得到 $\pi p: A \to Q$ 属于 Comon$_{coc}({}_A\mathcal{M})$。由于 p 是 Comon($\mathcal{M}$) 中的一个态射，因此

$$(\pi \otimes \mathrm{Id}_B)\Delta_B p = (\mathrm{Id}_Q \otimes p)(\pi p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, \quad (\mathrm{Id}_B \otimes \pi)\Delta_B p = (p \otimes \mathrm{Id}_Q)(\mathrm{Id}_A \otimes \pi p)\Delta_A,$$

也就是说， p 是 ${}^Q\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^Q$中的一个态射。因此，我们有一个态射 $p\square_Q p: A\square_Q A \to B\square_Q B$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得$e_{B,B}(p\square_Q p) = (p \otimes p)e_{A,A}$。显然

$$\pi p(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} = \pi(\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)(p \otimes p)e_{A,A} = \pi(\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)e_{B,B}(p\square_B p)$$
$$= \pi(\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)e_{B,B}(p\square_B p) = \pi(\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)(p \otimes p)e_{A,A}$$
$$= \pi p(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A},$$

也就是说， πp 使这一对态射 $((\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}, (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A})$相等。现在，我们验证泛性质。假设有一个态射 $f\colon A \to Z$在 $\mathcal{M}$中，使得 $f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}$。利用态射 $\mathsf{can} := (\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) : A \otimes A \to A \otimes A$，我们有

$(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = (\mathrm{Id}_A \otimes (\pi p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi p \otimes \mathrm{Id}_A)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A)\big)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(p \otimes p \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \Delta_A)\big)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes \sigma_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_A)((p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)\big)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \mathsf{hker}(p))(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Hker}(p)}) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes \sigma_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_A)\big)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A\mathsf{hker}(p))(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Hker}(p)}) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes \sigma_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_A)\big)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes (u_B \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{hker}(p))(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}^{\mathsf{Hker}(p)}) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes \sigma_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_A)\big)(\mathrm{Id}_{A\otimes B\otimes A} \otimes u_B \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes \sigma_{A,B} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{B\otimes A} \otimes u_B \otimes \mathrm{Id}_A)\big)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(m_B \otimes m_A)(\mathrm{Id}_B \otimes u_B \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})\big)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_B \otimes m_A)\big)(\mathrm{Id}_A \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = \big(\mathrm{Id}_A \otimes \pi p \otimes \mathrm{Id}_A\big)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = ((\mathrm{Id}_A \otimes \pi p)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = ((\mathrm{Id}_A \otimes \pi p)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p))$.

因此，由于 $e_{A,A}$ 是 $\mathcal{M}$ 中态射对 $(\mathrm{Id}_A \otimes (\pi p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A, (\mathrm{Id}_A \otimes \pi p)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$ 的等化子，存在唯一态射 $t\colon A \otimes \mathsf{HKer}(p) \to A\square_Q A$in $\mathcal{M}$，使得 $\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = e_{A,A}t$。由于 $f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}$，我们得到 $f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A}t = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A}t$，即

$$f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id})\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = f(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)).$$

左侧为

$f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) = fm_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p))$，而右侧为

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)\mathsf{can}(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) &= f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) \\ &= f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A\mathsf{hker}(p)) = f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)}). \end{aligned}$$

因此，我们有 $f(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)}) = 0$。于是，存在唯一态射$\xi\colon \mathsf{Coker}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)}) \to Z$in $\mathcal{M}$，使得 $f = \xi\mathsf{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)})$。根据命题 7.8，以及由推论 7.10 的 1) 可知 p 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射这一事实，我们有

$$\mathsf{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)}) = \phi_A(\mathsf{hker}(p)) = \mathsf{coker}(\mathsf{ker}(p)) = p,$$

因此 $f = \xi' p$，其中 $\xi' = \xi\zeta\colon B \to Z$ 且 $\zeta\colon B \to \mathsf{Coker}(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \mathsf{hker}(p)) - \mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_{\mathsf{Hker}(p)})$ 是 $\mathcal{M}$ 中的同构。现在，我们有

$$\begin{aligned} \xi'(\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)e_{B,B}(p\square_B p) &= \xi'(\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)(p \otimes p)e_{A,A} = \xi' p(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} = f(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,A} \\ &= f(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A} = \xi' p(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A)e_{A,A} = \xi'(\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)(p \otimes p)e_{A,A} \\ &= \xi'(\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)e_{B,B}(p\square_B p). \end{aligned}$$

由于 $\pi = \phi_B(i)\colon B \to Q$ 是 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_B\mathcal{M})$ 中的一个态射，且是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，根据 $\mathcal{M}$ 上的忠实余平坦条件，我们有 $(-)\square_Q B$ 保持满态射。此外，$\pi p\colon A \to Q$ 是 $\mathsf{Comon}_{\mathsf{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 中的一个态射，并且由于 p是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，πp 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。因此，根据 $\mathcal{M}$ 上的忠实余平坦条件，$A\square_Q(-)$ 保持满态射。由此可得，$p\square_Q p = (p\square_Q \mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\square_Q p)$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。因此，我们得到 $\xi'(\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)e_{B,B} = \xi'(\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)e_{B,B}$。由于根据命题 5.1 的 2)，$\pi = \phi_B(i)$ 是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $((\varepsilon_B \otimes \mathrm{Id}_B)e_{B,B}, (\mathrm{Id}_B \otimes \varepsilon_B)e_{B,B})$ 的余等化子，因此存在唯一态射

$\xi''\colon Q\to Z$ 在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\xi'=\xi''\pi$。由此可得 $f=\xi' p=\xi''\pi p$，且 ξ'' 是 $\mathcal{M}$ 中满足这一性质的唯一态射，因此 πp 是 $\mathcal{M}$ 中这一对态射 $((\varepsilon_A\otimes \mathrm{Id}_A)e_{A,\,A},\ (\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_A)e_{A,\,A})$ 的余等化子。□

现在，只要满足一个技术条件，我们就能够证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射沿 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任何作为 (9) 中所示等化子的单态射作拉回时仍保持正则满态射。

命题 *7.17.* 设 $p:\ A\to B$ 是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个正则满态射，且 $i\colon C\to B$ 是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中一个作为 *(9)* 中所示等化子的单态射。若 $\ker(\mathrm{coker}(p\psi_A(\phi_B(i)p)))$ 是 *(9)* 中所示的等化子，则拉回 *(17)* 中的态射 $(\mathrm{Id}_C\otimes\varepsilon_A)p_2$ 是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射。

证明。 根据推论 7.10 的 1)，我们知道 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射恰好是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中同时也是 $\mathcal{M}$ 中满态射的那些态射，并且拉回 (17) 中的态射 $(\mathrm{Id}_C\otimes\varepsilon_A)p_2$ 属于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。因此，只需证明 $(\mathrm{Id}_C\otimes\varepsilon_A)p_2$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射。根据引理 7.15，这等价于证明存在 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个单态射 $\iota\colon D\to A$，使得 $i=\ker(\mathrm{coker}(p\iota))$。

定义态射 $\pi:=\phi_B(i):\ B\to Q$ in $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_B\mathcal{M})$，并考虑态射$\pi p: A\to Q$ in $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$。我们还定义 $\iota:=\psi_A(\pi p):\ A^{\mathrm{co}Q}\to A$ in $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。由于

$$\begin{aligned}p(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})&=m_B(\mathrm{Id}_B\otimes p\iota)(p\otimes\mathrm{Id}_{A^{\mathrm{co}Q}})-(\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})(p\otimes\mathrm{Id}_{A^{\mathrm{co}Q}})\\&=(m_B(\mathrm{Id}_B\otimes p\iota)-\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})(p\otimes\mathrm{Id}_{A^{\mathrm{co}Q}})\end{aligned}$$

且 $p\otimes\mathrm{Id}_{A^{\mathrm{co}Q}}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，因此我们有

$$\mathrm{coker}(m_B(\mathrm{Id}_B\otimes p\iota)-\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})=\mathrm{coker}(p(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})).\tag{18}$$

回顾一下，$\mathrm{coker}(\ker(p\iota))$ 和 $\ker(\mathrm{coker}(p\iota))$ 属于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，见注 5.6。由于 $\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{coker}(\ker(p\iota))$ 是 $\mathcal{M}$中的满态射，我们有

$$\begin{aligned}&\phi_B(\ker(\mathrm{coker}(p\iota)))=\mathrm{coker}(m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\ker(\mathrm{coker}(p\iota)))-\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{\mathrm{Im}(f)})\\&=\mathrm{coker}(m_B(\mathrm{Id}_B\otimes\ker(\mathrm{coker}(p\iota)))-\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{\mathrm{Im}(f)})(\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{coker}(\ker(p\iota))))\\&=\mathrm{coker}(m_B(\mathrm{Id}_B\otimes p\iota)-\mathrm{Id}_B\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})\overset{(18)}{=}\mathrm{coker}(p(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}))\\&=\mathrm{coker}(p\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}))\mathrm{coker}(\ker(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})))\\&=\mathrm{coker}(p\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}))),\end{aligned}$$

即有如下等式成立

$$\phi_B(\ker(\mathrm{coker}(p\iota)))=\mathrm{coker}(p\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}))).\tag{19}$$

由于态射 $\pi p: A\to Q$ in $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathcal{M})$ 是命题 7.16 中式 (8) 所示的余等化子，利用定理 5.4，我们得到

$$\pi p=\phi_A(\psi_A(\pi p))=\phi_A(\iota)=\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})$$

进而 $\ker(\pi p)=\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}}))$。由此可得

$$p\ker(\pi p)=p\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})).$$

因此，

$$\phi_B(\ker(\mathrm{coker}(p\iota)))\overset{(19)}{=}\mathrm{coker}(p\ker(\mathrm{coker}(m_A(\mathrm{Id}_A\otimes\iota)-\mathrm{Id}_A\otimes\varepsilon_{A^{\mathrm{co}Q}})))=\mathrm{coker}(p\ker(\pi p)).\tag{20}$$

将蛇引理应用于 $\mathcal{M}$ 中的以下交换图表

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Ker}(p) & \xrightarrow{\ker(p)} & A & \xrightarrow{p} & B\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi}\\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow[\mathrm{Id}_Q]{} & Q\end{array}$$

我们得到 $\mathcal{M}$ 中的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}(p) \longrightarrow \mathsf{Ker}(\pi p) \xrightarrow{\tilde{p}} \mathsf{Ker}(\pi) \longrightarrow 0$$

其中， $\tilde{p}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，且 $\ker(\pi)\tilde{p} = p\ker(\pi p)$。这意味着

$$\phi_B(\ker(\mathrm{coker}(p\iota))) \overset{(20)}{=} \mathrm{coker}(p\ker(\pi p)) = \mathrm{coker}(\ker(\pi)\tilde{p}) = \mathrm{coker}(\ker(\pi)) = \pi = \phi_B(i) \tag{21}$$

因为 π 是 $\mathcal{M}$中的满态射。然后，由于 $\ker(\mathrm{coker}(p\iota))$ 和 i是 (9) 中的等化子，应用定理 5.4 可得 $i = \ker(\mathrm{coker}(p\iota))$。□

为了确保前一结果中的技术条件始终成立，我们证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中任何在 $\mathcal{M}$ 中为单态射的态射（等价地，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任何单态射）都是 (9) 中的等化子。以下命题给出了证明，它是命题 7.4 的对偶。

命题 7.18。 设 $i : K \to A$ 是 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的一个态射，它在 $\mathcal{M}$ 中是单态射，并且满足 $(-)\otimes_K A$ 保持并反映单态射。则，$\mathrm{Id}_{\mathsf{Coker}(i)} \otimes_K i$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射。因此， i 是(9)中的等化子。

证明。该 证明是命题 7.4 的证明的对偶。 □

推论 7.19。$\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$中的分裂单态射是式 (9)所示的等化子。

证明。若 $i: K \to A$ 是 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的分裂单态射，则存在一个态射 $\pi : A \to K$，属于 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$，使得 $\pi i = \mathrm{Id}_K$。给定 A 上的左 K-作用 $\mu_A := m_A (i \otimes \mathrm{Id}_A)$，我们有$\pi\mu_A = \pi m_A (i \otimes \mathrm{Id}_A)$ $= m_K (\pi \otimes \pi) (i \otimes \mathrm{Id}_A) = m_K(\mathrm{Id}_K \otimes \pi)$，所以 π 属于 ${}_K\mathcal{M}$。于是，我们可以考虑 $\mathcal{M}$ 中的态射 $\mathrm{Id}_{\mathsf{Coker}(i)} \otimes_K \pi$，并得到 $(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coker}(i)} \otimes_K \pi)(\mathrm{Id}_{\mathsf{Coker}(i)} \otimes_K i) = \mathrm{Id}$。这意味着 $\mathrm{Id}_{\mathsf{Coker}(i)} \otimes_K i$ 是 $\mathcal{M}$ 中的分裂单态射。利用前面的结果可知，$\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 中的分裂单态射总是式 (9) 所示的等化子。□

我们引入以下定义：

定义 7.20。设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴。我们称 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 满足“忠实平坦条件”，如果对于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意对象 A，以及 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意态射 $i : K \to A$，只要它在 $\mathcal{M}$ 中是单态射， A 就在 K 上忠实平坦，即 $(-) \otimes_K A$ 保持并反映单态射。

注 7.21。该条件的原型由 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma) = (\mathsf{Vec}_{\Bbbk}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \tau)$ 给出。众所周知，对于 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk,\ \mathrm{coc}}$ 中的任意 A，以及任意 Hopf 子代数 i: $K \to A$， A 在 K 上忠实平坦；这一结论已在定理 3.1] 中得到证明。

从现在起，设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴，并满足“忠实余平坦条件”（定义 7.5）和“忠实平坦条件”（定义 7.20）。

命题 7.22. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的正则满态射（等价地，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$中的余核）在拉回下稳定。

证明。 由引理 7.11，只需证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射沿分裂单态射的拉回稳定。由推论 7.19 可知，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的分裂单态射是形如 (9) 的等化子。因此，由命题 7.17，对于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的正则满态射 $p : A \to B$ 和 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的分裂单态射 $i : C \to B$，若 $\ker(\mathrm{coker}(p\iota))$ 是形如 (9) 的等化子，则 p 沿 i 的拉回稳定，其中 $\iota = \psi_A(\phi_B(i)p)$。由于 $\ker(\mathrm{coker}(p\iota)) : \mathrm{Im}(p\iota) \to B$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射（注 5.6），且它在 $\mathcal{M}$ 中是单态射，根据对 $\mathcal{M}$ 的假设，$(-) \otimes_{\mathrm{Im}(p\iota)} B$ 保持并反映单态射，因此由命题 7.18，$\ker(\mathrm{coker}(p\iota))$ 是形如 (9) 的等化子。□

作为命题 7.8 和命题 7.22 的推论，我们最终得到：

定理 7.23。 设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”的阿贝尔对称幺半范畴。那么，范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$是正则的。

8. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的半阿贝尔性

从现在起，我们假设 $(\mathcal{M},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \sigma)$ 是一个满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”的阿贝尔对称幺半范畴，因此根据定理 7.23，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正则的。由于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是带基点的（引理 3.1）且为原型模的（命题 3.11），我们得到：

定理 8.1。 范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是同调的。

我们回顾 [33, 3.7]中给出的半阿贝尔范畴的等价刻画：范畴$\mathcal{C}$ 是半阿贝尔的，当且仅当满足以下条件：

1) $\mathcal{C}$ 具有二元积、二元余积和一个零对象；2) $\mathcal{C}$ 具有（分裂）单态射的拉回；3) $\mathcal{C}$ 具有核的余核，且每个核为零的态射都是单态射；4) 分裂短五引理在 $\mathcal{C}$中成立；5) 余核在拉回下稳定；6) 沿余核的核的像是核。

我们证明条件 6) 成立，以此推出范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（Barr）-正则的；进而，由于它具有二元余积，它就是半阿贝尔的。

命题 8.2. 范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（*Barr*）-正则的。

证明。 要证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正合的，还需证明沿余核的核的像是核。更确切地说，我们要证明：给定 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射 $g : X \to Z$ 的核，以及 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中态射 $f : A \to X$ 的余核，存在态射$p : \mathrm{Hker}(g) \to H$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，以及核 $\iota : H \to \mathrm{Hcoker}(f)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \mathrm{Hker}(g) & \xrightarrow{\mathrm{hker}(g)} & X & \xrightarrow{\ g\ } & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{hcoker}(f)} & & \\ H & \xrightarrow[\iota]{} & \mathrm{Hcoker}(f) & & \end{array}$$

由于范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是正则的（定理 7.23），态射 $\mathrm{hcoker}(f)\mathrm{hker}(g) : \mathrm{Hker}(g) \to \mathrm{Hcoker}(f)$ 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中有正则满态射-单态射分解。因此，存在正则满态射 $p : \mathrm{Hker}(g) \to H$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，以及单态射 $\iota : H \to \mathrm{Hcoker}(f)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，使得 $\mathrm{hcoker}(f)\mathrm{hker}(g) = \iota p$。由推论 7.10 的 2)，$\iota$ 是 $\mathcal{M}$中的单态射。根据对 $\mathcal{M}$的假设，我们有 $(-) \otimes_H \mathrm{Hcoker}(f)$ 保持并反映单态射；于是由命题 7.18，ι是（9）中的等化子。因此，由定理 6.8，ι是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核，当且仅当它是正规的。由定理 6.8，$\mathrm{hker}(g)$ 是正规的；而 $\mathrm{hcoker}(f)$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的态射，并且根据推论 7.10 的 1)，它是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，所以由引理 6.4 的 3)，$\ker(\mathrm{coker}(\mathrm{hcoker}(f)\mathrm{hker}(g)))$ 是正规的。由于 p 是 $\mathcal{M}$ 中的满态射，且 ι 是 $\mathcal{M}$中的单态射，我们有 $\ker(\mathrm{coker}(\mathrm{hcoker}(f)\mathrm{hker}(g))) = \ker(\mathrm{coker}(\iota p)) = \ker(\mathrm{coker}(\iota)) = \iota$。因此，$\iota$ 是正规的，故由定理 6.8，它是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核。□

最后，我们得到了本文的主要结果。

定理8.3。设$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴，并满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”。那么，范畴$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是（*Barr*）-正则且同调的。因此，若$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 具有二元余积，则它是一个半阿贝尔范畴。

注 8.4. 若 $(\mathcal{M},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \sigma) = (\mathrm{Vec}_{\Bbbk},\ \otimes_{\Bbbk},\ \Bbbk,\ \tau)$，我们便重新得到任意域 $\Bbbk$ 上余交换 Hopf 代数范畴 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk,\ \mathrm{coc}}$ 的半阿贝尔性，这一结果见 [27，定理 2.10]。正如注 7.6 和注 7.21 中所指出的，阿贝尔对称幺半范畴

$(\mathrm{Vec}_{\Bbbk}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \tau)$ 满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”。当 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ 时，超向量空间范畴 $(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk, \sigma)$ 也满足相同条件，见 [38,定理 3.10 (1) 和 (2)]；对于后者，我们回顾一下：余代数上的余模是内射（余生成元）当且仅当它是（忠实）余平坦的，见 [49, 命题 A.2.1]；对偶地，代数上的模是投射（生成元）当且仅当它是（忠实）平坦的。

此外，对于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\Bbbk})$ 中的任意对象 A，都有 Newman 双射 (1)，其可追溯至 [39],；定理 3.10 (3)] 将其推广到了 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$ 中的任意对象 A。随后，[45, 定理 5.20] 将这一结果推广到了 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的任意对象 A，其中 G 是有限生成阿贝尔群，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。众所周知，$\mathrm{Vec}_G \cong \mathfrak{M}^{\Bbbk G}$，因此自然会考虑双代数（或 Hopf 代数）上的余模范畴 $\mathfrak{M}^H$。

注 8.5. 设 H 为一个双代数（或 Hopf 代数）。众所周知，$(\mathfrak{M}^H, \otimes, \Bbbk)$ 是一个阿贝尔幺半范畴。事实上，正如例如 [3, 例 4.25], 中所述，该范畴是阿贝尔的、幺半的，并且 $X \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes X$ 对任意 $X \in \mathfrak{M}^H$ 都是左正合的。此外，$X \otimes (-)$ 和 $(-) \otimes X$ 对任意 $X \in \mathfrak{M}^H$ 也都是右正合的，因为它们有右伴随，即范畴 $(\mathfrak{M}^H, \otimes, \Bbbk)$ 是闭幺半的；这一事实可由 [35, 推论 V.8] 得出，且伴随函子的显式描述见 [1, 命题 2.3]。事实上，例如从 [31, 定理 1.3.1] 可知，对极并非必需。此外，范畴 $(\mathfrak{M}^H, \otimes, \Bbbk)$ 是对称的，当且仅当 H 是余三角的，也就是说，存在一个卷积可逆态射 $\mathcal{R} : H \otimes H \to \Bbbk$，满足若干公理，参见例如 [36, 定义 2.2.1] 和 [36, 练习 9.2.9]。因此，对于余三角双代数（或 Hopf 代数）$(H, \mathcal{R})$，范畴 $(\mathfrak{M}^H, \otimes, \Bbbk, \sigma^{\mathcal{R}})$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴。为应用定理 8.3，我们需要它满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”。

众所周知，由于 $\mathfrak{M}^H$ 是一个格罗滕迪克范畴，$\mathfrak{M}^H$ 中的满态射与满射的右 H-余线性映射一致。因此，“忠实余平坦条件”可以表述为：对于任意属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathfrak{M}^H)$ 的 A，以及任意属于 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}({}_A\mathfrak{M}^H)$ 的满射 π：$A \to Q$，函子 $(-)\square_Q A : (\mathfrak{M}^H)^Q \to \mathfrak{M}^H$ 保留并反映满态射。在 [20, 命题 1.3], 中已证明，范畴 $(\mathfrak{M}^H)^Q$ 与 $\mathfrak{M}^{H \ltimes Q}$ 同构，其中 $H \ltimes Q$ 是 H 和 Q 的砸积余代数。给定砸积 Hopf 代数 $H \ltimes A$，满射态射 $\mathrm{Id}_H \otimes \pi$：$H \ltimes A \to H \ltimes Q$ 属于 $\mathrm{Comon}({}_{H \ltimes A}\mathfrak{M})$。如注 7.6 所述，对 $H \ltimes Q$ 的 $H \ltimes A$ 忠实余平坦性可通过对 Hopf 代数 $H \ltimes A$ 应用 [37, 定理 1.3 (2)] 得到。为此，我们需要 $H \ltimes A$ 的余根基是余交换的。正如[38, 定理 3.10 (2)], 的证明中指出的，对于 $H = \Bbbk\mathbb{Z}_2$，这是成立的，因为当 $\Bbbk$ 代数闭时，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathfrak{M}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2})$ 中的对象 A 是一个尖点余代数，也就是说，它的所有简单余子代数都是一维的。

确定 H 上满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”的最小条件具有重要意义，但这需要深入且专门的 Hopf 代数工具，超出了本文的范围。我们将在未来对此进行研究。这个问题暂且留作开放问题：

*Que*题：对于任意余半单 Hopf 代数 H，范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathfrak{M}^H)$ 是否为半阿贝尔范畴 ?

定理 8.3 开启了其他有趣的研究方向。事实上，我们回顾一下：文献 [8], 中引入的余交换 Hopf 括号范畴 $\mathrm{HBr}_{\mathrm{coc}}$，已在文献 [26], 中借助 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk\text{的coc}}$ 半阿贝尔性证明为半阿贝尔范畴。因此，利用 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的半阿贝尔性，尝试将 $\mathrm{HBr}_{\mathrm{coc}}$ 的半阿贝尔性推广到辫编织幺半范畴中的余交换 Hopf 括号范畴 $\mathrm{HBr}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，是合理的做法；定义见例如文献 [25, 定义 8]。这里假设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个满足“忠实余平坦条件”和“忠实平坦条件”的阿贝尔对称幺半范畴。这样便能回答文献 [26, 注 5.8] 中提出的问题。

在下一小节中，我们将刻画半阿贝尔范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的阿贝尔对象。因此，从现在起，我们假设 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 满足 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 存在二元余积。

8.1. **阿贝尔对象**。由于半阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 中的阿贝尔对象范畴 Ab($\mathcal{C}$)，即 $\mathcal{C}$ 中的内部阿贝尔群，是阿贝尔范畴 [9, 定理 3.2], ，因此范畴 Ab(Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$) 是阿贝尔范畴。现在我们给出后一个范畴的显式描述。回想一下，半阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 C 是阿贝尔对象，当且仅当态射 $\langle \mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_C\rangle : C \to C \times C$ 是 $\mathcal{C}$ 中的核，见 [15, 命题 9]。

注 8.6. 给定 H in Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，我们知道 $H \times H = H \otimes H$ and $\langle \mathrm{Id}_H, \mathrm{Id}_H\rangle = \Delta_H$。因此，Ab(Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$) 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的全子范畴，其对象 H 满足 Δ_H是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的核；或者，根据定理 6.8，等价地说，满足 Δ_H 是正规的。

为了刻画 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的阿贝尔对象，我们首先证明以下结果。

命题 8.7. 设 A 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。那么， A 是交换的，即$m_A = m_A\sigma_{A,\ A}$，当且仅当 $\mathrm{ad}_A = \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A$。因此，若 A 是交换的，则 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的任意单态射i: $K \to A$ 都是正规的。

证明。 假设 A 是交换的，即 $m_A = m_A\sigma_{A,\ A}$。那么，我们得到

$$\mathrm{ad}_A = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})((\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)((\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$$
$$= m_A(m_A(\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(u_A\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A) = \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A.$$

现在，假设 $\mathrm{ad}_A = \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A$。由于

$$m_A(\mathrm{ad}_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) =$$
$$m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)((\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) =$$
$$m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes \sigma_{A,A})((\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_{A\otimes A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) =$$
$$m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A\otimes A,A})(\mathrm{Id}_A \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)$$
$$(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes (S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes u_A\varepsilon_A)(\mathrm{Id}$$
$$_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = m_A$$

and

$$\mathrm{ad}_A = \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A = m_A(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes u_A) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes u_A)$$
$$= m_A(\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes u_A)\sigma_{A,A} = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes u_A\varepsilon_A)\sigma_{A,A}$$
$$= m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(\mathrm{Id}_A \otimes S_A)\Delta_A)\sigma_{A,A}$$

我们得到

$$m_A = m_A(\mathrm{ad}_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$$
$$= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(\mathrm{Id} \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\sigma_{A,A} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \sigma_{A,A})(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$$
$$= m_A(m_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(\mathrm{Id} \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)\sigma_{A\otimes A,A}(\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)$$
$$= m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_A \otimes m_A(\mathrm{Id} \otimes S_A)\Delta_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A)\sigma_{A,A}$$
$$= m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes m_A(S_A \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A)\sigma_{A,A}$$
$$= m_A(\mathrm{Id}_A \otimes m_A)(\mathrm{Id}_{A\otimes A} \otimes u_A\varepsilon_A)(\mathrm{Id}_A \otimes \Delta_A)\sigma_{A,A}$$
$$= m_A\sigma_{A,A}.$$

因此 $m_A = m_A\sigma_{A,\ A}$，即 A 是交换的。

假设 A 是交换的，因此 $\mathrm{ad}_A = \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A$。给定 Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的一个单态射 i: $K \to A$，我们有 $\mathrm{ad}_A(\mathrm{Id}_A \otimes i) = (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_A \otimes i) = i(\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_K)$。于是，通过定义$\psi := \varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}_K$，图表 (12) 交换。然后 i 是正规的。 □

T下一个技术引理将使我们能够刻画命题 8 中的阿贝尔对象。 9.

引理 8.8. 设 H 属于Hopf$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$。以下等式成立:

$$\mathrm{ad}_{H\otimes H}(\mathrm{Id}_H \otimes u_H \otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}) = \mathrm{ad}_H \otimes \mathrm{Id}_H, \tag{22}$$

其中 $H \otimes H$ 属于 霍普夫$_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$，因为 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是一个对称幺半范畴 .

证明。 我们计算

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_{H\otimes H}(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&= m_{H\otimes H}(m_{H\otimes H}\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H\otimes H,H\otimes H})(\Delta_{H\otimes H}\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&= m_{H\otimes H}(m_{H\otimes H}\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H\otimes H,H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H})\\
&\quad (\Delta_H\otimes\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&= m_{H\otimes H}(m_{H\otimes}{}_H\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H\otimes H,H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H})(\Delta_H\otimes u_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}\ )\\
&= m_{H\otimes H}(m_{H\otimes H}\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes(\sigma_{H,H\otimes H}\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H}))\\
&\quad (\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&= m_{H\otimes H}(m_{\ H\otimes H}\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H,\ H\otimes H}\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H}\otimes u_H)(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}).
\end{aligned}
$$

另一方面，回想起 σ 是一个对称性，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_H\otimes \mathrm{Id}_H\\
&=(m_H\otimes \mathrm{Id}_H)(m_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_H)((\mathrm{Id}_H\otimes S_H)\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})=(m_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\\
&m_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes S_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_H)(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})=(m_H\otimes m_H)(\\
&m_H\otimes S_H\otimes \mathrm{Id}_H\otimes u_H)(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H,H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H,H})\ (\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_H)(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&=(m_H\otimes m_H)(m_H\otimes S_H\otimes \mathrm{Id}_H\otimes u_H)(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H,H})(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})=(\\
&m_H\otimes m_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_H)(m_H\otimes \mathrm{Id}_H\otimes S_H\otimes u_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})\\
&= m_{H\otimes H}(m_H\otimes \mathrm{Id}_H\otimes S_H\otimes S_H u_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})= m_{H\otimes H}(m_H\otimes m_H(\\
&u_H\otimes \mathrm{Id}_H)\ \otimes S_H\otimes S_H u_H)(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})= m_{H\otimes H}(m_H\otimes m_H\otimes S_H\otimes S_H)\\
&(\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H}\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H})(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H}\otimes u_H)\ (\mathrm{Id}_H\otimes \sigma_{H,H\otimes H})(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H})
\end{aligned}
$$

$$
= m_{H\otimes H}(m_{H\otimes H}\otimes S_{H\otimes H})(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes \sigma_{H,\ H\otimes H}\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H\otimes H}\otimes u_H)(\Delta_H\otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}),
$$

因此得证。□

我们用 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc},\ \mathrm{com}}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中交换且余交换 Hopf 幺半群构成的范畴。最终得到以下结果。

命题 8.9。 范畴 $\mathsf{Ab}(\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 恰好是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc},\ \mathrm{com}}(\mathcal{M})$。

证明。 由注 8.6 可知，$\mathsf{Ab}(\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的全子范畴，其对象 H 满足 Δ_H 是正规单态射。

若 H 属于 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc},\ \mathrm{com}}(\mathcal{M})$，也就是说它是交换的，那么 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 中的对象 $H\otimes H$ 也是交换的，因为 $\mathcal{M}$ 中的交换幺半群构成一个幺半范畴（因为 $(\mathcal{M},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \sigma)$ 是一个对称幺半范畴）。因此，由命题 8.7 可得 $\Delta_H\colon H\to H\otimes H$ 是正规态射。于是，H 是 $\mathsf{Ab}(\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 中的一个对象。

若 H 属于 $\mathsf{Ab}(\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$，即 $\Delta_H\colon H\to H\otimes H$ 是正规的，则存在一个态射 $\psi\colon H\otimes H\otimes H\to H$ 属于 $\mathcal{M}$，使得 $\Delta_H\psi=\mathrm{ad}_{H\otimes H}(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes\Delta_H)$。我们有

$$
(\mathrm{ad}_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes\Delta_H)\overset{(22)}{=}\mathrm{ad}_{H\otimes H}(\mathrm{Id}_{H\otimes H}\otimes\Delta_H)(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes\mathrm{Id}_H)\ =\Delta_H\psi(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes\mathrm{Id}_H)\tag{23}
$$

因此，由于 ad_H 是余单位的，我们得到

$$
\begin{aligned}
\psi(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_H)&=(\varepsilon_H\otimes \mathrm{Id}_H)\Delta_H\psi(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes \mathrm{Id}_H)\overset{(23)}{=}(\varepsilon_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{ad}_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes\Delta_H)\\
&=(\varepsilon_H\otimes\varepsilon_H\otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes\Delta_H)=\varepsilon_H\otimes \mathrm{Id}_H.
\end{aligned}
$$

但我们也有

$$
\mathrm{ad}_H\ =(\mathrm{Id}_H\otimes\varepsilon_H)(\mathrm{ad}_H\otimes\mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H\otimes\Delta_H)\overset{(23)}{=}(\mathrm{Id}_H\otimes\varepsilon_H)\Delta_H\psi(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes\mathrm{Id}_H)\ =\psi(\mathrm{Id}_H\otimes u_H\otimes\mathrm{Id}_H).
$$

因此，我们得到 $\mathrm{ad}_H=\varepsilon_H\otimes\mathrm{Id}_H$。因此，根据命题 8.7，$H$是交换的。因此，它是 $\mathsf{Hopf}_{\mathrm{coc},\ \mathrm{com}}(\mathcal{M})$ 中的一个对象。□

在上一小节中，我们讨论范畴 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的半阿贝尔性的一个有趣应用。

8.2. 作用可表示性。 利用 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是一个半阿贝尔范畴这一点，我们得到它的一个重要特征，即它是作用可表示的（依照 [19] 的定义）。首先回顾一下这一性质的含义。

半阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 若满足以下条件，则称为作用可表示 [19]: 对于 $\mathcal{C}$ 中任意对象 X，存在一个以 X 为核的分裂扩张

$$X \xrightarrow{\ker(\alpha)} \overline{X} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} [X]$$

使得对于 $\mathcal{C}$ 中任意另一个以 X 为核的分裂扩张，

$$X \xrightarrow{\ker(p)} A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} B$$

存在唯一的（在同构意义下）态射 $f : B \to [X]$，属于 $\mathcal{C}$（进而存在唯一态射$g : A \to X$，属于 $\mathcal{C}$），使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\ker(p)} & A & \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[\ker(\alpha)]{} & \overline{X} & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} & [X] \end{array}$$

为了证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的作用可表示性，我们考虑闭幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$。回顾一下，依照 [42],，这些范畴总是可容许的，见 [42, 第 2] 页的注 1。我们得到以下结果：

命题 8.10. 范畴 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是作用可表示的，前提是$(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, \sigma)$ 是闭幺半的。

证明。 根据 [42, §3.2 命题], , 范畴 $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是笛卡尔闭的，因为 $\mathcal{M}$是幺半闭的。根据 [19, 定理 4.4]，笛卡尔闭范畴中的内群总是作用可表示的，前提是它是半阿贝尔的。于是，由于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathbf{Grp}(\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$ 根据定理 8.3 是半阿贝尔的，我们便得到了所述结论。□

注 8.11. 由于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) = \mathbf{Grp}(\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}))$，且 $\mathbf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是笛卡尔闭的，根据 [28], 的意义，利用[28, 命题 5.3], , 我们还可得出 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是局部代数笛卡尔闭的；再根据 [21, 定理 4.5]，它在 [21], 的意义下也是代数相干的。

半阿贝尔范畴为发展交换子理论方法提供了良好的范畴框架，并提出了半直积 [18], 内作用 [19]和交叉模 [32]的自然概念。未来值得研究 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 的这些特征，从而推广 [27]和 [46]中分别针对 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_{\Bbbk})$ 和 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 得出的相应结果。

致谢。 作者感谢 A. Ardizzoni 就这一主题展开的精彩讨论。本文写作期间，作者是“国家代数与几何结构及其应用研究组”（GNSAGA-INdAM）的成员。A. Sciandra 获得了布鲁塞尔自由大学的博士后奖学金，该奖学金属于 PDR 项目“从表示范畴上的闭结构和幺半结构重构模与代数对象”框架，由 FNRS 资助，资助编号为 T.0318.25F（首席研究员 Joost Vercruysse）。Z. Zuo 诚挚感谢 CSC（中国国家留学基金管理委员会）通过博士生奖学金（编号 202406190047）提供的支持。本研究部分ſðšu欧盟 NextGenerationEU 在 NRRP 下资助的项目支持，该项目属于任务4、组成部分2，编号为 CUP D53D23005960006；同时ſðšu意大利大学与研究部于2022年2月2日发布的 PRIN 2022 第104号征集项目支持；以及项目 2022S97PMY“拟群、代数与表示的结构”（SQUARE）的支持。

参考文献

[1] P. Aschieri，T. Weber，量子群上的度量相容性与 Levi-Civita 联络。《代数杂志》661（ 2025 479 544 36 ）–。M. Aguiar，内范畴与量子群。博士论文，康奈尔大学，ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1997。3[2][3] A. Ardizzoni，幺半范畴中的楔积与余张量余代数。《代数与表示论》11（ 2008 5, 461 496 36 ），第–号。A. Ardizzoni，C. Menini，D. Ştefan，幺半范畴中的霍赫希尔德上同调与“光滑性”。《纯粹与应用代数杂志》 208 2007 1, 297 330 4 [4]（），第–号。A.L. Agore，A.S. Gordienko，J. Vercruysse，局部始对象与泛（余）作用 Hopf 代数的提升。《数学进展》 479 2025 110442, 68 11 （），B辑，论文编号 pp。J. Adámek，J. Rosický，[5]《局部可表示与可达范畴》，伦敦数学学会数学讲义丛书，第189卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。7[6][7] M. Aguiar，S. Mahajan，《幺半函子、物种与霍普夫代数》。Kenneth Brown、Stephen Chase 与 André Joyal 作序，CRM专著丛书，第29卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010。4，5[8] I. Angiono，C. Galindo，L. Vendramin，霍普夫括号与杨–巴克斯特算子，《美国数学会会刊》145（5）（ 2017 1981 1995 36 ）–。M. Barr，《正合范畴》，施普林格《数学讲义》，第 236, 1971, 1 120 2, 37 卷，pp。–。[9]Yu. N. Bespalov，辫范畴中的交叉模与量子群，《范畴结构及其应用》5（1997），第2号，155–204。7[10][11] Yu. N. Bespalov，B. Drabant，辫幺半范畴中的霍普夫（双）模与交叉模，《纯粹与应用代数杂志》 123 1998 1 3, 105 129, 7 （），第–号。F. Borceux，《范畴代数手册》。1. 基础范畴论，数学及其应用百科全书，第50卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。3，6，7，8[12][13] F. Borceux，D. Bourn，《Mal’cev、原型模、同调与半阿贝尔范畴》。数学及其应用，第566卷，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，2004。3，7，25[14] D. Bourn，正规化等价、核等价与仿射范畴。载于《范畴论》（科莫， 1990 1488 1991， 43 62 2 ），《数学讲义》，第[15][16] 卷，施普林格，柏林，pp。–。D. Bourn，原型模范畴中的正规子对象与阿贝尔对象，《代数杂志》228（2000）143–164。37+106 D. Bourn，《从群到范畴代数》。Compact Textb. Math.，Birkhäuser/Springer，查姆，2017，xii[17] pp。6，7 2004, 165 211 7 D. Bourn，M. Gran，正则、原型模与阿贝尔范畴。《数学应用百科全书》97，[18]剑桥大学出版社，剑桥，[19] –。D. Bourn，G. Janelidze，原型模性、下降与半直积。《范畴理论与应用》4（1998）37–46。1，39[20] F. Borceux，G. Janelidze，G. M. Kelly，内对象作用。《查理大学数学评论》46（2）（2005）235–255。1，39 24 1996 1649 1677 36 S. Caenepeel，S. Dascalescu，S. Raianu，在余代数上余作用的余半单 Hopf 代数，《代数通讯》 2015 1864 1905 39 （），–。A.S. Cigoli，J.R.A. Gray，T. Van der Linden，代数相干范畴，《范畴理论与应用》30（54）[21]（ 24 2016 269 282 1 ）–。M. Gran，G. Kadjo，J. Vercruysse，余交换 Hopf 代数范畴中的挠理论。《范畴结构及其应用》[22] 76 2024 3, 830 880 19 （）–。L. El Kaoutit，A. Ghobadi，P. Saracco，J. Vercruysse，霍普夫代数胚的对应定理及其在仿射群胚中的应用。《加拿大数学杂志》[23] 77 2025 1, 347 350 19 （），第–号。L. El Kaoutit，A. Ghobadi，P. Saracco，J. Vercruysse，“霍普夫代数胚的对应定理及其在仿射群胚中的应用”的补遗。《加拿大数学杂志》[24] *1* 48 2 2024 248 266 36 （），第–号。J.M. Fernández Vilaboa，R. González Rodríguez，B. Ramos Pérez，A.B. Rodríguez Raposo，不可逆[25] 690 2026 266 303 36 -余循环上的模，《土耳其数学杂志》（） （）–。M. Gran，A. Sciandra，霍普夫括号与半阿贝尔范畴。《代数杂志》[26] 223 10 2019 4171 4190 1, 2, 5, 28, 35, 39 （），–。M. Gran，F. Sterck，J. Vercruysse，Takeuchi 定理的一个半阿贝尔推广，《纯粹与应用代数杂志》[27] 20 2012 543 567 39 （） （）–。247 J.R.A. Gray，一般范畴中的代数指数化，《范畴结构及其应用》[28] 2020， +582 7, 20 （）–。I. Heckenberger，H.-J. Schneider，霍普夫代数与根系。《数学调查专著》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯， 3 115 2017 5, 1118 1148 7, 11 xix pp。M. Hyland，I. López Franco，C. Vasilakopoulou，霍普夫测量余幺半群与富化。《伦敦数学学会会刊》[29]（ 2004 36 ）（），第–号。M. Hovey，霍普夫代数胚上余模的同伦论，载于《同伦论：与代数几何、群上同调和代数K理论的关系》（伊利诺伊州埃文斯顿，2002），261–304页，《当代数学》，第346卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，。G. Janelidze，内交叉模。《格鲁吉亚数学杂志》10（1）（2003）99–114。1，[30][31][32]39

[33] G. Janelidze、L. Márki、W. Tholen，半阿贝尔范畴，载于：《范畴论 1999》（科英布拉），《纯粹与应用代数杂志》 168 2 3 2002 367 386 1, 3, 35 (–) ( ) – 。U. Krähmer、M. Mahaman，由余幺半群构造克隆。《阿根廷数学联盟杂志》 [34] (2024 5 ）。S. Mac Lane，工作 [35] 5 数学家的范畴。第二版，数学研究生教材，施普林格出版社，纽约，1998年。xii+314页。3、11、36 [36] 1995 36 S. Majid，量子群理论基础，剑 [37] 144 1991 2, 451 466 桥大学出版社，剑桥，。A. Masuoka，关于具有余交换余根基的 *Hopf* 代数。《代数杂志》（），第 – 期。 26, 36 [38] A. Masuoka，超仿射群 与超形式群中的基本对应，《纯粹与应用代数杂志》 202 1 3 2005 284 312 36 (–) ( ) – 。K. Newman，余交换 *Hopf* 代数中双理 [39] 想与子霍普夫代数之间的对应，《代数杂志》 36 1 1975 1 15 2, 11, 15, 19, 36 ( ) ( ) – 。H-E. Porst，霍普夫代数形式理论第一部 [40] 分：幺半范畴中的霍普夫幺半群，Quaest. Math. 38 5 2015 631 682 11 ( ) ( ) – 。H-E. Porst，霍普夫代数的泛构造，《纯粹与应用代数杂 [41] 志》 212 11 2008 2547 2554 6, 7 ( ) ( ) – 。H.-E. [42] 31 2008 127 139 Porst，关于幺半群、余幺半群和双幺半群的范畴，Quaest. Math. ( ) – 。 7, 39 [43] 34 2019 456 467 H.-E. Porst，幺半群的余 5, 11 极限。Theory Appl. Categ. ( )，– 。[44] P. Saracco，关 于霍普夫代数胚中理想余理想与余模子环之间的伽罗瓦型对应的一点说明。《比利时数学会 Simon Stevin 通报》 30 2023 5, 668 682 19 ( )，第 – 期。A. Sciandra，颜色 *Hopf* 代数的半阿贝尔 [45] 条件。《纯粹与应用代数杂志》228 (2024)，第9期，论文编号107677，34页。1、2、5、19、36 [46] 2023 2312 00156 39 A. Sciandra，颜色 *Hopf* 代数的 [47] 22 2023 交换子与交叉模( )，arXiv: 。F. Sterck，余交换双代数范畴的 *S*-原型模性。《代数与应用杂志》( )，第12期，论文编号2350252，27页。5、7 [48] M. Takeuchi，*Hopf* 理想与子霍普夫代数之间的对应，Manuscr. Math. 7 (1972) 252–270。1、34 [49] 5 1977 1483 1528 36 M. Takeuchi，域上的形式概形。《代数通讯》( ) – 。 [50] J. Vercruysse，霍普夫代数——变体概念与重构定理。载于《量子物理与语言学：组合式图示论述》。牛津大学出版社， 02 2013 16, 18 。H. Yanagihara，关于形式群的同构定理。 [51] 55 1978 341 347 1 《代数杂志》( ) – 。[52] H. Yanagihara，关 0 于余交换 *Hopf* 代数的群论性质。《广岛数学杂志》9 (1979) 179–200。

1 布鲁塞尔自由大学数学系，凯旋大道，B-105 Bruxelles，比利时电子邮件地址：andrea.sciandra@ulb.be网址：www.andreasciandra.com 都灵大学，“G. Peano”数学系，卡洛·阿尔贝托街10号，I-10123 都灵

，

意大利电子邮件地址：zhenbang.zuo@edu.unito.it